



M. Lefranc, C. Letellier & L. Pastur  
Éditeurs

*Poincaré*

---

Comptes-Rendus de la 10<sup>e</sup>  
Rencontre du Non-Linéaire  
Paris 2007

---



Institut Henri Poincaré

Non-Linéaire Publications

**Non Linéaire Publications**

Bât. 510 Université de Paris-Sud, 91405 Orsay cedex

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>

La loi du 11 Mars 1957 n'autorise que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective ». **Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'éditeur est illicite.** Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

**Dépôt légal** : Mars 2007

**ISBN 2-9516773-6-7**

**EAN 9782951677364**

## RENCONTRES DU NON LINÉAIRE

Institut Henri Poincaré, PARIS

14-16 Mars 2007

**Nous remercions vivement Michel Broué, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, pour son aide à l'organisation de ces *Rencontres* ainsi que les départements MPPU et ST2I du CNRS, le GdR 2489 DYCOEC et la Délégation Générale à l'Armement pour leur soutien financier.**

Le comité scientifique est composé de :

Béregère DUBRULLE	SPEC/CEA Saclay
Bastien FERNANDEZ	CPT — Marseille
Josselin GARNIER	LPMA — Paris 7
Jean-Christophe GÉMINARD	Lab. Physique — ENS Lyon
Patrice LE GAL	IRPHE — Marseille
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Stéphane METENS	MSC — Paris 7
Emmanuel PLAUT	LEMTA — Nancy
Marc RABAUD	FAST — Orsay
Stefania RESIDORI	INLN — Nice
Massimo VERGASSOLA	Institut Pasteur — Paris

Les *Rencontres annuelles du Non Linéaire* sont organisées par :

Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Christophe LETELLIER	CORIA — Rouen
Luc PASTUR	LIMSI — Orsay

Le Colloque *Ondes non linéaires : quoi de neuf?* est organisé par :

Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Stéphane METENS	MSC — Paris 7
Emmanuel PLAUT	LEMTA — Nancy

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

*Non Linéaire Publications*  
Bât. 510, Université de Paris-Sud, 91495 Orsay cedex

Toutes les informations concernant les *Rencontres* sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>

Renseignements :

[snl@nonlineaire.univ-lille1.fr](mailto:snl@nonlineaire.univ-lille1.fr)



## Préface

Il y a maintenant 10 ans, ROLAND RIBOTTA constata qu'au sein de communautés scientifiques très différentes, de l'hydrodynamique à l'optique non linéaire et des mathématiques à l'électronique et à la biophysique, etc. œuvraient des chercheurs dont les travaux se regroupaient naturellement sous le terme de « sciences du non-linéaire ». Or, ces disciplines interagissaient peu, voire pas du tout. Pour combler cette lacune, il fallait une manifestation scientifique construite autour de cette trans-disciplinarité, mettant en avant les outils et les méthodes de la science non linéaire plutôt qu'un objet d'étude particulier. Avec YVES POMEAU et quelques autres, ROLAND RIBOTTA a eu le mérite d'identifier cette nécessité, et d'y apporter une réponse en mettant sur pied les Rencontres du Non-Linéaire. Ces dernières ont été toujours marquées par une grande liberté d'esprit, et la volonté constante de les rendre accessibles à quiconque avait un lien avec le non-linéaire, ainsi que de donner toute leur place aux jeunes chercheurs présentant leurs premiers travaux.

Dès le début, ces Rencontres ont connu un vif succès, et ont constamment maintenu un niveau de qualité et une notoriété qui vont bien au-delà d'une simple manifestation nationale. Le terme fédérateur de « sciences non linéaires » s'est imposé comme une évidence, avec une légitimité aujourd'hui reconnue.

Homme intègre et franc, au parler vrai, d'une sensibilité pudique, puriste dans sa vie comme dans son œuvre, ROLAND RIBOTTA termine cette année une carrière de chercheur rigoureux et persévérant, d'expérimentateur de grande qualité, au savoir étendu. Ceux qui ont travaillé avec lui retiendront sa clairvoyance et une grande générosité d'âme, sans concession, sans jugement a priori, et sans snobisme.

En ce dixième anniversaire des Rencontres du Non-Linéaire, les membres du Comité des Rencontres souhaitent rendre un hommage à ROLAND RIBOTTA, et à travers lui, à tous ceux qui sont à l'origine de ces Rencontres, qui perdurent encore aujourd'hui grâce à leur dévouement et à l'énergie qu'ils ont bien voulu leur consacrer.



## Table des matières

<b>Seuils d'écoulement et dynamique d'une couche granulaire vibrée horizontalement</b> <i>Sébastien Aumaître, Conor Puls, Jim N. McElwaine, Jerry P. Gollub</i> . . . . .	1
<b>Contrôle d'une interaction onde-particules par une onde-test</b> <i>Romain Bachelard, Cristel Chandre, Duccio Fanelli, Xavier Leoncini</i> . . . . .	7
<b>Création d'un peigne de fréquences de longueur d'onde centrale accordable à partir d'ondes continues</b> <i>Benoit Barviau, Christophe Finot, Julien Fatome et Guy Millot</i> . . . . .	13
<b>Écoulement turbulent dans un cylindre : haut nombre de Reynolds et fluctuations à basse fréquence</b> <i>Michaël Berhanu, Nicolas Mordant, Stephan Fauve</i> . . . . .	19
<b>Auto-organisation et chaos spatio-temporel pour un modèle proie-prédateur avec diffusion</b> <i>Baba Issa Camara, M.A. Aziz Alaoui</i> . . . . .	25
<b>Dynamique non linéaire du modèle neuronal de Hindmarsh-Rose et synchronisation</b> <i>Nathalie Corson, M. A. Aziz-Alaoui</i> . . . . .	31
<b>Global topology of chaotic attractors</b> <i>Robert Gilmore</i> . . . . .	37
<b>Variété Invariante Intégrale de Systèmes Dynamiques</b> <i>Ginoux Jean-Marc, Rossetto Bruno</i> . . . . .	49
<b>Dynamiques non linéaires expérimentales à retard et à temps discret</b> <i>Mélanie Grapinet, Laurent Larger, Pierre-Ambroise Lacourt, Vladimir Udaltsov</i> . . . . .	55
<b>Température effective d'un gel colloïdale de Laponite</b> <i>Pierre Jop, Artyom Petrosyan, Sergio Ciliberto</i> . . . . .	61
<b>Instabilité de solutions semi-diluées ou diluées de polymères dans un écoulement de Couette-Taylor : suppression des harmoniques de couplage.</b> <i>F. Kelai, O. Crumeyrolle, I. Mutabazi</i> . . . . .	67
<b>Thermalisation de paquets d'ondes incohérents</b> <i>Silvère Lagrange, Stéphane Pitois, Hans Rudolf Jauslin &amp; Antonio Picozzi</i> . . . . .	73
<b>Dynamo Taylor-Couette en géométrie finie</b> <i>R. Laguerre, A. Ribeiro, C. Nore, J. Léorat, J.-L. Guermont</i> . . . . .	79

<b>Bifurcation d’enveloppe d’un oscillateur optoélectronique micro-onde à retard, à haute pureté spectrale</b> <i>L. Larger, Y. Chembo, T. Erneux, H. Tavernier, R. Bendoula, P. Colet, E. Rubiola</i> .....	85
<b>Effets de la force de Coriolis sur l’instabilité elliptique en géométries cylindrique et sphérique</b> <i>Michael Le Bars, Stéphane Le Dizès, Patrice Le Gal</i> .....	89
<b>Étude théorique d’ondes de Rossby thermiques non linéaires en géométrie sphérique : influence du mode de chauffage</b> <i>Lebranchu Yannick, Plaut Emmanuel, Simitev Radostin, Busse Friedrich</i> .....	95
<b>Instabilités secondaires et structures cellulaires de canaux ioniques</b> <i>M. Leonetti, M. Georgelin, M. Jaeger, F. Homblé</i> .....	101
<b>Reconstruction phénoménologique de systèmes complexes forcés</b> <i>Delphine Lejri, Jean-Marc Malamsoma</i> .....	105
<b>Influence d’un gradient de température dans le système de Couette-Taylor</b> <i>V. Lepiller, R. Guillermin, A. Prigent, I. Mutabazi</i> .....	111
<b>Robustesse d’une reconstruction du portrait de phase et observabilité</b> <i>Christophe Letellier, Robert Gilmore, Luis A. Aguirre</i> .....	117
<b>Écoulement de Couette plan transitionnel : phénomène critique ou désenchevêtrement homocline ?</b> <i>Paul Manneville</i> .....	123
<b>Etats stationnaires, théorèmes de fluctuation-dissipation et température effective dans un écoulement de von Karman turbulent</b> <i>R. Monchoux, P.-H. Chavanis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle</i> .....	127
<b>Oscillateurs génétiques simples. Application à l’horloge circadienne d’une algue unicellulaire</b> <i>Pierre-Emmanuel Morant, Constant Vandermoere, Quentin Thommen, Benjamin Parent, François Lemaire, Florence Corellou, Christian Schwartz, François-Yves Bouget, Marc Lefranc</i> .....	131
<b>Extraction des zones d’intérêt d’une image à l’aide d’un réseau cellulaire non linéaire</b> <i>B. Nofiele, S. Morfu, P. Marquié</i> .....	137
<b>Caractérisation expérimentale de la compétition non-linéaire de modes de Kelvin-Helmholtz dans un écoulement en cavité</b> <i>R. Pethieu, L. R. Pastur, F. Lusseyran, Th. M. Faure</i> .....	143
<b>Effet tunnel optiques</b> <i>Yves Pomeau, Martine Le Berre</i> .....	149
<b>Etude d’une dynamo expérimentale Bullard-Von Kármán</b> <i>N. Plihon, R. Volk, M. Bourgoïn, J.-F. Pinton</i> .....	155
<b>Cohérence des branchements dendritiques en solidification directionnelle</b> <i>Alain Pocheau, Simona Bodea, Marc Georgelin</i> .....	161
<b>Dynamique d’un laser soumis à une conduite asymétrique — effet de ”cliquet”</b> <i>Cristina Elena Preda, Bernard Ségard, Pierre Glorieux</i> .....	167



**Grandes déviations et chaoticité : étude à l'aide d'une dynamique biaisée**  
*Julien Tailleur, Jorge Kurchan*..... 173

**Influence de l'injection optique dans les processus de synchronisation entre lasers :  
similarité et bistabilité**  
*Olivier Vaudel, Pascal Besnard* ..... 179

**Index** ..... 185



# Seuils d'écoulement et dynamique d'une couche granulaire vibrée horizontalement

Sébastien Aumaitre<sup>1</sup>, Conor Puls<sup>2</sup>, Jim N. McElwaine<sup>3</sup>, & Jerry P. Gollub<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup> SPEC/DRECAM/DSM, CEA-Saclay Orme-les-Merisiers, F-91191 Gif-sur-Yvette

<sup>2</sup> Physics Department, Haverford College, Haverford PA 19041 —USA—

<sup>3</sup> University of Cambridge, Cambridge CB2 1TN, —UK—

<sup>4</sup> Physics Department, University of Pennsylvania, Philadelphia PA 19104 —USA—

sebastien.aumaitre@cea.fr

**Résumé.** Un forçage oscillant horizontalement est utilisé pour sonder la rhéologie complexe d'une couche granulaire peu profonde. Bien que le comportement dépende du protocole de mesure, différents seuils pour l'initialisation et l'arrêt de l'écoulement ont été à chaque fois mis en évidence, et cela a été aussi noté pour les seuils d'avalanche. A basses fréquences, la variation par rapport à la profondeur de l'accélération critique adimensionnée engendrant l'écoulement pour la cellule oscillante, est semblable à la quantité correspondante mesurée dans des avalanches créées dans le même récipient. Une fois le mouvement initié, la rhéologie du matériel s'avère changer de manières étonnantes avec le temps, pendant les cycles d'excitation. Pour finir, nous considérons les profils de vitesse de l'écoulement à la surface libre de la cellule, et également en fonction de la profondeur de la couche.

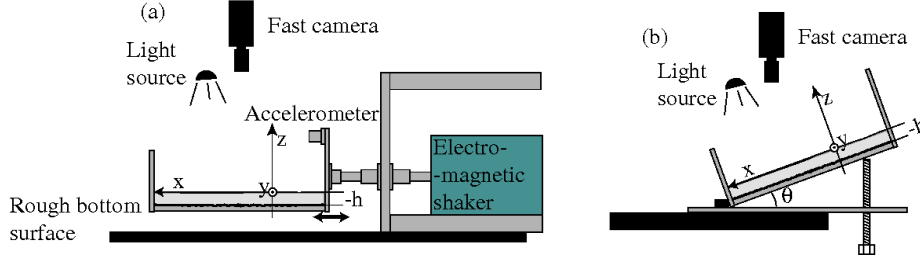
**Abstract.** An oscillating forcing is used to study the complex rheology of shallow layer of dry grain. Although the behaviour depend on the experimental protocol, it has been that the thresholds for starting and stopping of flow are slightly different, as it is also found for avalanches of inclined layers. At low excitation frequency, the variation with depth of the starting acceleration  $\Gamma_{start}$ , for the oscillating layer is similar to the corresponding variation of the tangent of the starting angle  $\tan(\theta_{start})$  for avalanches in the same container, but deviates as the frequency is increased. Once the grains start to flow, the rheology of the material is found to vary in time during the cycle in surprising ways. Finally, we consider the flow profiles as a function of both the transverse distance across the cell at the free surface, and also as a function of the vertical coordinate in the boundary layer near the sidewall.

Les milieux granulaires denses en écoulement ont une rhéologie complexe donnant naissance aux phénomènes d'avalanches, de formation de dunes, de ségrégation, de collapse etc. En raison de leur importance géophysique évidente [1], les écoulements sur plan incliné sont les dispositifs parmi les plus étudiés [2-6] et ont fait l'objet de nombreux modèles [7-11]. Récemment, des études ont été faites sur les angles limites d'écoulement en fonction de l'épaisseur de la couche et les profils de vitesses [12-15]. Nous proposons ici un dispositif alternatif pour étudier les propriétés d'écoulement d'une couche granulaire dense, en l'entraînant par une vibration sinusoidale horizontale du récipient la contenant. Dans le référentiel en mouvement, la couche ainsi accélérée subit une force effective agissant sur toute le volume de la couche, à l'image de la force de gravité dans les couches sur plans inclinés.

## 1 Dispositif et procédures

Le dispositif expérimental (Fig. 1) est composé d'une cellule de plexiglass de longueur  $L = 200\text{mm}$ , largeur  $W = 80\text{mm}$  et de hauteur  $H = 60\text{mm}$ , remplie avec des sphères de verre polydisperses (diamètre entre  $0.72$  et  $1.20\text{mm}$ ) dont le diamètre moyen est  $d = 0.96\text{mm}$ , sur une hauteur  $h$  allant de  $1d$  à  $16d$ . Les mêmes types de particules ont été collées sur le fond afin de le rendre rugueux. Les parois latérales sont lisses. C'est en cela (rapport d'aspect, fond rugueux) que notre dispositif diffère des expériences menées précédemment sous ce type d'excitation, essentiellement pour étudier le régime convectif qui apparaît dans une couche complètement fluidisée par une forte excitation [16-18]. La cellule est vibrée horizontalement au moyen d'un vibreur électro-magnétique. On fournit ainsi une oscillation sinusoidale,  $A \sin(\omega t)$ , jusqu'à

une amplitude crête-crête de  $2A \sim 2\text{cm}$ . Nous avons utilisé ce vibreur sur une gamme de fréquences  $f_o = 1/T = \omega/2\pi$ , allant de 3 à 10 Hz. Cette accélération est mesurée par accéléromètre. La position et la vitesse des particules sont extraites d'images par des procédures de *particle tracking* usuelles [20], à ceci près que toutes les vitesses sont ramenées dans le référentiel du conteneur dont la position est repérée grâce à un marqueur. *Dans tout ce qui suit les vitesses sont ramenées dans le référentiel du conteneur.*



**Fig. 1.** (a) Schéma du dispositif expérimental et des conventions d'axes pour l'expérience d'oscillation horizontale. (b) Schéma du dispositif expérimental et des conventions d'axes pour l'expérience de plan incliné réalisée avec la même cellule.

Le choix de particules polydisperses prévient la cristallisation, mais il n'empêche pas les réarrangements des grains et leur usure, qui sont susceptibles de modifier les propriétés de la couche et donc les seuils d'écoulement. Afin d'estimer la robustesse de nos observations vis à vis de ces effets, nous avons donc utilisé 2 procédures de mesures : la méthode A, rapide, où la mesure est faite immédiatement après le changement de la consigne d'accélération, et où la couche n'est aérée par agitation que toutes les 5–10 mesures, et la méthode B, où on laisse la couche évoluer librement 1 min après le changement de consigne avant de commencer la mesure.

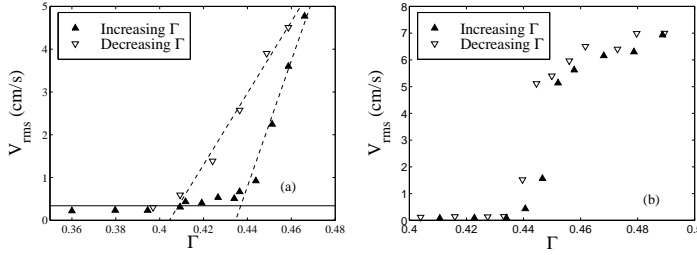
La même cellule, avec les mêmes particules, a été utilisée dans une expérience de plan incliné schématisée Fig. 1b. On pourra ainsi comparer, dans deux expériences ayant rigoureusement les mêmes conditions de bords, la tangente de l'angle critique de déclenchement des avalanches sur le plan incliné, avec l'accélération horizontale critique d'écoulement adimensionnée par la gravité  $g$ . Ces deux quantités mesurent en effet le même rapport de la contrainte parallèle à la surface libre de la couche (respectivement  $A\omega^2$  pour la couche oscillante et  $g \sin(\theta)$  pour le plan incliné), sur la contrainte de confinement perpendiculaire à cette surface (resp  $g$  et  $g \cos(\theta)$ )

Les paramètres sans dimension sont :  $\Gamma = A\omega^2/g$ , la hauteur de la couche en diamètre de grain,  $h/d$ , la pulsation,  $\eta = \omega\sqrt{d/g}$  comprise entre 0.18 et 0.62 (la limite  $\eta \rightarrow 0$  à  $\Gamma$  constant correspondant au plan incliné de pente  $\tan^{-1} \Gamma$ ). On adimensionnera les vitesses par  $f_o d$  de manière à avoir une vitesse sans dimension inférieure à 1, lorsque les particules se déplacent de moins d'un diamètre de bille pendant une période. On choisit la direction  $x$  parallèle à l'accélération et  $z$  la direction verticale (Fig. 1).

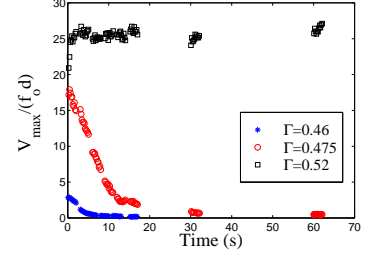
## 2 Mesure des seuils d'écoulement

La figure 2 représente la vitesse RMS (moyennée dans le temps et l'espace),  $V_{rms}$ , de la surface libre d'une couche de hauteur  $h = 7d$ , en fonction de  $\Gamma$ , obtenue par la procédure A (Fig. 2a) et la procédure B (Fig. 2b). Dans les deux cas, on voit clairement un seuil entre 0.4 et 0.45 au-delà duquel les grains s'écoulent. Le seuil est légèrement plus élevé pour le déclenchement du mouvement (triangles pleins dirigés vers le haut) que pour son arrêt une fois le mouvement initié (triangles ouverts orientés vers le bas). On notera respectivement  $\Gamma_{start}$  et  $\Gamma_{stop}$  ces deux seuils. C'est également ce qui est observé dans les expériences de plans inclinés. Dans le cas de la procédure B, les seuils sont plus élevés (surtout à la descente), l'augmentation au-dessus du seuil est plus abrupte et l'hystérésis moins prononcée.

Ces différences s'expliquent en partie avec l'évolution lente du maximum de la vitesse RMS (moyennée dans l'espace seulement),  $V_{max}$ , aux temps longs (Fig. 3). Un incrément d'amplitude engendre un saut d'accélération. Près du seuil, cette petite perturbation initiale est suffisante pour initier le mouvement de la couche, mais si par la suite, la consigne n'est pas assez grande pour entretenir la fluidisation, le

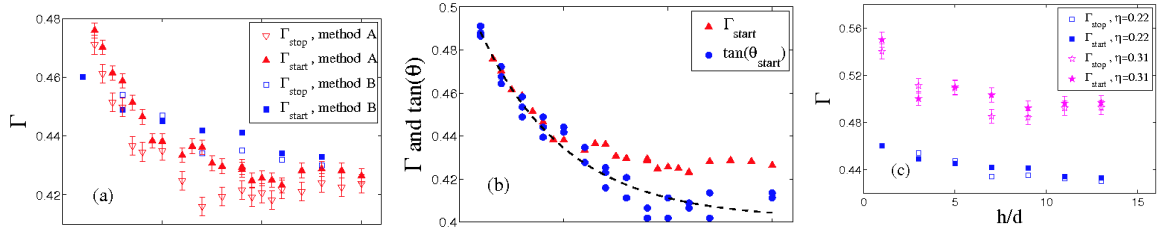


**Fig.2.** Variation de la vitesse RMS dans la direction  $x$  en fonction de l'accélération adimensionnée, pour une couche de grains de hauteur  $h = 7\text{cm}$ . Les triangles pleins dirigés vers le haut sont obtenus lorsque les incréments d'accélération croissent. Les triangles ouverts dirigés vers le bas sont obtenus lorsque les incréments d'accélération décroissent. Les courbes (a) sont obtenues par la méthode A, les courbes (b) sont obtenues par la méthode B.



**Fig.3.** Evolutions aux temps longs du maximum de la vitesse RMS (moyennée dans l'espace) mesurée à la surface libre d'une couche de hauteur  $h = 9d$ , pour une fréquence adimensionnée  $\eta = 0.31$  ( $f_o = 5.0\text{Hz}$ ), obtenues pour  $\Gamma = 0.460$  (\*),  $\Gamma = 0.475$  (o),  $\Gamma = 0.52$  (carré).

mouvement décroît dû aux réarrangements. On peut ainsi être au-dessus du seuil par la méthode A et en dessous par la méthode B. Ces effets seront encore plus sensibles pour  $\Gamma_{stop}$  où, même sans discontinuité de l'accélération, un temps de relaxation de plusieurs seconds pourrait être nécessaire après le changement de la consigne pour atteindre le régime stationnaire.



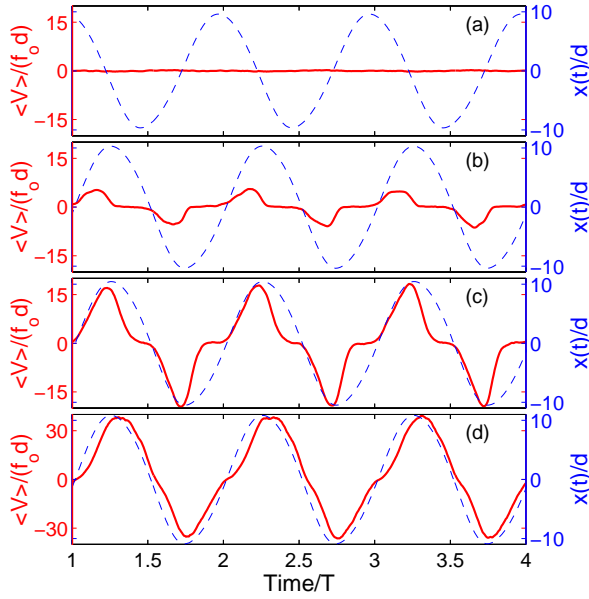
**Fig.4.** Evolution du seuil d'écoulement en fonction de la hauteur de grain  $h$ . Les symboles ouverts représentent  $\Gamma_{stop}$ , les symboles pleins représentent  $\Gamma_{start}$ . (a) compare les procédures A (triangle) et B (carré) pour  $\eta = 0.21$  ( $f_o = 3.3\text{Hz}$ ). (b) compare  $\Gamma_{start}$  obtenu par la méthode A (triangle) ( $\eta = 0.22$ ) avec  $\tan(\theta_{start})$  obtenue dans une expérience de plan incliné. La courbe en tirets correspond à un ajustement de la relation théorique proposée dans [12,13]. Enfin (c) compare deux fréquences d'excitation  $\eta = 0.21$  ( $f_o = 3.3\text{Hz}$ ) (carré) et  $\eta = 0.31$  ( $f_o = 5.0\text{Hz}$ ) (étoile) en suivant la même procédure B.

On compare (Fig. 4a), cette évolution pour les deux procédures utilisées pour une pulsation  $\eta = 0.21$  ( $f_o = 3.3\text{Hz}$ ). Malgré quelques différences déjà notées précédemment, on observe qualitativement le même comportement, c'est-à-dire un seuil entre  $\Gamma = 0.42$  et  $0.48$  et une décroissance du seuil quand on augmente  $h$  avec une tendance à la saturation aux grands  $h$ . Fig. 4b, on voit que la tangente de l'angle critique d'écoulement suit un comportement comparable lorsqu'on incline la cellule (Fig. 1b). Toutefois,  $\tan(\theta)$  varie sur une gamme un peu plus étendue car  $\tan(\theta)$  sature moins aux grands angles. Ce résultat est en accord avec la relation phénoménologique proposée dans [12,13]. Par contre, la fig.4(c) montre que l'augmentation de la fréquence d'excitation a un fort effet stabilisant. Cela illustre le fait que l'échelle de temps,  $T = 1/f_o$ , introduite par l'excitation implique, comme le suggère l'analyse dimensionnelle, que  $\Gamma$  n'est plus le seul paramètre de contrôle pertinent pour le seuil d'excitation, contrairement au plan incliné univoquement contrôlé par  $\tan(\theta)$ .

### 3 Dynamique de la surface

La figure 5 montre la trace temporelle de la vitesse de la surface moyennée spatialement  $\langle V \rangle$  pour 4 valeurs de  $\Gamma$ . En dessous du seuil on ne voit que de faibles oscillations (Fig. 5a). Par contre, juste

au-dessus du seuil (Figs. 5b et 5c), on voit un régime intermédiaire où la couche ne s'écoule que sur une partie du cycle. Ce n'est qu'à forte excitation (10 % au dessus du seuil) que la couche est totalement fluidisée pendant tout le cycle (Fig. 5d). Plus étonnant, dans le régime intermédiaire la couche commence à s'écouler alors que la force effective qu'elle subit est nulle! et elle diminue avant même que cette force n'est atteint son maximum, pour atteindre 0 alors que la force effective est encore pratiquement à son maximum. Cela illustre bien la rhéologie complexe des milieux granulaires qui ne dépend pas seulement de la force instantanée mais implique des effets de mémoires mettant en jeu, entre autre, des réarrangements, du jamming et de la rhéo-fluidisation.

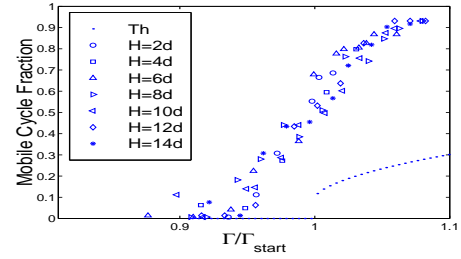


**Fig.5.** Traces temporelles de la vitesse suivant  $x$ , moyennée spatialement à la surface d'une couche de hauteur  $h = 9d$  avec  $\eta = 0.21$ . Les tirets donnent la position adimensionnée de la cellule qui est en phase avec la force effective ressentie par la couche granulaire dans le référentiel accéléré. On a respectivement (a)  $\Gamma = 0.39$ , (b)  $\Gamma = 0.44$ , (c)  $\Gamma = 0.46$ , (d)  $\Gamma = 0.48$ .

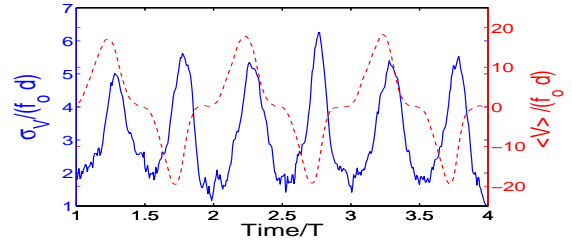
Par exemple, on ne peut pas expliquer la proportion de la phase mobile par un simple modèle de frottement solide impliquant seulement une friction statique (donnée par  $\Gamma_{start}$ ) et dynamique (donnée par  $\Gamma_{stop}$ ). En effet, si on considère, figure 6, la fraction de temps pendant laquelle la couche est mobile au cours d'un cycle, en fonction de  $\Gamma$ , un tel modèle donne la courbe en pointillé de la de figure 6. Celui-ci est loin d'être en accord avec les mesures expérimentales qui, quelque soit l'épaisseur  $h$ , montrent une mobilité beaucoup plus grande. Finalement, nous avons considéré l'évolution temporelle de l'écart-type des fluctuations de vitesses,  $\sigma_V$ , (c'est-à-dire la racine carrée de la température granulaire de surface) dans ce régime intermédiaire. On constate Fig. 7 que ces fluctuations sont toujours maximales légèrement après que la vitesse moyenne est atteinte son extremum.

#### 4 Profils de vitesse

Dans le cas des avalanches sur un plan incliné, il existe des prédictions théoriques pour les profils des vitesses, basées sur la théorie cinétique [2,7] où des considérations dimensionnelles [20,13]. Bien que partant d'hypothèses très différentes, ses prédictions aboutissent à une même loi de puissance pour le profil de vitesse dans l'épaisseur de la couche. Cette loi, dite de Bagnold, reproduit correctement les



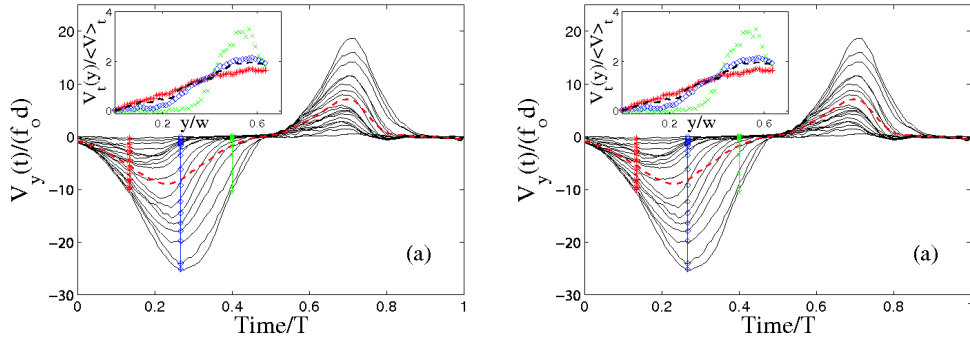
**Fig.6.** Fraction du cycle durant laquelle la couche est mobile en fonction de  $\Gamma$ , mesurée pour différentes hauteurs  $h$ . Les pointillés donnent cette fraction pour un modèle de frottement solide avec une friction dynamique  $\Gamma_{stop} = 0.42$  et statique  $\Gamma_{start} = 0.44$ .



**Fig.7.** Evolution temporelle de l'écart-type des fluctuations de vitesses suivant  $x$  et  $y$  pour une accélération et une hauteur de couche correspondant à la figure 5c. En tiret est rappelé la vitesse moyenne donnée Fig. 5c.

observations. les profils de vitesse Dans notre expérience, le milieu granulaire étant opaque, on a accès qu'aux écoulements de surface, que ce soit le profil horizontal mesuré par le dessus, de la paroi latérale au centre de la cellule, ou bien le profil vertical mesuré pour les particules au contact de la paroi latérale lisse de plexiglass.

Ces profils sont dépendant du temps comme le montre (Fig. 8) les traces temporelles de la vitesse suivant  $x$  à la surface des grains, moyennée dans la direction  $x$ , à différentes distances  $y$  de la paroi latérale,  $V_y(t)$ , pour le régime intermédiaire (a), et le régime pleinement fluidisé (b). Afin d'étudier la forme générale de ces profils, en tentant de s'affranchir de la variation temporelle, nous avons normalisé les profils par la vitesse moyenne instantanée (tirets Fig. 8). Ces profils ainsi adimensionnés, sont tracés dans les fenêtres des Figs. 8a et 8b. On voit que malgré cette précaution, les profils ne se superposent pas dans le régime intermédiaire. Ils sont très différents dans la phase d'accélération où ils sont continus et quasi-linéaires, et dans la phase de décélération où il apparaît une bande immobile près de la paroi suivie d'une bande où la vitesse augmente abruptement. Cela semble indiquer que la couche s'immobilise à partir des parois. Le profil résultant d'une moyenne dans le temps ne ressemble pas à ceux des écoulements continus sur plan incliné. A l'inverse dans le régime pleinement développé les profils adimensionnés par la vitesse instantanée se superposent bien et ressemblent aux profils prédits récemment pour les écoulements continus sur plan incliné [14,15].

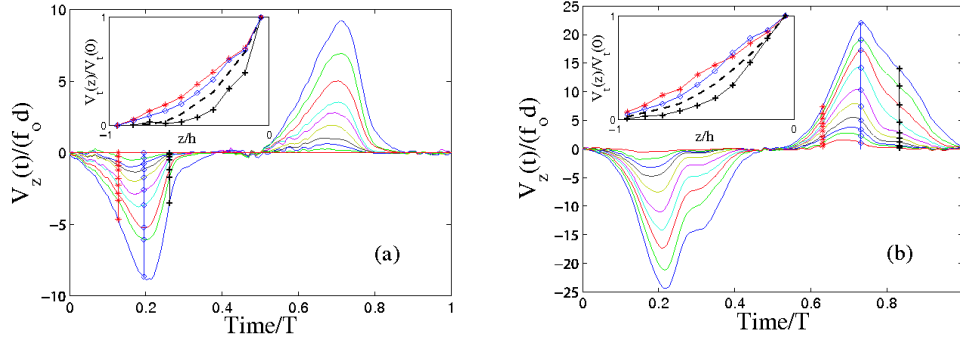


**Fig.8.** Evolution temporelle de la vitesse suivant  $x$  à la surface d'une couche de grains, moyennée suivant  $x$  à différentes distances  $y$  de la paroi latérale. La courbe en tiret donne la moyenne spatiale. La fenêtre reproduit les profils instantanés normalisés par la vitesse moyenne instantanée de la surface. La courbe en tiret donne le profil adimensionné moyenné dans le temps. Dans les deux cas, la hauteur de la couche est  $h = 9d$  et la pulsation vaut  $\eta = 0.21$ . On a pour (a)  $\Gamma = 0.45$ , et pour (b)  $\Gamma = 0.49$

Bien que l'étude des profils horizontaux montre que la friction sur la paroi latérale est loin d'être négligeable, le fait qu'il ait glissement, nous permet de mesurer un profil vertical à la paroi qui pourra être comparé à ceux mesurés dans les mêmes conditions pour les écoulements sur plan incliné [2]. Là encore les profils dépendent du temps à cause de notre excitation périodique (Fig. 9, pendant dans la direction verticale de la Fig. 8). Dans le régime intermédiaire, les profils de vitesse, adimensionnés par la vitesse instantanée de la surface libre, sont différents pendant la phase d'accélération (quasi-linéaire) et de décélération (quasi nulle près du fond puis augmentation abrupte). Mais contrairement aux profils horizontaux, cela reste vrai Fig. 9b pour  $\Gamma = 0.49$ . Les profils moyennes qui en découlent, sont loin de correspondre à la loi de Bagnold puisque la concavité  $y$  est opposée [2,20]. Il se peut cependant que ces effets soient dus aux bords et que les profils verticaux au milieu de la cellule (malheureusement inaccessible par des méthodes de mesures usuelles) soient identiques entre eux (une fois renormalisés par la vitesse de surface instantanée) et suivent un profil moyen plus conforme à la loi de Bagnold.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté ici une première étude des écoulements granulaires vibrés horizontalement. Si les seuils à basses fréquences d'excitation, présentent des similitudes indéniables avec le cas des écoulements



**Fig.9.** Evolution temporelle de la vitesse suivant  $x$ , mesurée à la paroi verticale de plexiglass et moyennée suivant  $x$ , à différentes distances  $z$  fond de la cellule. Dans les deux cas la hauteur de la couche est  $h = 9d$  et la pulsation vaut  $\eta = 0.21$ . On a pour (a)  $\Gamma = 0.45$ , et pour (b)  $\Gamma = 0.49$ .

sur plan incliné, la périodicité de l'excitation implique une dynamique temporelle de l'écoulement beaucoup plus riche. On a vu notamment, au-dessus du seuil, qu'il existe un régime intermédiaire où la couche n'est mobile qu'une fraction du cycle. Ce comportement qui ne peut pas s'expliquer par un simple modèle de frottement solide, montre bien que la rhéologie des milieux granulaires ne pourra pas se décrire de façon complète par des modélisations qui prennent en compte que les forçages instantanés sans prendre en compte les effets de mémoires. Les profils de vitesse étant dépendants du temps, ils sont difficilement comparables aux écoulements continus sur plan incliné. La dissymétrie des profils entre phases d'accélération et de décélération, souligne bien, une fois de plus, la richesse rhéologique des milieux granulaires. Si les propriétés observées restent génériquement vraies quelque soit la nature des grains, cette forme de forçage périodique, permettant de sonder plusieurs échelles de temps dans un écoulement stationnaire fermé, nous paraît particulièrement adaptée à l'étude des propriétés rhéologiques des milieux granulaires.

## Références

1. A. DAERR & S. DOUADY, *Nature*, **399**, 241 (1999).
2. S. B. SAVAGE, *J. Fluid Mech.*, **92**, 53 (1979).
3. O. POULIQUEN & N. RENAUT, *J. Phys. II*, **6**, 923 (1996).
4. M. Y. LOUGE & S. C. KEAST, *Phys. Fluids*, **13**, 1213 (2001).
5. L. SILBERT, D. ERTAS, G. GREY, ET AL., *Phys. Rev. E*, **64**, 051302 (2001).
6. L. SILBERT, J. W. LANDRY & G. S. GREY, *Phys. Fluids*, **15**, 1 (2003).
7. S. B. SAVAGE & K. HUTTER, *J. Fluid Mech.*, **199**, 177 (1989).
8. J.-P. BOUCHAUD, M. E. CATES, J. RAVI PRAKASH, ET AL., *J. Phys. I France*, **4**, 1383 (1994).
9. I. S. ARANSON & L. S. TSIMRING, *Phys. Rev. E*, **64**, 20301(R) (2001).
10. A. ARADIAN, E. RAPHAEL & P. G. DE GENNES, *Phys. Rev. E*, **60**, 2009 (1999).
11. B. ANDREOTTI, A. DAERR & S. DOUADY, *Phys. Fluids*, **14**, 415 (2002).
12. O. POULIQUEN, *Phys. Fluids*, **11**, 542 (1999).
13. GDR MiDi, *Eur. Phys. J. E*, **14**, 341 (2004).
14. P. JOP, Y. FORTERRE & O. POULIQUEN, *Nature*, **441**, 727 (2006).
15. P. JOP, Y. FORTERRE & O. POULIQUEN, *J. Fluid Mech.*, **486**, 21 (2005).
16. S. G. K. TENNAKON, L. KONDIC & R. P. BEHRINGER, *Europhys. Lett.*, **45**, 470 (1999).
17. M. MEDVED, H. M. JAEGER & S. R. NAGEL, *Europhys. Lett.*, **52**, 66 (2000).
18. G. METCALFE, G. K. TENNAKON, L. KONDIC, ET AL., *Phys. Rev. E*, **65**, 031302 (2002).
19. The particle tracking routines were developed by J. Crocker and E. Weeks. See <http://www.physics.emory.edu/weeks/idl/>.
20. E. AZANZA, F. CHEVOIR & P. MOUCHERONT, *J. Fluid Mech.*, **400**, 199 (1999).



## Contrôle d'une interaction onde-particules par une onde-test

Romain Bachelard<sup>1</sup>, Cristel Chandre<sup>1</sup>, Duccio Fanelli<sup>2</sup> & Xavier Leoncini<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Centre de Physique Théorique<sup>†</sup>, CNRS Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France

<sup>2</sup> Theoretical Physics Group, School of Physics and Astronomy The University of Manchester, Manchester, M13 9PL, U.K.

<sup>3</sup> Physique des Interactions Ioniques et Moléculaires, CNRS-Université de Provence, Centre de St Jérôme, F-13397 Marseille, France

bachelard@cpt.univ-mrs.fr

**Résumé.** L'intensité d'une onde électromagnétique en interaction auto-consistante avec un faisceau de particules chargées, comme dans un Laser Electron Libre par exemple, présente des oscillations importantes dues à un agrégat de particules, appelé macro-particule. Dans cet article, nous proposons une stratégie pour stabiliser l'intensité en détruisant la macro-particule. Cette stratégie repose sur une analyse de la stabilité linéaire (à l'aide de la méthode des résidus) d'orbites périodiques spécifiques d'une modélisation champ moyen du système. La modulation d'un paramètre de contrôle fait apparaître dans le système des bifurcations qui provoquent des changements drastiques dans la dynamique auto-consistante, en particulier sur la macro-particule. Nous montrons comment il est ainsi possible de stabiliser l'intensité de l'onde grâce à l'introduction d'une onde-test, qui joue le rôle de paramètre de contrôle.

**Abstract.** The intensity of an electromagnetic wave in self-consistent interaction with a beam of charged particles, such as in a Free Electron Laser, shows some large oscillations due to an aggregate of particles called macro-particle. In this paper, we propose a strategy to stabilize the intensity of the wave by breaking up the macro-particle. This strategy relies on an analysis of linear stability (with the residue method) of specific periodic orbits of a mean-field model. By appropriately tuning a control parameter, some bifurcations appear in the system which lead to drastic changes in the self-consistent dynamics, in particular on the macro-particle. We show how it is then possible to stabilize the intensity of the wave by introducing a test-wave in the system.

L'interaction auto-consistante entre une onde électromagnétique et un faisceau de particules chargées est omniprésente dans de nombreux domaines de la physique, telles que les accélérateurs ou les plasmas. Par exemple, elle joue un rôle crucial dans le Laser Electron Libre, qui est utilisé pour générer une lumière modulable, puissante et cohérente. Ce type de dispositifs diffère des lasers conventionnels par son faisceau d'électrons ultra-relativistes qui joue le rôle de milieu amplificateur. Le mécanisme physique responsable de cette émission et de l'amplification de la lumière est l'interaction entre le faisceau et l'onde, sous l'effet d'un champ magnétostatique généré par un onduleur. Du fait du champ magnétique, les électrons suivent des trajectoires sinusoidales, d'où une émission synchrotron. Le germe initial - dit *émission spontanée* - va piéger les électrons qui, à leur tour, émettront de manière cohérente, jusqu'à ce que l'effet laser soit atteint.

L'évolution couplée d'un champ radiatif et de  $N$  particules peut être décrit dans un contexte Hamiltonien [1]. Ce Hamiltonien à  $N + 1$  degrés de liberté est composé d'une partie cinétique associée aux particules, et d'un terme couplé traduisant l'interaction réciproque entre les particules et le champ. Les interactions entre particules sont donc négligées, bien qu'elles interagissent par le biais de l'onde.

La théorie linéaire prédit initialement [1] une croissance exponentielle pour l'onde, jusqu'à une saturation caractérisée par de fortes fluctuations. L'espace de phase asymptotique permet d'observer qu'une partie des particules est piégée dans la résonance et forme une structure cohérente spatialement et temporellement, nommée *macro-particule*. Les particules non piégées sont distribuées à peu près uniformément entre les deux frontières oscillantes, et remplissent la *mer chaotique*.

<sup>†</sup> *Present address* : Unité Mixte de Recherche (UMR 6207) du CNRS, et des universités Aix-Marseille I, Aix-Marseille II et du Sud Toulon-Var. Laboratoire affilié à la FRUMAM (FR 2291). Laboratoire de Recherche Conventonné du CEA (DSM-06-35).

De plus, la macro-particule gravite autour d'un point de l'espace des phase bien défini, et cette dynamique est responsable des oscillations macroscopic observées pour l'intensité [2,3]. L'application d'un champ électrique [5,6] constant permet d'accroître la puissance moyenne de l'onde : tandis que les particules chaotiques subissent une simple accélération, les particules piégées transmettent l'énergie du champ électrique à l'onde. Par ailleurs, l'expérience de Dimonte et Malmberg [4] semble suggérer qu'une stratégie de contrôle destinée à détruire la macro-particule aurait pour effet de réduire les oscillations de l'intensité de l'onde. Précisons que la taille de la macro-particule est liée au facteur de "bunching", une quantité cruciale dans le cadre du Laser Electron Libre [3].

La dynamique peut aussi être étudiée d'un point de vue topologique, en s'intéressant aux structures de l'espace de phase. En effet, dans le cadre d'une description champ moyen, i.e. en étudiant la trajectoire de particules-test subissant passivement l'action du champ, les trajectoires des particules piégées s'enroulent sur des tores invariants, les autres trajectoires peuplant un domaine chaotique de l'espace des phases. On peut alors utiliser des techniques de contrôle Hamiltonian afin de reconstruire des tores invariants autour de la macro-particule afin d'accentuer le piégeage [7]. Une perturbation propre au système est calculée, qui permet de reconstruire un tore à une fréquence choisie.

Dans cet article, nous proposons une méthode pour stabiliser l'intensité de l'onde en rendant chaotique le domaine de l'espace des phases parcouru par la macro-particule. A cette fin, une onde-test est introduite dans le modèle champ moyen, dont l'amplitude joue le rôle de paramètre de contrôle afin de modifier la topologie de l'espace des phases. La méthode des résidus [8,9,10] est utilisée afin de détecter les bifurcations dans le système, en fonction du paramètre de contrôle, grâce à une analyse de stabilité linéaire d'orbites périodiques particulières. Bien que développée dans le cadre champ moyen, les résultats de cette méthode reste valable lorsque l'on considère une interaction auto-consistante.

La structure de l'article est la suivante : dans la Sec. 1, nous introduisons le modèle champ moyen, ainsi que l'analyse des structures du système en termes de tores invariants qui en découle. Dans la Sec. 2, nous présentons la méthode des résidus et montrons comment certaines bifurcations permettent de prédire l'apparition ou la disparition des structures régulières. Dans la Sec. 3, la méthode est appliquée au modèle champ moyen de l'interaction afin de détruire la macro-particule.

## 1 Le modèle champ moyen

La dynamique de l'interaction onde-particule, telle qu'on la rencontre dans un Laser Electron Libre par exemple, peut être décrite [1] par le Hamiltonien à  $N$  corps et une onde :

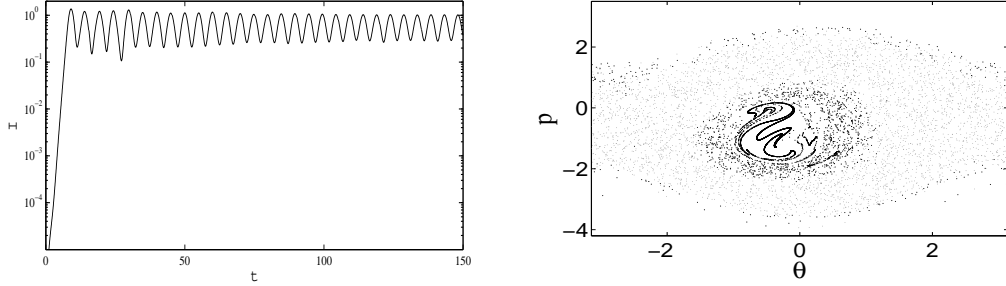
$$H_N(\{\theta_j, p_j\}, \phi, I) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2} - 2\sqrt{\frac{I}{N}} \sum_{j=1}^N \cos(\phi + \theta_j). \quad (1)$$

Ce Hamiltonien est composé d'une partie cinétique et d'un terme d'interaction entre les particules et le champ radiatif : les  $(\theta_j, p_j)$  correspondent aux couple conjugué phase/moment de la particule  $j$ , tandis que  $(\phi, I)$  représentent respectivement l'intensité et la phase de l'onde.

Etant donné que  $\phi$  est une phase,  $(\phi, I)$  appartient à  $T \times R^+$  où  $T$  est le tore à une dimension. Ici,  $(\theta_j, p_j)$  est dans  $T \times R$ . L'espace de phases du système est alors  $T^{N+1} \times R^N \times R^+$ . De plus, la dynamique possède deux quantités conservées : l'énergie  $H_N$  et le moment total  $P_N = I + \sum_j p_j$ . La dynamique du Hamiltonien (1) peut donc être considérée sur une variété de dimension  $2N$  (définie par  $H_N = 0$  et  $P_N = \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est infinitésimal).

Si le système est initialisé avec une intensité  $I \ll N$  et un faisceau parfaitement monocinétique  $p_j = 0$ , l'intensité va croître exponentiellement avant d'atteindre un régime saturé caractérisé par de fortes oscillations, telles qu'on peut les voir sur la Fig. 1. Quant aux particules, plus de la moitié sont piégées par l'onde et forment la macro-particule (voir Fig. 1), tandis que les autres voyagent chaotiquement dans un "waterbag" aux frontières oscillantes, nommé mer chaotique.

Afin de discriminer les trajectoires régulières et chaotiques, nous calculons l'exponent de Lyapounov de chaque particule en considérant qu'elle a un statut de particule-test soumise à un champ extérieur



**Fig.1.** Gauche : Intensité normalisée  $I/N$  de la dynamique (1), pour  $N = 10000$  particules,  $H_N = 0$ ,  $p_j = 0$ ,  $P_N = 10^{-7}$ . Droite : Espace des phases des  $N$  particules at  $t = 800$ . Les points gris correspondent aux trajectoires chaotiques, les noirs aux trajectoires régulières.

$(\phi(t), I(t))$ . Nous évaluons donc à l'évolution des valeurs propres du flot tangent de la dynamique dans l'espace  $(\theta_j, p_j, t)$ , pour chaque particule  $j$ . Notons que ce calcul a lieu dans le cadre de l'intégration de la dynamique auto-consistante à  $N$  particules, bien qu'il fournisse  $N$  exposants de Lyapounov associés à des particules-test. Ces exposants de Lyapounov sont calculés sur un temps fini  $T = 300$  (une fois le régime saturé atteint), et la trajectoire d'une particule est considérée régulière si son exposant de Lyapounov est plus petit que  $\delta = 0.025$  (il est typiquement de l'ordre de 1 dans la mer chaotique).

Par ailleurs, afin de mieux comprendre la dynamique particulaire, nous nous intéressons au mouvement d'une seule particule : pour un grand nombre  $N$  de particules, on peut considérer que son influence sur l'onde sera négligeable, ce qui nous amène à considérer la dynamique d'une particule passive dans un champ oscillant. Cette dynamique peut être décrite par le Hamiltonien à un degré et demi de liberté suivant :

$$H_{1p}(\theta, p, t) = \frac{p^2}{2} - 2\sqrt{\frac{I(t)}{N}} \cos(\theta + \phi(t)) \quad (2)$$

$$= \frac{p^2}{2} - \text{Re}(h(t)e^{i\theta}), \quad (3)$$

où le terme d'interaction  $h(t)$  est déduit de simulations de la dynamique originale auto-consistante à  $N$  corps (1). Dans le régime saturé,  $h(t)$  est à peu près périodique, ainsi qu'en témoigne la Fig. 2. Une analyse de Fourier nous permet de déduire qu'elle peut s'écrire :

$$h(t) = 2\sqrt{\frac{I(t)}{N}} e^{i\phi(t)} \approx [F + \alpha e^{i\omega_1 t} + \beta e^{-i\omega_1 t}] e^{i\Omega t}, \quad (4)$$

où  $\Omega = -0.685$  correspond à la vitesse de l'onde dans le référentiel considéré, et  $\omega_1 = 1.291$  à la fréquence des oscillations de l'intensité. En ce qui concerne les coefficients d'amplitude, on trouve  $F = 1.5382 - 0.0156i$ ,  $\alpha = 0.2696 - 0.0734i$  et  $\beta = 0.1206 + 0.0306i$ .

Le Hamiltonien (2) peut donc être vu comme une perturbation périodique du pendule décrit par le Hamiltonien intégrable  $H_0$

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - |F| \cos(\theta + \Omega t + \phi_F),$$

avec  $F = |F|e^{i\phi_F}$ . La fréquence linéaire de ce pendule est  $\sqrt{|F|} \approx 1.240$  qui est donc très proche de la fréquence du forçage  $\omega_1$ . On s'attend donc à un comportement chaotique pour des amplitudes de la perturbation ( $\alpha$  et  $\beta$ ) faibles.

La section de Poincaré (tracé stroboscopique effectué à la fréquence  $\omega_1$ ) d'une particule-test (Fig. 2) nous apprend que la macro-particule est composée d'un ensemble de tores invariants dans ce modèle champ moyen. A l'opposé, la mer chaotique correspond à un ensemble de trajectoires chaotiques, confinées entre les frontières supérieures et inférieures, au-delà desquelles les trajectoires deviennent similaires

aux trajectoires de révolution du pendule non perturbé. La rotation de la macro-particule peut être visualisée en traduisant dans le temps le paramètre  $t_0$ , où le tracé stroboscopique est effectué au temps  $t_0 + (2\pi/\omega_1)\mathbb{N}$ .

La macro-particule s'organise autour du point périodique central de période  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ , qui correspond à la période des oscillations de l'intensité : ceci témoigne du rôle crucial de la macro-particule pour le contrôle de l'intensité.

## 2 La méthode des résidus

La topologie de l'espace des phases peut être étudiée grâce à une simple analyse de la stabilité linéaire de ses orbites périodiques. Les informations sur la nature de ces orbites (elliptique, hyperbolique ou parabolique) peuvent être déduites d'indicateurs tels que le résidu de Greene [8], une quantité qui permet de contrôler des changements de stabilité locaux dans un système soumis à une perturbation externe [9,10].

Prenons un flot Hamiltonien autonome à deux degrés de liberté, dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  (cette approche est naturellement valable pour des familles de paramètres) :

$$\dot{z} = J\nabla H(z; \lambda),$$

où  $z = (p, E, \theta, t) \in \mathbb{R}^4$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2$  correspondant à la matrice identité en dimension 2. Afin de déterminer les propriétés de stabilité linéaire des orbites périodiques du flot, nous calculons aussi le flot tangent :

$$\frac{d}{dt}J^t(z) = J\nabla^2 H(z; \lambda)J^t,$$

où  $J^0 = I_4$  et  $\nabla^2 H$  est la matrice Hessienne (composée des dérivées secondes de  $H$  par rapport à ses variables canoniques). La stabilité linéaire d'une orbite périodique de période  $T$  est donnée par le spectre de la matrice de monodromie  $J^T$ . Ces propriétés sont contenues de manière synthétique dans le résidu de Greene défini par :

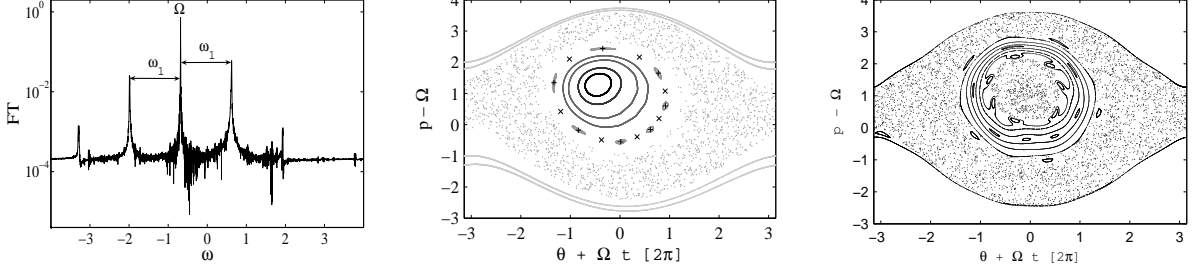
$$R = \frac{4 - \text{tr}J^T}{4}.$$

En particulier, si  $R \in ]0, 1[$ , l'orbite périodique est elliptique (et est en général stable) ; si  $R < 0$  ou  $R > 1$ , elle est hyperbolique ; et en cas d'égalité, i.e.  $R = 0$  and  $R = 1$ , elle est parabolique et un développement à l'ordre supérieur est nécessaire pour connaître la stabilité d'une telle orbite.

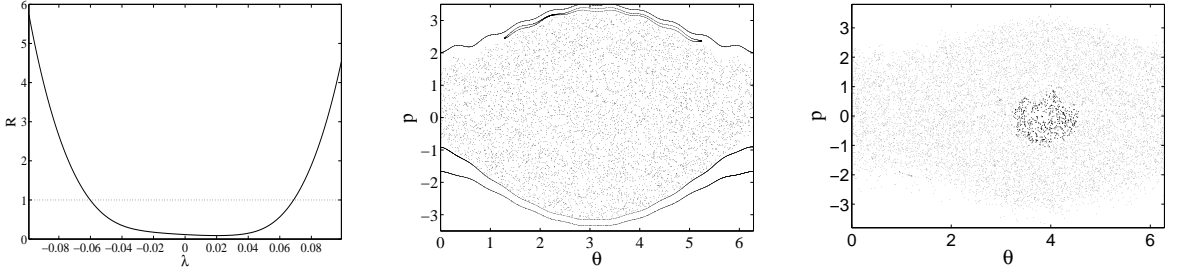
Puisque l'orbite périodique et sa stabilité dépend d'un paramètre  $\lambda$ , les propriétés de la dynamique changeront avec  $\lambda$ . De manière générique, les orbites périodiques et leurs propriétés de stabilité linéaire sont robustes aux petits changements de paramètre, sauf à des valeurs spécifiques, où des bifurcations apparaissent. La méthode des résidus [9,10] s'intéresse à ces rares événements où la stabilité linéaire d'une orbite périodique change, afin de prédire les valeurs optimales de paramètre pour avoir une certaine dynamique. En particulier, si les résidus d'un couple d'orbites de Birkhoff (initialement elliptique et hyperbolique) atteignent tous deux 0, alors on a création d'un tore invariant, alors que s'ils sont tous deux au-delà de 0 ou 1, on a destruction de structures régulières. Cette méthode permet donc d'obtenir une régularisation ou une chaotisation de la dynamique.

## 3 Destruction de la macro-particule

La méthode des résidus peut être utilisée pour reconstruire des tores invariants dans la mer chaotique ou bien pour chaotiser le cœur de l'agrégat [11], tout en gardant des tores invariants périphériques (Fig.2). Ce contrôle, effectué à l'aide d'ondes auto-consistantes additionnelles, et grâce à l'étude des résidus des orbites centrale et périphériques (telle que celle de période  $7(2\pi/\omega_1)$  présente sur la Fig.2) a permis la stabilisation de la macro-particule et par conséquent celle de l'intensité de l'onde.



**Fig.2.** Gauche : Spectre de Fourier du terme d'interaction  $h(t)$ , telle qu'il est obtenu des simulations du Hamiltonien (1), dans le régime saturé. Centre : Section de Poincaré d'une particule-test de Hamiltonien (2). Les orbites périodiques de période  $7\frac{2\pi}{\omega_1}$  sont indiquées par des plus (orbite elliptique) et des croix (orbite hyperbolique). Droite : Section de Poincaré d'un Hamiltonien de particule-test contrôlé avec des ondes auto-consistentes



**Fig.3.** Gauche : Résidu de l'orbite  $\mathcal{O}_1$  du Hamiltonien (5), en fonction du paramètre  $\lambda$ . Centre : Section de Poincaré du Hamiltonien (5), pour  $\lambda = \lambda_c$ . Droite : Etat de l'espace des phases pour les particules du Hamiltonien (6), avec  $N = 10000$  particules et  $\lambda = 0.07$  (même conditions initiales que pour la Fig.1).

Cependant, la méthode des résidus peut aussi bien être utilisée pour détruire la macro-particule, i.e. chaotiser complètement le “waterbag” de l'espace des phases. Afin d'illustrer la flexibilité de la méthode, nous nous proposons d'introduire dans le système une onde-test, dont l'amplitude jouera le rôle de paramètre de contrôle :

$$H_{1p}^c(\theta, p, t; \lambda) = H_{1p}(\theta, p, t) - 2\lambda \cos(k(\theta - \omega_1 t)), \quad (5)$$

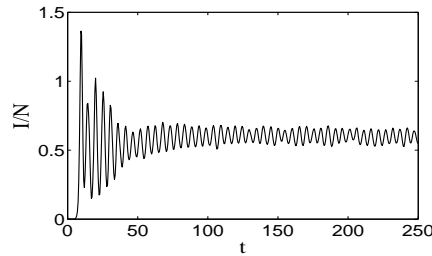
où  $\omega_1$  correspond à la fréquence résonante de l'orbite centrale de la macro-particule, et  $k = 10$ .

Alors, pour  $\lambda = 0$  (ce qui correspond au Hamiltonien de la particule-test original  $H_{1p}$ ), nous faisons varier le paramètre  $\lambda$  et étudions l'évolution du résidu de l'orbite centrale  $\mathcal{O}_1$  (Fig.3) : lorsque ce dernier devient plus grand que 1, cela signifie que l'orbite centrale est devenue hyperbolique. Ceci advient pour des valeurs de  $|\lambda|$  plus grande que  $\lambda_c \approx 0.07$ . Cette prédiction est validée par la section de Poincaré effectuée pour  $\lambda = 0.07$ , sur laquelle nul îlot dont l'orbite centrale serait de période  $2\pi/\omega_1$  n'apparaît (Fig.3). En fait, aucun îlot elliptique n'est plus visible, à part aux frontières du “waterbag”. Ainsi, bien que l'hyperbolicité d'une telle orbite ne garantisse qu'un chaos local, la résonance est en fait devenue complètement chaotique, ce qui souligne le fait que la stabilité de quelques orbites périodiques peuvent suffire à décrire globalement la dynamique.

La stratégie de contrôle décrite ci-dessus peut être généralisée à l'interaction auto-consistente, en introduisant une onde-test similaire à celle de (5) dans le Hamiltonien original à  $N$  particules (1) :

$$H_N^c(\{\theta_j, p_j\}, \phi, I; \lambda) = H_N(\{\theta_j, p_j\}, \phi, I) - 0.07 \sum_j \cos(k(\theta_j - \omega_1 t)), \quad (6)$$

Alors, bien que le modèle champ moyen ait perdu sa pertinence, du fait de l'auto-consistance de l'interaction, la dynamique des particules est qualitativement similaire à celle obtenue dans le contexte



$\lambda$	0	0.035	0.055	0.07	0.085	0.1
$N_m/N$	0.65	0.37	0.23	0.06	0.07	0.16
$\Delta I$	0.6	0.4	0.2	0.1	0.1	0.15

**Fig.4.** Gauche : Intensité normalisée de l’onde  $I/N$  pour la même dynamique (6). Droite : Taux  $N_m/N$  de particules dont la trajectoire est régulière, pour le Hamiltonien (6), en fonction de  $\lambda$ .  $\Delta I$  correspond au niveau moyen des fluctuations de l’intensité.

champ moyen. Après une phase de croissance de l’onde, les particules s’organisent à nouveau dans un “waterbag”, mais très peu ont maintenant une trajectoire régulière : de 65% dans le régime non contrôlé, elles ne sont plus que 6% lorsque  $\lambda = 0.07$  (Fig.3). Quant à l’onde, son intensité tend à se stabiliser très rapidement (typiquement 7 oscillations), ce qui confirme la pertinence d’un contrôle basé sur la destruction de la macro-particule, en accord avec les résultats expérimentaux de Dimonte [4].

Notons enfin que l’introduction d’une onde-test d’amplitude plus faible a pour effet de chaotiser partiellement la mer chaotique, mais pas totalement, et les fluctuations de l’intensité de l’onde reste alors importante (Fig.4). De même, si l’amplitude de l’onde introduite est plus importante, de nouveaux îlots de résonance apparaîtront dans l’espace de phase de la particule-test, ce qui se traduit à nouveau par une stabilisation moindre de l’onde.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une méthode de stabilisation de l’intensité d’une onde grâce à la destruction de structures cohérentes de la dynamique. Par le biais d’un modèle champ moyen et d’une analyse de stabilité linéaire, et grâce à l’introduction dans le système d’une onde-test de contrôle, il a été possible de déstabiliser la partie régulière de dynamique : cette analyse de bifurcations effectuée sur une orbite périodique particulière a permis de rendre le système plus chaotique. L’effet sur la dynamique auto-consistante à  $N$  corps a permis de vérifier la robustesse de cette approche pour la dynamique particulière et de stabiliser l’intensité de l’onde.

## Références

1. R. BONIFACIO, *et al.*, *Rivista del Nuovo Cimento*, **3**, 1 (1990).
2. J.L. TENNYSON, J.D. MEISS & P.J. MORRISON, *Physica D*, **71**, 1 (1994).
3. A. ANTONIAZZI, Y. ELSKENS, D. FANELLI & S. RUFFO, *Europ. Phys. J. B*, **50**, 603 (2006).
4. G. DIMONTE & J.H. MALMBERG, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 401 (1977).
5. S.I. TSUNODA & J.H. MALMBERG, *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 546 (1982).
6. G.J. MORALES, *Phys. Fluids*, **23** (1980).
7. R. BACHELARD, A. ANTONIAZZI, C. CHANDRE, D. FANELLI & M. VITTOT, *Comm. Nonlinear Sci. Num. Simu.*, *in press* (2006).
8. J.M. GREENE, *J. Math. Phys.*, **20**, 1183 (1979).
9. J. CARY & J.D. HANSON, *Phys. Fluids*, **29**, 2464 (1986).
10. R. BACHELARD, C. CHANDRE & X. LEONCINI, *Chaos*, **16**, 023104 (2006).
11. R. BACHELARD, A. ANTONIAZZI, C. CHANDRE, D. FANELLI, X. LEONCINI & M. VITTOT, *European Physical Journal D*, à paraître (2007).

# Création d'un peigne de fréquences de longueur d'onde centrale accordable à partir d'ondes continues

Benoit Barviau, Christophe Finot, Julien Fatome et Guy Millot

Institut Carnot de Bourgogne, UMR 5209 CNRS-Université de Bourgogne, 9 Av. A. Savary, BP 47 870, F-21078 DIJON Cedex, FRANCE

benoit.barviau@u-bourgogne.fr

**Résumé.** Nous étudions numériquement et expérimentalement une méthode de création d'un peigne de fréquences de longueur d'onde centrale accordable. La compression d'un battement sinusoïdal ou l'instabilité modulationnelle induite vont permettre de créer un spectre de raies à partir de deux ondes continues. Ensuite lorsque l'onde poursuit sa propagation dans la même fibre hautement non linéaire, la fréquence centrale du spectre va se décaler grâce à l'effet Raman intrapulse.

**Abstract.** We numerically and experimentally study a method for the creation of a frequency comb spectrum with tunable central wavelength. Compression of a sinusoidal beat signal or induced modulation instability will generate a frequency comb from two continuous waves. During its further propagation in the highly non-linear fiber, the spectrum will shift its central frequency due to the intrapulse Raman self frequency shift effect.

## Introduction

La grande diversité des lasers commerciaux rend possible des émissions sur une large plage spectrale. Toutefois les rayonnements sont le plus souvent de fréquences fixes et peu de lasers sont accordables. Nous pouvons néanmoins y recenser les diodes lasers ainsi que les oscillateurs paramétriques. Des procédés fibrés existent également et sont basés sur le transfert d'énergie, le plus courant étant l'effet Raman cascadié. L'inconvénient majeur de cette méthode est que l'écart en fréquence entre les harmoniques est fixé à 13.2 THz dans le cas des fibres en silice. L'effet Raman intrapulse dans le cas de rayonnements impulsionnels permet de s'affranchir en partie de cet inconvénient. En effet, dans ce cas, le décalage en fréquence s'effectue au sein même du spectre de l'impulsion, des hautes vers les basses fréquences, d'harmonique en harmonique. Comme la précision de l'accordabilité dépend de l'écart en fréquence entre les harmoniques du spectre de l'impulsion, ceci implique une meilleure discrétisation fréquentielle.

Notre dispositif expérimental utilise deux sources continues, faciles d'accès et répandues. Afin de tirer profit de l'effet Raman intrapulse, nous avons transformé deux rayonnements continus en un train d'impulsions par deux méthodes, d'une part par instabilité modulationnelle induite (IMI) et d'autre part par compression d'un battement sinusoïdal (CBS). La génération d'impulsions ainsi que le décalage seront effectués au sein d'une même fibre optique ce qui présente un avantage certain en termes de compacité et de stabilité.

Brièvement nous rappellerons la théorie associée aux techniques de compression et au décalage Raman intrapulse. Ensuite une étude numérique guidera la compréhension des effets à prendre en compte afin d'aborder au mieux la réalisation expérimentale et la discussion qui termineront cet article.

## 1 Théories de la compression et du décalage Raman intrapulse

### 1.1 Obtention d'impulsions à partir de rayonnements continus

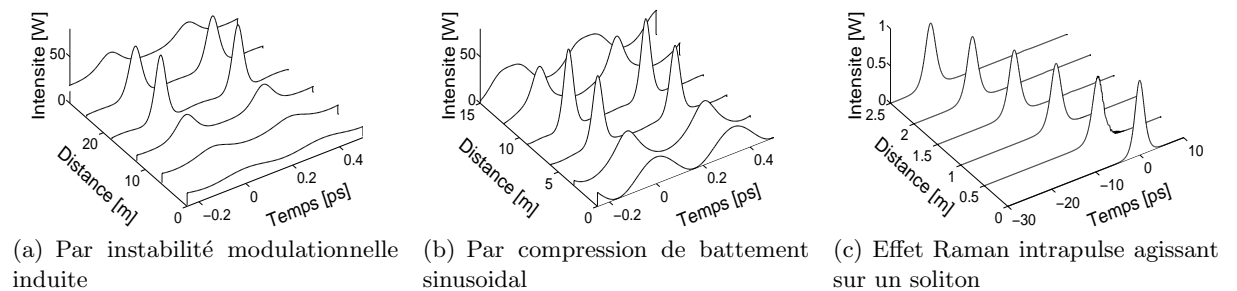
Une impulsion optique courte se caractérise par un spectre large. Partant de deux ondes continues, avec une grande finesse spectrale, nous pouvons créer de nouvelles fréquences par effet de mélange à quatre ondes. Ce phénomène est dû à la non linéarité Kerr du matériau qui effectue un couplage entre les

ondes. Schématiquement, l'injection de deux ondes à des fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  va créer des composantes aux fréquences  $2\omega_1 - \omega_2$  et  $2\omega_2 - \omega_1$  ayant des intensités moindres. De même ces composantes interagissent avec les précédentes pour donner un spectre large composé de multiple fréquences espacées chacune de la différence  $\omega_2 - \omega_1$ .

Les deux méthodes de génération du train d'impulsions reposent sur cet effet, dans le cas de la compression de battement sinusoïdal, nous injectons deux ondes de même intensité, qui vont subir le mélange à quatre ondes [1]. Dans le cas de l'instabilité modulationnelle induite, une des deux ondes possède la majeure partie de l'énergie. Lors de la propagation d'une onde continue dans une fibre optique en régime de dispersion anormale, l'effet combiné de la dispersion et de la non linéarité Kerr va créer deux bandes de gain d'instabilité modulationnelle de part et d'autre de la longueur d'onde optique injectée. Nous pouvons accélérer le transfert d'énergie en induisant l'instabilité modulationnelle grâce à un second champ de faible intensité à la longueur d'onde voisine du maximum de la courbe de gain. Ainsi la croissance de cette longueur d'onde est privilégiée. Ceci est la première étape du déroulement de l'instabilité modulationnelle, à la suite de laquelle le mélange à quatre ondes transforme l'onde pompe et l'onde induite amplifiée en un train d'impulsions [2].

Les figures 1a. et b. représentent les évolutions temporelles du champ lors des premiers mètres de propagation (simulations numériques dont les détails sont évoqués partie 1.3) . Nous constatons que dans les deux méthodes le phénomène est périodique.

Les deux méthodes de génération d'impulsions fonctionnent sur un schéma de création de fréquences par mélange à quatre ondes. Toutefois les simulations numériques ainsi que les résultats expérimentaux montrent quelques différences, notamment vis à vis du comportement solitonique de l'impulsion.



**Fig.1.** (a) et (b) Obtention d'un train d'impulsions après propagation dans une fibre hautement non linéaire et (c) effet Raman intrapulse sur une impulsion soliton.

## 1.2 Décalage en fréquence par effet Raman intrapulse

L'effet Raman intrapulse a été observé pour la première fois en 1986 [3] [4]. Comme son nom l'indique c'est un phénomène qui se produit au sein d'une impulsion. Il est la conséquence de la réponse Raman non instantanée du matériau. Dans l'espace des fréquences, cela correspond à un glissement en fréquence de l'impulsion (Fig. 1c.). En effet, les hautes harmoniques de l'impulsion vont transférer de manière continue leur énergie aux basses fréquences de cette même impulsion.

La génération de trains d'impulsions courtes par Instabilité Modulationnelle et effet Raman intrapulse dans les fibres optiques fût proposée pour la première fois par Mamyshev [5]. En se basant sur les travaux antérieurs [2] qui produisaient théoriquement et expérimentalement des impulsions ultrabrèves par effet d'instabilité modulationnelle induite présentant néanmoins des piédestaux, Mamyshev eut l'idée d'exploiter l'effet Raman intrapulse afin de filtrer les piédestaux.



### 1.3 Outils numériques

L'analyse numérique de la propagation des rayonnements continus permet de mieux distinguer les phases de formation et de translation du spectre optique, ceci nous permet notamment d'anticiper les différences et les limites de nos mesures expérimentales.

La propagation d'une onde complexe  $A(z, t)$  dans la fibre optique est modélisée par l'équation de Schrödinger généralisée, incluant le terme dispersif d'ordre 2 ( $\beta_2$ ), la non linéarité kerr ( $\gamma$ ) ainsi que la réponse Raman ( $R(t)$ ) afin de prendre en compte les effets énoncés précédemment. Nous allons d'ores et déjà ajouter le terme de dispersion d'ordre 3, choisi nul dans un premier temps, mais qui nous permettra de compléter l'étude par la suite

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -\frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A(z, t)}{\partial t^3} + i\gamma \left( (1 - f_R) |A(z, t)|^2 + f_R \int_{-\infty}^{+\infty} R(t') |A(z, t - t')|^2 dt' \right) A(z, t) \quad (1)$$

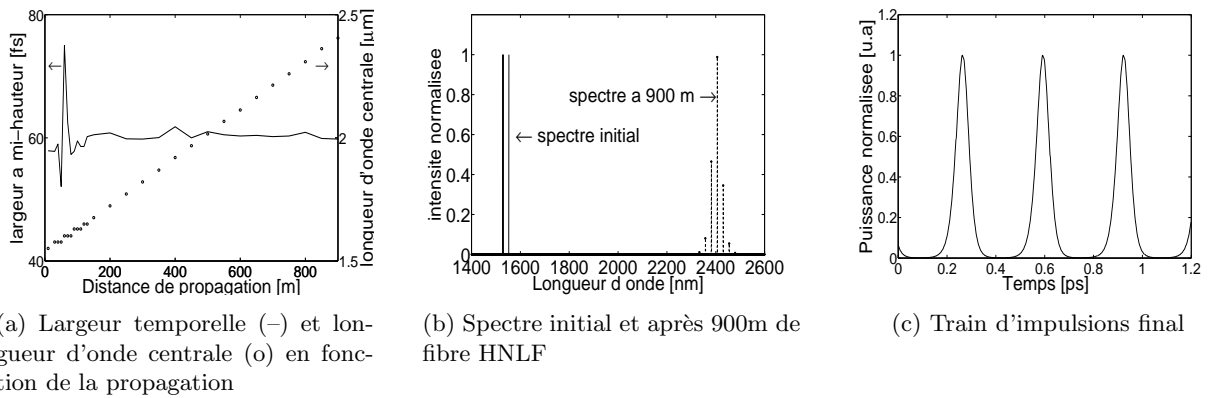
La méthode utilisée pour intégrer l'équation est la méthode de Fourier à pas divisés [6].

## 2 Analyse numérique

### 2.1 Cas de la dispersion d'ordre deux et de l'effet Raman Intrapulse

Une étude numérique pour différentes puissances et écarts en fréquence a été menée. Les spectres et les évolutions temporelles sont recueillis pour diverses distances de propagation.

L'exploitation des données obtenues permet de conclure que pour un écart en fréquence initial donné, seule une faible gamme de puissances convient. En effet, pour des paramètres convenablement choisis, le train d'impulsions se forme rapidement et la longueur d'onde centrale du spectre subit un décalage important, en conservant un bon rapport signal sur bruit. La figure 2a. illustre l'évolution de la largeur temporelle des impulsions créées par compression d'un battement sinusoïdal et décalées par effet Raman intrapulse. Lors des premiers mètres de propagation, les impulsions se compriment et s'étalent avant de tendre vers une largeur fixe. Nous constatons que la longueur d'onde centrale du spectre augmente, même durant les premiers mètres de formation des impulsions. Ensuite le décalage s'effectue de manière linéaire. La figure 2b. présente sur une échelle logarithmique les spectres initiaux et finaux. Le spectre final présente un très bon rapport signal sur bruit. Temporellement, cela génère des impulsions sans piédestaux, semblables à celles reportées figure 2c.



**Fig.2.** Simulations numériques de l'équation de Schrödinger non linéaire incluant la dispersion d'ordre 2 et l'effet Raman.

A écart en fréquence entre les deux ondes initiales fixe, lorsque la puissance est trop faible, l'alternance de compressions et de décompressions se produit de multiples fois et l'impulsion ne se forme définitivement

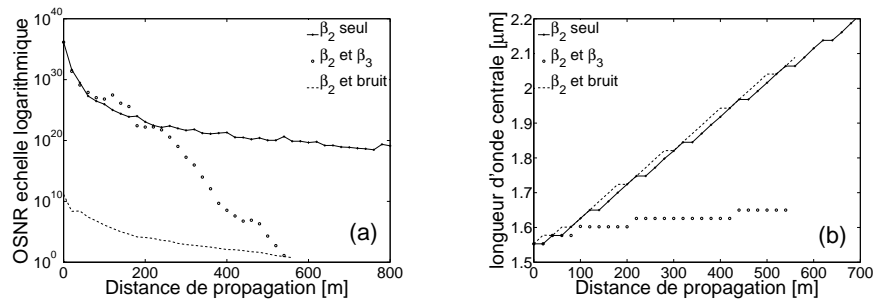
qu'après une distance importante, ce qui limite le décalage spectral. Dans le cas opposé où la puissance est trop importante, le bruit va être fortement amplifié, diminuant la qualité des impulsions et de leur spectre en terme de rapport signal sur bruit.

Il est intéressant de remarquer que pour un écart en fréquence et une puissance totale initiale identique, le décalage d'un train obtenu par l'IMI ou la CBS génère des spectres identiques à grande distance. Toutefois, l'étape initiale de formation du train d'impulsions varie. En effet, dans le cas de la compression d'un battement, les impulsions créées sont de formes gaussiennes, alors que l'IMI génère des solitons. Dans le premier cas, les impulsions gaussiennes se forment très rapidement [1]. Une modification de la forme temporelle ainsi qu'une réorganisation des phases va ensuite s'effectuer afin d'obtenir des impulsions solitoniques. Dans la suite de la propagation, nous observons spectralement un décalage progressif vers les hautes longueurs d'onde, temporellement, ce décalage agit comme un filtre pour les pedestaux résiduels de la formation des impulsions.

## 2.2 Ajout du bruit et/ou de la dispersion d'ordre 3

Afin de se rapprocher au mieux des conditions expérimentales, il est nécessaire de prendre en compte les effets du bruit dû notamment à l'amplificateur Erbium ainsi que les effets de la dispersion d'ordre trois car la gamme de fréquences étudiée est très étendue.

Tout d'abord, les simulations montrent que l'ajout d'un bruit blanc diminue fortement le rapport signal sur bruit, ce qui va également limiter la distance de propagation comme nous pouvons le déduire de la figure 3a. Toutefois l'ajout de bruit n'influe pas sur le décalage spectral, comme le montre la figure 3b.



**Fig.3.** Rapport signal sur bruit (a) et longueur d'onde centrale du spectre (b) par l'instabilité modulationnelle induite et effet Raman intrapulse.

En ce qui concerne l'ajout du terme de dispersion d'ordre 3 dans l'équation de Schrödinger, la première constatation est une dissymétrisation du spectre et une augmentation du chirp des impulsions. De plus, la prise en compte de ce terme limite fortement le décalage spectral (figure 3a.). En contrepartie, il a également pour influence de diminuer l'amplification du bruit au début de la propagation, jusqu'à environ 200 m, comme le montre la figure 3a. Brutalement le bruit augmente et le signal devient rapidement inexploitable.

En conclusion, l'ajout des paramètres de bruit et de dispersion d'ordre 3 montre les limitations de la méthode en terme de décalage et de rapport signal sur bruit. L'ajout du terme de dispersion d'ordre 3 a un impact très significatif sur le décalage. Les résultats expérimentaux que nous présentons maintenant sont en accord avec ces conclusions.

## 3 Résultats expérimentaux

Ce qui distingue et limite les dispositifs expérimentaux mettant en oeuvre l'IMI et la CBS est le matériel disponible. En effet, afin de trouver les meilleurs paramètres, nous faisons varier la puissance

injectée dans la fibre ainsi que l'écart en fréquence entre les deux ondes continues initiales. L'amplificateur Erbium utilisé dans le cas de la CBS va limiter la puissance initiale.

### 3.1 Compression de battement sinusoidal

Afin de réaliser la compression d'un battement sinusoidal, deux rayonnements issus de diodes sont injectées dans la fibre. Ces diodes émettent au voisinage de 1550 nm et sont de faibles puissances (10 mW maximum), il est donc nécessaire d'amplifier le signal. Pour cela, un modulateur acousto optique et un amplificateur Erbium découpe et amplifie le signal avant son injection dans la fibre HNLF. Les créneaux issus du modulateur sont de durées assez longues par rapport aux durées des impulsions finales afin de les assimiler à un rayonnement continu. Préalablement un modulateur de phase élargi les spectres des deux diodes afin de s'affranchir de l'effet Brillouin. Le dispositif expérimental présenté figure 4b. pour des longueurs d'ondes injectées de 1552.2 nm et 1560 nm et une valeur crête des créneaux de 7 W, après 900 m de propagation conduit au spectre présenté sur la figure 4.

Après filtrage de la composante la plus intense du spectre de sortie, un rayonnement continu de longueur d'onde 1691 nm est obtenu.

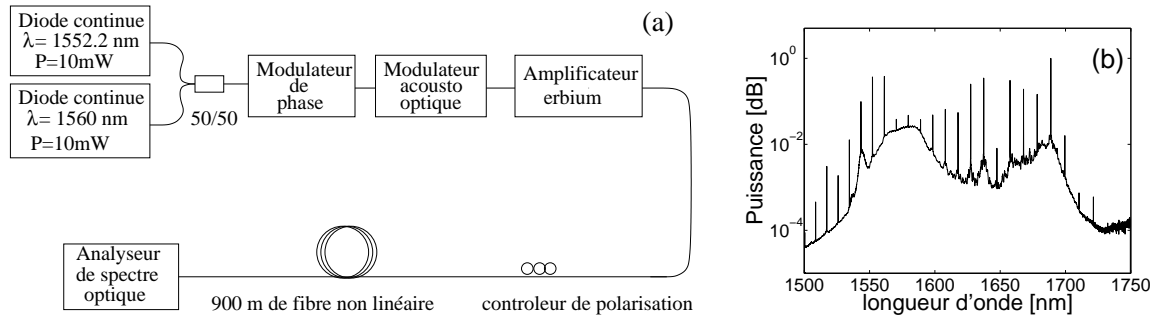


Fig.4. Dispositif (a) et résultat expérimental (b) du montage utilisant la compression de battement sinusoidal

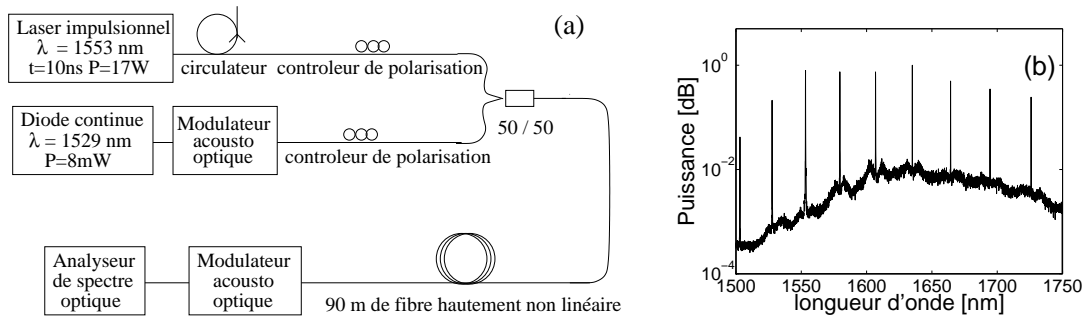
### 3.2 Instabilité modulationnelle induite

Afin de générer un train d'impulsions au sein de notre fibre, un laser délivrant des impulsions de l'ordre de la dizaine de nanosecondes et de forte puissance crête est injecté, le rayonnement permettant d'induire l'instabilité est issu d'une diode laser de faible puissance, qui cette fois ne nécessite pas d'être amplifiée.

Un des résultats obtenus par cette méthode est reporté en figure 5b. L'écart en fréquence initial est plus important que dans le cas des expériences par battement (de l'ordre de 3 THz au lieu de 1 THz). Nous observons une répartition énergétique plus homogène que dans le cas du battement. Un filtre accordable adapté permettrait donc une accordabilité jusqu'à 1720 nm.

## 4 Conclusions

Nous avons montré par simulations numériques et par deux montages expérimentaux qu'il est possible d'obtenir un peigne de fréquences de longueur d'onde centrale accordable, avec pour rayonnement initial deux ondes continues. La compression d'un battement sinusoidal ou l'instabilité modulationnelle induite transforment les rayonnements initiaux en un train d'impulsions dont la longueur d'onde centrale est décalée par effet Raman intrapulse dans la suite de la propagation. De plus, ces phénomènes ont lieu au sein d'une même fibre hautement non linéaire, sans changement de milieu de propagation et donc



**Fig.5.** Dispositif (a) et résultat expérimental (b) du montage utilisant l'instabilité modulationnelle induite

de pertes. Ces techniques offrent une nouvelle possibilité pour obtenir des sources continues ou quasi continues accordables. En effet, grâce à un filtre adapté, nous pouvons sélectionner une composante spectrale et ainsi créer une source continue. Ces dispositifs présentent de plus l'avantage d'être réalisés avec du matériel courant dans les laboratoires d'optique, ce qui les rend reproductibles. La résolution numérique donne un bon accord qualitatif avec les résultats expérimentaux et permet de définir les domaines de paramètres de fonctionnement. Toutefois et afin d'obtenir un accord quantitatif, l'aspect vectoriel de la propagation et les transferts d'énergie entre les axes optiques pourraient être envisagés. De même l'addition des termes supérieurs de dispersion à l'équation de Schrödinger permettraient d'affiner encore l'étude.

Pour conclure, cette étude a donc abouti à des décalages expérimentaux atteignant une centaine de nanomètres avec une cinquantaine d'harmoniques entre les pompes et la longueur d'onde décalée.

## Références

1. J. FATOME ET AL., 20-GHz-to-1-THz Repetition Rate Pulse Sources Based on Multiple Four-Wave Mixing in Optical Fibers, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **42** (10), 1038-1046 (2006).
2. A. HASEGAWA, Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers, *Optics Letters*, **9**(7), 288-290 (1984)
3. F. M. MITSCHKE & L. F. MOLLENAUER, Discovery of the soliton self-frequency shift, *Optics Letters*, **11** (10), 659-661 (1986).
4. J. P. GORDON, Theory of the soliton self-frequency shift, *Optics Letters*, **11** (10), 662-664 (1986).
5. P. V. MAMYSEV ET AL., Generation of a high-repetition-rate train of practically noninteracting solitons by using the induced modulational instability and Raman self-scattering effects, *Optics Letters*, **15** (23), 1365-1367 (1990).
6. G. P. AGRAWAL, Nonlinear Fiber Optics third edition, *Academic, Boston*, (2001)

# Écoulement turbulent dans un cylindre : haut nombre de Reynolds et fluctuations à basse fréquence

Michaël Berhanu, Nicolas Mordant, & Stephan Fauve

Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, CNRS UMR 8550  
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France  
mberhanu@lps.ens.fr

**Résumé.** On présente une caractérisation expérimentale d'un nouvel écoulement, dans une géométrie originale : dans un cylindre on utilise quatre hélices décentrées par rapport à l'axe du cylindre produisant chacune des vortex instationnaires en compétition. Ce dispositif en engendrant un écoulement non axisymétrique apporte une évolution importante par rapport aux écoulements fermés dits de Von-Karman, étudié entre autre par l'équipe GIT du CEA Saclay [1,2] et pour lesquels plusieurs expériences de magnétohydrodynamique turbulente ont été effectuées [4,5]. Par des mesures de vélocimétrie doppler ultrasonore et de vélocimétrie doppler laser, on observe un écoulement pleinement turbulent, présentant un fort taux de fluctuations. On peut définir un écoulement moyen sur le temps de mesure, mais celui-ci n'est pas représentatif de l'écoulement à un instant donné. Le fort taux de fluctuations turbulentes induit alors dans le spectre de puissance de vitesse beaucoup d'énergie à basse fréquence. On observe pour un forçage stationnaire une cascade inertielle commençant typiquement à un dixième de la fréquence d'injection, pour un nombre de Reynolds de  $10^5$ . Ainsi on retrouve le comportement de la turbulence homogène isotrope de type Kolmogorov 41 à des échelles de temps et d'espace plus grandes que dans le cas de la plupart des écoulements turbulents étudiés couramment. L'écoulement devrait produire de plus grandes fluctuations du champ magnétique induit.

**Abstract.** An experimental characterization of a new flow in an original geometry is presented : in a cylinder we use four propellers out of center with respect to the axis of the cylinder. One produces each non stationary vortices in competition. This device by producing a nonaxisymmetric flow brings an important evolution compared to the closed flows known as of Von-Karman, studied amongst other things by team GIT of the CEA Saclay [1,2] and for which several experiments of turbulent magnetohydrodynamics were carried out [4,5]. By measurements of ultrasonic Doppler velocimetry and laser Doppler velocimetry, a fully turbulent flow is observed, showing a strong rate of fluctuations. One can define an average flow over the time of measurement, but it is not representative of the instataneous flow. The power spectrum of the velocity shows the presence of large fluctuations below the forcing frequency and a inertial cascade begins at a tenth of the injection frequency. Thus we find a statistically homogeneous and isotropic turbulent flow at scales larger in previous studied flow geometries. We expect that this flow will generate much larger fluctuations of induced magnetic field.

## 1 Introduction

Pour comprendre le phénomène de turbulence hydrodynamique, des études expérimentales de mécanismes fondamentaux demeurent nécessaires. Or la plupart des expériences menées jusqu'à présent, ont été réalisées dans des souffleries, des jets ou des tuyaux, pour lesquels la turbulence est en quelque sorte une perturbation qui s'ajoute à un fort écoulement moyen unidirectionnel. Il paraît donc légitime d'étudier dans des volumes fermés des écoulements pleinement turbulent, où la part de l'écoulement moyen sera réduite. Les premières études exhaustives furent effectuées en France vers 1990 [7,8,6] sur l'écoulement dit de Von Karman produit par la contrarotation de deux disques sur les deux faces opposées d'un cylindre rempli de fluide. Plus récemment une étude complète avec en particulier la cartographie de l'écoulement moyen obtenu a été effectuée dans l'équipe de François Daviaud au CEA Saclay [1,2]. Il a été montré en particulier que pour des nombres de Reynolds de l'ordre de  $10^5$  et pour un taux de fluctuations de l'ordre de l'unité, l'écoulement moyen n'est pas représentatif de l'écoulement instantané, mais résulte de l'intégration sur des temps longs, c'est à dire grands devant l'inverse de la fréquence de rotation, typiquement la seconde. L'énergie à basse fréquence de l'écoulement, se révèle sur les spectres de puissance de la

vitesse par une décroissance en  $f^{-1}$  en dessous de la fréquence de rotation des disques. Nous proposons dans cet article une évolution importante par rapport à ces travaux antérieurs, en présentant des mesures hydrodynamiques pour un nouvel écoulement en eau obtenu par la rotation de quatre hélices dans un cylindre (deux par face du cylindre), chacune étant décentrée par rapport à l'axe du cylindre. Une étude intermédiaire avait été réalisée avec deux hélices et avait permis de tirer les premières caractéristiques des écoulements réalisables dans cette géométrie [3]. L'objectif principal du dispositif expérimental est d'étudier la turbulence magnétohydrodynamique en remplissant le cylindre d'un métal liquide, du gallium. Le but est d'étudier l'effet d'induction magnétique d'un écoulement pleinement turbulent pour différents types de champs extérieurs. Il a alors paru plus aisé de faire toute l'étude hydrodynamique préalable avec le même dispositif expérimental, mais en le remplissant avec de l'eau. En effet pour des régimes pleinement turbulents et pour des champs magnétiques usuels, les propriétés hydrodynamiques, dépendront de la vitesse de forçage, de la géométrie et non de la nature du fluide utilisé. Or l'équation d'évolution du champ magnétique dite de l'induction s'écrit comme la somme d'un terme d'advection du champ magnétique (le terme de création) et un terme de diffusion, qui traduit la dissipation par effet Joule des courants induits. On peut alors définir une diffusivité magnétique  $\nu_m$  valant  $0.2 m.s^{-2}$  pour le gallium. Par conséquent les petites échelles du champ magnétique diffuseront rapidement. Or pour des fluctuations induites par la turbulence, aux petites structures spatiales correspondent de petites structures temporelles. De même les variations temporelles rapides seront amorties par effet Joule. Ainsi pour une puissance fournie donnée, pour obtenir le maximum d'effet d'induction électromagnétique par les fluctuations turbulentes, il faut que le champ de vitesse ait beaucoup d'énergie à basse fréquence.

## 2 Dispositif expérimental et techniques expérimentales utilisées.

On utilise une enceinte en acier inoxydable cylindrique verticale de rayon intérieur 102 mm et de hauteur 240 mm, pouvant être réglée en température. Pour permettre une visualisation directe de l'écoulement en eau et pour réaliser des mesures optiques, on peut remplacer la paroi latérale par un tube de plexiglass. Pour les mesures ici présentées on place deux hélices sur une face, le long d'un diamètre dans des ouvertures situées à 50 mm du centre, tandis que les deux autres hélices sont placés de manière symétriques sur la face opposée.

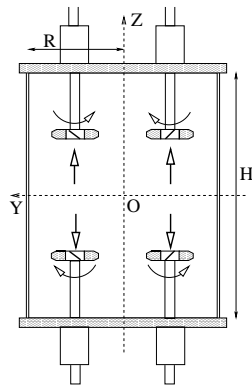


Fig.1. Schéma de la cuve vue de face

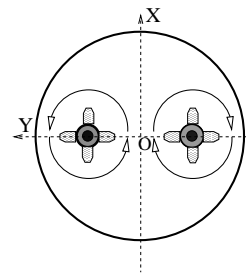


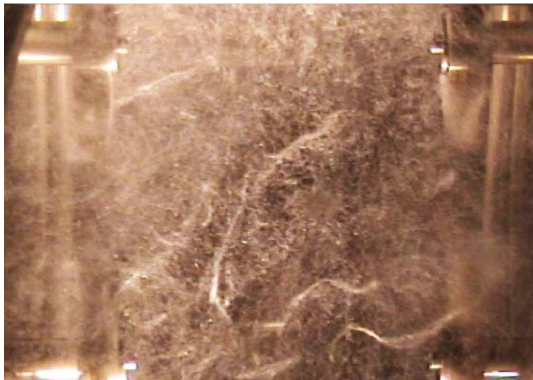
Fig.2. Schéma de la cuve vue de dessus

L'entraînement est assuré par quatre moteurs à courant continu, chacun étant censé transmettre une puissance maximale de l'ordre de 2 kW au fluide. Un jeu de poulie et de courroies permet d'entraîner les hélices à une fréquence double de celle des arbres moteurs. On utilise des hélices plongeant à 50 mm du bord de cuve comportant chacune quatre pales de 35 mm de longueur formant un angle de  $45^\circ$ . La mise en mouvement inertielle du fluide produit au voisinage d'une hélice un champ de vitesse fortement hélicitaire, où l'effet de pompage sera du même ordre de grandeur que l'effet de rotation. Lorsqu'une seule

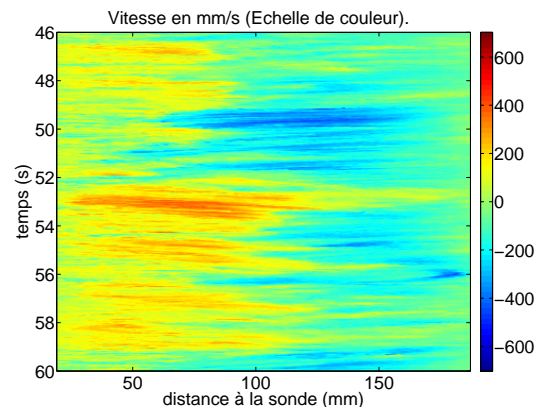
hélice tourne dans le sens où le fluide est aspiré à partir du centre de la cuve, il se forme un tourbillon intense accroché aux pales et qui se place en moyenne en diagonale dans le cylindre. , de sorte qu'au coeur de l'écoulement l'hélicité soit nulle en moyenne. Deux hélices d'un même pas se font face verticalement et deux hélices de pas différents sont opposées en diagonale. On a choisi de s'intéresser aux cas où les vitesses des quatre hélices sont égales. On présente ici les mesures correspondants à des sens de rotation où les quatre hélices tournant à la même vitesse aspirent du fluide de manière à produire des vortex en compétition produisant des instabilités à grande échelle et à basse fréquence. Cette situation est assez analogue au cas où deux écoulements de Von Karman auraient été accolés. Pour réaliser cette étude hydrodynamique, différentes techniques expérimentales ont été utilisées. On ne détaille pas ici le principe physique et l'intérêt des différents types de mesures et on peut trouver les informations à ce propos dans les références [3,1] et [2]. On a effectué de manière qualitative des visualisations directes de l'écoulement, en filmant le mouvement de bulles d'air dans le fluide. Ensuite des mesures de vitesse de l'écoulement ont été effectuées par vélocimétrie ultrasonore doppler en utilisant un appareil DOP1000 prêté par l'équipe d'Yves Couder du laboratoire MSC. Cette technique utilisable à basse vitesse seulement, mesure le long d'un faisceau ultrasonore, la vitesse longitudinale de particules advectées par effet Doppler. On obtient ainsi l'évolution temporelle de profils spatiaux du champ vitesse. Puis on a utilisé un dispositif d'anémométrie Laser doppler, prêté par l'équipe de François Daviaud du CEA Saclay. Au point de convergence de deux faisceaux lasers, on mesure à nouveau le passage de particules advectées, dont on déduit la vitesse perpendiculaire aux franges d'interférences par effet Doppler.

### 3 Propriétés générales et géométrie à grande échelle de l'écoulement

L'écoulement est étudié pour une fréquence de rotation typique des hélices de 20 Hz, ce qui permet de réguler facilement la température autour de 25°C, et d'éviter la cavitation. On obtient une vitesse de bord de pales de 4.40 m/s. La cartographie du champ de vitesse dans ces conditions donne une vitesse moyenne caractéristique de 0.34 m/s pour un écart type de 0.72 m/s, soit un ordre de grandeur de vitesse de 0.80 m/s. Le nombre de Reynolds calculé sur le bord de pales vaut 150000, tandis que celui calculé sur le diamètre du cylindre donne 160000. Le nombre de Reynolds de l'écoulement, varie selon les expériences entre 35000 et 300000.



**Fig.3.** Instantané de l'écoulement ensemencé de bulles pour une fréquence de rotation de 30 Hz.



**Fig.4.** Diagramme spatio temporel obtenu par vélocimétrie ultrasonore pour une fréquence de rotation de 5 Hz :  $V_X$  en fonction de  $X$ .

Des mesures du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ont été effectuées avec du Gallium en mesurant la dérive thermique de la cuve. Pour une fréquence de 20 Hz, et 47, 30 kg de gallium , on dissipe 320 W, soit  $\epsilon = 6.7 W s^{-1} kg^{-1}$ , qualitativement en accord avec la loi d'échelle  $\epsilon \sim \frac{u^3}{L}$  en prenant

le rayon de la cuve pour  $L$ . Cette mesure de dissipation, constitue d'ailleurs un ordre de grandeur de l'échelle intégrale  $L_I$  de la turbulence, qui s'identifie à la taille des plus gros tourbillons, soit  $L_I = 80 \text{ mm}$ .

La première étape de notre travail a été de filmer l'écoulement ensemencé de bulles d'air. Elles sont à la fois advectées par l'écoulement et aussi se concentrent sur les coeurs de tourbillons, qui sont des zones de basse pression. On visualise ainsi nettement l'évolution de ces vortex, en présence du champ de vitesse turbulent. Les écoulements ici présentés se révèlent très chahutés avec en particulier la présence continue de tourbillons instationnaires, qui partant d'une des hélices, croissent, se tordent et disparaissent sur des temps de l'ordre de la seconde. Chacune des hélices tend à créer un tourbillon, mais celui-ci une fois créé, interagit de manière complexe avec l'écoulement des autres hélices, ainsi qu'avec la paroi. Ce choix de forçage stationnaire par des hélices en compétition permet donc d'avoir à l'échelle de la cuve structures cohérentes tourbillonnaires évoluant chaotiquement. Or cette image est souvent invoquée pour expliquer la dynamique à petite échelle de la turbulence en invoquant la vie et la mort de filaments de vorticité en interaction non linéaire. Ces visualisations permettent d'espérer d'avoir en quelque sorte reproduit la dynamique turbulente sur tout le volume, alors que l'échelle d'injection est dix fois plus faible. La vélocimétrie ultrasonore permet de tracer le diagramme-spatio temporel (Fig. 4) du profil de vitesse longitudinal selon la direction  $X$  dans le plan médian au cours du temps à une fréquence. Le résultat est un profil certes fluctuant sur des temps de l'ordre de la dizaine de seconde pour une fréquence de rotation de 5 Hz, mais il apparait néanmoins un profil moyen. Les mesures de vélocimétrie laser confirment ce résultat. En effet dans le but de faire une cartographie sommaire de ces écoulements, les trois composantes signal de vitesse ont été enregistrées pour des points répartis sur une grille régulière centrée sur le centre du cylindre et représentant 10 % environ du volume de la cuve, pour une fréquence de rotation de 20 Hz, pendant un temps de l'ordre de la minute. On a pu ainsi avoir une idée de la géométrie du champ de vitesse en calculant pour ces points la valeur moyenne et l'écart type.

Les valeurs obtenues en moyenne sur tous les points de la grille sont :

- $\langle V_x \rangle = 0.41 \text{ m/s}$ ,  $\langle V_y \rangle = 0.26 \text{ m/s}$  et  $\langle V_z \rangle = 0.36 \text{ m/s}$  ;
- $\sigma_{V_x} = 0.87 \text{ m/s}$ ,  $\sigma_{V_y} = 0.60 \text{ m/s}$  et  $\sigma_{V_z} = 0.69 \text{ m/s}$ .

Le champ de vitesse moyen correspond à l'écoulement de pompage dû à l'aspiration des hélices. Dans le plan médian, le flot converge par la composante  $V_X$  vers le centre, où on a un point de stagnation, pour repartir en direction des hélices, le rebouclage du champ de vitesse se faisant en dehors de la grille. Par contre il ne reste que très peu de traces de la rotation des hélices et bien entendu les tourbillons, instationnaires, disparaissent en moyenne. Ils ont sans doute un rôle sur la dynamique du champ de vitesse, particulièrement à basse fréquence, mais ils n'ont pas d'effet coopératif agissant sur l'écoulement moyen. Le taux de fluctuation par rapport à l'écoulement moyen est de l'ordre de 2, donc l'écoulement instantané est toujours très éloigné de l'écoulement moyen. On retrouve une situation analogue à l'écoulement de Von-Karman mais pour une zone plus étendue et avec moins d'anisotropie.

## 4 Dynamique de l'écoulement

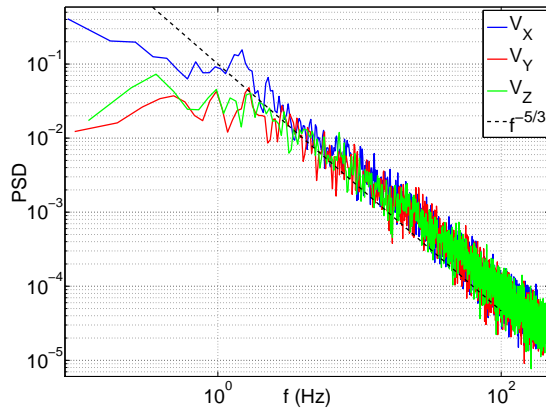
Pour caractériser la dynamique temporelle de l'écoulement, il apparait naturel d'étudier le spectre de puissance temporel du signal de vitesse. Les mesures ultrasonores permettent de mesurer une seule composante de vitesse et sont très limitées dans leur résolution temporelle, car leur fréquence d'échantillonnage est de 23 Hz. Les mesures lasers ont le défaut de ne pas être échantillonnées régulièrement. Par conséquent il a fallu pour des mesures présentant le nombre maximal de points soit 1900000, réinterpoler le signal à une fréquence de l'ordre de 100 Hz, soit 10 fois moins que la fréquence moyenne d'acquisition. Les spectres de vélocimétrie laser et ultrasonore sont alors très semblables et présentent au centre de la cuve une zone inertielle s'étendant du dixième de la fréquence de rotation des hélices à la fréquence maximale avec un comportement en  $f^{-5/3}$ , les trois composantes se superposant exactement. A plus basse fréquence, le spectre devient plus plat avec un comportement distinct des composantes. Pour un point avec davantage d'écoulement moyen, la zone inertielle descend alors au cinquième de la fréquence de rotation des hélices.

En supposant la turbulence homogène et isotrope, l'analyse dimensionnelle permet de prédire la forme des spectres de puissance de vitesse dans la zone inertielle :  $E_S(k) = \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3}$  pour le spectre spatial

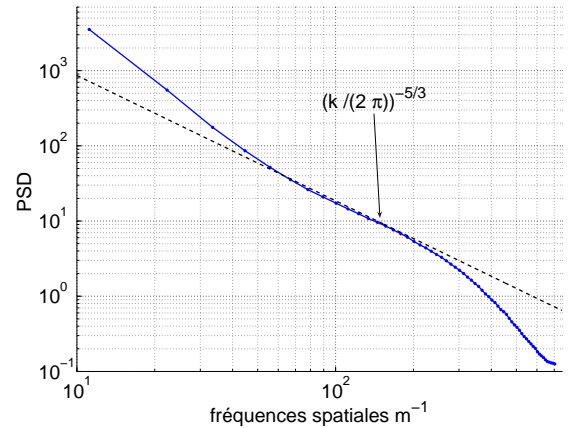


en fonction du nombre d'onde  $k$  et  $E_T(k) = \langle \epsilon \rangle f^{-2}$  pour le spectre temporel. Or expérimentalement les spectres temporel de vitesse obtenues à partir d'une mesure eulérienne, produisent un comportement en  $f^{-5/3}$ . L'argument classique dû à Taylor, particulièrement adaptée au cas des souffleries, consiste à considérer l'écoulement est gelé sur des durées inférieures au temps de mémoire de la turbulence; les variations temporelles mesurées en un point sont produites par le transport des inhomogénéités locales par l'écoulement moyen et on obtient la loi en  $-5/3$ . Mais dans notre situation où les fluctuations dominent l'écoulement moyen, l'hypothèse de Taylor devrait être fautive. La correspondance entre l'espace et le temps du champ de vitesse s'avère plus subtile. On peut penser [11,9,10] que l'advection par le champ de vitesse fluctuant permette en régime stationnaire de retrouver une correspondance valable statistiquement entre les incréments spatiaux et temporels du champ de vitesse faisant intervenir l'écart type de la vitesse, d'où la forme suivante :  $E_T(k) = \langle \epsilon \rangle^{2/3} u^{2/3} f^{-5/3}$  avec  $u$  la vitesse quadratique moyenne. Comme la décroissance en fonction de  $f$  de  $f^{-2}$  est plus rapide que  $f^{-5/3}$ , le comportement observé du spectre temporel, du moins à haute fréquence correspond à celui provenant de l'hypothèse de Taylor modifiée ou de balayage, suggérée par Tennekes. Nous l'observons dans nos mesures bien en deçà de la fréquence d'injection, celle de rotation des hélices. Ceci constituerait un résultat nouveau car la zone inertielle est alors observée pour des fréquences inférieures à la fréquence d'injection.

Enfin la vélocimétrie ultrasonore permet de tracer des spectres spatiaux longitudinaux de la vitesse  $V_X$  mais pour une fréquence de rotation de 5 Hz. On obtient alors à nouveau en moyennant sur la durée d'acquisition, un comportement en  $k^{-5/3}$  pour des nombres d'onde compris entre 40 et 250  $m^{-1}$ . La pente est plus raide pour les plus basses fréquences spatiales, confirmant que l'énergie est injectée aux plus grandes échelles du spectre correspondant à des tailles comparables à l'expérience. Aux plus petites échelles, il semble qu'on tombe dans la limite de résolution spatiale, d'où une perte plus rapide du signal. Cette mesure confirme donc les résultats précédents.



**Fig.5.** Spectre temporel de vélocimétrie laser doppler pour une fréquence des hélices de 20 Hz.



**Fig.6.** Spectre spatial obtenu par vélocimétrie ultrasonore pour une fréquence des hélices de 5 Hz,  $V_X$  en fonction de  $X$ .

On peut s'intéresser aussi à ce qu'on nomme parfois le temps de mémoire de la turbulence, durant lequel le signal de vitesse est cohérent et qui est de l'ordre de  $L_I/u$ .

La fonction d'autocorrélation temporelle de la vitesse, donne au centre un temps de corrélation, de 0.13 s pour 20 Hz avec la vélocimétrie laser et 0.32 s pour 5 Hz pour l'ultrasonore, ce qui correspond à 1.2 Hz et 0.5 Hz dans l'espace des fréquences. Ainsi il semble que la fréquence correspondant approximativement au dixième de la fréquence de forçage, s'identifie à ce temps de mémoire. Aux fréquences plus basses, ce sont les instationnarités intrinsèques de l'écoulement qui comptent. Au dessus, par l'idée de balayage et de turbulence gelée, c'est l'advection de l'inhomogénéité du champ de vitesse qui compte [11,10].

## 5 Conclusion

L'écoulement étudié se caractérise, donc par de fortes fluctuations de vitesse à basse fréquence de l'énergie du champ de vitesse, un des buts recherchés du point de vue magnétohydrodynamique. Mais on observe que la dynamique à basse fréquence reste turbulente, jusqu'au dixième de la fréquence d'injection. Nous pensons que l'interaction compétitive des tourbillons provenant des hélices entre eux et avec la paroi, créé un forçage effectif sur une échelle qui est de la taille de la cuve et non celle de l'hélice. De ce fait on obtient ainsi une observation d'une turbulence classique à une échelle mieux résolue à l'observation, tout en gardant un forçage stationnaire. Enfin cette expérience permet ainsi de relancer la question du rôle des tourbillons dans la dynamique turbulente, puisqu'il suffit de créer des tourbillons à grande échelle, pour étendre la zone de turbulence développée vers les basses fréquences et les grandes échelles.

## Références

1. L. MARIÉ, Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent : influence de la rotation magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium *Thèse de doctorat*, (1) (2003).
2. F. RAVELET, Bifurcations globales et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Karman turbulent. *Thèse de doctorat*, (2005).
3. M. BERHANU, Hydrodynamique dans un cylindre d'un écoulement généré par deux hélices décentrées. *Stage de Master 2*, (2005).
4. P. ODIER, J.-F. PINTON & S. FAUVE, Advection of a magnetic field by a turbulent swirling flow, *Physical Review E*, **58** (6), 7397-7400 (1998).
5. R. VOLK, F. RAVELET, R. MONCHAUX, M. BERHANU, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, PH. ODIER, J.-F. PINTON, S. FAUVE, N. MORDANT & F. PÉTRÉLIS, Transport of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium *Physical Review Letter*, **97** (7), 74501-74505 (2006).
6. S. FAUVE, C. LAROCHE & B. CASTAING, Pressure-fluctuations in swirling turbulent flows, *Journal de physique II*, **3** (3), 271-278 (1993).
7. S. DOUADY, Y. COUDER & M.E. BRACHET, Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence *Physical Review Letters*, **67** (8), 983-986 (1991).
8. J. MAURER, P. TABELING & G. ZOCCHI, Statistics of turbulence between 2 counterrotating disks in low-temperature helium gas, *Europhysics Letters*, **26** (1), 31-36 (1994).
9. M. NELKIN, Universality and sclaing in fully developed turbulence *Advances in physics*, **43** (2), 143-181 (1994).
10. H. TENNEKES & J. L. LUMLEY, A first Course in Turbulence *The MIT Press*, 1972.
11. L. CHEVILLARD, S.G. ROUX, E. LÉVÊQUE, N. MORDANT, J.F. PINTON & A. ARNÉODO, Intermittency of Velocity Time Increments in Turbulence, *Physical Review Letters*, **95** (1), 64501-64505 (2005).

# Auto-organisation et chaos spatio-temporel pour un modèle proie-prédateur avec diffusion

Baba Issa Camara & M.A. Aziz Alaoui

Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre, Université du Havre, BP 540  
76058 Le Havre Cedex, FRANCE  
babaissa@yahoo.fr & aziz.alaoui@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Nous étudions ici un système proie-prédateur qui prend en compte l'évolution de la distribution spatiale de deux populations. Il s'agit d'analyser un modèle mathématique représentant les dynamiques spatio-temporelles de deux espèces. Ces dynamiques paramétrées par des variables de contrôle, dépendent aussi des conditions initiales. Dans la première partie du travail nous présentons le modèle en déterminant les conditions d'existence de solution stables. La seconde partie est consacrée à l'étude des bifurcations. Enfin, dans la troisième partie nous étudions l'émergence de motifs.

**Abstract.** The dynamic relationship between species are at heart of many important ecological and biological processes. Predator-prey dynamics are a classic and relatively well-studied example of interactions. In this paper we consider a system of in which only basic qualitative features of the system are known, namely the invasion of a prey population by predators. The local dynamics has been studied in [1] and [5], see also [2,3,4]. We assume now that both predators and prey move in space, we represent the mathematical model by reaction-diffusion equations. It is a type of spatiotemporal model most commonly used in ecology an biology. We focus on mechanisms responsible for transitions between different kind of dynamics and the identification of factors that can potentially enhance or suppress chaos and give rise to orgaization and patterns.

## 1 Modèle mathématique et stabilité asymptotique

La conservation des densités de proies et prédateurs est régie par une équation de réaction-diffusion couplée avec une réponse fonctionnelle qui traduit la dynamique locale des espèces. La fonction réponse considérée est une version modifiée de Holling Tanner [1]. Le modèle mathématique s'écrit,

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial T} = D_1 \Delta H + (a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1}) H \\ \frac{\partial P}{\partial T} = D_2 \Delta P + (a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2}) P, \end{cases} \quad (1)$$

La dynamique locale est donnée par les équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{dH}{dT} = (a_1 - b_1 H - \frac{c_1 P}{H + k_1}) H \\ \frac{dP}{dT} = (a_2 - \frac{c_2 P}{H + k_2}) P, \end{cases} \quad (2)$$

$H$  et  $P$  représentent les densités de proies et prédateurs à l'instant  $T$  à la position considérée.  $\Delta H$  (resp  $\Delta P$ ) est le laplacien appliqué à la densité de proies (resp prédateurs).  $a_1$  (resp.  $a_2$ ) est le taux de croissance de la proie (resp. du prédateur).  $b_1$  mesure la mortalité due à la compétition entre les individus de l'espèce  $H$ .

$c_1$  (resp.  $c_2$ ) est la valeur maximale que le taux de réduction par individu  $H$  (resp.  $P$ ) peut atteindre.  $k_1$  (resp.  $k_2$ ) mesure la protection dont la proie  $H$  (resp. le prédateur  $P$ ) bénéficie grâce à l'environnement, (voir [1,2] pour plus de détails).

Pour étudier le problème nous réduisons le nombre de paramètres par le changement de variable suivant :

$$t = a_1 T, \quad u(t) = \frac{b_1}{a_1} H(T), \quad v(t) = \frac{c_2 b_1}{a_1 a_2} P(T), \quad x = X \left( \frac{a_1}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y = Y \left( \frac{a_1}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$a = \frac{a_2 c_1}{a_1 c_2}, \quad b = \frac{a_2}{a_1}, \quad e_1 = \frac{b_1 k_1}{a_1}, \quad e_2 = \frac{b_1 k_2}{a_1}, \quad \delta = \frac{D_2}{D_1} \quad (4)$$

Les équations spatio-temporelles deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(1-u) - \frac{auv}{u+e_1} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \Delta v + b \left(1 - \frac{v}{u+e_2}\right) v, \end{cases} \quad (5)$$

Tandis que les équations locales s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \frac{auv}{u+e_1} \\ \frac{dv}{dt} = b \left(1 - \frac{v}{u+e_2}\right) v, \end{cases} \quad (6)$$

Notons que tout point d'équilibre de (6) l'est aussi pour (5). Notons aussi que (6) admet un unique point d'équilibre  $(u^*, v^*)$  non trivial dans la région du plan  $(u > 0, v > 0)$ .

**Théorème :** Si les conditions suivantes sont vérifiées,

$$\begin{cases} 1 \leq e_1 \leq e_2 \\ \left( \frac{\delta}{u^* + e_1} [2u^{*2} + (e_1 - 1)u^*] + b \right)^2 \leq \frac{4\delta b u^*}{u^* + e_1} (2u^* + a + e_1 - 1) \end{cases} \quad (7)$$

alors le point d'équilibre  $(u^*, v^*)$  est globalement asymptotiquement stable pour le système (5)

Pour la preuve voir [5].

**Remarque 1 :** La relation  $e_1 \leq e_2$  signifie que le milieu écologique supporte une plus grande quantité de prédateurs que de proies. La deuxième inéquation de (7) sert à exclure la manifestation d'une instabilité de Turing pour certaines valeurs du coefficient de diffusion  $\delta$ . En effet si cette inéquation n'est pas vérifiée alors le point d'équilibre  $(u^*, v^*)$  stable pour le système (5) devient instable pour (6), voir [4].

## 2 Bifurcations et chaos dans le cas où l'espace est de dimension 1

Nous présentons dans cette partie les résultats de notre simulation numérique. Le domaine spatial considérée est  $D = [0, L]$ . Pour l'approximation numérique, nous combinons la méthode de Crank-Nicolson avec le schéma de Runge-Kutta. Afin de mieux représenter le problème d'invasion, nous considérons la

condition initiale avec un flux nul au bord.

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{sur } [L_1u, L_2u] \text{ avec } 0 < L_1u < L_2u < L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} v_0 & \text{sur } [L_1v, L_2v] \text{ avec } 0 < L_1v < L_2v < L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

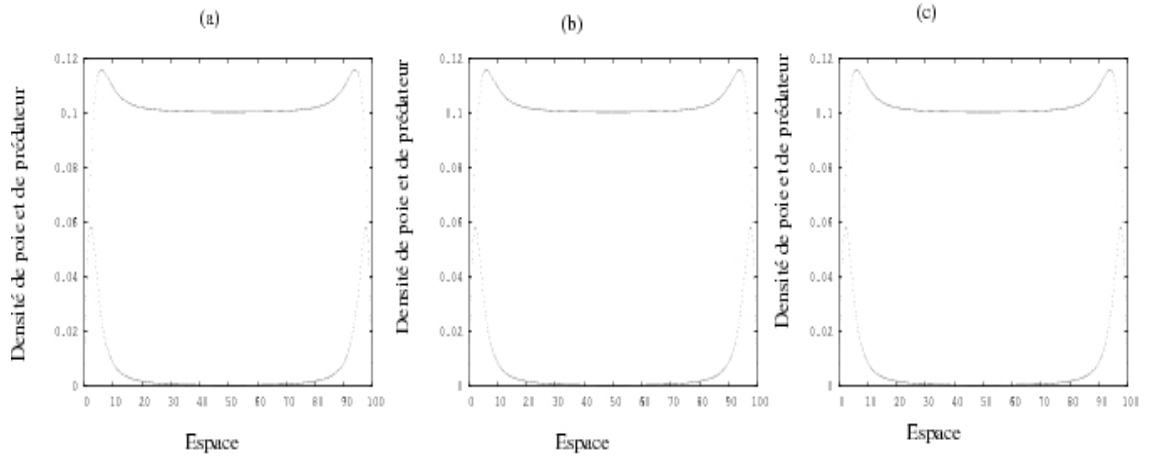
Notons que  $0 < L_1u < L_1v < L_2v < L_2u < L$ .

Nous avons choisi les paramètres et la condition initiale de telle sorte qu'aucune espèce ne disparaît. En fait, si le domaine est petit et/ou la densité des espèces est faible, on observe une extention des populations. Cette propriété porte le nom de "effet Allee" [4]. Pour notre système, elle se manifeste par exemple pour les paramètres et les conditions initiales suivantes :

$$e_1 = 0.08, e_2 = 0.01, b = 0.2, a = 3.0, u_0 = 0.08, v_0 = 0.01, \delta = 1$$

Posons maintenant,

$$\begin{aligned} e_1 = 0.08, e_2 = 0.01, b = 0.2, a = 3.0, u_0 = 1.0, v_0 = 0.1, L = 100, \\ L_1u = 40, L_1v = 48, L_2v = 56, L_2u = 60, a = 3.0, b = 0.256, \delta = 1 \end{aligned} \quad (10)$$

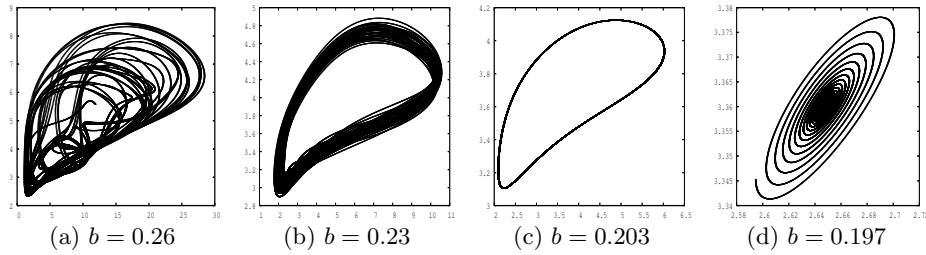


**Fig.1.** Distribution spatiale de la densité du système (2.5) avec les paramètres de (3.3) à différents instants.

La figure 1 est un exemple de répartition spatiale des populations observée aux instants  $t = 250$  (a),  $t = 750$  (b),  $t = 1200$  (c). Avec ces paramètres fixés, et ces distributions initiales, il y a deux pics au début et à la fin du domaine qui se forment dès les premiers instants de la simulation. Entre ces pics les densités restent et demeurent constantes au fil du temps. Des comportements similaires peuvent être observés pour des valeurs de  $b$  entre 0.19 et 2.7.

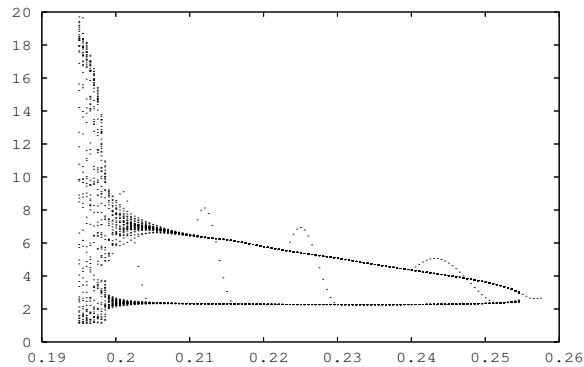
Pour mieux examiner les propriétés de la dynamique des populations, nous considérons les quantités totales de proie et de prédateurs en posant :

$$U(t) = \int_0^L u(x, t) dx, \quad V(t) = \int_0^L v(x, t) dx \quad (11)$$



**Fig.2.** Cascade sur le plan de phase  $(U, V)$ , conduisant à des oscillations chaotiques pour différentes valeurs de  $b$ .

L'objectif est d'étudier les propriétés des oscillations de la dynamique des populations quand on fait varier un paramètre de contrôle. Le choix de ce paramètre est alors autrement important. Dans le système (5), nous pouvons faire varier  $a$  ou  $b$ . Nous allons choisir  $b$  comme paramètre de contrôle puisqu'il détermine le rapport de deux facteurs que sont les taux de natalité de la proie et du prédateur. Donc, mis à part  $b$  qui variera entre 0.195 et 2.62 les autres paramètres seront fixés comme dans (10). Pour chaque valeur de  $a$  le système (5) est résolu avec les conditions initiales (8) et (9). Pour que les portraits de phase des quantités totales des espèces  $U$  et  $V$  soient dans l'attracteur, nous laissons un temps transitoire assez grand. Nous démarrons avec  $b = 0.26$ , valeur pour laquelle le système présente un foyer attractif dans  $(U, V)$ . On obtient le même portrait tant que le rapport des taux de natalité du prédateur sur la proie est supérieur à 0.255. Nous avons une première bifurcation quand ce quotient est égal 0.255. Lorsqu'il est compris entre 0.208 et 0.255 le système exhibe des oscillations périodiques (Fig. 2b). Une seconde bifurcation plonge la dynamique des espèces dans un attracteur quasi-périodique, pour des valeurs de  $b$  entre 0.199 et 0.208, (Fig. 2c). Enfin, pour  $b$  entre 0.199 et 0.208 elle devient chaotique (Fig. 2d).



**Fig.3.** Diagramme de bifurcations sur le plan de phase  $(U, V)$  en fonction du paramètre  $b$ .

Ces résultats se résument par le diagramme de bifurcation de la figure 3. Il est obtenu en calculant pour chaque valeur de  $b$  le portrait de phase  $(U, V)$ . Puis nous faisons une coupe de Poincaré dont le plan correspond à la valeur moyenne prise par  $V$  durant l'observation.

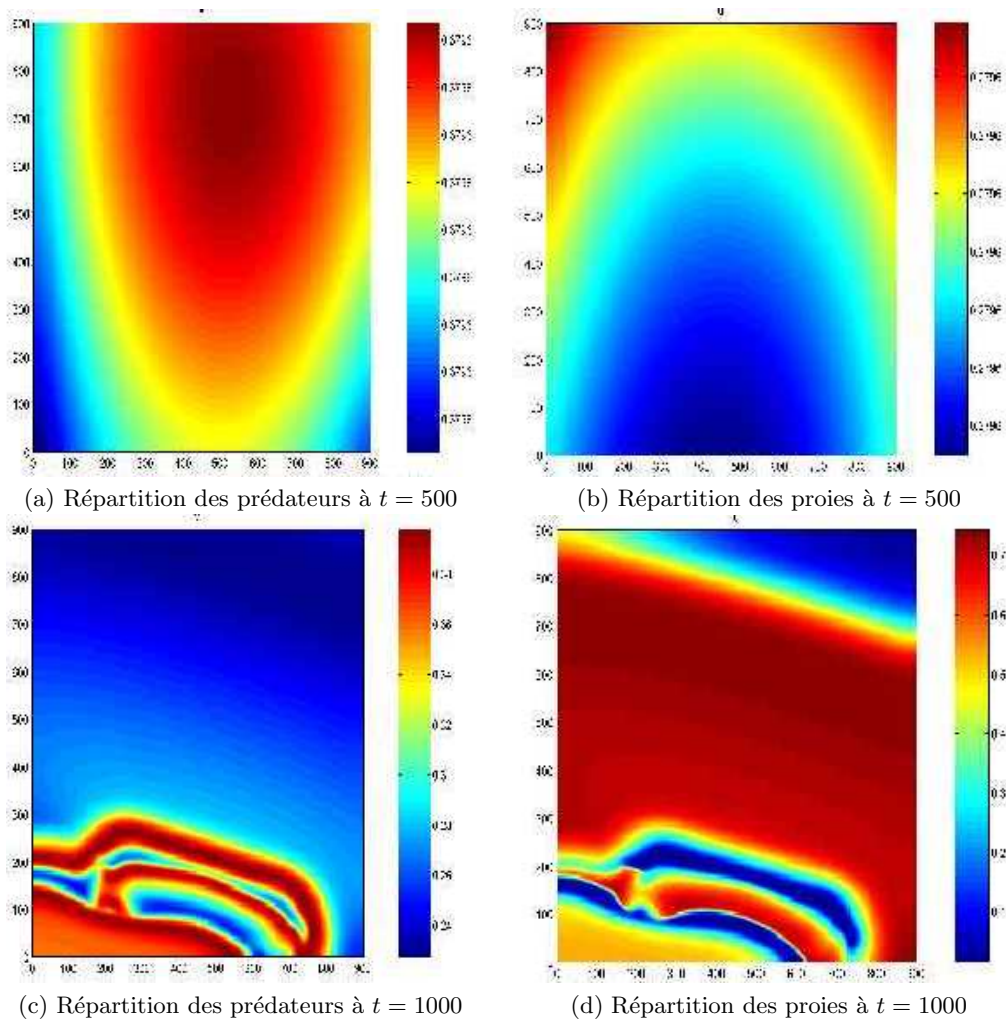
**Remarque 2 :** Les quantités  $U$  et  $V$  sont les sommes linéaires des densités locales  $u$  et  $v$  respectivement. Cependant, ces dernières ne manifestent pas d'oscillations irrégulières, alors que les quantités totales ont une dynamique chaotique pour certaines valeurs de  $b$ . Ainsi le Tout n'est plus la somme des parties dès que les interactions causales sont non linéaires (émergence de nouvelles propriétés).

### 3 Organisation et émergence dans le cas où l'espace est de dimension 2

Cette dernière partie est réservée à l'étude du problème sur le domaine borné  $D = [0; 900] \times [0; 900]$ . Nous nous intéressons aux structures émergentes dans le cas où l'équilibre  $(u^*, v^*)$  de (6) est instable.  $(u^*, v^*)$  devient aussi instable pour (5). Nous partons d'une condition initiale assez voisine de  $(u^*, v^*)$ , présentant une faible disparité de la répartition spatiale. Cette répartition spatiale initiale est donnée par :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^* - \epsilon(x - 450) * (y - 675) + \eta \\ v(x, 0) = v^* \end{cases} \quad (12)$$

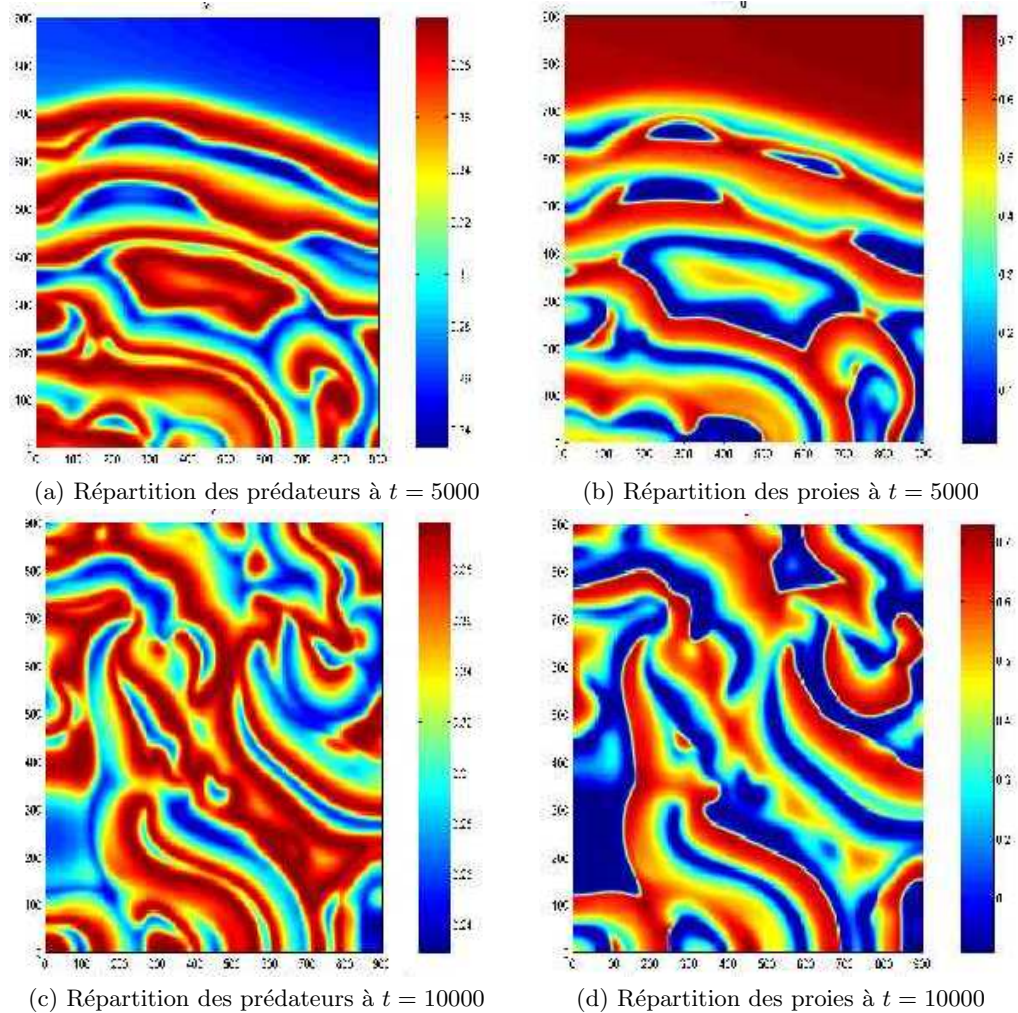
$$\epsilon = 2 \cdot 10^{-7}, \quad \eta = 1.2 \cdot 10^{-4}$$



**Fig.4.** Distribution spatiale des populations à  $t = 500$  et à  $t = 1000$ .

Il existe alors une valeur propre de la linéarisation de (5) qui va imprimer une vitesse maximale de croissance des espèces. Les effets nonlinéaires augmentent par conséquent. Avant d'atteindre le seuil important d'interactions, la distribution spatiale passe par une première phase de transition (Figs. 4a et

4b). Lorsque les effets nonlinéaires deviennent importants la structure presque homogène se brise pour laisser place à un motif spatial hétérogène. C'est la deuxième phase. Elle est illustrée par les figures 4c et 4d. La troisième phase est en fait la propagation locale puis globale de ces motifs (Fig. 5).



**Fig.5.** Distribution spatiale des populations dans le cas à  $t = 5000$  et à  $t = 10000$ .

## Références

1. M. A. AZIZ-ALAOUI & O. M. DAHER, Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-gower and Holling-type II schemes, *Applied Mathematical Letters*, **16** (7), 1069-1075, (2003).
2. M. A. AZIZ-ALAOUI, Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model, *Chaos, Solitons & Fractals*, **14** (8), 1275-1293, (2002).
3. C. LETELLIER & M. A. AZIZ-ALAOUI, Analysis of the dynamics of a realistic ecological model, *Chaos, Solitons & Fractals*, **13** (1), 95-107, (2002).
4. A. MOROZOV, S. PETROVSKII & BAI-LIAN LI, Bifurcations and chaos in a prey datorprey system with the Allee effect, *Proceedings of the Royal Society of London B*, **271**, 1407-1414 (2004).
5. M. A. AZIZ ALAOUI & B. I. CAMARA, *en préparation*.



# Dynamique non linéaire du modèle neuronal de Hindmarsh-Rose et synchronisation

Nathalie Corson & M. A. Aziz-Alaoui

Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre, Université du Havre, BP 540  
76058 Le Havre Cedex, FRANCE  
nathalie.corson@univ-lehavre.fr, aziz.alaoui@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Le modèle de Hodgkin-Huxley (HH), formé de quatre Equations Différentielles Ordinaire (E.D.O.), modélise la dépendance voltaïque justifiant l'activation et l'inactivation des canaux ioniques présents dans la membrane des neurones. La simplification de Hindmarsh-Rose (HR), grâce à des observations biologiques, conduit à un système de deux E.D.O., auquel ils ont ajouté une troisième équation modélisant le déclenchement et l'arrêt des poussées de potentiels d'action. Dans ce travail, nous présentons une étude numérique précise de la dynamique chaotique du système de HR en terme de diagrammes de bifurcations et de portraits de phases. En outre, l'étude de la synchronisation de deux systèmes de Hindmarsh-Rose couplés est réalisée, afin d'approcher les valeurs des paramètres pour lesquels la transmission du flux d'information entre deux neurones est optimale.

**Abstract.** This work addresses neuron mathematical models. The aim is first the understanding of the biological meaning of existing mathematical models concerning neurons such as Hodgkin-Huxley or Hindmarsh-Rose models. The local stability and the numerical asymptotic analysis of Hindmarsh-Rose model are then developed in order to comprehend the dynamic evolution of a single Hindmarsh-Rose neuron. This examination naturally leads to the study of neuron networks. The study of these networks uses the synchronization theory which shows the connexions between two neurons. This has been performed using numerical tools.

## 1 Introduction et modèle

### 1.1 Modèle de Hodgkin-Huxley (HH)

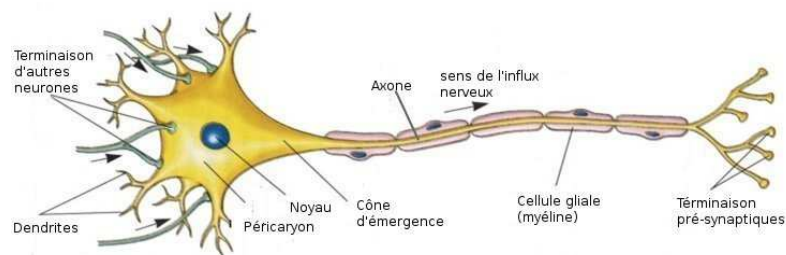


Fig.1. Un schéma de neurone.

L'information qui circule à travers un neurone se trouve sous forme de message électrique. En effet, dans la membrane d'un neurone se trouvent des canaux ioniques permettant une circulation d'ions entre l'extérieur et l'intérieur de celui-ci. Certains de ces canaux permettent le passage de tous les ions à tout moment, tandis que d'autres sont sélectifs à certains ions et peuvent être en position ouverte ou fermée. Cette découverte dans les années cinquante par les neurophysiologistes Hodgkin et Huxley les a conduit à l'écriture mathématique d'un système de quatre équations différentielles ordinaire (EDO), modélisant la circulation de l'influx nerveux, justifié par l'activation et l'inactivation de ces canaux ioniques. Les deux principaux courants ioniques pris en compte sont le courant sodique et le courant potassique.

Le but de Hodgkin et Huxley était de représenter les flux ioniques et les changements de perméabilité d'une membrane excitable en termes de mécanismes moléculaires. Ils ont donc décidé d'établir une description cinétique empirique assez simple pour "mesurer" des réponses électriques et suffisamment bonne pour prédire correctement les principales caractéristiques de l'excitabilité, comme l'allure du potentiel d'action, la vitesse de conduction ... Leur modèle comprend non seulement des équations mathématiques, mais donne également les caractéristiques principales des mécanismes biologiques de déclenchement.

Le courant ionique des axones a deux composants principaux, le courant sodique  $I_{Na}$  et le courant potassique  $I_K$ . Le modèle de HH présente des équations différentes pour les conductances  $g_{Na}$  et  $g_K$  des canaux à sodium et des canaux à potassium qui sont exprimées comme la conductance maximale  $\bar{g}_{Na}$  et  $\bar{g}_K$  multipliée par le coefficient compris entre zéro et un. Toutes les expériences montrent que  $g_{Na}$  et  $g_K$  évoluent graduellement en fonction du temps, sans changements brusques. Donc les coefficients doivent être des fonctions continues par rapport au temps.

Pour traverser la membrane, un ion est soumis à un gradient électrochimique, s'exprimant par la différence entre le potentiel de membrane et le potentiel d'équilibre de l'ion considéré. Ce passage d'ions, qui n'est ni plus ni moins qu'un courant électrique traversant la membrane cellulaire se fait dans le sens du gradient électrochimique de l'ion concerné proportionnellement à celui-ci.

Une telle cinétique serait obtenue si l'ouverture des canaux  $K$  était contrôlée par quelques particules indépendantes. Supposons donc qu'il y ait quatre particules identiques et que chacune puisse aller dans la bonne direction avec une probabilité  $n$ . La probabilité que les quatre particules se placent correctement est  $n^4$ .

L'ouverture des canaux  $K$  dépendant du potentiel de membrane, on suppose que ces particules théoriques portent une charge électrique qui implique que leur déplacement dans la membrane est *voltage-dépendant*. On suppose de plus que chaque particule bouge entre la position permissive et la position non permissive, en fonction du potentiel de membrane. Si la valeur initiale de  $n$  est connue, les valeurs que  $n$  prend par la suite peuvent être calculées en résolvant une équation différentielle simple :

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n$$

où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont les coefficients de passage entre les positions permissives et non permissives des particules  $n$ . Soit  $I_K$  le flux potassique, c'est à dire la quantité d'ions K qui circule à travers la membrane. Dans le modèle de HH,  $I_K$  est donné par :

$$I_K = n^4 \bar{g}_K (E - E_K).$$

Le modèle de HH utilise un formalisme similaire pour décrire  $I_{Na}$ , avec quatre particules théoriques qui font des transitions entre les positions permissives et non permissives des canaux  $Na$ .

Cependant, pour les canaux  $Na$ , il existe deux processus opposés : l'activation et l'inactivation. Il y a donc deux sortes de particules de déclenchement,  $m$  et  $h$ . Trois particules  $m$  contrôlent l'activation et une particule  $h$  contrôle l'inactivation. La probabilité qu'elles soient toutes en position permissive est  $m^3 h$ . Soit  $I_{Na}$  le flux sodique, c'est à dire la quantité d'ions  $Na$  qui circule à travers la membrane.

$I_{Na}$  est représenté par :

$$I_{Na} = m^3 h \bar{g}_{Na} (E - E_{Na})$$

où  $m$  et  $h$  vérifient les équations différentielles :

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m m, \quad \frac{dh}{dt} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h h$$

où  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $\alpha_h$  et  $\beta_h$  sont les coefficients de passage entre les positions permissives et non permissives des particules  $m$  et  $h$ .

Le modèle de HH décrit le courant ionique à travers la membrane. Le bilan des charges électriques est donné par l'équation :

$$I = C \frac{dV}{dt} + I_{Na} + I_K + I_L$$

On a donc :

$$-C \frac{dV}{dt} = m^3 h g_{\bar{N}_a} (E - E_{N_a}) + n^4 g_{\bar{K}} (E - E_K) + \bar{g}_L (E - E_L) - I$$

où  $\bar{g}_L$  est la conductance de fuite fixée.

Toute l'excitabilité électrique d'une membrane est incarnée en temps et en voltage par les trois coefficients  $h$ ,  $m$ , et  $n$ , et est donnée par le modèle de HH qui est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -C \frac{dV}{dt} = m^3 h g_{\bar{N}_a} (E - E_{N_a}) + n^4 g_{\bar{K}} (E - E_K) + \bar{g}_L (E - E_L) - I \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n (1 - n) - \beta_n n \\ \frac{dm}{dt} = \alpha_m (1 - m) - \beta_m m \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h (1 - h) - \beta_h h \end{array} \right.$$

## 1.2 Modèles de Hindmarsh-Rose 1982 et 1984

Hindmarsh et Rose ont simplifié et généralisé ce modèle en un système de type FitzHugh-Nagumo à deux équations différentielles. Ils ont observé biologiquement des phénomènes qui permettent de simplifier mathématiquement le modèle de HH. Le coefficient  $m$ , ayant une activation très rapide, peut être considéré comme une constante et, toujours expérimentalement, on a  $h + n = 0.8$ . D'où le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y - \alpha x^3 + \beta x^2 + I \\ \frac{dy}{dt} = \gamma - \delta x^2 \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des paramètres déterminés expérimentalement.

Afin de mieux s'approcher du fonctionnement d'un vrai neurone, Hindmarsh et Rose ont ajouté à leur premier modèle une troisième équation. Celle-ci modélise la fin d'une poussée de potentiel d'action (burst). Le modèle obtenu est le suivant :

$$(HR) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y + ax^2 - x^3 - z + I \\ \dot{y} = 1 - dx^2 - y \\ \dot{z} = \mu(b(x - x_e) - z) \end{array} \right. \quad (2)$$

Dans ce système, chacune des variables a un sens biologique. Ainsi,  $x$  représente le potentiel de membrane du neurone,  $y$  est la variable associée à la dynamique rapide du courant,  $z$  est celle associée à la dynamique lente du courant,  $a, b, d, I$  et  $\mu$  sont des paramètres déterminés biologiquement, où  $\mu$  est petit et  $x_e$  est la première coordonnée du point fixe du système.

## 2 Dynamique locale du modèle de HR

Afin de simplifier l'étude de ce dernier système, dans [4] il est suggéré le changement de variable suivant :  $y = 1 - y$ ,  $z = 1 + I + z$ ,  $d = a + \alpha$ ,  $c = -1 - I - bx_e$ . Cela conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = ax^2 - x^3 - y - z \\ \dot{y} = (a + \alpha)x^2 - y \\ \dot{z} = \mu(bx + c - z) \end{array} \right. \quad (3)$$

avec  $a = 2.8$ ,  $\alpha = 1.6$ ,  $c = 5$ ,  $b = 9$ ,  $\mu = 0.001$ . Pour ce système, le point d'équilibre est  $(-0.5950, 1.5582, -0.3558)$ .

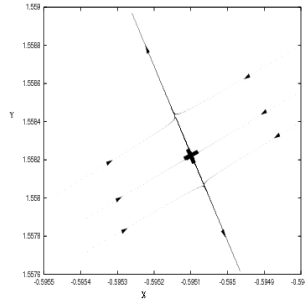
La jacobienne est :

$$J = \begin{bmatrix} 2ax - 3x^2 & -1 & -1 \\ 2(a + \alpha)x & -1 & 0 \\ \mu b & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est donc :

$$P_\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2(3x^2 - 2ax + \mu + 1) - \lambda(3x^2(1 + \mu) + 2x(\alpha - a\mu) + \mu(1 + b)) - \mu(3x^2 + 2\alpha x + b)$$

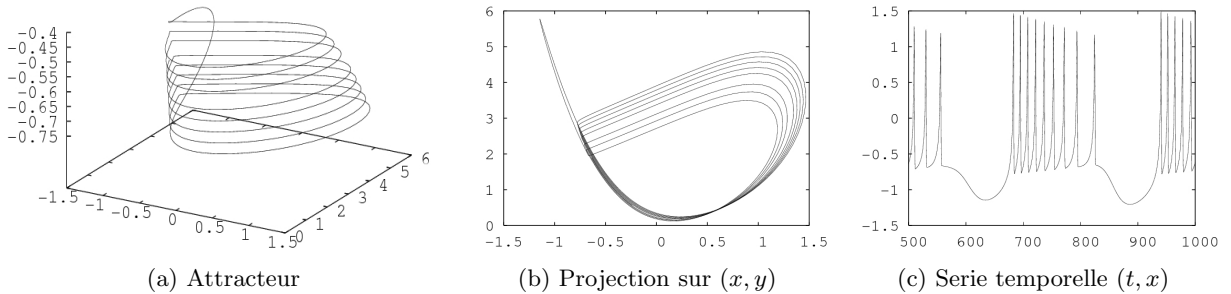
Les valeurs propres de la jacobienne sont donc :  $-5.5454$  ;  $0.0105$  ;  $0.1388$ . Ainsi, toutes ces valeurs propres sont réelles, et deux d'entre elles sont positives.



**Fig.2.** Dans le plan  $(x, y)$ , le point fixe est de type col (représenté ici par une croix).

## 2.1 Etude numérique de la dynamique globale

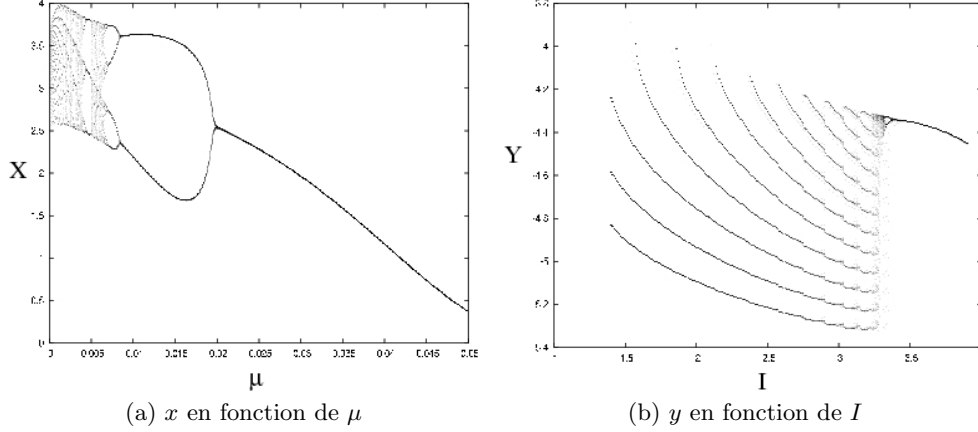
Nous faisons une étude numérique non exhaustive des phases. Ainsi, pour les paramètres choisis précédemment, nous avons tracé l'attracteur dans l'espace  $(x, y, z)$  et sa projection dans le plan  $(x, y)$  (Fig. 3(a) et 3(b)). Nous pouvons facilement faire un parallèle avec la dernière figure (Fig. 3(c)) donnant la série temporelle pour les mêmes paramètres. Cette figure présente des poussées de potentiels d'action ("burst") correspondant à la dynamique rapide ponctuées par des parties correspondant à la dynamique lente, celle-ci représente le repos du neurone entre deux bursts.



**Fig.3.** Comportement chaotique solution du système (3).

L'évolution d'un paramètre peut entraîner des bifurcations c'est-à-dire un changement qualitatif des solutions du système. Ainsi, lorsque l'on fait évoluer le paramètre  $\mu$  de la dernière équation du système,

on obtient le diagramme de bifurcations de la figure 4(a). La figure 4(b) montre le diagramme pour le paramètre de bifurcation  $I$ .



**Fig.4.** Diagrammes de bifurcations en fonction de différents paramètres du système (3).

Dans la figure 4(b), nous pouvons remarquer qu'il est facile de découper l'intervalle du paramètre  $I$  en sous intervalles correspondant chacun à un cycle limite  $C_i$ , où  $i = 1, 2, \dots$  est le nombre de pics par bouffées pour les valeurs du paramètre  $I$  prises dans ce sous intervalle.

### 3 Synchronisation

#### 3.1 Synchronisation d'un réseau de neurones

Considérons maintenant un réseau de  $n$  neurones de Hindmarsh-Rose couplés bidirectionnellement selon la première variable. Ce couplage peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = ax_i^2 - x_i^3 - y_i - z_i - h(x_i, x_j), & i \neq j \\ \dot{y}_i = (a + \alpha)x_i^2 - y_i \\ \dot{z}_i = \mu(bx_i + c - z_i) \end{cases}$$

Dans [4], la fonction de couplage  $h$  est de la forme :

$$h(x_i, x_j) = (x_i - V_s)g_s \sum_{j=1}^n c_{ij}\Gamma(x_j)$$

dans laquelle le couplage synaptique est modélisé par une fonction sigmoïde avec seuil :

$$\Gamma(x_j) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x_j - \Theta_s))}$$

Cette forme de couplage fréquemment utilisée est appelée *fonction de modulation de seuil rapide*.  $\Theta_s$  le seuil atteint par tous les potentiels d'action pour un neurone. Les neurones sont ici supposés identiques et les synapses rapides et instantanées. Le paramètre  $g_s$  correspond à la force de couplage synaptique. Le "potentiel de renversement"  $V_s$  doit être supérieur à  $x_i(t)$  pour tout  $i$  et pour tout  $t$ , c'est à dire que l'on a une synapse excitatrice.

$C = (c_{ij})$  est la matrice  $n \times n$  de connection :

$$\begin{cases} c_{ij} = 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont connectés,} \\ c_{ij} = 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ ne sont pas connectés.} \end{cases}$$

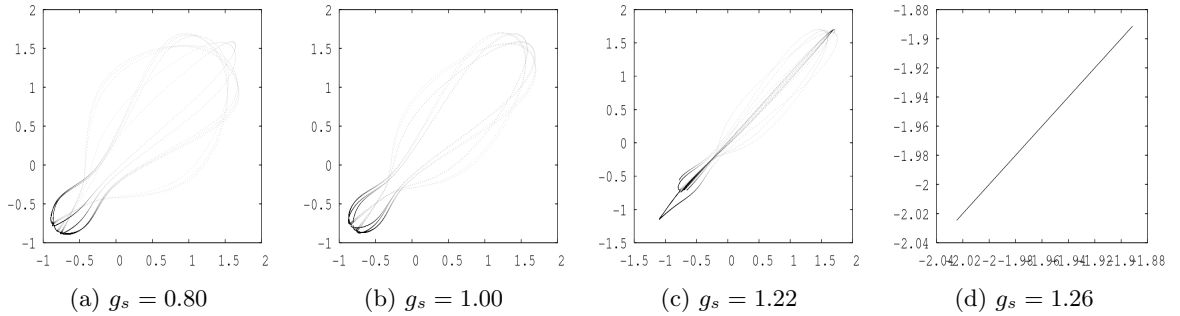
Cette matrice  $C$  peut être assymétrique, de telle sorte que les couplages unidirectionnels et bidirectionnels soient possibles. Il existe certains résultats théoriques sur la synchronisation (voir [1] et les références qui y sont citées).

### 3.2 Couplage de deux modèles de neurones de Hindmarsh-Rose

Il est alors possible dans un premier temps d'adapter cette technique pour deux neurones de façon bidirectionnelle. En effet, comme il est signalé plus haut, il est nécessaire que chaque neurone ait le même nombre de signaux d'entrée provenant d'autres neurones, donc une synchronisation unidirectionnelle pour deux neurones n'est pas applicable. D'où le système couplé bidirectionnellement pour lequel nous avons étudié numériquement la synchronisation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1^2 - x_1^3 - y_1 - z_1 - (x_1 - V_s)g_s \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x_2 - \Theta_s))} \\ \dot{y}_1 = (a + \alpha)x_1^2 - y_1 \\ \dot{z}_1 = \mu(bx_1 + c - z_1) \\ \dot{x}_2 = ax_2^2 - x_2^3 - y_2 - z_2 - (x_2 - V_s)g_s \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x_1 - \Theta_s))} \\ \dot{y}_2 = (a + \alpha)x_2^2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = \mu(bx_2 + c - z_2) \end{cases} \quad (4)$$

Les paramètres sont fixés comme suit :  $a = 2.8$ ,  $\alpha = 1.6$ ,  $c = 5$ ,  $b = 9$ ,  $\mu = 0.001$ ,  $\Theta_s = -0.25$ ,  $V_s = 2$ ,  $k = 1$ . La synchronisation s'installe numériquement pour une force de couplage  $g_s \geq 1.26$ .



**Fig.5.**  $x_2$  en fonction de  $x_1$  pour le système (4) pour différentes forces de couplages.

## Références

1. M. A. AZIZ-ALAOUI, Synchronization of chaos, *Encyclopedia of Mathematical Physics* (Elsevier), **5**, 213-226 (2006).
2. B. HILLE, *Ionic channels of excitable membranes* (second edition), Sinauer associates inc. (1992).
3. J. L. HINDMARSH & R.M. ROSE, A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations, *Proceedings of the Royal Society of London B*, **221**, 87-102 (1984).
4. E. LANGE, I. BELYKH & M. HASLER, Synchronization of Bursting Neurons : What matters in the Network Topology, *Physical Review Letters*, **94**, 188101 (2005).
5. J. M. GINOUX & B. ROSSETTO, Slow Manifold of a neuronal bursting model, *Emergent Properties in Natural and Artificial Dynamical Systems*, (Aziz-Alaoui & Bertelle, Eds) Springer, pp. 118-228 (2006).

# Global topology of chaotic attractors

Robert Gilmore

Physics Department, Drexel University, Philadelphia, PA, USA 19104  
 robert.gilmore@drexel.edu

## Résumé

A great deal is known about the global topological structure of chaotic attractors in three dimensional spaces, but little is known about the spectrum of topologies allowed to chaotic attractors in higher dimensions. We review some of the tools that have contributed to this understanding in three dimensions and show how these tools can be applied in higher dimensions. Specifically, we show how singularities of mappings can be used to classify chaotic attractors in generalized tori  $D^N \times S^1$  where stretching and folding are the mechanisms creating chaos. We show how symmetry arguments have been used to create chaotic attractors that are generated by tearing and squeezing mechanisms. We introduce families of locally diffeomorphic chaotic attractors that are described by quantum numbers in  $R^3$  and show that these quantum indices are group labels in higher dimensions. Simple classical measures are introduced to help describe chaotic attractors in any dimension.

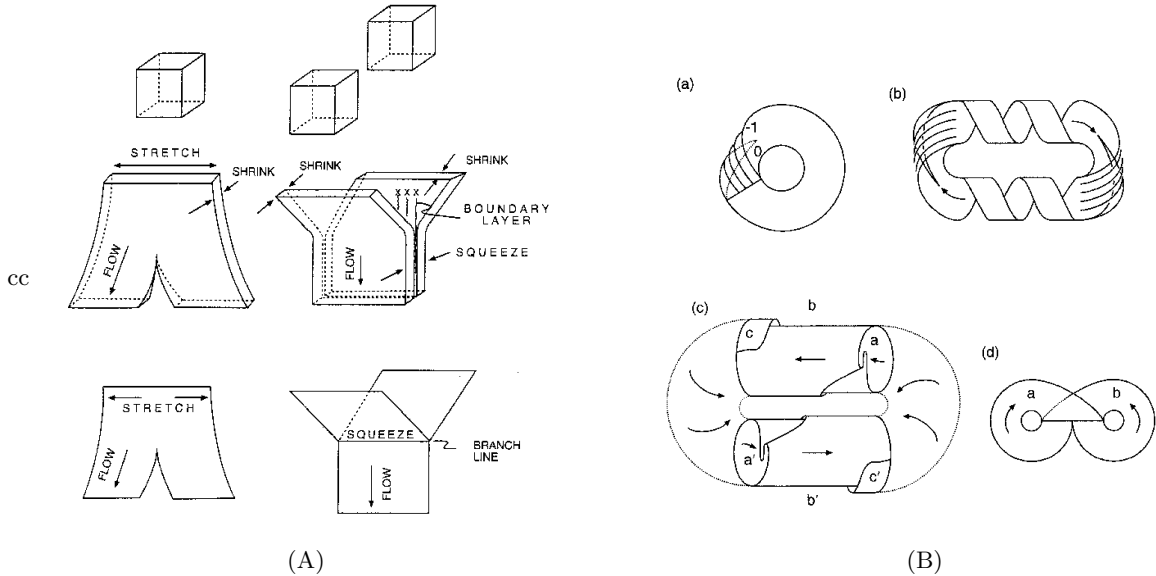
## 1 Introduction

The global topological structure of strange attractors  $\mathcal{SA}$  in three dimensions is more or less known in some detail [1,2,3] for two broad reasons. At the intuitive level, we can visualize such attractors rather easily, sometimes even by closing our eyes and using our imaginations. At the mathematical level there is a theorem — the Birman-Williams theorem [4] — that allows us to represent every dissipative chaotic attractor by a surrogate — a two-dimensional branched manifold. These surrogates can all be built up Lego<sup>®</sup> style by plugging together two types of units — stretch and squeeze units — in any discernible way provided two elementary conditions are met. In higher dimensions intuition fails and theorems fail to exist.

In order to understand the global topology of chaotic attractors in higher dimensions we must rely on analogies with the structure of attractors in three-dimensional spaces. For this reason we begin with a review of the properties of these low dimensional attractors. Broadly speaking there are two types : (1) those created by the infinite repetition of stretching and folding; and (2) those created by infinite repetition of stretching, tearing, and squeezing. The first class of attractors live inside a torus of genus  $g = 1 : D^2 \times S^1$ . The latter live inside higher genus tori :  $g \geq 3$  [5,6]. We exploit this decomposition to get a grip on the spectrum of chaotic attractors that we can expect to encounter in higher-dimensional spaces.

## 2 Three Dimensions

The Birman-Williams theorem is the most powerful tool at our disposal for the study of chaotic attractors in three dimensions. A consequence of this theorem is that a chaotic flow (in fact, its surrogate, a branched manifold) in  $R^3$  can be decomposed into a union of two types of units : stretch units and squeeze units, shown in Fig. 2(A). These units can be plugged together in any way provided only that (1) outflows are connected to inflows and (2) there are no free ends. Each such union is a branched manifold that represents a chaotic attractor. Four such branched manifolds are shown in Fig. 2(B). We notice that three of these ((a) – (c)) live inside a torus of genus  $g = 1$  and of these, one (c) lives in a toral annulus. The fourth (d) lives inside a higher-genus ( $g = 3$ ) torus.



**Fig.1.** (A) Stretching and squeezing units that are used to build up an arbitrary branched manifold. Cf. [1], Fig. 5.3 (B) Branched manifolds for four standard strange attractors. (a) Rössler attractor ; (b) Duffing attractor ; (c) van der Pol attractor ; (d) Lorenz attractor. Cf. [1], Fig. 4.1

### 3 $3D, g = 1, D^2 \times S^1$

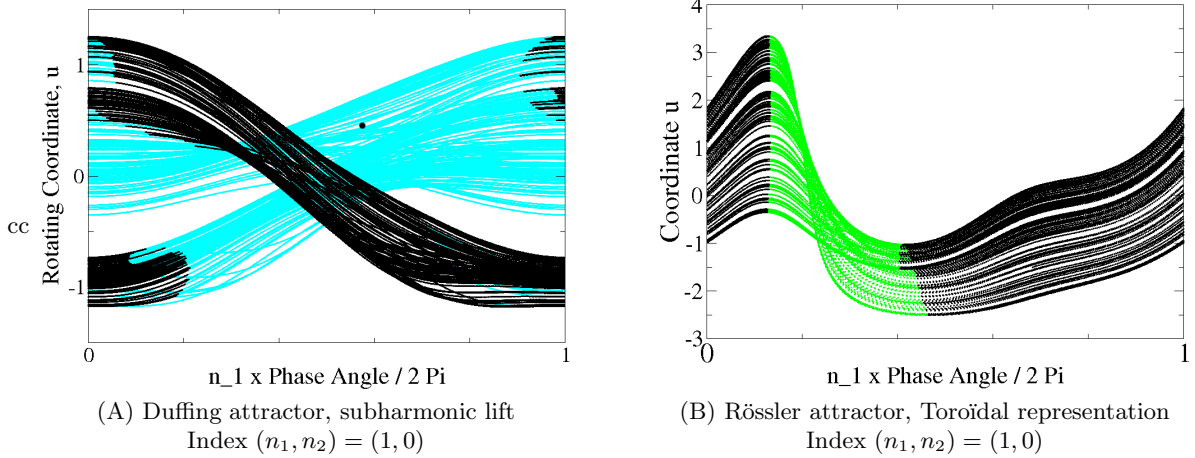
We concentrate in this Section on three dimensional chaotic attractors that live in a torus of genus one (solid tire). Most of the experimental data sets that can successfully be embedded in three dimensions share this property [7].

When this is the case it is useful to construct a Poincaré surface of section,  $\mathcal{PS}$ . This is a surface whose intersection with the torus is a disk,  $D^2$ . The flow is usefully treated as a return map of the Poincaré section to itself : more specifically of  $\mathcal{PS} \cap \mathcal{SA}$  to itself. By combining this with the results of the Birman-Williams theorem, we see that the entropy-generating mechanism is the return map of  $\mathcal{PS} \cap \mathcal{BM}$ , where  $\mathcal{BM}$  is the branched manifold that describes the strange attractor. This intersection is a one-dimensional set that can be chosen without singularities : either an interval  $I$  or a circle  $S^1$ . The only possible singularities of maps of these one-dimensional sets to themselves are singularities of fold type :  $A_2$ . If the return map  $I \rightarrow I$  has  $n$  fold singularities the corresponding branched manifold has  $n+1$  branches, where  $n \geq 1$ . Global topology has a nontrivial impact on local singularities : for  $S^1$ ,  $n$  must be even.

It is possible to represent the coordinates of a point in a genus-one strange attractor in the form  $(X, Y, \phi)$ , with  $(X, Y) \in D^2$  and  $\phi \in S^1$ . For the Duffing and van der Pol nonautonomous systems  $\phi = \omega t \text{ mod } 2\pi$ . For autonomous systems such as the Rössler system a similar representation is possible for standard control parameter values, using  $x + iy = Ae^{i\phi}$  and  $(X, Y, \phi) = (A, dA/d\phi, \phi)$ . Plots of the Duffing and Rössler attractor in this toroidal representation are shown in Fig. 3.

In this representation the attractor itself has  $2\pi$  periodicity. We can exploit the periodicity of attractors in tori of genus one to construct entire families of strange attractors closely related to the original attractor [8]. This is done as follows. Create a diffeomorphism of the strange attractor by rotating the coordinates  $(X, Y)$  in the plane  $\phi$  through an angle  $\theta = \theta(\phi)$ . Periodicity of the strange attractor requires  $\theta(\phi = 2\pi) = \theta(\phi = 0) + 2\pi n_2$ , where  $n_2$  is an integer. Such a diffeomorphism twists the strange attractor through  $2\pi n_2$  radians over the length of the torus. The original attractor and its image are not isotopic unless  $n_2 = 0$ . Since the mapping is a diffeomorphism and since all fractal dimensions and Lyapunov dimensions are diffeomorphism invariants, all members in this family ( $n_2 = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ ) have identical





**Fig.2.** Toroidal representation of (A) the Duffing attractor and (B) the Rössler attractor.

spectra of fractal dimensions and Lyapunov exponents. Members of the Duffing family with  $n_2 = -1, +1$  and of the Rössler family with  $n_2 = -1, +1$  are shown in Fig. 3.

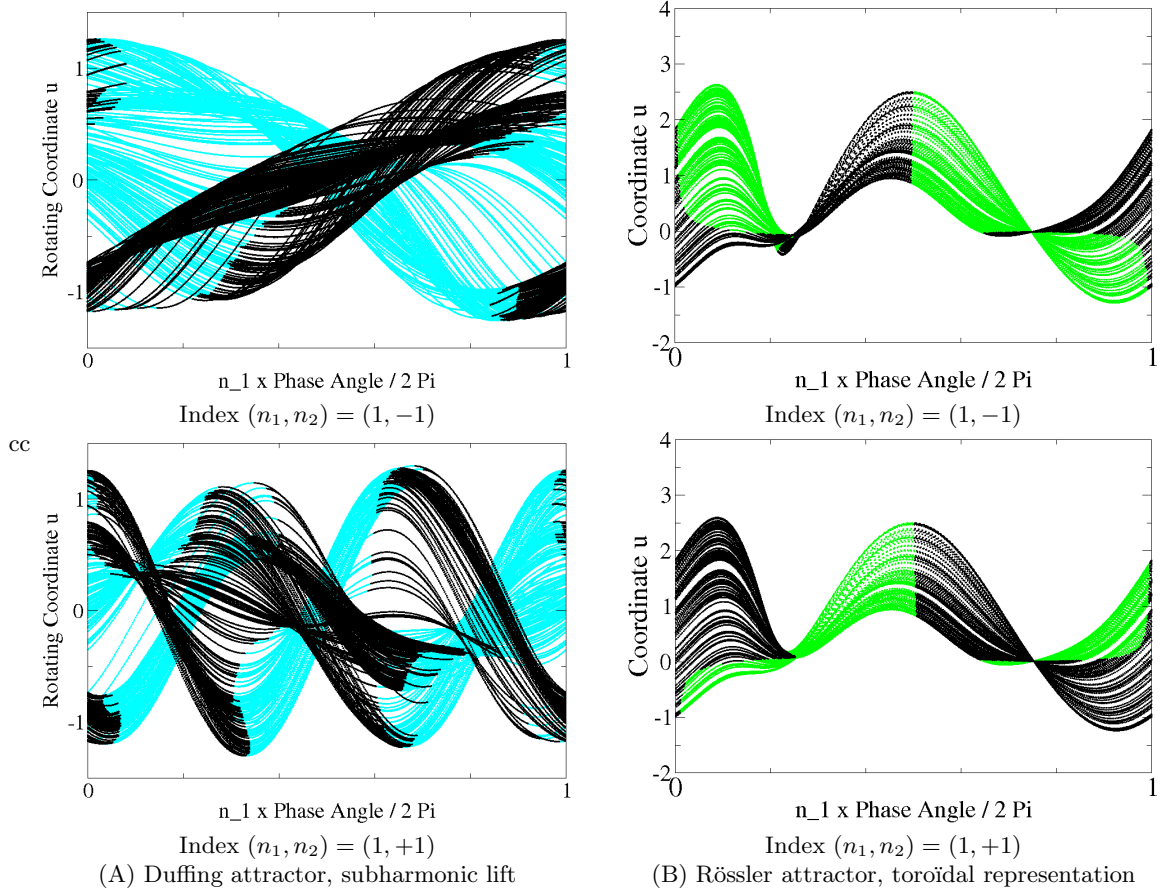
There are two real-valued measures that are suitable for distinguishing among members in these families of strange attractors. These measures are average values of the energy- and angular momentum-like integrals. For example, the energy measure is  $\langle E \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) dt$ , with the angular momentum average defined analogously. For diffeomorphisms generated by uniform rotations  $\theta(\phi) = n_2 \phi$  these integrals behave exactly as one would expect from experience with elementary classical mechanics. These integrals are shown for the family based on the Duffing attractor in Fig. 4. The energy and angular momentum integrals for subharmonic lifts of the Duffing attractor are shown in Fig. 3.

If the “quantization condition”  $\theta(\phi = 2\pi) = \theta(\phi = 0) + 2\pi n_2$  is not satisfied (i.e.,  $n_2 \neq \text{integer}$ ) then harmonic lifts are not possible. If the condition  $\theta(\phi = 2\pi) = \theta(\phi = 0) + 2\pi n_2/n_1$  is satisfied, periodic boundary conditions are satisfied for  $\omega t = 2\pi n_1$  and the attractor closes up with a period  $n_1 T_1$ . When it closes up the plane ( $\mathcal{PS}$ ) containing the intersection of the attractor has rotated through  $2\pi n_2$  radians. These are *subharmonic lifts* of the founding member of the family of attractors. Subharmonic lifts are indexed by *two* relatively prime quantum numbers  $(n_1, n_2)$ ,  $n_1 \geq 1$ . Two subharmonic lifts of the Rössler attractor are shown in Fig. 3.

#### 4 3D, $g > 1$

Some well-known strange attractors are created by repetition of the stretching-tearing-squeezing mechanism. The prototypical example is the Lorenz attractor. Three dimensional attractors generated by this mechanism live in bounding tori of genus  $g$  with  $g > 1$ . In  $R^3$  closed bounded two-surfaces are described by a single integer, the genus  $g$  (Intrinsic description). However, these surfaces are dressed by the flow that generates the strange attractor within. As a result more than a single index  $g$  is required to distinguish bounding tori that contain inequivalent strange attractors with the same genus [2,3]. Fig 7 shows the five inequivalent canonically dressed tori of genus 7 that can contain strange attractors [9]. Also shown in this figure are three ways to label these canonical tori as well as the transition matrices that describe how the flow can progress from one component of the Poincaré surface of section to other components. The Poincaré surface of section is the union of  $g - 1$  disks, each bounded by a meridian of the torus. Every three-dimensional strange attractor is bounded by one of these tori, as shown in Table 1.

Chaotic attractors in some of the lower- $g$  bounding tori can be constructed by lifting chaotic attractors in a genus-one bounding tori using some simple group theoretical arguments [9]. This construction fails



**Fig.3.** Toroidal representation with  $n_2 = -1$  (top) and  $n_2 = +1$  (bottom) of members of (A) the Duffing family and (B) the Rössler family of attractors. Darker :  $Y > 0$ ; Lighter :  $Y \leq 0$ .

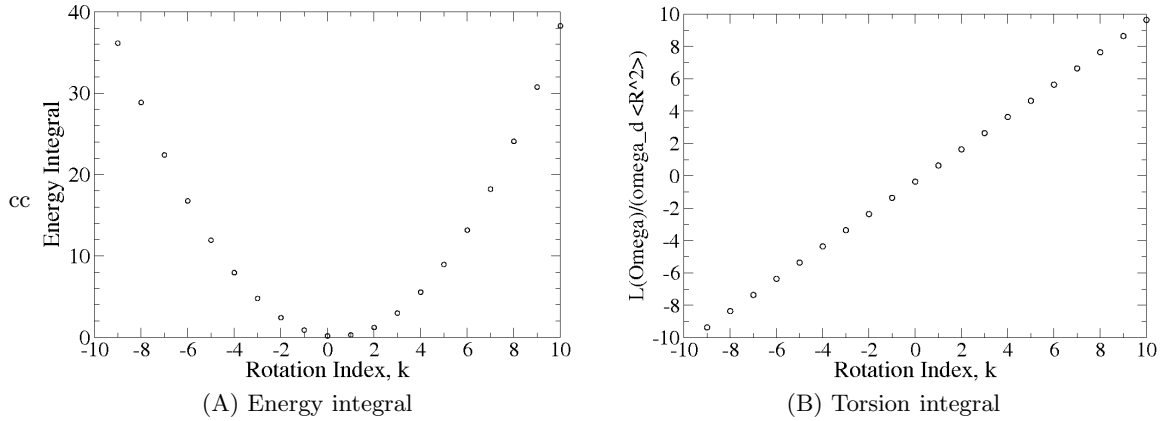
when the bounding torus does not have sufficient symmetry. In this case other lifting mechanisms must be used. The result is a set of  $(g-1) \rightarrow 1$  local diffeomorphisms between the lifted attractor and the attractor in a genus-one bounding torus. In a very real sense we create “covering attractors” in genus- $g$  bounding tori by creating “topological lifts” from a simpler attractor, one generated by simple stretching-and-folding processes.

Since two-parameter families of chaotic attractors can be created from any strange attractor, there is a very large variety of chaotic attractors even in the low-genus cases. It is not yet known how to classify them all.

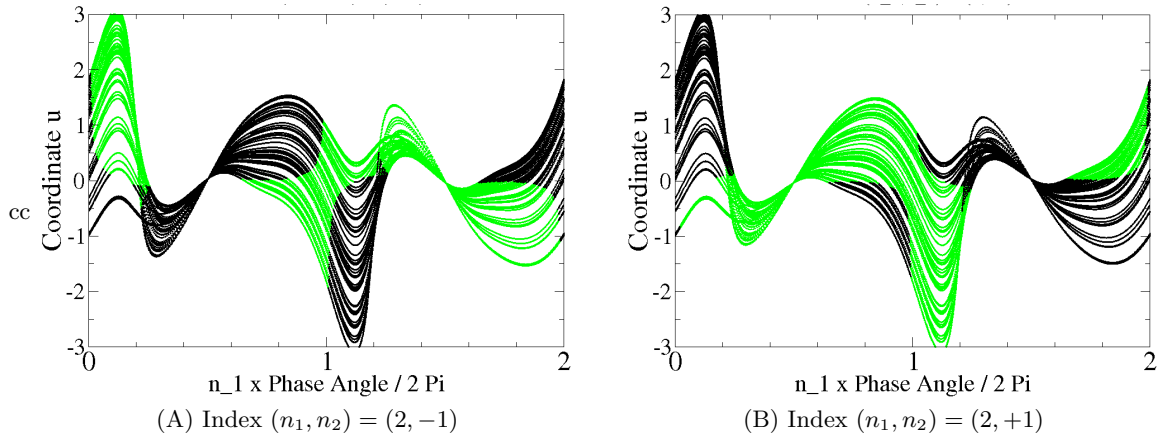
The number of canonical bounding tori grows rapidly with the genus  $g$ , as shown in Table 2. This number,  $N(g)$ , increases exponentially with  $g$  :  $N(g) \simeq e^{h_g g}$ . In a computational tour-de-force Katriel [10] has shown that  $h_g = \log(3.0)$ . This author believes that  $h_g = \log(3)$  for the same reason that the *topological* entropy of the logistic map is  $\log(2)$ , not  $\log(2.0)$ .

## 5 Higher Dimensions

In  $N$  dimensions there are  $N$  Lyapunov exponents  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ . These split into three groups : the  $n_u$  positive Lyapunov exponents that describe unstable motion (stretching), the zero exponent(s), which describes the flow direction, and the negative exponents that describe the squeezing directions. We will assume that only one Lyapunov exponent is zero :  $\lambda_{n_u+1}$ . Associated with each Lyapunov exponent



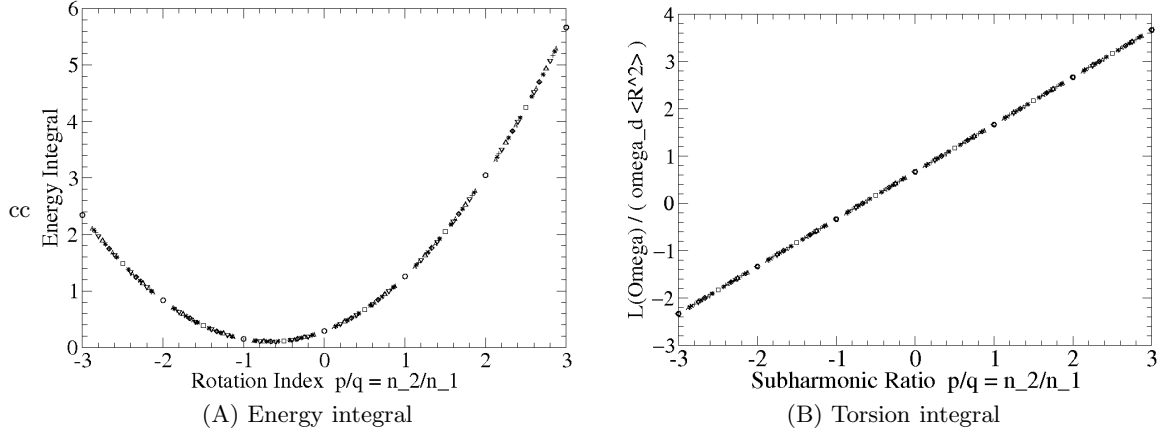
**Fig.4.** Classical (A) energy and (B) torsion integrals in the Duffing family of harmonic attractors. Plots show dependence on the quantum number  $n_2$ .



**Fig.5.** Subharmonic lifts of the Rössler attractor with quantum numbers  $(n_1, n_2) =$  (A)  $(2, -1)$  and (B)  $(2, +1)$ .

there is a partial dimension  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_N$ , with  $1 \geq d_i \geq 0$  [11]. The partial dimensions are +1 for the expanding and flow directions with  $\lambda_i \geq 0$ : the strange attractor is smooth in these directions. In the squeezing directions, in which the attractor has a fractal structure, the partial dimensions are generally less than one.

In dimensions greater than 3 much less is known about the topology of strange attractors. There is the hope that a pair of theorems can be found to simplify our understanding of such attractors. Both depend on the Lyapunov exponents of the attractor. The first theorem would identify the dimension,  $K$ , of an “embedding manifold”  $\mathcal{EM}$  containing the strange attractor. Specifically, The weighted sum  $D_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i d_i$  is formed. This sum generally increases with  $j$ , levels off at  $j = n_u + 1$  when  $\lambda_{n_u+1} = 0$ , and decreases to zero thereafter. Define  $K$  to be the smallest integer for which  $D_K = D_{K+1} = \dots = D_N = 0$ . It would be nice to have a theorem stating that a  $K$ -dimensional manifold can be found that contains the strange attractor. At an intuitive level, this means that the flow is very strongly attracted to the embedding manifold along the directions with the most strongly contracting eigendirections (those with the most negative Lyapunov exponents:  $\lambda_{K+1}, \lambda_{K+2}, \dots, \lambda_N$ ). Once inside the embedding manifold the flow never leaves it. Further, information about the most negative Lyapunov exponents is no longer available: information about only the  $n_s = K - (n_u + 1)$  “weakly negative” exponents  $\lambda_j, j = n_u + 2, \dots, K$  is available. Here  $n_u$  is the number of unstable directions (positive Lyapunov exponents) and  $n_s$  is the number of stable directions within the embedding manifold.



**Fig.6.** Classical (A) energy and (B) torsion integrals in the Duffing family of subharmonic attractors. Plots show dependence on the quantum numbers  $(n_1, n_2)$  is through their ratio  $n_2/n_1$ .

**Tab.1.** All known strange attractors of dimension  $d_L < 3$  are bounded by one of the standard dressed tori.

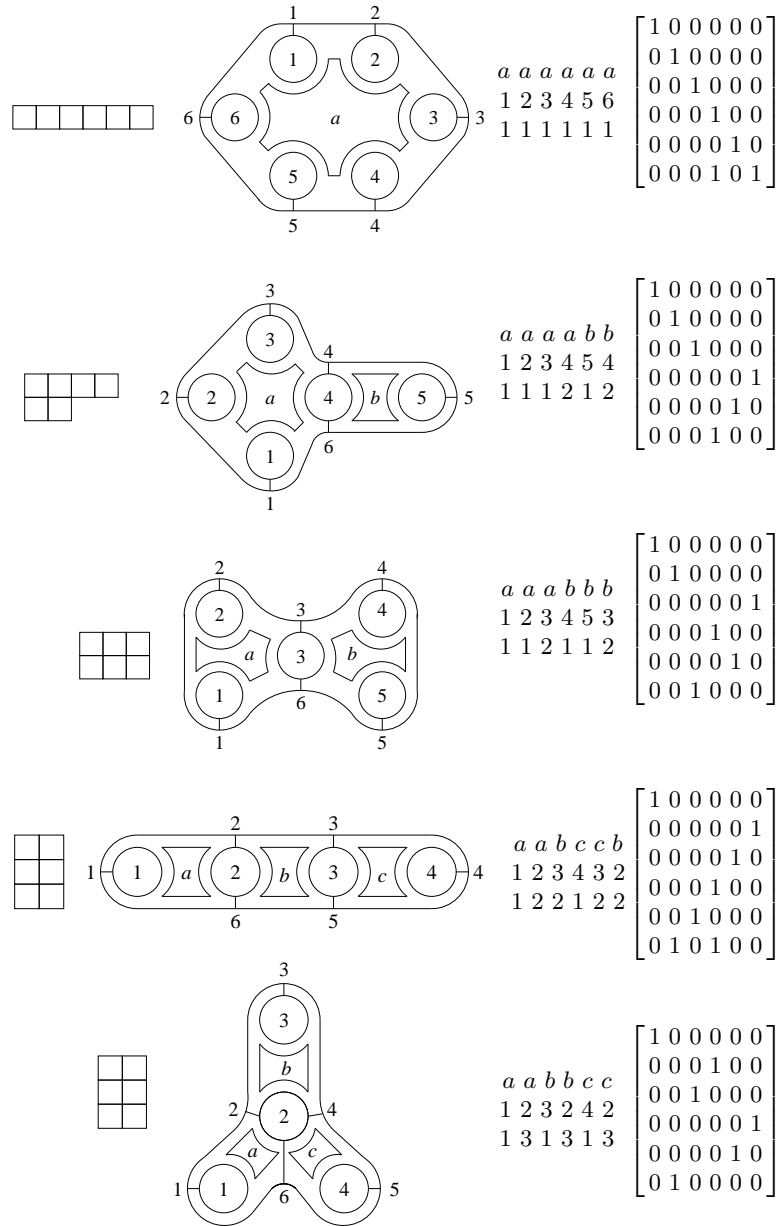
Strange Attractor	Dressed Torus	Period $g - 1$ Orbit
Rossler, Duffing, Burke and Shaw	$A_1$	1
Various Lasers, Gateau Roule	$A_1$	1
Neuron with Subthreshold Oscillations	$A_1$	1
Shaw-van der Pol	$A_1 \cup A_1^{(1)}$	$1 \cup 1$
Lorenz, Shimizu-Morioka, Rikitake	$A_2$	$(12)^2$
Multispiral attractors	$A_n$	$(12^{n-1})^2$
$C_n$ Covers of Rossler	$C_n$	$1^n$
$C_2$ Cover of Lorenz <sup>(a)</sup>	$C_4$	$1^4$
$C_2$ Cover of Lorenz <sup>(b)</sup>	$A_3$	$(122)^2$
$C_n$ Cover of Lorenz <sup>(a)</sup>	$C_{2n}$	$1^{2n}$
$C_n$ Cover of Lorenz <sup>(b)</sup>	$P_{n+1}$	$(1n)^n$
$2 \rightarrow 1$ Image of Fig. 8 Branched Manifold	$A_3$	$(122)^2$
Fig. 8 Branched Manifold	$P_5$	$(14)^4$

<sup>(a)</sup> Rotation axis through origin.  
<sup>(b)</sup> Rotation axis through one focus.

**Tab.2.** Number of canonical bounding tori as a function of genus,  $g$ .

$g$	$N(g)$	$g$	$N(g)$	$g$	$N(g)$	$g$	$N(g)$	$g$	$N(g)$
1	1	5	2	9	15	13	368	17	14290
2	0	6	2	10	28	14	870	18	36824
3	1	7	5	11	67	15	2211	19	96347
4	1	8	6	12	145	16	5549	20	252927

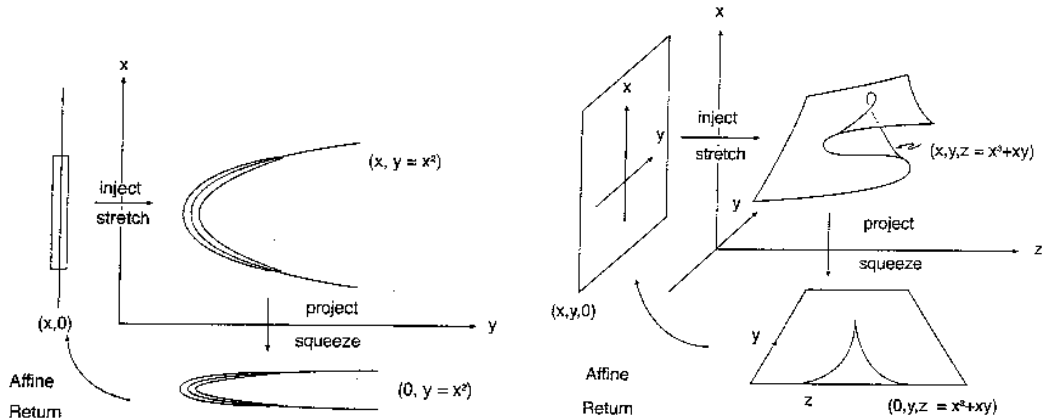
The second theorem would guarantee the existence of an  $n_u + 1$ -dimensional “manifold with singularities” resulting from a Birman-Williams-like projection. Such a projection identifies all points with the same future :  $x \simeq y$  if  $|x(t) - y(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . This projection mods out the  $n_s$ -dimensional stable manifold (the “weakly negative” Lyapunov eigendirections) over any point in the strange attractor. Such a theorem would allow us to identify strange attractors with their singular limits under the projection : a process that has made the classification and analysis of strange attractors in  $R^3$  possible.



**Fig.7.** There are five canonically dressed tori of genus 7. Two inequivalent flows have Young partitions  $2^3$ .

## 6 $D > 3$ , $g = 1$ , $D^{n_u+n_s} \times S^1$

We assume first that the embedding manifold is a higher-dimensional torus  $D^{K-1} \times S^1 = D^{n_u+n_s} \times S^1$ . In this case the Poincaré surface of section is a constant phase slice of the torus:  $\phi = \text{const.}$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . The slice is an  $n_u + n_s$ -dimensional space  $D^{n_u+n_s}$ . The flow is characterized, modulo some group theoretical indices, by a return map. If the second theorem, or some useful version of it, is true, the return map can be treated as a mapping of a  $n_u$ -dimensional space to itself. In Fig. 8 we show mappings of one dimensional manifolds ( $n_u = 1$ ) and two dimensional manifolds ( $n_u = 2$ ) to themselves. These mappings must generate entropy: therefore they must have singularities. The two mappings shown generate the fold ( $A_2$ ) and the cusp ( $A_3$ ) singularities, respectively.



**Fig.8.** (left) Intersection of a strange attractor in  $R^2 \times S^1$  with a Poincaré section is almost an interval. The Poincaré return map exhibits a fold singularity, producing a logistic map. (right) Intersection of a strange attractor with two positive Lyapunov exponents in  $R^3 \times S^1$  with a Poincaré section is almost a plane section. The Poincaré return map exhibits a cusp singularity. Cf. [1], Fig. 11.4, Fig. 11.5.

Under the assumptions outlined above (two provable theorems), we can make inroads on the problem of describing higher dimensional strange attractors by describing the kinds of singularities that can occur in mappings of  $k$  dimensional manifolds to themselves in spaces of dimension  $K - 1$ . In Fig. 8 the *stable* singularities of mappings of the interval to itself in  $R^2$  (left) and of the plane to itself in  $R^3$  (right) are shown. In  $R^3$  the double fold singularity  $(x, y) \rightarrow (x^2, y^2)$  is also possible but it is not stable, it perturbs to a cusp and a fold singularity.

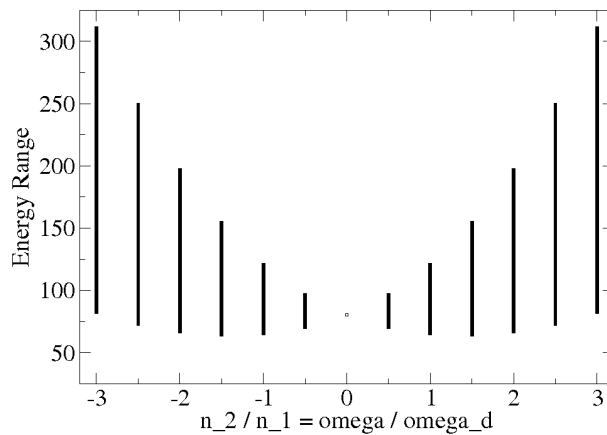
The study of stable singularities of mappings  $R^k \rightarrow R^k$  has a long history [16]. They are described by Young partitions  $\Lambda$  with row lengths  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  and  $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i$ . The Young partitions for the fold and cusp maps in Fig. 8 are (1) and (1, 1). For the cusp  $\lambda_1 = 1$  indicates that the mapping has rank one less than full (2) on the fold lines and  $\lambda_2 = 1$  tells us that, on the fold set the mapping drops by one again at the cusp point (the origin). In general the row length  $y_1$  describes how much the rank of the mapping drops on the singularity of largest dimension;  $y_2$  describes by how much the mapping drops in rank at the second singularity when restricted to the first singularity, etc. The singularity may be stable under perturbations  $A_2 : x \rightarrow x^2$  or may be unstable under perturbations  $A_n : x \rightarrow x^n, n > 2$ . In the latter case for  $n = 3$  the singularity  $(x, y) \rightarrow (x^3, y)$  perturbs to  $(x, y) \rightarrow (x^3 + xy, y)$ , which is structurally stable.

For the purposes at hand the singularities we wish to consider have three parts : a germ, a universal perturbation (also called an unfolding), and folding directions. As an example, the two-dimensional germ  $(x, y) \rightarrow (x^3 + y^2, xy)$  has a three-dimensional unfolding with basis vectors  $(x, y, x^2) : D_G = 2, D_U = 3$  [16]. The structurally stable mapping  $R^{2+3} \rightarrow R^5$  is  $(x_1, x_2; u_1, u_2, u_3) \rightarrow (x_1^3 + x_2^2 + u_1x + u_2y + u_3x_1^2, xy, u_1, u_2, u_3)$ . In order for the folding to occur smoothly in the space  $D^{n_u+n_s}$  it is necessary that there be at least two (= dimension of the germ) additional “folding” directions  $(f_1, f_2) : D_F = 2$ . In short, the singularity  $(x, y) \rightarrow (x^3 + y^2, xy)$  is first encountered in flows in  $D^{n_u+n_s} \times S^1$  for  $n_u \geq D_G + D_U = 5, n_s \geq D_F = D_G = 2, n_u + n_s \geq 7$ . When this inequality is saturated ( $n_u + n_s = 7$ ) a discrete classification may be possible.

In summary, flows in  $K$  dimensional embedding manifolds can be classified by germs of dimension  $D_G$  with structurally stable unfoldings of dimension  $D_U$  provided  $D_G + D_U \leq n_u$  and  $n_s \geq D_F \geq D_G$ . For the cusps  $A_n$  with  $x \rightarrow x^n, D_G = 1, D_U = n - 2, D_F = 1$  and  $n_u \geq 1 + (n - 2) (n \geq 2)$  and  $n_s \geq D_F = 1$ . In three dimensions the only stable singularity is the fold :  $n_u = 1, n_s = 1$ , and one time flow direction.

The construction introduced in Section 3 can be applied to strange attractors in the torus  $D^{n_u+n_s} \times S^1$  in an attempt to create families of globally or locally diffeomorphic strange attractors. The idea is the

same : the results are different. Strange attractors in the torus  $D^{n_u+n_s} \times S^1$  are periodic, with period  $2\pi$ . That is, the attractor is invariant under  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ , where  $\phi$  is the angular coordinate in  $S^1$ . New attractors  $\mathcal{SA}'$  are created from an attractor  $\mathcal{SA}$  by a  $\phi$ -dependent rotation  $\theta(\phi)$ . Specifically, we apply a rotation  $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$  to each section in such a way that periodic boundary conditions are satisfied :  $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta(\phi = 0)) = R(\hat{\mathbf{n}}, \theta(\phi = 2\pi))$ . For simplicity we keep the rotation axis  $\hat{\mathbf{n}}$  fixed during this process. This creates a new attractor from the original. The two are globally diffeomorphic. As a result their spectra of fractal dimensions and Lyapunov exponents are identical, and cannot be used to distinguish one from another. On the other hand, classical measures, such as average energy and angular momentum can be used to help distinguish among the members of a family. As the axis  $\hat{\mathbf{n}}$  around which the rotation takes place is varied over the sphere surface, the energy integral also varies. These energy bands for a strange attractor in  $R^3 \times S^1$  are shown in Fig. 9.



**Fig.9.** The Rössler equations were periodically driven to create a strange attractor in  $R^3 \times S^1$ . The basic member of this family was used to create an entire family of strange attractors by satisfying periodic boundary conditions. The energy depends on the orientation of the rotation axis  $\hat{\mathbf{n}}$ , held fixed during the rotation. The range of energy values is shown here.

The next question to address is whether the harmonic and subharmonic lifts of a founding member of a family of strange attractors  $\mathcal{SA} \subset D^{n_u+n_s} \times S^1$  are all topologically inequivalent, as is the case for families in  $D^2 \times S^1$ .

Transformations of period  $T$  depending on the phase  $\phi(t)$  in the interval  $0 \leq t \leq T$  can be interpreted as paths in the parameter space of the Lie group  $SO(N)$  ( $N = n_u + n_s$ ). Two paths in the parameter space of  $SO(N)$  starting at  $\phi_j(0) = 0$  ( $j = 1, 2$ ) and ending at integer values (to satisfy periodic boundary conditions)  $\phi_j(T)/T = n_j$  can or cannot be deformed into each other depending on whether  $n_1 - n_2$  is even or odd. When  $N > 2$ , the fundamental group of  $SO(N)$  has two elements, those corresponding to rotations through  $2\pi n$  radians with  $n$  even ( $n_e$ ) or with  $n$  odd ( $n_o$ ). Once again, the path  $\phi(t)$  can be chosen as linear, but this time inequivalent paths exist with  $n = 0$  or  $n = 1$  only. For the deformation in  $SO(3)$  that takes a path with  $n = 2$  to the path with  $n = 0$  see [14].

As a result, any strange attractor in  $D^N \times S^1$  ( $N > 2$ ) can form the base for only four diffeomorphic but topologically inequivalent chaotic attractors. These are labeled by indices from two two-element groups : a parity index  $\rho = \{e, o\}$  from  $O(N)/SO(N)$ , and an index  $\sigma = \{n_e, n_o\} = \{0, 1\}$  labeling an element in the fundamental group of  $SO(N)$  :

$$\mathcal{SA} \xrightarrow{\rho e^{n\omega L t}} \mathcal{SA}_{\rho, \sigma} \quad (1)$$

This classification can be extended to subharmonic transformations. The procedure follows the steps indicated in Sect. 3, with some subtle differences. For the fundamental group operation  $n_e$  there are no subharmonic attractors. Subharmonics exist only for the fundamental group operation  $n_o$ . The result

leads to two-parameter families of chaotic attractors that are locally diffeomorphic but not globally diffeomorphic ( $p > 1$ ) with the original attractor. The members of these families are indexed by two discrete indices : the parity index  $\rho$  and a positive integer  $p$  related to the period  $pT$  at which the proper boundary conditions are satisfied :

$$\mathcal{SA} \xrightarrow{\rho \exp((1/\omega/p)(\hat{n} \cdot \mathbf{L})t)} \mathcal{SA}_{\pm 1, n_o, p} \quad (2)$$

As a result of this analysis, we conclude that far fewer chaotic attractors can be constructed by rotation transformations in higher dimensions than in three dimensions.

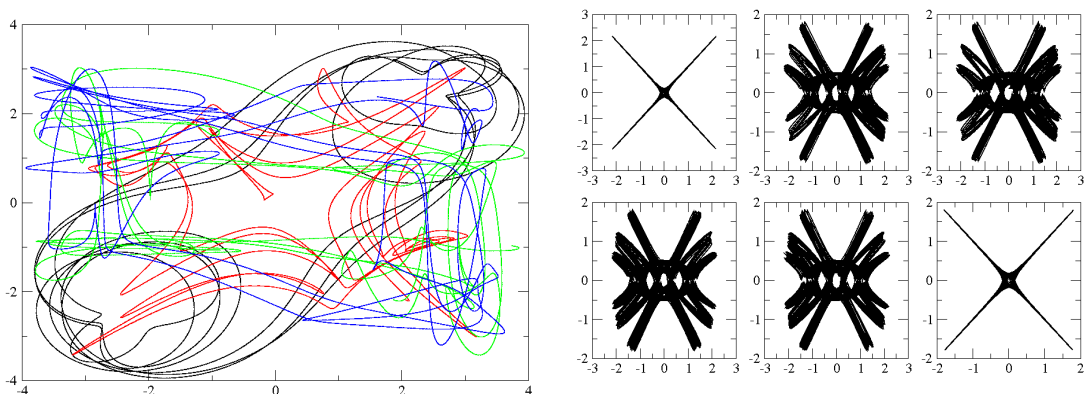
### 7 $D > 3, g > 1$

The strange attractors in tori  $D^{K-1} \times S^1$  are created by smooth processes : stretching and folding, whether  $K - 1 = 2$  or  $K - 1 > 2$ . In three dimensions we understand how to relate strange attractors in higher-genus tori from strange attractors in the simple genus-one torus. The construction involves : many-one maps, singularities, group theory, symmetry and, when symmetry is insufficient, topology.

It is possible to use the same procedures in higher dimensions to construct attractors in  $R^K$  that do not live in a toroidal manifold  $D^{K-1} \times S^1$ . This has been done both for nonautonomous and autonomous four dimensional flows.

The nonautonomous flow is a periodically driven Rössler attractor, whose phase space is  $R^3 \times S^1$ . This was mapped into  $R^4$  using the natural embedding :  $(x_1, x_2, x_3, \omega t) \rightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4)$ , with  $y_1 = x_1, y_2 = x_2$  and  $y_3 = (a - x_3) \cos \omega t, y_4 = (a - x_3) \sin \omega t$ . The radius  $a$  was chosen so that  $a - x_3(t) > 0$  for all  $t$ . The autonomous four-dimensional flow generated a strange attractor in a torus  $D^3 \times S^1$ . The treatment of both attractors from this point on was the same.

A Lorenz-like attractor can be created by constructing a double cover of the Rössler attractor in the usual way [12,13,9]. If  $(x_1, x_2, x_3)$  are coordinates in a Rössler attractor, a double cover with coordinate  $(z_1, z_2, z_3)$  is created using the  $2 \rightarrow 1$  mapping  $x_1 = z_1^2 - z_2^2, x_2 = 2z_1z_2, x_3 = z_3$ . In the present case four-fold covers with coordinates  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  were created using the  $4 \rightarrow 1$  maps (paired double covers) :  $y_1 = z_1^2 - z_2^2, y_2 = 2z_1z_2$  and  $y_3 = z_3^2 - z_4^2, y_4 = 2z_3z_4$ . These four-fold lifts from  $D^3 \times S^1 \rightarrow R^4$  are shown in Fig. 10.



**Fig.10.** Four-fold covers of periodically driven Rössler equations (left) and a four dimensional autonomous dynamical system generating a strange attractor in  $D^3 \times S^1$ .



## 8 Conclusions

We have constructed families of topologically inequivalent strange attractors in three dimensional tori  $D^2 \times S^1$  based on a single strange attractor (periodically driven Duffing, van der Pol, Takens-Bogdanov attractors, Rössler attractor). Family members are indexed by three quantum numbers  $(\rho, n, p)$ . Members of each family are either isotopic to, globally diffeomorphic with, or locally diffeomorphic with the original attractor, as indicated :

Diffeo. Type	Parity	Fund. Gp.	Subharmonic	
Isotopic to $Id$	$\rho = +1$	$\sigma = 0$	$p = 1$	
Global	$\rho = \pm 1$	$\sigma = n$	$p = 1$	(3)
Local	$\rho = \pm 1$	$\sigma = n \neq 0$	$p > 1$	

with  $n$  and  $p$  relatively prime in the last line. Each quantum number has a group-theoretical interpretation. This construction has been extended to attractors in  $N + 1$  dimensional solid tori  $D^N \times S^1$ , with result summarized below :

Diffeo. Type	Parity	Fund. Gp.	Subharmonic	
Isotopic to $Id$	$\rho = +1$	$\sigma = n_e$	$p = 1$	
Global	$\rho = \pm 1$	$\sigma = n_e, n_o$	$p = 1$	(4)
Local	$\rho = \pm 1$	$\sigma = n_o$	$p > 1$	

In this case three indices are still required to identify members of each family. They are all group operations :  $\rho \in O(N)/SO(N) \simeq Z_2$ ,  $\sigma$  is a member of the fundamental group of  $SO(N)$ , also equivalent to  $Z_2$ , and  $p \geq 1$  is a homotopy index of  $SO(2)$ . Since the standard real measures (Lyapunov exponents and fractal dimensions) are invariant under global and local diffeomorphisms, they are useless for distinguishing different members of a family. We have introduced two classical mechanics statistics for distinguishing among them. These are an average energy integral and an average angular momentum integral about the rotation axis. Both statistics depend systematically on the angular frequency  $\omega'$  and are simple to compute from time series.

The biggest losses in going from strange attractors in  $D^2 \times S^1$  to strange attractors in  $D^N \times S^1$  ( $N > 2$ ) are loss of the global torsion index  $n$  (from  $SO(2)$ ) [15] and its replacement by a  $Z_2$  valued index  $\sigma$  (from  $SO(N)$ ), and the greatly reduced number of topologically inequivalent families that can be constructed from diffeomorphisms that satisfy periodic boundary conditions after 1 or  $p$  periods.

**Acknowledgements :** The author thanks M. Lefranc and C. Letellier for helping to organize this Colloquium, for exciting interactions, and useful comments.

## Références

1. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The Topology of Chaos*, Wiley, New York (2002).
2. T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Strange attractors are classified by bounding tori, *Phys. Rev. Lett.*, **91**(13), 134104 (2003).
3. T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in  $R^3$ , *Physical Review E*, **69**, 056206 (2004).
4. J. BIRMAN & R. F. WILLIAMS, Knotted periodic orbits in dynamical systems II : Knot holders for fibered knots, *Cont. Math.*, **20**, 1-60 (1983).
5. G. BYRNE, R. GILMORE & C. LETELLIER, Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors, *Physical Review E*, **70**, 056214 (2004).
6. C. LETELLIER, T. D. TSANKOV, G. BYRNE & R. GILMORE, Large scale structural reorganization of strange attractors, *Physical Review E*, **72**, 026212 (2005).
7. R. GILMORE, Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Revs. Mod. Phys.*, **70** (4), 1455-1529 (1998).
8. R. GILMORE, Two-parameter families of strange attractors *Chaos*, **17**, 1 (2007).
9. R. GILMORE & C. LETELLIER, *The Symmetry of Chaos*, Oxford University Press, New York, 2007.
10. J. KATRIEL & R. GILMORE, Entropy of bounding tori, (unpublished).
11. J.-P. ECKMANN AND D. RUELLE, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Revs. Mod. Phys.*, **57** (3), 617-656 (1985).
12. R. GILMORE & C. LETELLIER, Covering dynamical systems : Twofold covers, *Physical Review E*, **63**, 016206 (2001).
13. C. LETELLIER & R. GILMORE, Dressed symbolic dynamics, *Physical Review E*, **67**, 036205 (2003).
14. R. GILMORE, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of their Applications*, Wiley : NY (1974).
15. H. G. SOLARI & R. GILMORE, Relative rotation rates in driven dynamical systems, *Phys. Rev. A*, **37**, 3096-3109 (1988).
16. V. I. ARNOL'D, A. VARCHENKO & A. GOUSEIN-ZADÉ, *Singularitiés des applications différentiales*, Editions Mir, Moscou, 1986.

# Variété Invariante Intégrale de Systèmes Dynamiques

Ginoux Jean-Marc & Rossetto Bruno

Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon, Université de Sud  
B.P. 20132, 83957, La Garde Cedex, France  
ginoux@univ-tln.fr

**Résumé.** Le but de cet article est de présenter une nouvelle méthode de détermination d'intégrales de systèmes dynamiques autonomes de dimension deux ou trois. Considérant les courbes trajectoires solutions de ces systèmes comme des courbes planes ou gauches des propriétés de la Géométrie Différentielle telles que la courbure (resp. la torsion) ont permis de leur associer une variété. Définie comme le lieu des points où la courbure (resp. torsion) locale des courbes trajectoires s'annule, les conditions pour lesquelles cette variété est invariante sont établies en utilisant la théorie des courbes invariantes (resp. surfaces invariantes) introduite par Gaston Darboux et Henri Poincaré. Alors, à partir des travaux de M. J. Prolle et M. F. Singer, D. Schlomiuk, J. Llibre, H. Giacomini, C. Christopher et A. Goriely pour n'en citer que quelques-uns, une classification des différents cas pour lesquels ces systèmes dynamiques autonomes de dimension deux ou trois admettent une variété invariante comme intégrale première est fournie. Différents exemples d'applications permettent d'illustrer cette nouvelle approche.

**Abstract.** The aim of this article is to present a new method of determination of integrals of autonomous dynamical systems of dimension two or three. While considering the trajectory curves solutions of these systems as plane or space curves some Differential Geometry properties such as curvature (resp. torsion) enable to associate a manifold to them. Defined as the location of the points where the local curvature (resp. torsion) of the trajectory curves vanishes, the conditions for which this manifold is invariant are established by using the the invariant theory of curves (resp. surfaces) introduced by Gaston Darboux and Henri Poincaré. Then, starting from the works of M. J. Prolle and M. F. Singer, D. Schlomiuk, J. Free, H. Giacomini, C. Christopher and A. Goriely to name but a few, a classification of the various cases for which these autonomous dynamical systems of dimension two or three admit an invariant manifold as first integral is provided. Various examples of applications make it possible to emphasize this new approach.

## 1 Système d'équations différentielles

On considère un système d'équations différentielles défini sur un compact  $E$  de  $\mathbb{R}$  par :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathfrak{S}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

Le vecteur  $\mathfrak{S}(\mathbf{X}) = {}^t [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]$  défini sur  $E$  un champ de vecteurs vitesse dont les composantes  $f_i$  indépendantes du temps, supposées continues, de classe  $C^\infty$  sur  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [2]. Ce système autonome admet une *courbe trajectoire*  $\mathbf{X} = {}^t [x_1, x_2, \dots, x_n]$  tangente à  $\mathfrak{S}$  en tout point. Dans tout ce qui suit on supposera que le système défini par (1) est de dimension deux (resp. trois).

## 2 Propriétés de la courbe trajectoire

La *courbe trajectoire*  $\mathbf{X}(t)$  intégrale du système défini par (1) peut être envisagée comme une courbe *plane* ou *gauche* possédant des propriétés métriques locales : *courbure* et *torsion*.

## 2.1 Courbure de la courbe trajectoire

Soit  $\mathbf{X}(t)$  la *courbe trajectoire* intégrale du système défini par (1) possédant en  $M$  un vecteur vitesse instantanée  $\mathbf{V}(t)$  et un vecteur accélération instantanée  $\boldsymbol{\gamma}(t)$ , la *courbure* est définie par :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\|\boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{V}\|}{\|\mathbf{V}\|^3} \quad (2)$$

où  $\mathfrak{R}$  représente le *rayon de courbure*.

## 2.2 Torsion de la courbe trajectoire

Soit  $\mathbf{X}(t)$  la *courbe trajectoire* intégrale du système défini par (1) possédant en  $M$  un vecteur vitesse instantanée  $\mathbf{V}(t)$ , un vecteur accélération instantanée  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  et un vecteur sur-accélération instantanée  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ , la *torsion* est définie par :

$$\frac{1}{\mathfrak{S}} = -\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{V})}{\|\boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{V}\|^2} \quad (3)$$

où  $\mathfrak{S}$  représente le *rayon de torsion*.

## 3 Dérivée de Lie et intégrale première

### 3.1 Variété invariante

Soit  $\phi$  une fonction de classe  $C^1$  définie sur un compact  $E$  inclus dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbf{X}(t)$  la *courbe trajectoire* intégrale du système défini par (1). La dérivée de Lie est définie par :

$$L_{\mathbf{X}}\phi = \mathbf{V} \cdot \nabla\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{d\phi}{dt} \quad (4)$$

Une *variété* (une courbe, resp. une surface) définie par  $\phi(\mathbf{X}) = 0$  où  $\phi$  est une fonction de classe  $C^1$  dans un ouvert  $U$  et dite *invariante* s'il existe une fonction  $C^1$  notée  $k(\mathbf{X})$  et appelée cofacteur qui satisfasse pour tout  $\mathbf{X} \in U$  :

$$L_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = k(\mathbf{X})\phi(\mathbf{X}) \quad (5)$$

Cette notion a été introduite par Gaston Darboux [3].

### 3.2 Intégrale première

Si  $L_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = 0$  alors  $\phi(\mathbf{X})$  est intégrale première du système défini par (1). Ainsi,  $\phi(\mathbf{X})$  est constante le long de chaque *courbe trajectoire* et les courbes intégrales sont tracées sur les ensembles de niveau  $\{\phi(\mathbf{X}) = \alpha\}$  où  $\alpha$  est une constante.

D'après Darboux [3], une variété  $\phi(\mathbf{X}) = 0$  est une solution algébrique du système défini par (1) si et seulement si,  $\phi(\mathbf{X}) = 0$  est une variété algébrique invariante.

## 4 Variété algébrique invariante

### 4.1 Variété algébrique de courbure (torsion) nulle

On appelle variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle la variété (la courbe, resp. la surface) définie par le lieu des points où la *courbure* (resp. la *torsion*) locale des *courbes trajectoires* intégrales d'un système (1) de dimension deux (resp. trois) s'annule.

## 4.2 Invariance de la variété algébrique de courbure (torsion) nulle

En posant  $\phi(\mathbf{X}) = \|\gamma \wedge \mathbf{V}\|$ , il a été démontré dans une précédente publication [4] que la dérivée de Lie de la *courbure* s'écrit :

$$L_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = Tr(J)\phi(\mathbf{X}) + \left\| \frac{dJ}{dt}\mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \right\| \quad (6)$$

où  $J$  représente le jacobien fonctionnel associé au système (1).

De même, en posant  $\phi(\mathbf{X}) = \dot{\gamma} \cdot (\gamma \wedge \mathbf{V})$ , il a été démontré dans [1] que la dérivée de Lie de la *torsion* s'écrit :

$$L_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = Tr(J)\phi(\mathbf{X}) + \left( -Tr(J)\frac{dJ}{dt}\mathbf{V} + J\frac{dJ}{dt}\mathbf{V} + 2\frac{dJ}{dt}\gamma + \frac{d^2J}{dt^2}\mathbf{V} \right) \cdot (\gamma \wedge \mathbf{V}) \quad (7)$$

Ainsi, la dérivée de Lie de la *courbure* (resp. de la *torsion*) peut s'écrire :

$$L_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = Tr(J)\phi(\mathbf{X}) + R(\mathbf{X}) \quad (8)$$

où  $R(\mathbf{X})$  représente la seconde partie du membre de droite de l'équation (6) (resp. (7)).

En comparant les équations (8) et (4) on constate que l'invariance de la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle est liée à la présence du terme  $R$ . Ceci conduit à une classification des différents cas pour lesquels cette variété algébrique est invariante.

La dépendance de  $R$  vis à vis de la différentielle totale du jacobien fonctionnel associé au système (1) permet alors distinguer deux types de systèmes : les systèmes linéaires, les systèmes multi-échelles, i.e., possédant un ou plusieurs petits paramètres multiplicatifs en facteur dans leur champ de vecteurs vitesse, appelés également singulièrement perturbés, ou lents-rapides.

### 1. Systèmes linéaires :

Dans le cas de systèmes linéaires le jacobien fonctionnel est constant, i.e., sa différentielle totale est donc nulle. L'invariance globale de la variété algébrique en découle *ipso facto* et le lieu des points où elle s'annule constitue une intégrale première du système.

### 2. Systèmes Autonomes Lents-Rapides :

Dans le cas de Systèmes Autonomes Lents-Rapides, il a été établi dans [4] que dans le voisinage de  $\phi(\mathbf{X}) = 0$  le jacobien fonctionnel est stationnaire et par conséquent sa différentielle totale est nulle. La variété algébrique est donc localement invariante et le lieu des points où elle s'annule constitue une intégrale première locale du système.

Dans le cas de systèmes défini par (1) qui ne soient ni linéaires, ni lents-rapides, il existe des conditions pour lesquelles le terme  $R$  se factorise en fonction de  $\phi$  ou bien s'annule. La variété algébrique est alors globalement invariante et le lieu des points où elle s'annule constitue une intégrale première du système. La détermination de certaines conditions d'invariance de la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle associée à ces systèmes fait l'objet du paragraphe suivant.

## 4.3 Invariance des isoclines

**Théorème** : Un système différentiel (1) de dimension deux (resp. trois) dont les composantes du champ de vecteurs vitesse sont des variétés algébriques invariantes admet la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle pour variété algébrique invariante et pour intégrale première.

*Démonstration.* On considère un système d'équations différentielles défini sur un compact  $E$  de  $\mathbb{R}$  par :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathfrak{S}(\mathbf{X})$$

Le vecteur  $\mathfrak{S}(\mathbf{X}) = {}^t [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]$  défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes  $f_i$  indépendantes du temps, supposées continues, de classe  $C^\infty$  sur E et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [2] et la condition d'invariance de Darboux (5) :

$$L_{\mathbf{X}} f_i(\mathbf{X}) = k_i(\mathbf{X}) f_i(\mathbf{X}) \quad (9)$$

La variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle s'écrit alors :

$$\phi(\mathbf{X}) = P(k_i, \dot{k}_i) \prod_{i=1}^n f_i \quad (10)$$

où  $P(k_i, \dot{k}_i)$  représente un polynôme dépendant des cofacteurs  $k_i$  et de leurs différentielles totales  $\dot{k}_i$ . La dérivée de Lie s'écrit :

$$L_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{X}) = \left[ \dot{P}(k_i, \dot{k}_i) + P(k_i, \dot{k}_i) \sum_{i=1}^n k_i \right] \prod_{i=1}^n f_i \quad (11)$$

On vérifie que la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle est bien invariante et que le lieu des points où elle s'annule constitue une intégrale première du système défini par (1).

Ainsi, si toutes les isoclines d'un système défini par (1) sont invariantes, ce système admet la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle pour variété algébrique invariante et pour intégrale première.

## 5 Applications

### 5.1 Système différentiel de dimension deux

On considère le système d'équations différentielles défini sur un compact E de  $\mathbb{R}$  suivant :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathfrak{S}(\mathbf{X}) \quad (12)$$

Le vecteur  $\mathfrak{S}(\mathbf{X}) = {}^t [f_1(\mathbf{X} = ax + bx^2 + cxy), f_2(\mathbf{X}) = 4ay + 4bxy + 4cy^2]$  défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes  $f_i$  indépendantes du temps, supposées continues, de classe  $C^\infty$  sur E et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [2] et où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des paramètres réels. On peut vérifier facilement que les composantes du champ de vecteurs vitesse du système quadratique (12) satisfont les conditions du Théorème d'invariance des isoclines.

La variété algébrique de *courbure* nulle associée à ce système s'écrit :

$$\phi(\mathbf{X}) = 12xy(a + bx + cy)^3 \quad (13)$$

La dérivée de Lie s'écrit :

$$L_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{X}) = 12xy(a + bx + cy)^3(5a + 8bx + 17cy) \quad (14)$$

Le système (12) admet bien la variété algébrique de *courbure* nulle pour variété invariante et pour intégrale première.

### 5.2 Système différentiel de dimension trois

On considère le système d'équations différentielles défini sur un compact E de  $\mathbb{R}$  suivant :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathfrak{S}(\mathbf{X}) \quad (15)$$

Le vecteur  $\mathfrak{S}(\mathbf{X}) = {}^t [f_1(\mathbf{X} = xyz(x + A)), f_2(\mathbf{X}) = xyz(y + B), f_3(\mathbf{X}) = xyz(z + C)]$  défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes  $f_i$  indépendantes du temps, supposées continues, de classe  $C^\infty$  sur E et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [2] et où  $a, A, b, B$  et  $c, C$  sont des paramètres réels. On peut vérifier facilement que les composantes du champ de vecteurs vitesse du système (15) satisfont les conditions du Théorème d'invariance des isoclines. La variété algébrique de *torsion* nulle associée à ce système s'écrit :

$$\phi(\mathbf{X}) = abc(a - b)(a - c)(c - b)x^6y^6z^6(A + x)(B + y)(C + z) \quad (16)$$

La dérivée de Lie s'écrit :

$$L_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = abc(a - b)(a - c)(c - b)x^6y^6z^6(A + x)(B + y)(C + z)P(x, y, z) \quad (17)$$

où le cofacteur est  $P(x, y, z) = 6cCxy + 6bBxz + 6aAyz + 7(a + b + c)xyz$ . Le système (15) admet bien la variété algébrique de *torsion* nulle pour variété invariante et pour intégrale première.

## 6 Conclusion

Dans cet article il a été établi que la variété algébrique de *courbure* (resp. de *torsion*) nulle peut constituer sous certaines conditions l'une des variétés invariantes associée à tout système défini par (1). Dans ce cas le lieu des points où elle s'annule permet d'obtenir l'intégrale première de ces systèmes. Néanmoins, si le Théorème d'invariance des isoclines fournit une de ces conditions il semble que d'autres restent à découvrir. Ainsi, l'étude de systèmes différentiels composés de polynômes homogènes a conduit, en dimension deux, à l'équation d'une variété invariante directement issue de la variété algébrique de *courbure* nulle et devrait fournir, en dimension trois, de nouvelles conditions.

## Références

1. C. CHRISTOPHER & J. LLIBRE, *Ann. Differential Equations*, **16** (1), 5-19 (2000).
2. E.A. CODDINGTON & N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mac Graw Hill, New York, (1955).
3. G. DARBOUX, *Bull. Sci. Math. Sér.*, **2** (2), 60-96, 123-143, 151-200 (1878).
4. J.M. GINOUX & B. ROSSETTO, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **16**, 887-910 (2006).
5. A. GORIELY, Integrability and Nonintegrability of ordinary differential equations, *Advanced Series on Non-linear Dynamics*, **19** World Scientific (2001).
6. J. LLIBRE, Integrability of polynomial differential systems, *Handbook of Differential Equations (Ordinary Differential Equations Volume I)*, pp. 437-532. Elsevier (2003).
7. M. PRELLE & M. SINGER, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **279**, 215-229 (1983).
8. H. POINCARÉ, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **1**, 169-191 (1891).
9. H. POINCARÉ, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **11**, 193-239 (1897).
10. D. SCHLOMIUK, Bifurcations and periodic orbits of Vector Fields, *Series C : Mathematical and Physical Sciences*, **408**, Kluwer Academic Publishers, NATO Advanced Study Institute Series (1993).





# Dynamiques non linéaires expérimentales à retard et à temps discret

Mélanie Grapinet, Laurent Larger, Pierre-Ambroise Lacourt, & Vladimir Udaltsov

Institut FEMTO-ST, UMR 6174, Université de Franche-Comté 16 Route de Gray, 25030 BESANCON Cedex  
[melanie.grapinet@univ-fcomte.fr](mailto:melanie.grapinet@univ-fcomte.fr)

**Résumé.** Nous observons expérimentalement des dynamiques à temps discret obtenues au sein d'un oscillateur optoélectronique non linéaire à retard alimenté par une source impulsionnelle. Au travers d'une étude complète nous avons recherché de manière systématique des diagrammes de bifurcation en fonction d'un des paramètres du système. L'analyse de ces diagrammes a permis de mettre en évidence une évolution en T2, T4, T3 menant au chaos.

**Abstract.** Experimentally, we report the discrete time dynamics obtained with a delay feedback electro-optic oscillator seeded by ultra-short pulses. We observe a period three window after the first chaotic regimes.

## 1 Introduction

Les dynamiques non linéaires à retard, découvertes en optique voici plusieurs années par K. Ikeda [1], forment une classe particulière de systèmes dynamiques. Plus récemment, des dynamiques non linéaires à temps discret ont été observées par l'équipe de L. Larger [2] grâce à l'utilisation d'une excitation lumineuse impulsionnelle. Le système optoélectronique permettant cette visualisation de dynamiques à complexité élevée, est modélisé par l'équation intégréo-différentielle suivante :

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) + \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t x(s) ds = \beta(t) \sin^2 [x(t - T) + \phi_0]. \quad (1)$$

où  $x(t)$  est la variable dynamique,  $T$  est le retard temporel,  $\tau$  et  $\theta$  sont les constantes de temps du système et  $\beta(t) = \beta_0 p(t)$  est un forçage périodique externe de nature impulsionnelle, où  $p(t)$  est une enveloppe normalisée de l'impulsion et  $\beta_0$  représente la puissance optique crête. Dans les dynamiques à retard classique,  $\beta = \beta_0$  est constant et sert habituellement de paramètre de bifurcation. Contrairement aux études menées jusqu'à présent, une dépendance temporelle de  $\beta$  est introduite. Si l'étude des diagrammes de bifurcation obtenus pour un gain  $\beta$  indépendant du temps est bien cernée [3], il n'en est pas de même pour les cas où  $\beta$  possède une dépendance temporelle. Nous nous sommes donc concentrés sur le cas où la source optique est de type impulsionnelle. Lorsque  $\beta$  est constant, la dynamique à retard est déjà intrinsèquement à échelles multiples ( $T \approx 10^3 \tau \approx 10^6 \theta$ ). Avec l'introduction d'une modulation impulsionnelle rapide de  $\beta$ , nous sommes en présence d'une dynamique quasi-discrète rythmée par le taux de répétition de  $\beta(t)$ , mais toujours à échelle de temps multiples. Deux nouvelles échelles de temps sont introduites, la largeur du pulse et la période de répétition. Le comportement à temps discret est obtenu lorsque le temps de réponse  $\tau$  de l'oscillation est suffisamment grand devant la largeur des pulses, et suffisamment faible devant la période de ces pulses.

Le travail présenté ici a pour but d'interpréter des dynamiques à retard obtenues par une application à temps discret. Après un bref descriptif du montage, nous analyserons un diagramme de bifurcation expérimental typique d'un tel oscillateur. Puis, nous développerons une étude menée par rapport au paramètre  $\phi_0$  du système étudié : l'offset horizontal de la transformation non linéaire décrit dans l'équation (1). Expérimentalement, il est lié au point de repos d'un interféromètre de type Mach-Zehnder électro-optique, utilisé pour réaliser la non linéarité. Enfin, nous terminerons par l'observation d'un hystérésis du comportement dynamique en fonction du gain du système  $\beta_0$ .

## 2 Description expérimentale

L'oscillateur chaotique produisant un comportement chaotique très large bande d'une porteuse optique est illustré à la figure 1. Il permet d'observer différents types de dynamiques non linéaires : stationnaire (point fixe), périodique (cycle) ou chaotique.

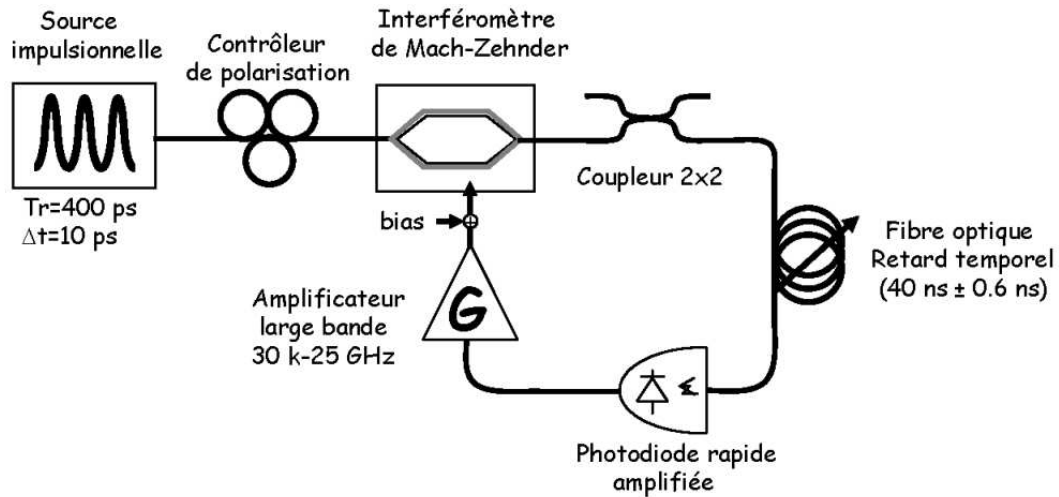


Fig.1. Schéma du dispositif expérimental d'un générateur de chaos

Ce montage est étudié au départ dans le contexte des communications optiques par chaos. La motivation originale de l'architecture à source laser impulsionnel est liée à l'obtention d'un comportement dynamique chaotique en amplitude, mais discret en temps, de manière à pouvoir envisager une compatibilité avec les systèmes de communications modernes rythmés par une horloge.

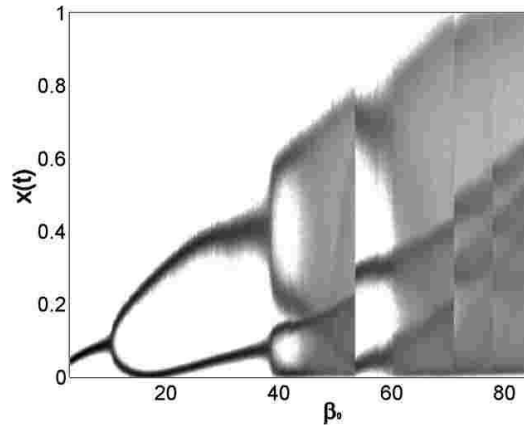
Pour ce faire, la nature discrète du chaos est obtenue à partir d'impulsions optiques à 1550 nm d'une durée d'au plus 10 ps, avec un taux de répétition de 2.5 GHz ( $T_r = 400$  ps). Les impulsions peuvent ainsi être bien séparées par le temps de réponse  $\tau$  de la boucle optoélectronique, de l'ordre de 40 ps. L'amplitude de ces impulsions est modulée chaotiquement à l'aide d'une architecture de dynamiques non linéaires à retard, composée par une non linéarité de type Mach-Zehnder électro-optique. Cet interféromètre à deux ondes, accordable, est modulé par une tension de commande permettant de passer d'une interférence constructive à une interférence destructive. Quelques mètres à quelques dizaines de mètres de fibre optique permettent de retarder le signal optique d'interférence d'une durée  $\tau_R$ , et un système de détection/amplification large bande permet une contre-réaction optoélectronique sur le Mach-Zehnder.

## 3 Résultats expérimentaux

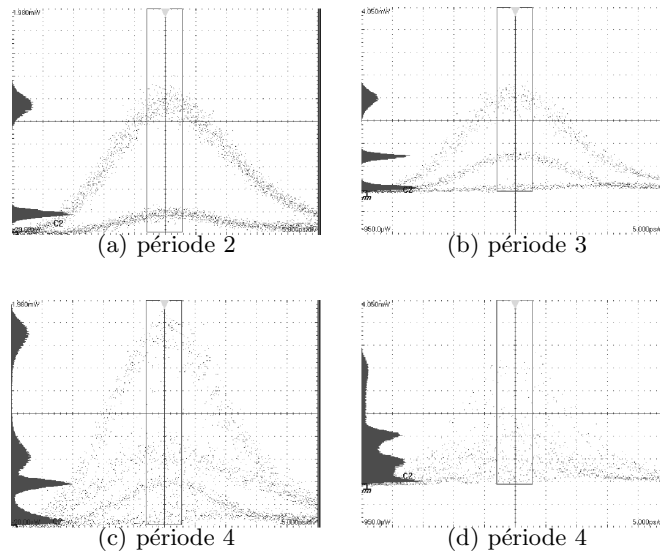
### 3.1 Diagramme de bifurcation

L'ensemble des dynamiques non linéaires produites sont mises en évidence grâce à un diagramme de bifurcation acquis à partir du signal optique de sortie de la transformation non linéaire (Mach-Zehnder). La figure 2 représente l'allure d'un diagramme de bifurcation obtenu en faisant varier continûment et lentement la valeur de la puissance optique crête injectée, c'est-à-dire du gain du système noté  $\beta_0$  (évalué en % de sa valeur maximum environ 10 mW).

Le diagramme de bifurcation est construit grâce aux histogrammes portant sur la distribution de densité de probabilité du maximum des impulsions lumineuses en sortie du Mach-Zehnder en fonction



**Fig.2.** Exemple de diagramme de bifurcation obtenu grâce à un générateur de chaos à temps discret



**Fig.3.** Traces expérimentales et histogrammes des impulsions optiques.

de  $\beta_0$ . En enregistrant cette distribution dans un important intervalle de valeurs de  $\beta_0$ , nous obtenons un diagramme de bifurcation. A partir de ces diagrammes, nous pouvons identifier divers régimes : stationnaire (un point fixe), périodique (un nombre fini de solutions : un cycle attracteur) ou encore chaotique (un ensemble infini de solutions).

La figure 3 représente l'état du système tout d'abord par une trace expérimentale des impulsions optiques, enregistrée par un oscilloscope répétitif très large bande. A gauche de chaque trace expérimentale est représenté un histogramme relatif aux maxima du train d'impulsions. L'histogramme est calculé à partir d'une fenêtre temporelle centrée sur les impulsions, et délimitée par le rectangle en trait plein sur la figure 3. Le diagramme de bifurcation est construit à partir de ces histogrammes.

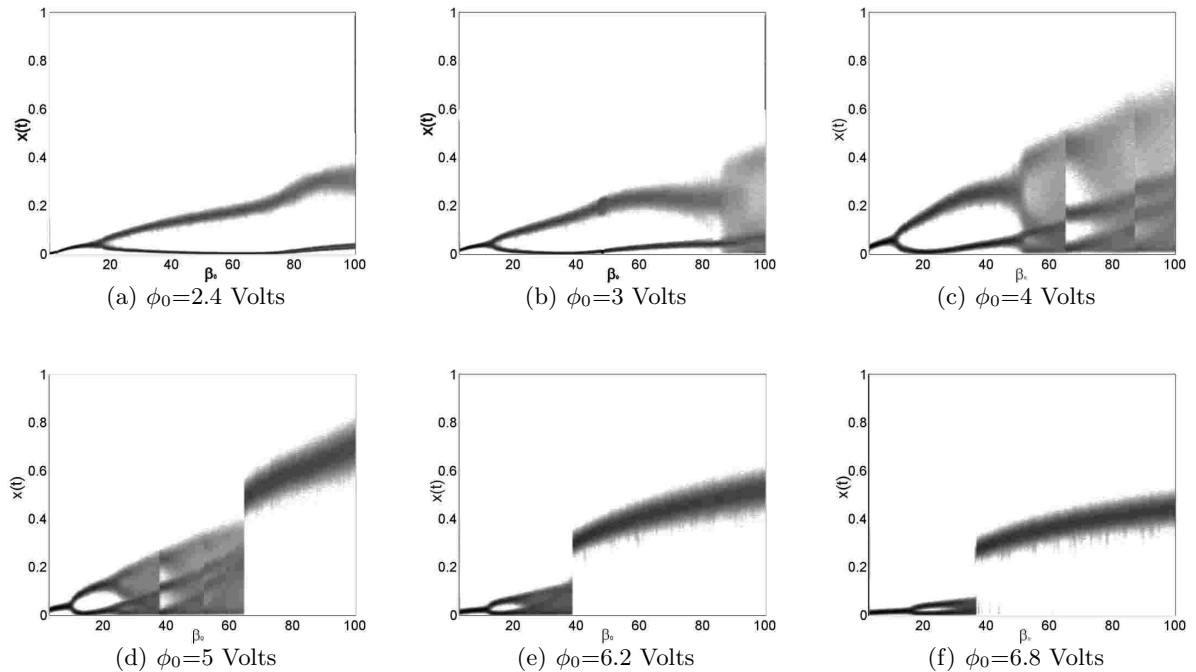
Le diagramme de bifurcation, illustré sur la figure 2, se lit de la manière suivante. La partie de gauche du diagramme, obtenue avec une faible valeur de  $\beta_0$ , correspond à une solution stationnaire pour une injection optique notée  $\beta_0 \in [0\%; 10\%]$ . A partir de  $\beta_0 \approx 10\%$ , le point fixe perd sa stabilité en même temps qu'un cycle stable apparaît. Expérimentalement, on observe des impulsions possédant deux amplitudes

différentes (figure 3 (a)). Ce phénomène est connu sous le nom de **"doublement de période"** et est marqué par une première bifurcation de Hopf de type surcritique (figure 2). L'évolution de la dynamique suit alors la route traditionnelle vers le chaos par une cascade par dédoublements de période jusqu'à  $\beta_0 \approx 53\%$ . Compte tenu du bruit, on ne peut pas observer des cycles en  $2^n$  au delà de  $n=2$ .

Le cycle de période T4, apparaissant pour  $\beta_0 \approx 38\%$  et illustré sur la figure 3 (c), est suivi d'un premier développement chaotique. Pour un  $\beta_0 \approx 53\%$ , une crise réinitialise le système vers une fenêtre de périodicité très nette d'ordre 3, qui ne s'observe habituellement pas dans le cas du temps continu ( $\beta(t)$  constant) (figure 3 (b)). Un nouveau scénario d'interprétation des dynamiques à retard en tant que dynamiques discrètes a pu être ainsi mis en évidence. Le régime en T3 est suivi d'un régime chaotique illustré à la figure 3 (d) et correspondant à  $\beta_0 = 60\%$ . Ce régime chaotique est marqué par une distribution de probabilité très irrégulière (non gaussienne), exactement comme dans le cas des applications ou dynamiques en temps discret. A partir de  $\beta_0 = 70\%$ , une succession de crises fait apparaître plusieurs régimes chaotiques.

### 3.2 Etude selon le paramètre d'offset, $\phi_0$

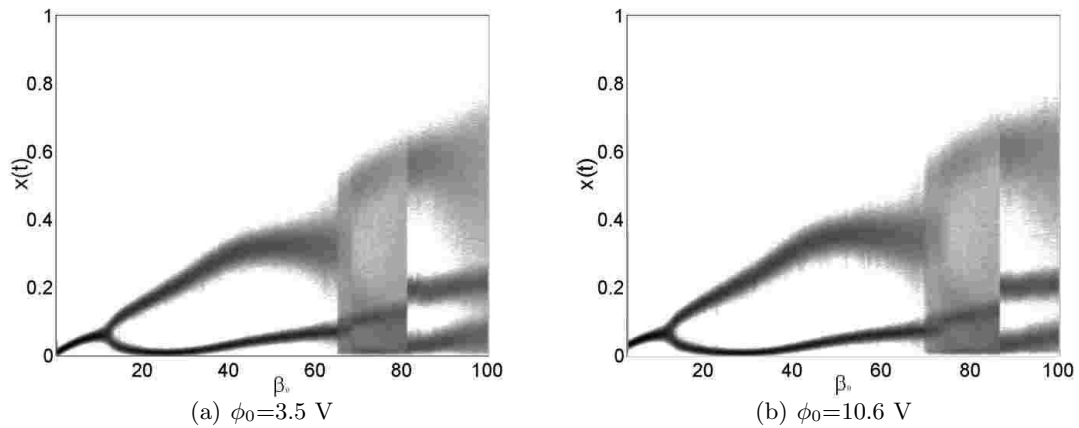
Une étude particulièrement fine sur le paramètre d'offset  $\phi_0$  du système optoélectronique peut être effectuée. Nous faisons varier ce paramètre de manière à parcourir deux minima et un maximum de la fonction de transformation non linéaire, obtenus respectivement pour  $\phi_0$  valant 0, 3.7 et 7 Volts. La succession des diagrammes de bifurcation obtenus est illustrée sur la figure 4.



**Fig.4.** Evolution des diagrammes de bifurcation en augmentant la valeur du paramètre  $\phi_0$

Entre les diagrammes (a) et (f), la valeur de  $\phi_0$  passe de 2.4 à 6.8 Volts par pas successifs. Dans le diagramme (a), une seule bifurcation de Hopf entre un état stationnaire et un cycle de période 2 est observable. En augmentant successivement la valeur de  $\phi_0$ , nous observons un début de cascade harmonique pour aboutir avec  $\phi_0 = 4$  Volts, à des dynamiques successives en T2, T4 et T3 menant au chaos. Pour cette valeur de  $\phi_0$ , on se trouve sur une interférence constructive : la non linéarité est parabolique, comme pour l'application logistique. En poursuivant l'augmentation de la valeur de  $\phi_0$ ,

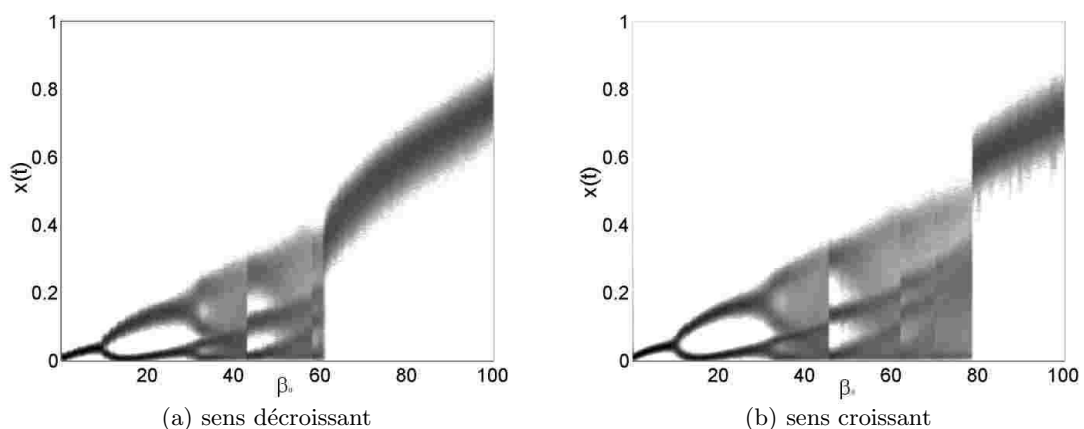
nous décrivons la décroissance de la fonction de transfert jusqu'à son minimum. On constate alors une diminution de l'amplitude des dynamiques ainsi qu'une réduction du nombre des fenêtres de régime chaotique. Le système échappe au développement du chaos en créant un nouvel attracteur par le biais d'une impulsion unique de forte puissance. Ce type de comportement tranche nettement par rapport au cas de l'application logistique, son origine est supposée liée au terme intégral de (1).



**Fig.5.** Diagrammes de bifurcation expérimentaux

Une seconde étude est menée portant sur la reproductibilité des diagrammes de bifurcation. La fonction de transformation non linéaire est de type sinusoïdale impliquant ainsi une périodicité en fonction de  $\phi_0$ . La figure 5 représente deux enregistrements de diagramme de bifurcation respectivement pour  $\phi_0$  valant 3.5 et 10.6 Volts, prouvant ainsi la périodicité des dynamiques non linéaires par rapport à  $\phi_0$ .

### 3.3 Hystérésis



**Fig.6.** Diagrammes de bifurcation expérimentaux obtenus pour une valeur de  $\phi_0$  de 4.42. a) par variation décroissante de  $\beta_0$  et b) par variation croissante de  $\beta_0$ .

Lors du tracé du diagramme de bifurcation, l'état antérieur du système est défini par le régime dynamique précédent. Ainsi, selon le sens de variation du paramètre  $\beta_0$  lors de l'enregistrement du diagramme de bifurcation, il est possible d'observer différentes dynamiques pour des valeurs de paramètres identiques : il s'agit de la **bistabilité** [4]. Ce phénomène est illustré sur la figure 6 où

- (a) représente un diagramme de bifurcation obtenu en partance d'un point fixe du système et en augmentant la valeur de paramètre  $\beta_0$ ,
- (b) représente, quant à elle, un diagramme de bifurcation obtenu cette fois-ci en diminuant la valeur du paramètre  $\beta_0$ .

Ainsi, il est possible de mettre en évidence un cycle d'hystérésis des dynamiques pour ce système à temps discret. Lors d'une variation décroissante, le système échappe au développement du chaos en créant un nouvel attracteur par le biais d'une impulsion unique de forte puissance. Cette variation s'effectue de manière continue c'est-à-dire sans saut dans la nature des dynamiques. Les enregistrements des dynamiques en fonction du gain du système présentent un cycle d'hystérésis. Il apparaît que selon les conditions initiales, il est possible d'obtenir un domaine d'existence chaotique plus important. Cette étude met en évidence, en particulier, l'importance des conditions initiales. Dans l'intervalle [62%; 79%], on observe un régime instable. Les deux solutions de la puissance des impulsions (point fixe, développement chaotique) ne sont pas observables simultanément, et leur existence respective dépend des conditions initiales.

## 4 Conclusion

L'étude expérimentale a porté sur un générateur de chaos obtenu grâce à une source impulsionnelle dont les impulsions d'une durée de 10 ps sont séparées d'environ 400 ps. Ces impulsions sont suffisamment éloignées par rapport au temps de réponse de la boucle d'oscillation, pour parler de temps discret. Une analyse en fonction d'un des paramètres a mis en évidence une route menant au chaos typique des temps discret : T2, T4, T3 puis le chaos. L'enregistrement des données s'effectuant par modification de la puissance de pompage de manière croissante ou décroissante a permis de mettre en évidence un hystérésis des dynamiques en fonction du gain optique du système. L'utilisation d'une source impulsionnelle permet d'observer des périodes triples dans le diagramme de bifurcation [5].

## Remerciement

Ce travail est financé par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet "Apport du Chaos dans la Sécurisation des systèmes Communicants Optiques et Mobiles". Le séjour du Pr. Vladimir Udaltsov est financé par l'Université de Franche-Comté.

## Références

1. K. IKEDA, Multiple-valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System, *Optics Communications*, **30** (3), 257-261 (1979).
2. L. LARGER, P.A. LACOURT, S. POINSOT ET M. HANNA, From flow to map in an experimental high-dimensional electro-optic nonlinear delay oscillator, *Physical Review Letters*, **95** (4), 043903 (2005).
3. M. LE BERRE, E. RESSAYRE, A. TALLET, Y. POMEAU, Dynamic system driven by a retarded force acting as colored noise, *Physical Review A*, **41** (12), 6635-6646 (1990).
4. H. M. GIBBS, F. A. HOPF, D. L. KAPLAN ET R.L. SHOEMAKER, Observation of chaos in optical bistability, *Physical Review Letters*, **46** (7), 474-477 (1981).
5. Y. LIU ET J. OHTSUBO, Period three cycle in a chaotic system using a laser diode active interferometer, *Optics communication*, **93** (5-6), 311-317 (1992).

# Température effective d'un gel colloïdale de Laponite

Pierre Jop, Artyom Petrosyan & Sergio Ciliberto

Laboratoire de Physique, CNRS-UMR 5672, ENS Lyon, 46 allée d'Italie F-69364 LYON CEDEX 07  
 pierre.jop@ens-lyon.fr

**Résumé.** La possibilité de description statistique et thermodynamique des systèmes hors équilibre est une question toujours ouverte. Plusieurs avancées théoriques ont permis de mettre en avant certaines notions comme celle de température effective. Cependant, il existe peu de vérifications expérimentales de ces notions, en particulier la violation du théorème fluctuation dissipation (FD), notamment en mécanique. Plusieurs travaux récents ont tenté de mettre en évidence une violation du théorème FD pour une suspension colloïdale de Laponite, cependant certains résultats sur la mesure de la température effective semblent incompatibles [1,2,3]. Nous nous sommes intéressés aux fluctuations de position d'une bille au centre d'un piège optique pour essayer de comprendre ces différences. Nous enregistrons le mouvement de la bille pendant la solidification de la solution. Nous avons vu que les conditions expérimentales, en particulier la fabrication de l'échantillon, peuvent jouer un rôle important sur le processus de vieillissement du gel. Finalement nous ne mesurons pas de déviations de la température effective.

**Abstract.** A statistical or thermodynamical description of out-of-equilibrium systems is still an open question. Several theoretical works show the importance of an effective temperature to describe the systems. However there exist only few experimental evidences of the relevance of these concepts and the validity of the Fluctuation dissipation theorem (FDT) in mechanical system as colloidal glass need to be checked. Several recent works have tried to measure a violation of the FDT in a colloidal glass of Laponite, however some results about the evolution of the effective temperature seem incompatible [1,2,3]. We have measured the brownian movement of a bead ( $2 \mu m$  in diameter) in an optical trap during the solidification of the suspension to try to understand these differences. We point out that experimental methods, particularly the way of preparing the sample chamber, may modified the aging process of the gel. Finally, we do not observe any variation of the effective temperature.

## 1 Introduction

Récemment, les systèmes hors équilibre ont fait l'objet d'études théoriques importantes afin de mieux comprendre leurs propriétés. Afin de développer une thermodynamique de ces milieux, il est nécessaire de comprendre l'origine des fluctuations microscopiques de certaines propriétés. Dans ce but, plusieurs notions ont montré leur intérêt, notamment celle de température effective. Cette température est reliée à la validité du théorème fluctuation dissipation dans ces systèmes. Une des questions actuelle est de savoir si le FDT est valide dans les verres colloïdaux. Cependant, il existe peu de vérifications expérimentales notamment en mécanique. La laponite représente un gel colloïdal hors équilibre modèle dont le vieillissement ne fait pas intervenir de trempe. La Laponite est constituée de petits disques de 1 nm d'épaisseur et de 15 nm de diamètre. Une suspension diluée de laponite passe de l'état liquide à l'état d'un gel en quelques heures. Plusieurs travaux récents ont tenté de mettre en évidence une violation du théorème FD, cependant certains résultats sur la mesure de la température effective semblent incompatibles [1,2,3]. Bellon *et al* [1] ont montré une violation importante du FDT sur des mesures diélectrique mais en revanche aucune violation sur les mesures mécaniques d'un oscilateur dans la limite de leur résolution. Abou *et al* [2] a montré par des mesures de réponses et de corrélation que la température effective est égale à celle du bain aux temps courts puis passe par un maximum avant de retrouver la température du bain. Jabbari-Farouji [3] ont comparé les mesures de réponse et de diffusion de billes et n'ont mesuré aucune déviation de la température. Strachan *et al* [4] ont mesuré en combinant une mesure rhéologique et de diffusion dynamique de la lumière que la température effective augmente avec le temps et avec la

fréquence. Enfin Greinert *et al* [5] ont observé par une technique de modulation de piège optique que la température effective augmente avec le temps de vieillissement.

Aux vues de ces résultats disparates, il nous semble nécessaire d'effectuer d'autres mesures. Nous nous sommes donc intéressés aux fluctuations de position d'une bille au centre d'un piège optique (diode laser de longueur d'onde  $\lambda=980$  nm) pour essayer de comprendre ces différences. Nous enregistrons, sur une photodiode quatre cadrans, le mouvement de la bille (1  $\mu\text{m}$  de rayon) grâce à un laser He-Ne pendant la solidification de la solution.

## 2 Préparation de la Laponite

La Laponite est conservée dans une boîte à gants sous atmosphère contrôlée : une circulation d'azote permet d'éviter la présence d'humidité et celle de  $\text{CO}_2$  qui peut se dissoudre dans les solutions aqueuses. Toute la préparation de la solution s'effectue à l'intérieur de la boîte hors mis le remplissage final des échantillons. Nous préparons d'abord une solution aqueuse de pH 10 (par ajout de NaOH) et de force ionique constante (par ajout de NaCl) à partir d'eau ultra pure. Une quantité de poudre de Laponite RD est ensuite dissoute dans un 50 mL de cette solution. Nous avons travaillé avec des concentrations entre 1.2% et 3% en masse. La solution préparée est agitée pendant au moins 30 minutes. Elle est ensuite passée à travers un filtre de pores de 0.45  $\mu\text{m}$  de diamètres. Cette étape est prise pour origine temporelle du vieillissement de la Laponite. Immédiatement après, une faible quantité de billes de verre de 2  $\mu\text{m}$  de diamètre est ajoutée à la solution, que nous dispersons à l'aide d'une cuve à ultrasons. La solution est alors injectée entre une lame et une lamelle de verre séparée par un adhésif inerte d'épaisseur 250  $\mu\text{m}$ . Toutes les mesures sont réalisées à une température de  $21^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$

## 3 Technique de mesure

Nous travaillons avec un piège optique réalisé par un faisceau laser infrarouge (diode laser  $\lambda=980$  nm) focalisé à la limite de diffraction par un objectif de microscope  $\times 63$ . L'échantillon est ensuite positionné sur une platine pilotée par des capteurs piézo-électriques. Une des billes de verre en suspension est positionnée au centre du piège. Celui-ci exerce une force de rappel de type élastique sur la bille. La bille est ainsi soumise d'une part aux fluctuations thermiques du milieu ambiant et d'autre part aux forces de rappels : si le milieu fluide possède une composante élastique, la raideur correspondante ( $k_{gel}$ ) s'ajoutera à celle du laser. La bille se comporte comme un oscillateur harmonique soumis à une force aléatoire. La position de la bille dans le plan focal est enregistrée lors du vieillissement du gel  $x(t)$  par l'intermédiaire d'un second laser HeNe et d'une photodiode quatre cadrans. La sensibilité de la mesure est alors de 100 nm/V. Afin de tester le théorème de fluctuation dissipation, il conviendrait de mesurer séparément la réponse à une perturbation ainsi que les fluctuations libres. Nous avons plutôt opté pour une technique décrite dans [5] que nous résumons ici. Bien que le système soit hors d'équilibre, le théorème de l'équipartition de l'énergie semble toujours s'appliquer [6] : nous pouvons écrire une relation similaire à celle que l'on aurait à l'équilibre pour un oscillateur harmonique en introduisant une température effective  $T_{eff}$  :

$$(k_{gel} + k) \langle \Delta x^2 \rangle = k_B T_{eff}$$

où  $\langle \Delta x^2 \rangle$  est la moyenne statistique de  $(x^2 - \langle x \rangle^2)$ . Afin d'éliminer la raideur inconnue du milieu, la force du piège est modulée entre deux valeurs ( $k_1 = 7.47$  pN/ $\mu\text{m}$  et  $k_2 = 16.7$  pN/ $\mu\text{m}$ ) en changeant l'intensité du laser. Nous trouvons alors les expressions de la température et la raideur du gel :

$$k_{gel} = \frac{k_1 \langle \Delta x_1^2 \rangle - k_2 \langle \Delta x_2^2 \rangle}{\langle \Delta x_1^2 \rangle - \langle \Delta x_2^2 \rangle}$$

$$k_B T_{eff} = \frac{(k_2 - k_1) \langle \Delta x_1^2 \rangle \langle \Delta x_2^2 \rangle}{\langle \Delta x_1^2 \rangle - \langle \Delta x_2^2 \rangle}$$



L'intensité du laser est basculée toutes les 81 secondes et nous attendons une période de 20 secondes avant de commencer les mesures pour éviter les problèmes de phénomènes transitoires. Les mesures aux deux puissances ne sont donc pas rigoureusement simultanées, cependant ces cycles ont une durée suffisamment longue pour enregistrer la dynamique de la particule à basse fréquence et suffisamment courte pour avoir une bonne description de l'évolution du gel.

## 4 Résultats

La figure 1(a) montre un exemple d'évolution des variances des signaux pour les deux puissances différentes. Lorsque la raideur du gel devient du même ordre de grandeur que celle du laser, la variance décroît rapidement. Nous pouvons noter que proche de ce point de chute, les fluctuations deviennent plus importantes. La figure 1(b) montre la température effective déduite des mesures ainsi que la raideur de la Laponite. Le premier résultat est que la température, aux temps courts, est constante et sa valeur, voisine de 350 K, est compatible avec la température du bain  $T_b = 294$  K compte tenu des incertitudes de calibration. Lors de la phase de décroissance, nous pouvons observer une évolution très bruitée de la température. Ces fluctuations résultent de celles de la variance, cependant, nous observons d'une façon systématique une décroissance de la température avec le temps. Ce résultat est contraire à celui trouvé par Greinert *et al* [5] : leurs mesures montrent en effet une brusque augmentation de la température jusqu'à une valeur double de  $T_B$ . Dans notre cas, les variances des signaux pour les deux puissances restent un peu écartées l'une de l'autre aux temps longs alors qu'elles sont superposées dans les mesures de Greinert. Ceci pourrait provenir des durées d'acquisition, ou des valeurs des raideurs choisies.

Afin d'essayer de comprendre l'origine de cette différence, nous avons répété ces mesures pour différents paramètres.

## 5 Influences des paramètres

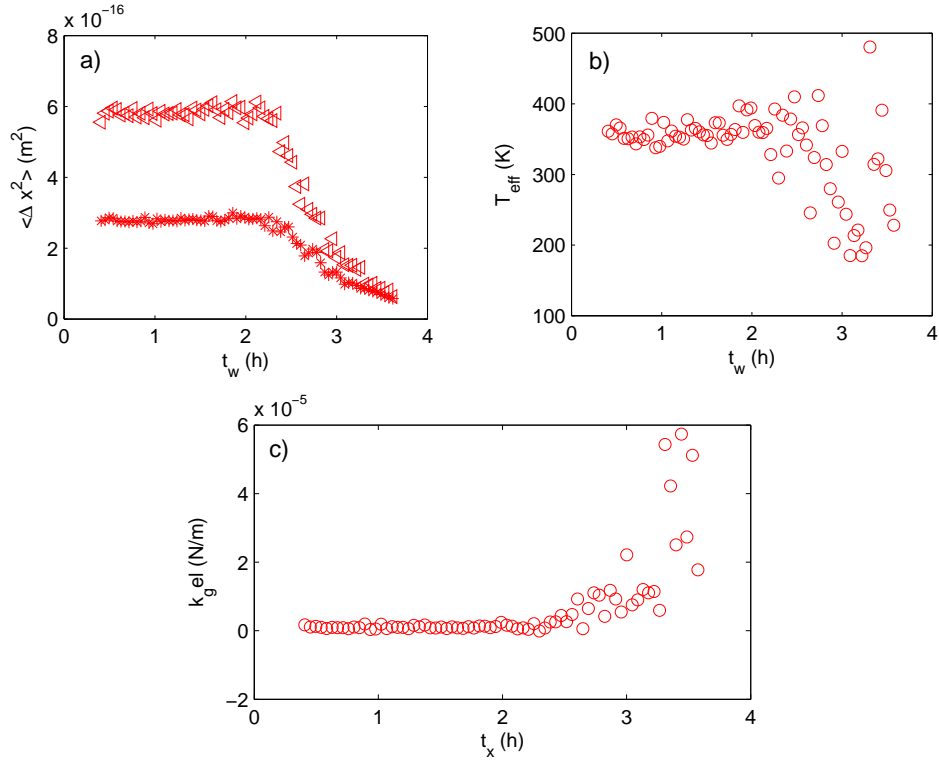
### 5.1 Préparation de la cellule

Étant donné le faible volume de l'échantillon, les propriétés physico-chimiques des matériaux utilisés sont importantes. Dans une première série de mesure, nous introduisons la solution de Laponite par un petit canal que l'on bouche ensuite avec une colle afin d'éviter les phénomènes d'évaporation et le contact avec le  $\text{CO}_2$  de l'air. Une autre technique consiste à sceller l'échantillon grâce à un adhésif double face en anneau ou un joint adhésif inerte spécialement conçu pour des applications biologiques. Bien que nous imposions généralement un pH égal à 10, l'acidité des colles peut donc modifier la solution de Laponite et donc influencer fortement la dynamique du traceur.

En comparant les temps de vieillissement avec ou sans colle, nous remarquons que la présence de la colle accélère de façon importante la dynamique : le temps de prise est divisé par 3 pour un pH imposé à 10, voire divisé par 10 si le pH n'est pas imposé (passant de 3h30 à 35 heures de vieillissement). De plus, nous observons qu'avec la colle, le laser ne peut plus maintenir la bille à la fin de l'expérience : une dérive importante est notée. Au contraire, sans colle la bille reste piégée tout au long de l'expérience. Ceci semble indiquer que la dynamique de formation du gel est différente en présence de colle. Nous avons mesuré l'influence de la distance entre le point de mesure et la colle avec une cellule circulaire de 1,2 cm de diamètre faite par le scotch double face. La figure 2 montre qu'en se rapprochant de la paroi latérale, le temps de solidification décroît. Ce résultat prouve que la formation du gel est dans ce cas amorcée proche des parois et se propage ensuite à l'intérieur de la cellule. Le milieu n'est donc plus homogène spatialement à l'échelle macroscopique.

### 5.2 Distance des parois

Afin d'attribuer ces variations de dynamiques à la colle seulement, nous avons vérifié que la structuration de la Laponite ne se fait pas à partir des parois de verre en se propageant à l'intérieur du volume



**Fig.1.** a) Évolution des variances des déplacements en fonction du temps pour les deux puissances (triangle :  $k_1 = 7.47 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$ , ronds :  $k_1 = 16.7 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}$ ). (b) Évolution de la température effective en fonction du temps. c) Évolution de la raideur du gel en fonction (pH=10,  $I = 5 \cdot 10^{-3}$ ).

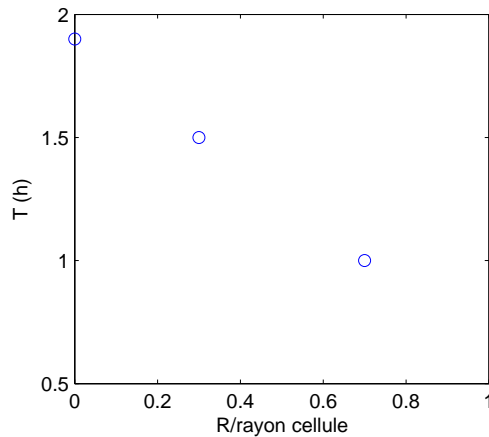
de l'échantillon. Des mesures ont été effectuées à différentes hauteurs par rapport à la plaque de verre :  $5 \mu\text{m}$ ,  $10 \mu\text{m}$  et  $20 \mu\text{m}$ . Nous n'avons pas mesuré de variation du temps nécessaire à la formation du gel ni de la température effective.

### 5.3 Puissance du laser

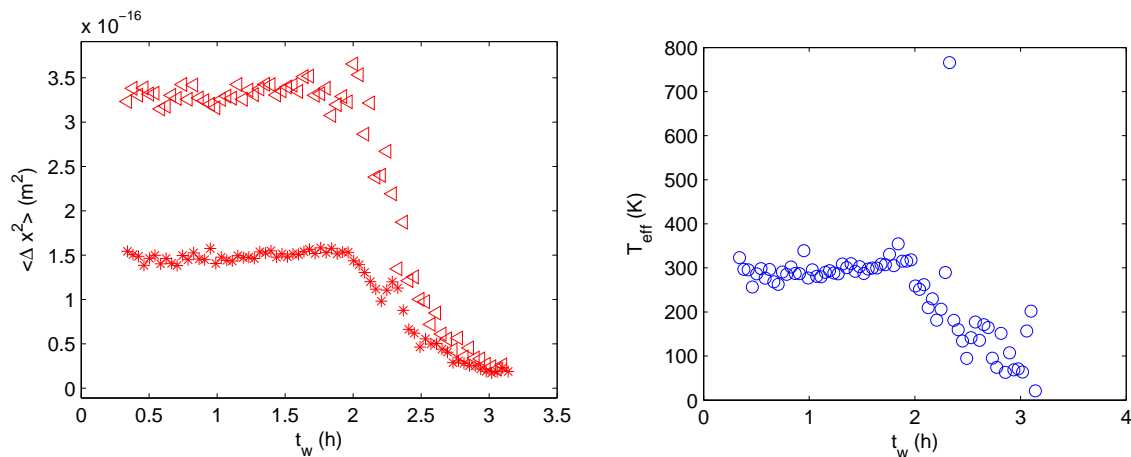
La force du piège optique peut éventuellement jouer un rôle sur l'évolution de la température effective mesurée. Nous avons fait varier à la fois le rapport des raideurs ainsi que la gamme des valeurs des deux puissances. Nous avons par ailleurs mesuré directement la température à l'intérieur de la cellule grâce à un micro thermocouple. Nous avons enregistré une augmentation de la température de quelques degrés pour la puissance la plus importante. Malgré cela, le comportement reste identique : nous mesurons un plateau  $T_{\text{eff}} \approx T_B$  puis une décroissance de la température lorsque la raideur du gel augmente (Fig. 3).

## 6 Conclusion

Nous avons mesuré les fluctuations de position d'un traceur micrométrique lors du vieillissement d'une solution de Laponite par l'intermédiaire d'un piège optique. En faisant l'hypothèse de la généralisation de l'équipartition de l'énergie, et en modulant la puissance du laser, nous pouvons définir une température effective du milieu. Nous n'observons pas d'augmentation de cette température avec le temps contrairement à d'autres résultats dont certains sont issus de techniques différentes. La durée des mesures peut être importante, en effet, nous observons des mouvements de la bille à basse fréquence qui peuvent être



**Fig.2.** Évolution du temps de formation du gel (temps au bout duquel la variance du déplacement chute) en fonction de la position radiale dans la cellule circulaire de scotch double face (Laponite à 1.5%wt, pH=10,  $I = 5 \cdot 10^{-3}$ ).



**Fig.3.** (a) Évolution des variances des déplacements en fonction du temps. (b) Évolution de la température effective en fonction du temps (pH=10,  $I = 5 \cdot 10^{-3}$ ).

ignorés pour des acquisitions de plus courtes durées. Nous avons fait varier les paramètres géométriques, de préparation des échantillons, et du piège optique. Toutes les mesures nous montrent un plateau de température proche de celle du bain thermique suivi d'une décroissance bruitée lorsque la raideur de la solution devient prépondérante. Un autre paramètre pourrait être important : le rayon de la bille. Est-ce qu'un tel changement d'échelles de longueur peut suffire à modifier fortement la dynamique ? Ces résultats montrent que d'autres travaux sont nécessaires pour éclairer ces résultats contradictoires et mieux comprendre la physique des systèmes hors équilibre.

## Références

1. L. BELLON & S. CILIBERTO, Experimental study of fluctuation dissipation relation during the aging process, *Physica D*, **168**, 325 (2002).
2. B. ABOU & F. GALLET, Probing a nonequilibrium Einstein relation in an aging colloidal glass, *Phys. Rev. Lett.* **93** (16), 160603 (2006). B. ABOU, F. GALLET, P. MONCEAU & N. POTTIER, Fluctuation dissipation relation in a colloidal glass : frequency and aging time dependence, Arxiv : cond-mat/0605111 (2006).

3. S. JABBARI-FAROUJI, D. MIZUNO, M. ATAKHORRAMI, F. C. MACKINTOSH, C. F. SCHMIDT, E. EISER, G. H. WEGDAM & D. BONN, Fluctuation-dissipation theorem in an aging colloidal glass, Arxiv : cond-mat/0511311 (2005).
4. D.R. STRACHAN, G.C. KALUR & S.R. RAGHAVAN, Size-dependent diffusion in an aging colloidal glass, *Phys. Rev. E* **73**, 041509 (2006).
5. N. GREINERT, T. WOOD & P. BARTLETT, Measurement of effective temperatures in an aging colloidal glass, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 265702 (2006).
6. L. BERTHIER & J.-L. BARRAT, Shearing a glassy material : numerical tests of nonequilibrium mode-coupling approaches and experimental proposal, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 095702 (2002).

# Instabilité de solutions semi-diluées ou diluées de polymères dans un écoulement de Couette-Taylor : suppression des harmoniques de couplage.

F. Kelai, O. Crumeyrolle, & I. Mutabazi

LMPG, université du Havre, 53 rue de Prony, BP 540, 76058 Le Havre cedex  
faycal.kelai233@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Nous comparons l'écoulement de Couette-Taylor de deux solutions viscoélastiques obtenues à l'aide de solutions de polymères, soit dans le cas d'un solvant peu visqueux (0,93 mPa.s) mais avec une solution semi-diluée et rhéofluidifiante, soit dans le cas d'un solvant plus visqueux (43,1 mPa.s) mais avec une solution diluée et non-rhéofluidifiante. Dans les deux cas le premier mode d'instabilité observé est un régime inertio-élastique et présente des ondes spiralées contrapropagatives. La démodulation complexe des motifs permet d'extraire les propriétés spatiales et temporelles du mode critique d'instabilité, en particulier les harmoniques de couplages. On observe que celles-ci sont présentes dans le premier cas mais absentes dans le deuxième. Nous discutons ce résultat par rapports aux travaux antérieurs.

**Abstract.** We compare the viscoelastic Couette-Taylor flows of two kinds of polymer solutions : in one hand a semi-dilute and shear-thinning solution, obtained with a low viscosity solvent (0,93 mPa.s), in the other hand a dilute solution, with negligible shear-thinning, obtained with a more viscous solvent (43,1 mPa.s). In both cases the observed critical instability mode exhibits counterpropagating spiral waves. Complex demodulation of patterns is used to extract space and time properties of the critical instability mode. It is highlighted that coupling harmonics are observed in the first case but not in the second one. We discuss this with the help of other results from the literature.

## 1 Introduction

Le système de Couette-Taylor est constitué de deux cylindres coaxiaux pouvant être mis en rotation indépendamment l'un de l'autre, et entre lesquels est emprisonnée une couche de fluide. Il a fait l'objet de nombreuses études dans le cas des fluides newtoniens[1]. En effet sa simplicité géométrique et son grand nombre de symétries en font un système hydrodynamique modèle de l'étude de la transition vers la turbulence dans des systèmes confinés.

Les solutions de polymères de forte masse molaire constituent des liquides viscoélastiques modèles. En effet il est possible de contrôler les paramètres viscoélastiques en variant la propriétés du polymère et/ou du solvant. Elles présentent aussi des applications immédiates dans le domaine de la réduction de traînée, phénomène découvert par Toms[2]. Ainsi l'addition de quelques parties par millions en masse d'un polyoléfine d'une masse molaire de  $3 \cdot 10^7$  g/mol permet d'augmenter de 33% le débit du pipeline trans-Alaska.

Les motivations industrielles pour la prédiction des écoulements viscoélastiques, l'absence d'équation aussi universelle que Navier- Stokes pour ces écoulements, l'absence d'explication claire quant à l'origine de la réduction de traînée, sont autant de motifs à l'origine des nombreux travaux sur les écoulements viscoélastiques, notamment via l'étude de solutions de polymère de forte masse molaire. L'écoulement de telles solutions dans le système de Couette-Taylor constitue un système modèle dans le domaine, et fait l'objet d'études depuis environ quarante ans.

Historiquement les premiers travaux cherchaient à caractériser l'influence de la viscoélasticité comme étant une modification des résultats observés en écoulement newtonien. Ainsi dans le cas le plus simple où seul le cylindre intérieur est en rotation, le mode critique newtonien, piloté par les forces d'inerties, est constitué de rouleaux axisymétriques contrarotatifs (rouleaux de Taylor).

Pour de faibles niveaux de viscoélasticité il est possible d'observer qualitativement des rouleaux de Taylor comme mode critique d'instabilité, avec des modifications quantitatives (seuil, nombre d'onde). Larson, Shaqfeh et Muller [4] ont montré théoriquement et expérimentalement qu'un liquide fortement viscoélastique pouvait par contre bifurquer de l'écoulement de base vers un régime instationnaire, non-axisymétrique. Ce régime est qualifié de purement élastique car pouvant être déclenché pour des nombres de Reynolds –et donc des effets inertiels– arbitrairement faibles, moyennant un temps de relaxation du liquide viscoélastique suffisamment long. Ceci peut-être obtenu soit en augmentant la masse molaire et/ou la concentration du polymère, soit en contrôlant la viscosité du solvant employé. Le mécanisme de ces instabilités purement élastiques a aussi été étudié par Groisman *et al.* [3].

Les régimes dits inertio-élastiques sont à mi-chemin entre ces deux cas. Ils se caractérisent par un mode critique d'instabilité encore influencé par les forces inertielles mais qualitativement différent du cas newtonien. En particulier il a été observé des régimes formés de spirales contrapropagatives dans la direction axiale, et dénommés *Standing Waves* ou *Rotating Standing Waves* (e.g. [5], [6]). Dans le cas de solution de polyoxyéthylène peu visqueuses, semi-diluées et rhéofluidifiantes, Crumeyrolle *et al.* [7] ont observé que les harmoniques associées au couplage entre les spirales contrapropagatives pouvaient dominer l'écoulement.

Dans ce travail nous rapportons le comportement critique de deux types de solutions de polymères à base de polyoxyéthylène, afin de faire le lien entre les travaux antérieurs menés avec des solutions de polyacrylamide (Groisman et col.) ou de polyisobutylène (Muller et col.) et les travaux menés avec du polyoxyéthylène.

## 2 Dispositif expérimental

La géométrie de Couette-Taylor employée (Fig. 1) est constituée de deux cylindres coaxiaux. Le cylindre intérieur est noir, en aluminium anodisé, de rayon  $a = 4$  cm. Le cylindre extérieur, de rayon  $b = 5$  cm, est en verre. Le rapport d'aspect est de 45,9 et le rapport des rayons vaut  $d/a = (b-a)/a = 0,8$ . Le cylindre extérieur est maintenu immobile. Ce dernier est isolé thermiquement de l'extérieur par une cuve rectangulaire en plexiglas remplie d'eau. La géométrie rectangulaire du bain favorise les observations optiques. Le cylindre intérieur est piloté à l'aide d'un servomoteur. L'électronique de contrôle permet de réguler la vitesse de rotation angulaire  $\Omega$  du cylindre à 0,063 rad/s près. L'expérience est réalisée à la température ambiante, très peu variable au cours d'une acquisition. Un thermomètre permet de suivre l'éventuelle évolution de la température d'une acquisition à la suivante pendant une expérience.

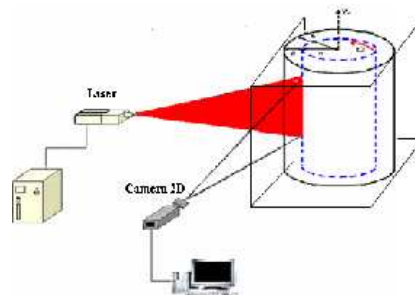


Fig.1. Dispositif expérimental

Nous présentons deux cas de solutions de polyoxyéthylène (POE, Aldrich,  $8 \cdot 10^6$  g/mol), obtenues avec des solvants différents. Dans le cas noté A, 1200 ppm (parties par million en masse) de POE sont dissoutes dans un solvant de viscosité 0,93 mPas, constitué à 95 % d'eau de Volvic et à 5% d'alcool isopropylique. Ces solutions sont préparées en dispersant le pré-mélange de la poudre de POE et de l'alcool isopropylique dans l'eau. La solution résultante est une solution semi-diluée et rhéofluidifiante. En effet la viscosité sous cisaillement diminue avec le taux de cisaillement pour des valeurs assez grandes du taux de cisaillement. Ces variations ont été mesurées (Fig. 2a) avec un rhéomètre (AR 2000, TA Instruments) et peuvent être décrites par la loi de Carreau  $\eta = \eta_0(1 + (k\dot{\gamma})^2)^{-n/2}$  où  $\eta_0 = 26,4$  mPa.s est la viscosité au plateau

newtonien observé à faible taux de cisaillement,  $k = 0,692$  s un temps caractéristique de la transition vers le régime de rhéofluidification et  $n = 0,2588$  la pente de ce régime (sur un graphe bi-logarithmique). On remarque que la viscosité de la solution est très grande par rapport à la viscosité du solvant.

Dans le cas noté B, 50 ppm de POE sont dissoutes dans un solvant de viscosité 43,1 mPa.s, obtenu à partir d'eau de Volvic, d'alcool isopropylique et de polyéthylène glycol de faible masse molaire, employé comme agent viscosifiant. Ces solutions sont préparées en dispersant la poudre de POE dans un solvant constitué de 2,5% d'alcool isopropylique et 97,5% d'eau de Volvic mélangés à 600 g de polyéthylène glycol. La solution diluée qui en résulte présente une rhéofluidification négligeable et une viscosité de 47,4 mPas (Fig. 2b). Cette solution est plus proche des travaux antérieurs, e.g. [5,6], à la fois de par la faible concentration (solution diluée), de par l'absence de rhéofluidification et de par la viscosité du solvant, qui constitue la contribution principale à la viscosité totale de la solution.

Dans les deux cas les solutions reposent pendant 5 jours au froid (environ 7°C) pour favoriser la dissolution. Après une nuit à température ambiante, les solutions sont homogénéisées à l'aide d'un agitateur magnétique pour minimiser la présence d'agrégats, avant d'être employées dans l'expérience.

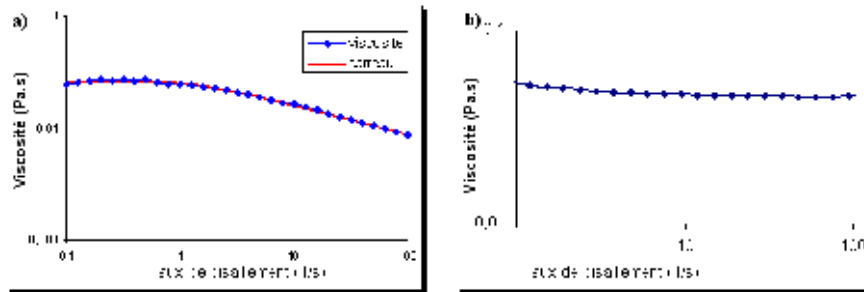


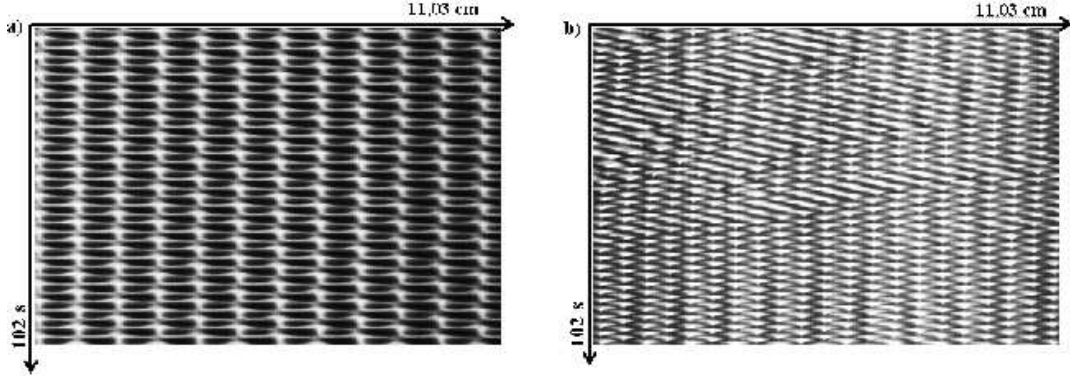
Fig.2. Viscosité de cisaillement à 25°C : a) solution A (semi-diluée), b) solution B (diluée).

On ajoute à nos solutions 2% (en volume) de Kalliroscope AQ1000. Il s'agit d'une solution diluée de plaquettes réfléchissantes anisotropes dont les dimensions sont d'environ  $30\mu\text{m} \times 6\mu\text{m} \times 0,07\mu\text{m}$ . La visualisation de l'écoulement est obtenue par une coupe laser HeNe verticale de l'entrefer de 17 à 23 cm de haut. Le logiciel Streampix est employé pour piloter une caméra CCD 2D (Basler A641f, 1600×1200 pixels) qui enregistre l'intensité lumineuse  $I(r, z, t)$  à la cadence de 12,47 images par seconde pendant 15 minutes. A partir de ces acquisitions, on peut extraire des diagrammes spatio-temporels  $I(z, t)$  à  $r$  fixé ou  $I(r, t)$  à  $z$  fixé. Ces diagrammes sont étudiés par traitement du signal. Chaque expérience est conduite en augmentant progressivement la vitesse de rotation  $\Omega$ , et donc le taux de cisaillement imposé  $\dot{\gamma} = \Omega \cdot a/d$ , et en respectant des paliers d'attente de 10 minutes.

### 3 Résultats

Pour les faibles valeurs de vitesse de rotation du cylindre, l'écoulement observé est un écoulement de Couette circulaire pour les deux solutions. Le premier mode d'instabilité observé (Fig. 3) est, dans les deux cas, un régime présentant des ondes spirales axialement contrapropagatives, comparable aux régimes nommés *SW* ou *RSW* dans la littérature [5,6,7].

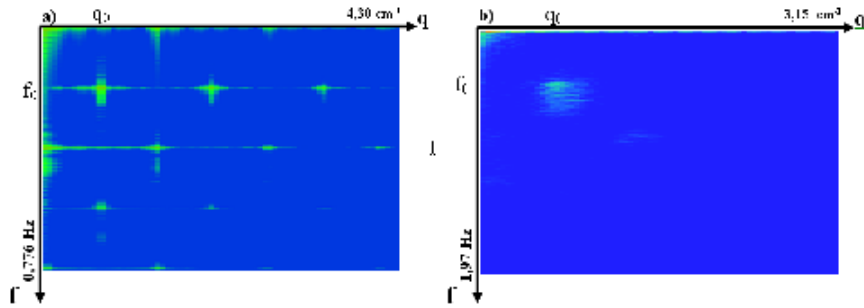
Dans le cas A le seuil est observé à un nombre de Taylor critique effectif  $Ta_c = \sqrt{d/a} \cdot Re_c = 41,73$ , où  $Re_c = \dot{\gamma}_c \cdot \tau_\nu$  est le nombre de Reynolds critique effectif dans l'entrefer, calculé avec la viscosité rhéofluidifiée observée pour un taux de cisaillement identique à celui du seuil, soit  $\dot{\gamma}_c = 12,56\text{s}^{-1}$ . En effet pour cette valeur du taux de cisaillement la viscosité de la solution n'est que de 15 mPas, et le temps de diffusion visqueuse effectif  $\tau_\nu = \rho d^2 / \eta(\dot{\gamma}_c)$  est de 6,66 s. Par traitement du signal la période fondamentale des ondes spirales est mesurée à  $\tau_F = 5,39$  s.



**Fig.3.** Extrait des diagrammes spatiotemporels d'intensité  $I(z, t)$  pour  $r = a + d/2$  : a) solution A, b) solution B.

Dans le cas B le seuil est observé à un nombre de Taylor critique  $Ta_c = \sqrt{d/a} \cdot Re_c = 41,37$ , où la viscosité employée est la viscosité de la solution, 47,4 mPas, Le temps de diffusion visqueuse dans l'entrefer est de  $\tau_\nu = 2,11$  s. La période fondamentale des ondes spirales est mesurée à  $\tau_F = 2,36$  s.

Le motif spatio-temporel observé pour le cas B est un peu plus désordonné. De fait les spectres de puissance 2D (Fig. 4) obtenus à partir des motifs montrent bien un étalement spectral plus important du mode fondamental à  $(q_0, f_0)$  pour ce cas. L'examen des spectres révèle aussi dans le cas A la présence de modes harmoniques, et notamment des harmoniques  $(2q_0, 0)$  et  $(0, 2f_0)$ , correspondant au couplage entre les ondes contrapropagatives (c.f. [7]). Au contraire ces harmoniques sont absentes du cas B. L'examen des spectres 2D associés à différentes position radiales et différentes valeurs de la criticalité  $\epsilon = (\Omega - \Omega_c)/\Omega_c$  ne montre pas plus d'harmoniques de couplage dans le cas B, sauf une faible harmonique  $(2q_0, 0)$  très près du cylindre extérieur ( $r = a + 0,9d$ ).

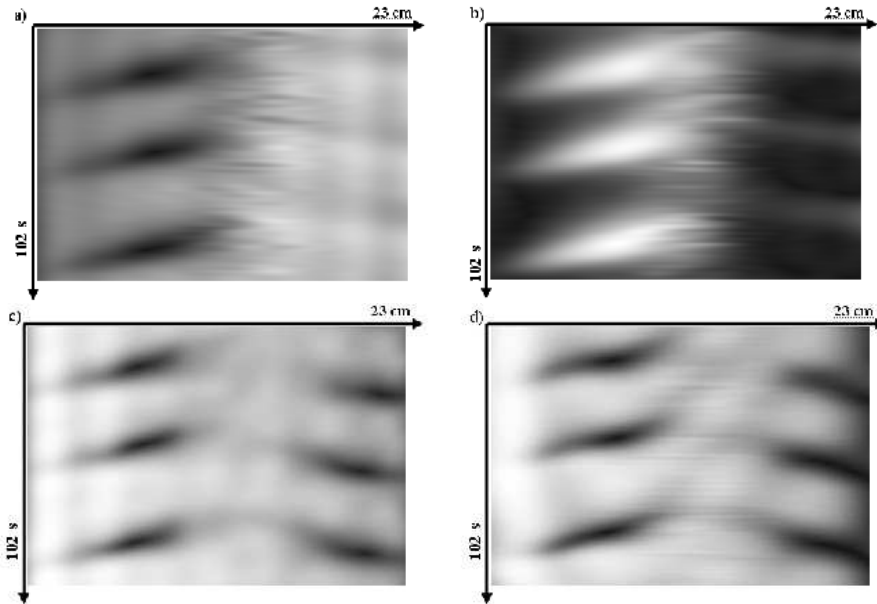


**Fig.4.** Spectre de puissance 2D : a) solution A, b) solution B (échelle de couleur logarithmique, associée à une puissance variant de 1 à  $10^{-6}$  en unité arbitraires)

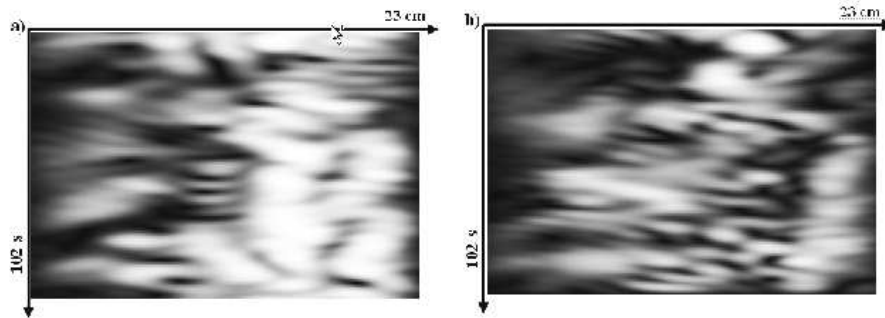
Les amplitudes spatio-temporelles  $A(z, t)$ , obtenues par démodulation complexe, des ondes droites et gauches ainsi que, dans le cas A, celles des harmoniques de couplage sont rapportées Fig. 5. Dans le cas A on note une périodicité dans l'évolution des modes fondamentaux. Les spirales contrapropagatives sont modulées. L'alternance spatiale est aussi très nette : là où une des deux ondes domine, l'autre est faible. Ceci est cohérent avec l'existence d'un fort couplage entre ces deux ondes. Le cas B (Fig. 6) présente un désordre significatif dans la répartition spatiale des spirales, sans alternance nette.

Le seul examen des motifs ou même des spectres 2D ne nous ayant pas permis d'identifier de tendance pour le comportement des différents modes en fonction de  $\epsilon = (\Omega - \Omega_c)/\Omega_c$ , nous discutons des comportements à partir des valeurs moyennées en espace et en temps,  $\langle A \rangle_{zt}$ , des diagrammes d'amplitude  $A(z, t)$ . Dans le cas A les harmoniques dominent le motif majoritairement au centre de l'expérience

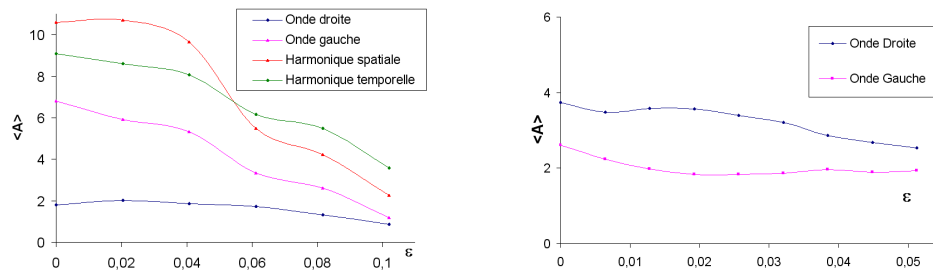




**Fig.5.** Diagrammes spatiotemporels d'amplitudes dans le cas A (solution semi-diluée) : a) onde gauche, b) onde droite, c) harmonique temporelle, d) harmonique spatiale.



**Fig.6.** Diagrammes spatiotemporels d'amplitudes pour le cas B (solution diluée) : a) onde gauche, b) onde droite.



**Fig.7.** Amplitude moyennée dans le temps et dans l'espace en fonction de  $\epsilon$ , pour  $r = a + d/2$ . a) cas A, b) cas B.

( $r = a + d/2$ ) comme rapporté fig 7. La décroissance globale des amplitudes avec  $\epsilon$  est un comportement spécifique observé au milieu de l'entrefer.

## 4 Discussion et conclusion

On peut remarquer tout d'abord que dans les deux cas les nombres de Taylor critiques sont inférieurs au nombre de Taylor critique  $Ta_{c,N} = 47,3$  associé au cas d'un fluide newtonien. L'écoulement de Couette circulaire est donc déstabilisé par la viscoélasticité. Les harmoniques de couplages sont bien présentes

dans le cas A, mais absentes dans le cas B. Ce dernier point est cohérent avec les résultats des travaux antérieurs des équipes [5] et [6], qui n'avaient pas mis en évidence les harmoniques de couplages, puisque le cas B est plus proche des solutions employées par ces auteurs. Pour comparer plus avant les résultats, il convient d'introduire les différents temps caractéristiques et les nombres sans dimensions associés. Soit  $\tau_M$  le temps de relaxation moléculaire, défini par  $\tau_M = nRT/(\eta - \eta_s)$ , avec  $n$  le nombre de moles de molécules de POE par unité de volume dans la solution,  $R$  la constante des gaz parfaits,  $T$  la température thermodynamique,  $\eta$  la viscosité de la solution (au faible taux de cisaillements, i.e.  $\eta_0$ , dans le cas d'une solution rhéofluidifiante) et  $\eta_s$  la viscosité du solvant. De plus, pour une solution rhéofluidifiante,  $\tau_S$ , le temps de relaxation de la solution, est défini comme étant le temps associé à une chute de 5% de la viscosité de la solution :  $\tau_S = k \cdot (0,95^{-2/n} - 1)^{-1/2}$ . Le nombre de Weissenberg critique est défini par  $We_{cS} = \dot{\gamma}_c \cdot \tau_S$  ou  $We_{cM} = \dot{\gamma}_c \cdot \tau_M$ . Ce nombre adimensionnel mesure la compétition entre l'élasticité et la déformation de cisaillement. Le nombre élastique est défini par  $E_{cM} = We_{cM}/Re_c = \tau_M/\tau_\nu$  ou par  $E_{cS} = We_{cS}/Re_c = \tau_S/\tau_\nu$  avec  $\tau_\nu$  le temps de diffusion visqueuse (effectif dans le cas A) déjà introduit. Le nombre élastique mesure la compétition entre élasticité et viscosité. L'ensemble des valeurs obtenues au seuil est rapporté dans chaque cas tableau 1.

**Tab.1.** Temps caractéristiques et nombres adimensionnels critiques.

	$\tau_M$ (s)	$\tau_S$ (s)	$\tau_\nu$ (s)	$\tau_F$ (s)	$1/\dot{\gamma}_c$ (s)	$Re_c$	$Ta_c$	$We_{cM}$	$We_{cS}$	$E_{cM}$	$E_{cS}$
<b>A</b>	0,069	0,9921	6,659	5,387	0,080	83,45	41,73	0,862	12,47	0,010	0,149
<b>B</b>	0,281		2,110	2,358	0,026	82,74	41,37	11,00		0,133	

Il faut noter d'une part les faibles valeurs des nombres élastiques (proche de 0,1 ou moins) et, d'autre part, la proximité des valeurs de  $\tau_F$  et  $\tau_\nu$ , respectivement la période fondamentale des spirales et le temps de diffusion visqueuse (effectif dans le cas A). Les régimes sont donc bien inertio-élastiques. Par ailleurs, dans le cas A le temps de relaxation de la solution  $\tau_S$  est bien plus élevé que le temps de relaxation moléculaire  $\tau_M$ . On peut donc supposer que  $\tau_S$  pilote la dynamique viscoélastique. De fait on remarque que les valeurs obtenues pour  $We_{cS}$  et  $E_{cS}$  dans le cas A sont très proche de respectivement  $We_{cM}$  et  $E_{cM}$  obtenues dans le cas B. Les valeurs critiques des nombres de Taylor sont aussi très proches, ce qui conforte la comparaison.

On peut donc conclure qu'un régime d'ondes spiralées contrapropagatives peut être observé pour un nombre de Weissenberg critique proche de 10, un nombre élastique critique d'environ 0,1, et un nombre de Taylor critique d'environ 40. Dans le cas de solutions rhéofluidifiantes, les ondes spiralées contrapropagatives présentent un couplage significatif. Des caractérisations rhéologiques supplémentaires seront nécessaires pour obtenir des comparaisons quantitatives directes des nombres adimensionnels avec les travaux antérieurs en raison des différentes approches choisies d'un groupe à l'autre pour déterminer les temps de relaxation.

## Références

1. C. D. ANDERECK, S. S. LIU, H. L. SWINNEY, *J. Fluid Mech.*, **164**, 155 (1986).
2. B. A. TOMS, *Proc. Int. Cong. Rheo., Holland, 1948 (North Holland, Amsterdam)*, II-135-141 (1949).
3. A. GROISMAN, V. STEINBERG, *Phys. Fluids*, **10**(10), 2451 (1998).
4. R. G. LARSON, E. S. G. SHAQFEH & S. J. MULLER, *J. Fluid Mech.*, **218**, 573 (1990).
5. A. GROISMAN & V. STEINBERG, *Europhys. Lett.*, **43**(2), 165-170 (1998).
6. B.M. BAUMERT & S.J. MULLER, *Phys. Fluids*, **9**(3), 566-586 (1997).
7. O. CRUMEYROLLE, I. MUTAZBAZI & M. GRISEL, *Phys. Fluids*, **14**(5), 1681-1688 (2002).

# Thermalisation de paquets d'ondes incohérents

Silvère Lagrange, Stéphane Pitois, Hans Rudolf Jauslin & Antonio Picozzi

Institut Carnot de Bourgogne, UMR 5209 CNRS-Université de Bourgogne  
9 avenue Alain Savary, 21078 Dijon Cedex  
Silvere.Lagrange@u-bourgogne.fr

**Résumé.** Nous montrons théoriquement et expérimentalement qu'un ensemble de paquets d'ondes non-linéaires et incohérents évolue irréversiblement vers un état d'équilibre, dans lequel les paquets d'ondes se propagent tous avec une même vitesse de groupe. Ce résultat peut être expliqué à l'aide d'arguments thermodynamiques basés sur la théorie cinétique de la turbulence faible.

**Abstract.** We show both theoretically and experimentally that a set of incoherent nonlinear waves irreversibly evolves to a specific equilibrium state, in which the individual wave-packets propagate with identical group-velocities. This intriguing process of velocity-locking can be explained in detail by simple thermodynamic arguments based on the kinetic wave theory.

## 1 Introduction

L'étude des propriétés de cohérence d'ondes optiques incohérentes se propageant dans un milieu non linéaire a suscité un intérêt croissant ces dernières années, depuis la première mise en évidence expérimentale d'un soliton optique incohérent dans un cristal photoréfractif [1]. Le soliton incohérent consiste en un effet d'auto-piégeage de lumière spatialement et temporellement incohérente dans un milieu non linéaire à réponse non-instantanée, i.e., le temps de réponse est beaucoup plus grand que le temps de cohérence du champ optique. La simplicité remarquable des expériences réalisées dans les milieux photoréfractifs s'est traduite par une investigation fructueuse de la dynamique d'ondes non linéaires et incohérentes [2]. On notera que les solitons incohérents [3,4] et certaines propriétés remarquables d'ondes non linéaires incohérentes ont aussi été étudiées dans les milieux non linéaires usuels à réponse instantanée [5].

On se propose d'analyser dans ce travail l'évolution des propriétés de cohérence d'un ensemble d'ondes incohérentes se propageant dans un milieu non linéaire cubique. Nous avons identifié, théoriquement et expérimentalement, un processus de verrouillage de vitesses des ondes incohérentes dans une fibre optique. Cet effet se caractérise par une évolution irréversible des paquets d'ondes vers un état d'équilibre spécifique dans lequel tous les paquets d'ondes se propagent avec une vitesse de groupe identique. Ce nouvel effet est décrit théoriquement à l'aide d'arguments thermodynamiques simples basés sur la théorie cinétique de la turbulence faible [6].

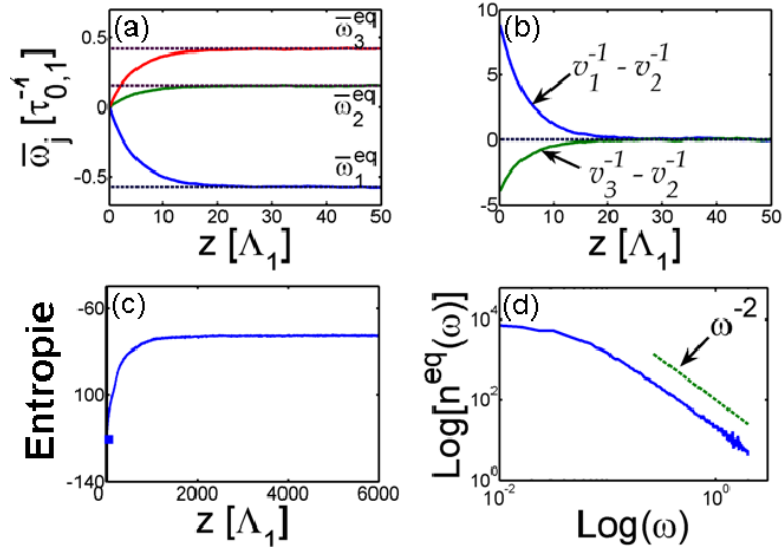
## 2 Approche théorique

Nous considérons la propagation de  $M$  paquets d'ondes incohérents pouvant être distingués, par exemple, par leur fréquence porteuse  $\omega_{0,j}$  ou par leur état de polarisation (pour  $M = 2$ ). Leurs largeurs spectrales  $\Delta\omega_j$  sont telles que  $\Delta\omega_j \ll \omega_{0,j}$  de sorte que l'approximation des enveloppes lentement variables soit valide. En notant  $z$  la direction de propagation, l'évolution des amplitudes  $A_j$  des ondes incohérentes peut être décrite par un ensemble de  $M$  équations (Hamiltoniennes) de Schrödinger non-linéaires (NLS) couplées [7] :

$$i(\partial_z + u_j^{-1}\partial_t)A_j = -\alpha_j\partial_{tt}A_j + \gamma_j(|A_j|^2 + \kappa\sum_{i\neq j}|A_i|^2)A_j \quad j = 1, \dots, M \quad (1)$$

Les paramètres  $u_j$  et  $\gamma_j$  représentent respectivement la vitesse de groupe et le coefficient non-linéaire du paquet d'ondes  $A_j$ ,  $\kappa$  désignant le rapport entre les coefficients de modulation de phases croisées et d'auto-modulation de phase. Les paramètres de dispersion de vitesse de groupe sont données par  $\alpha_j = (\partial^2 k_j / \partial \omega^2) / 2$ ,  $k_j(\omega) = \alpha_j \omega^2 + \omega / u_j$  étant la relation de dispersion linéaire de  $A_j$ . L'équation (1) conserve la puissance  $N_j = \int |A_j|^2 dt$  de chaque champ  $A_j$ , le Hamiltonien  $H$  [2] et l'impulsion totale  $P = \sum_i P_i$  avec  $P_i = \text{Im} \int A_i^* \partial_t A_i dt$ . Il est important de noter qu'en optique les variables de temps et d'espace sont inversées par rapport à l'écriture usuelle de l'équation NLS.

La dynamique de notre système peut être analysée par intégration numérique des équations couplées (1). Nous nous plaçons dans un régime incohérent pour lequel les fluctuations des amplitudes  $A_j$  rendent le temps de corrélation des ondes beaucoup plus petit que le temps caractéristique d'évolution non-linéaire :  $t_{c,j} \ll \tau_{nl,j} = \sqrt{\alpha_j \Lambda_j}$ ,  $\Lambda_j = 1 / (\gamma_j \langle |A_j|^2 \rangle)$  étant la longueur non-linéaire correspondante et  $\langle \cdot \rangle$  une moyenne sur un ensemble de réalisations. Sur la figure (1a), nous montrons l'évolution typique des fréquences moyennes  $\bar{\omega}_j(z) = \int \omega n_j d\omega / \int n_j d\omega$  de  $M = 3$  ondes incohérentes,  $n_j(z, \omega)$  étant le spectre en  $z$  associé à l'onde  $A_j$ . Comme condition initiale à  $z = 0$ , nous avons pris trois amplitudes stochastiques  $A_j(z = 0, t)$  de moyennes nulles et caractérisées par une statistique stationnaire. Dans le régime de propagation linéaire ( $\gamma_j = 0$ ), les composantes  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  se propagent avec des vitesses de groupes respectives  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  distinctes. Dans le cas où on introduit un couplage non-linéaire, la figure (1a) montre que les fréquences moyennes des ondes incohérentes tendent rapidement vers des valeurs particulières  $\bar{\omega}_j^{eq}$ . En raison de la dispersion de vitesse de groupe, ces décalages de fréquence se traduisent par des changements de vitesses de groupe des ondes, suivant la relation de dispersion de vitesse de groupe  $v_j^{-1}(\omega) = \partial k_j / \partial \omega = u_j^{-1} + 2\alpha_j \omega$  (voir Fig. 2). Comme l'illustre la figure (1b), le résultat remarquable est que les fréquences  $\bar{\omega}_j^{eq}$  sont sélectionnées de telle sorte que les trois paquets d'ondes se propagent avec des vitesses de groupe identiques :  $v_1(\bar{\omega}_1^{eq}) = v_2(\bar{\omega}_2^{eq}) = v_3(\bar{\omega}_3^{eq}) = v^{eq}$ .



**Fig.1.** (a) Simulations numériques montrant l'évolution des fréquences moyennes  $\bar{\omega}_j(z)$  de  $M = 3$  paquets d'ondes incohérents en fonction de  $z$  (en unité de longueur non-linéaire  $\Lambda_1$ ). (b) Evolution des différences de vitesses de groupe. (c) Evolution de l'entropie. (d) Spectre de la distribution d'équilibre. Ces résultats ont été obtenus en effectuant une moyenne de 200 réalisations [ $u_1 = 1/14$ ,  $u_2 = 1/5$ ,  $u_3 = 1$  en unité de  $\Lambda_1/\tau_{0,1}$ ,  $\kappa = 2$ ,  $N_1 = N_2 = N_3$ ,  $\alpha_2/\alpha_1 = 0.9$ ,  $\alpha_3/\alpha_1 = 1.1$ ,  $\alpha_1 = 20\text{ps}^2/\text{km}$ ,  $\tau_{0,1} = 0.26\text{ps}$ ,  $\Lambda_j = 3.33\text{m}$ ,  $\sigma_j = 0.15$  ( $j = 1, 2, 3$ )].

Pour comprendre ce processus de verrouillage de vitesses de groupe, insistons sur le fait que les équations NLS vectorielles ne sont complètement intégrables que si  $\gamma_j = \alpha_j = \kappa = 1$  [2]. En revanche, le phénomène de verrouillage de vitesses ne se produit que dans le cas non-intégrable, pour lequel la

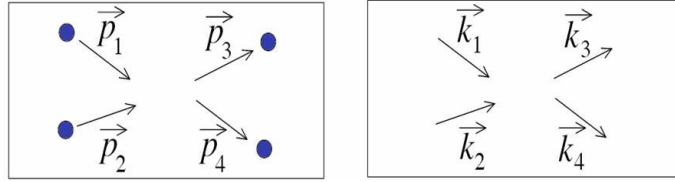
dynamique non-linéaire conduit à un processus irréversible de diffusion dans l'espace des phases [8]. Les propriétés de cette évolution irréversible vers un état d'équilibre peuvent être décrites par la théorie cinétique des ondes. L'approximation des phases aléatoires brise la réversibilité formelle des équations NLS vectorielles, ce qui nous permet de dériver un ensemble d'équations cinétiques irréversibles décrivant les évolutions couplées des spectres  $n_j(z, \omega)$ , définis par  $\langle a_j(z, \omega_1) a_j^*(z, \omega_2) \rangle = n_j(z, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2)$ , où  $a_j$  est la transformée de Fourier de  $A_j$  [ $a_j(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int A_j(z, t) e^{-i\omega t} dt$ ], [9]

$$\partial_z n_j(z, \omega_1) = \kappa^2 \sum_{i \neq j} \text{Coll}[n_i, n_j]. \quad (2)$$

Les termes de collisions croisés

$$\begin{aligned} \text{Coll}[n_i, n_j] = \int d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 W n_j(\omega_1) n_i(\omega_2) n_i(\omega_3) n_j(\omega_4) \\ \times [n_j^{-1}(\omega_1) + n_i^{-1}(\omega_2) - n_i^{-1}(\omega_3) - n_j^{-1}(\omega_4)], \end{aligned} \quad (3)$$

fournissent une description cinétique des termes d'interaction croisés de l'équation (1), i.e., le mélange à quatre ondes se produisant pour une paire de paquets d'ondes distincts  $A_i$  et  $A_{j \neq i}$ . L'approche cinétique peut être considérée comme une analogie entre le mélange à quatre ondes et un gaz collisionnel de quasi-particules. A chaque collision, les conditions de résonances traduisant la conservation de l'énergie et de l'impulsion sont satisfaites comme l'exprime la présence de fonctions  $\delta$  de Dirac dans  $W = \frac{\gamma_i^2}{\pi} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \delta[k_j(\omega_1) + k_i(\omega_2) - k_i(\omega_3) - k_j(\omega_4)]$ . Il est important de noter que les termes d'auto-modulation de phase de l'équation (1) ne contribuent pas à l'équation cinétique (2), car la conservation de l'énergie et de l'impulsion est trivialement satisfaite pour le problème unidimensionnel considéré ici.



**Fig.2.** Analogie entre un système de particules classiques et l'interaction à 4 ondes dans un milieu non-linéaire cubique de type Kerr. Les collisions sont responsables de l'évolution irréversible du gaz vers l'équilibre thermodynamique. Par analogie, le mélange à quatre ondes des fréquences qui constituent l'onde incohérente conduit l'onde non-linéaire vers l'équilibre thermodynamique.

Comme pour l'équation de Boltzmann usuelle [10], l'ensemble des  $M$  équations cinétiques couplées (2) conserve le nombre de quasi-particules  $N_j = \int n_j(z, \omega) d\omega$  de chaque paquet d'ondes  $A_j$ , l'énergie cinétique totale  $E = \sum_i E_i$ ,  $E_i = \int k_i(\omega) n_i(z, \omega) d\omega$ , et l'impulsion totale  $P = \sum_i P_i$ ,  $P_i(z) = \int \omega n_i(z, \omega) d\omega$ . Le caractère irréversible de l'équation (2) s'exprime via le théorème  $H$ , qui traduit une croissance monotone de l'entropie hors équilibre  $dS/dz \geq 0$ . Pour notre système, l'entropie hors équilibre s'écrit  $\mathcal{S} = \sum_i \mathcal{S}_i$ ,  $\mathcal{S}_i = \int \text{Log}[n_i(z, \omega)] d\omega$ . Comme en mécanique statistique, l'état d'équilibre thermodynamique est déterminé ici à partir du postulat de maximum d'entropie [10]. Les spectres d'équilibre  $n_j^{eq}(\omega)$  réalisant le maximum de  $\mathcal{S}[n_j]$ , soumis aux contraintes de conservation de  $E$ ,  $P$  et  $N_j$ , peuvent être calculés en introduisant les multiplicateurs de Lagrange respectifs  $1/T$ ,  $\lambda/T$  and  $-\mu_j/T$  :

$$n_j^{eq}(\omega) = \frac{T}{|\alpha_j| \omega^2 + s_j (\lambda + u_j^{-1}) \omega - \mu_j}. \quad (4)$$

$T$  est équivalente à une température (représentant la notion de thermalisation entre les champs  $A_j$ ),  $\mu_j$  le potentiel chimique de  $A_j$  et  $s_j = \text{sign}(\alpha_j)$  [11]. La distribution (4) annule le terme de collisions (3), i.e.,

$\text{Coll}[n_i^{eq}, n_j^{eq}] = 0$ . Cela signifie qu'une fois la distribution d'équilibre (4) atteinte, les spectres n'évoluent plus durant leur propagation, i.e.,  $\partial_z n_j = 0$ . La distribution (4) est une lorentzienne pour laquelle les  $M + 2$  constantes  $T, \lambda$  et  $\mu_j$  peuvent être déterminées à partir des  $M + 2$  quantités conservées  $E, P$  and  $N_j$ . En particulier, à partir de la distribution (4) nous obtenons  $P_j^{eq} = -(\lambda + u_j^{-1})N_j/2\alpha_j$ , de telle sorte que  $\lambda = -(2P + \sum_i N_i/u_i\alpha_i) / \sum_i N_i/\alpha_i$ .

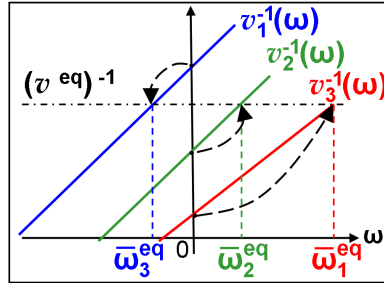
L'influence de la conservation de l'impulsion sur les propriétés thermodynamiques d'un ensemble de paquets d'ondes incohérents n'a pas fait l'objet d'une étude détaillée dans le passé. Il est important de noter que le multiplicateur  $\lambda$  conduit à un décalage de fréquence des spectres d'équilibre (4), de telle sorte que les fréquences sélectionnées à l'équilibre s'écrivent

$$\bar{\omega}_j^{eq} = P_j^{eq}/N_j = -(\lambda + u_j^{-1})/2\alpha_j. \quad (5)$$

En raison de la relation de dispersion de vitesse de groupe,  $v_j^{-1}(\omega) = u_j^{-1} + 2\alpha_j\omega$ , nous obtenons  $v^{eq} = v_j(\omega = \bar{\omega}_j^{eq}) = -1/\lambda$  [12]. Ce résultat significatif, expliqué schématiquement sur la figure (3), révèle que, quelques soient les vitesses de groupe initiales  $u_j$ , chaque paquet d'ondes  $A_j$  évolue irréversiblement vers un état d'équilibre dans lequel il se propage avec une vitesse de groupe commune à tous les autres paquets d'ondes,

$$v^{eq} = \frac{\sum_i N_i/\alpha_i}{2P + \sum_i N_i/(u_i\alpha_i)}, \quad (6)$$

où la valeur de l'impulsion est fixée par la condition initiale  $P = P(z = 0)$ . Les prédictions théoriques de  $\bar{\omega}_j^{eq}$  et  $v^{eq}$  [Eqs.(5)-(6)] sont en excellent accord avec les simulations numériques de l'équation NLS vectorielle (1), comme le montre les figures (1a) et (1b). De plus, notre étude numérique confirme l'existence d'un processus de thermalisation irréversible (Figs. 1c et 1d) : l'entropie atteint une valeur d'équilibre constante ( $dS/dz \simeq 0$ ) alors que les spectres  $n_j(z, \omega)$  atteignent les distributions lorentziennes (4), indépendamment de leur profil spectral initial.

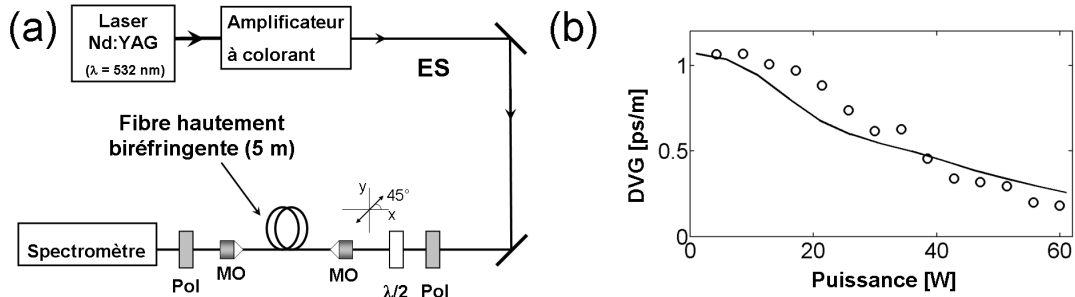


**Fig.3.** Principe du verrouillage de vitesses (les flèches pointillées indiquent l'évolution des fréquences moyennes des ondes incohérentes lors de leur propagation dans la fibre, de  $z = 0$  vers l'équilibre).

### 3 Etude expérimentale

Nous avons observé expérimentalement cet effet de verrouillage de vitesses de groupe dans une fibre optique fortement biréfringente où  $\kappa = 2/3$  (voir figure (4a)).

Dans un tel système,  $A_1$  et  $A_2$  représentent les états de polarisation orthogonaux qui se propagent le long des axes principaux de la fibre. La source incohérente est obtenue à partir de l'émission spontanée (ES) d'un amplificateur à colorant pompé par un laser Nd :YAG impulsif doublé en fréquence. La longueur d'onde centrale de l'ES est de 605 nm et la largeur spectrale est de 3 THz, ce qui correspond à un temps de cohérence de l'ordre de 300 fs. La lumière est ensuite injectée dans 5 m de fibre fortement



**Fig.4.** (a) Montage expérimental. (b) Evolution de la différence de vitesses de groupe (DVG) en fonction de la puissance de chaque paquet d'ondes ; cercles : mesures expérimentales, courbe noire : simulations numériques.

biréfringente. L'injection se fait à  $45^\circ$  par rapport aux axes de la fibre, ce qui permet aux deux ondes incohérentes  $A_{1,2}$  de se propager avec la même puissance le long des axes lent et rapide de la fibre. Le spectre de la lumière à la sortie de la fibre est enregistré à l'aide d'un spectromètre et un polariseur est utilisé pour visualiser séparément les polarisations orthogonales. La différence de vitesses de groupe (DVG) entre les deux ondes à la sortie de la fibre ( $\delta_s$ ) est ensuite calculée à partir de leur fréquence centrale. La figure (4b) montre l'évolution de  $\delta_s$  en fonction de la puissance injectée selon chaque axe. A faible puissance, les deux ondes incohérentes n'interagissent pas et se propagent dans la fibre avec une DVG constante de  $\delta_s = \delta(z = 0) = 1.07\text{ps/m}$ . Lorsque la puissance augmente, les deux ondes sont couplées par la polarisation non-linéaire et, comme le prévoit la théorie, elles tendent à se propager avec la même vitesse de groupe. Ainsi, pour  $P=60\text{W}$ , la DVG chute pour atteindre  $0.21\text{ps/m}$ , soit seulement 20 % de la valeur initiale. Enfin, l'accord quantitatif entre les résultats expérimentaux (cercles) et les simulations numériques (courbe noire) confirme l'observation du processus de verrouillage de vitesses de groupe entre les deux ondes incohérentes.

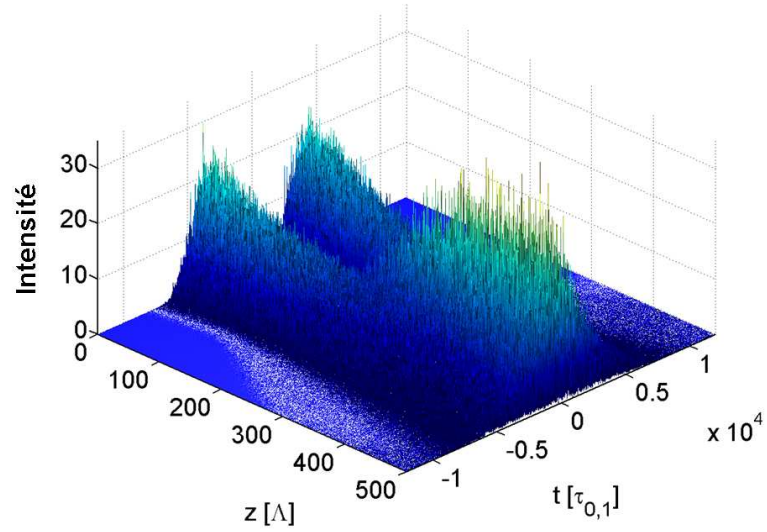
## 4 Conclusion

Un nouvel effet de verrouillage de vitesses de paquets d'ondes non-linéaires et incohérents a été identifié théoriquement et démontré expérimentalement dans un système à faibles pertes, i.e., une fibre optique. Une approche cinétique du problème a révélé que ce phénomène résultait d'une évolution irréversible des champs vers un état d'équilibre thermodynamique. Il est important de noter que si l'on considère l'interaction d'envelopes incohérentes localisées spatialement, le verrouillage de vitesse se manifeste comme un piégeage spatial de paquets d'ondes distincts (Fig. 5). Une telle fusion de paquets d'ondes incohérents se produit quelque soit la nature de l'interaction, qui peut être repulsive ("défocalisant",  $\alpha_j > 0$ ) ou attractive ("focalisant",  $\alpha_j < 0$ ).

De plus, il semble que cet effet de thermalisation soit un phénomène générique pour les ondes non-linéaires incohérentes dispersives. Nous l'avons en effet étendu à des systèmes multidimensionnels et à des interactions non-linéaires quadratiques et résonantes [13].

## Références

1. M. MITCHELL ET M. SEGEV, *Nature (London)* **387**, 880 (1997).
2. Y.S. KIVSHAR ET G.P. AGRAWAL, *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals* (Ac. Press, 2003).
3. A. PICOZZI, M. HAELTERMAN, S. PITOIS, AND G. MILLOT, *Incoherent Solitons in Instantaneous Response Nonlinear Media*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 143906 (2004).
4. A. PICOZZI ET M. HAELTERMAN, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2010 (2001).
5. C. CONNAUGHTON ET AL., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 263901 (2005).



**Fig.5.** Piégeage spatial de deux paquets d'ondes distincts dû à l'interaction de leurs enveloppes incohérentes localisées spatialement.

6. S. PITOIS, S. LAGRANGE, H. R. JAUSLIN ET A. PICOZZI, Velocity locking of incoherent nonlinear wave packets, *Phys. Rev. Lett.* , **97**, 033902(2006).
7. G.P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics* (Ac. Press, 2001).
8. R.Z. SAGDEEV, D.A. USIKOV ET G.M. ZASLAVSKY, *Nonlinear Physics* (Harwood Publ., 1988).
9. V.E. ZAKHAROV, V.S. L'VOV ET G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer, Berlin, 1992); S. Dyachenko *et al.*, *Physica D* **57**, 96 (1992).
10. K. HUANG, *Statistical Mechanics* (Wiley, 1963).
11. Par simplicité, nous considérons le cas où le signe de  $\alpha_j$  est le même pour tous les  $A_j$ .
12. D'après la définition d'une moyenne dans la théorie cinétique,  $\langle \mathcal{A} \rangle_j = \int \mathcal{A} n_j(\omega) d\omega / N_j$  [10], nous avons  $\langle v_j^{-1}(\omega) \rangle_j = u_j^{-1} + 2\alpha_j \bar{\omega}_j = v_j^{-1}(\omega = \bar{\omega}_j)$ , avec  $\bar{\omega}_j = \langle \omega_j \rangle_j$ .
13. S. LAGRANGE, H. R. JAUSLIN ET A. PICOZZI (en préparation).



# Dynamo Taylor-Couette en géométrie finie

R. Laguerre<sup>1,2</sup>, A. Ribeiro<sup>1</sup>, C. Nore<sup>1,2</sup>, J. Léorat<sup>3</sup>, & J.-L. Guermond<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup> LIMSI-CNRS, BP133, 91403 Orsay Cedex, France

<sup>2</sup> Université Paris XI, département de physique, 91405 Orsay cedex, France

<sup>3</sup> LUTH, Observatoire de Paris-Meudon, 92195 Meudon, France

<sup>4</sup> Department of Mathematics, Texas A&M University, 3368 Tamu, College Station, TX 77843-3368, USA

laguerre@limsi.fr

**Résumé.** Nous présentons des calculs d'instabilités hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques (MHD) dans une configuration de Taylor-Couette en géométrie finie. La première bifurcation hydrodynamique est une bifurcation fourche imparfaite vers des rouleaux de Taylor axisymétriques et stationnaires. Ces rouleaux servent d'écoulement figé pour des calculs de dynamo cinématique qui mettent en évidence une bifurcation de Hopf supercritique vers une structure magnétique localisée de longueur caractéristique deux fois plus grande que celle de la vitesse. A partir des rouleaux de Taylor et du vecteur propre magnétique issu de la dynamo cinématique, la dynamo non-linéaire montre un comportement cyclique inédit où les symétries par rapport au plan médian des champs de vitesse et magnétique jouent un rôle prépondérant.

**Abstract.** We present calculations of hydrodynamic and hydromagnetic instabilities in a finite Taylor-Couette configuration. The first hydrodynamic bifurcation is an imperfect pitchfork bifurcation giving rise to Taylor vortices. This flow is used in kinematic dynamo computations showing a supercritical Hopf bifurcation towards a localised magnetic structure of typical length twice as long as the velocity typical length. Using Taylor vortices and the magnetic eigenvector obtained from the kinematic regime, the non linear dynamo shows a striking cyclic behaviour where the symmetries with respect to the median plane play a major role.

## 1 Introduction

L'écoulement de Taylor-Couette, engendré par la rotation différentielle de deux cylindres concentriques, est un des piliers de l'hydrodynamique, dans toutes ses facettes, expérimentales, théoriques et numériques. Dans son ouvrage de 1961, Chandrasekhar [1] s'est intéressé au problème hydromagnétique de l'écoulement de Taylor-Couette, dans le cas axisymétrique. Le problème consistait à considérer un écoulement de fluide conducteur plongé dans un champ extérieur appliqué. Les résultats récents obtenus dans le cadre de la dynamo, ainsi que l'intérêt astrophysique important de l'instabilité magnéto-rotationnelle, ont motivé une série d'études numériques. La dynamo cinématique fait l'objet d'une étude dans l'article [7] pour un écoulement de Taylor-Couette analytique. Dans l'article [6], une autre étude cinématique basée sur un écoulement solution des équations de Navier-Stokes, ainsi que la résolution du problème couplé non linéaire sont présentées. Dans ces deux études, le cylindre est axialement périodique et l'effet des couvercles sur la dynamo n'est pas pris en compte. Nous nous proposons d'étudier l'influence de ces couvercles sur les instabilités hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques.

## 2 Equations et méthode numérique

### 2.1 Equations de la MHD pour le problème de Taylor-Couette

Nous considérons un fluide incompressible de viscosité cinématique  $\nu$ , de diffusivité magnétique  $\eta$ , de perméabilité magnétique  $\mu$  et de masse volumique  $\rho$ , contenu entre deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_i$  (cylindre intérieur) et  $R_o$  (cylindre extérieur) et de hauteur  $L_z$ . Seul le cylindre intérieur est entraîné en

rotation à la vitesse angulaire  $\Omega_i$  et les équations du problème à résoudre s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu \mathbf{H} + \nu \Delta \mathbf{U}, \\ \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \sigma \nabla \times (\mathbf{U} \times \mu \mathbf{H}) + \Delta \mathbf{H}, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{U}$  est le champ de vitesse,  $p$  est la pression et  $\mathbf{H}$  l'induction magnétique. Il faut de plus ajouter à ces équations les conditions aux limites adéquates qui seront abordées dans la suite. En prenant l'interstice  $\delta = R_o - R_i$  comme longueur caractéristique,  $\mathcal{U} = R_i \Omega_i$  comme vitesse caractéristique et  $\mathcal{H} \sqrt{\mu/\rho} = \mathcal{U}$ , les paramètres pertinents du problème sont le nombre de Reynolds cinétique,  $Re = \frac{R_i \Omega_i \delta}{\nu}$ , le nombre de Reynolds magnétique,  $Re_m = \mu \sigma R_i \Omega_i \delta$ , le rapport des rayons des cylindres,  $\eta = \frac{R_i}{R_o}$  et le rapport d'aspect  $\Gamma = \frac{L_z}{\delta}$ . Dans ces conditions, les équations adimensionnées à l'aide des différentes échelles caractéristiques et du temps advectif défini par  $\mathcal{T} = \delta/\mathcal{U}$ , s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu_r \mathbf{H} + Re^{-1} \Delta \mathbf{U}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) + Re_m^{-1} \Delta \mathbf{H}, \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

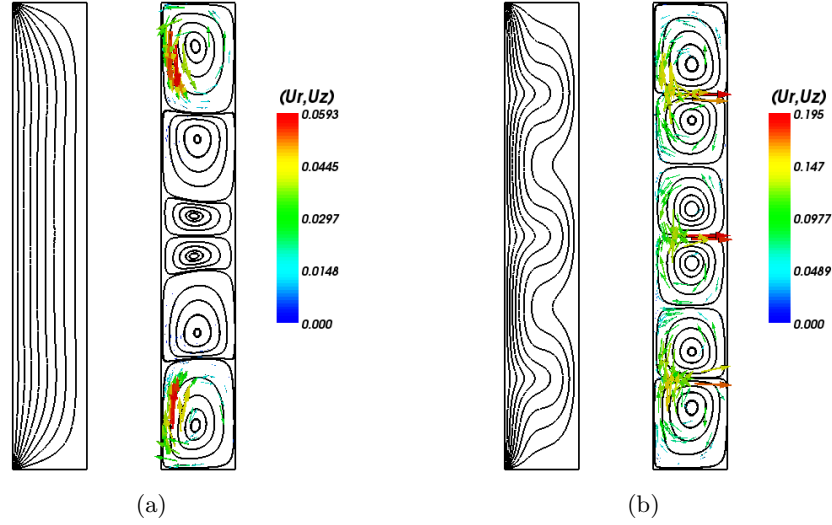
avec  $\mu_r$  la perméabilité magnétique relative du fluide définie par la relation  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.

## 2.2 Caractéristiques de la méthode de résolution des équations couplées

La méthode développée et qui ne sera pas détaillée dans cette note, permet de résoudre les équations complètes de la MHD en trois dimensions pour toute géométrie axisymétrique (sphère, cylindre, ellipsoïde,...), qui sont d'un grand intérêt à la fois dans le domaine astrophysique et le domaine expérimental. L'algorithme permet de considérer un domaine de calcul numérique hétérogène composé de matériaux de conductivités électriques différentes. De manière naturelle, les équations sont résolues dans un repère cylindrique ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ ) et chaque variable du problème est décomposée en séries de Fourier (cosinus-sinus) dans la direction azimutale  $\mathbf{e}_\theta$ . À partir d'un problème 3D initial, on obtient ainsi  $M$  problèmes 2D couplés ( $M$  étant le nombre de modes de Fourier) à résoudre dans un plan méridien de la géométrie considérée. L'approximation de la solution dans le plan méridien est effectuée à l'aide d'éléments finis de Lagrange.

Le champ magnétique dans les régions isolantes est exprimé comme le gradient d'un potentiel scalaire  $\mathbf{H}^v = \nabla \phi$  du fait qu'il soit à rotationnel nul. On réduit ainsi le nombre de variables du problème et on se restreint à des domaines géométriques dont les plans méridiens sont simplement connexes. L'originalité de la méthode repose sur l'emploi d'une technique de pénalisation de type Galerkin discontinu pour imposer les continuités requises par le champ magnétique au niveau des interfaces isolant/conducteur. Il s'agit d'assurer la continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$  et de la composante normale de  $\mu_r \mathbf{H}$ .

Les équations de Navier-Stokes sont résolues à l'aide d'un schéma prédicteur-correcteur sous forme rotationnelle optimale pour l'approximation de la pression et l'avancée temporelle est discrétisée au moyen d'un schéma BDF2. La méthode de résolution des équations de Maxwell est détaillée et validée dans [2] et s'est avérée efficace dans le domaine de la dynamo cinématique [3]. Les équations couplées sont résolues de façon alternée en temps.



**Fig.1.** Champ de vitesse pour l'écoulement de Taylor-Couette pour  $Re = 50$  (à gauche) et  $Re = 120$  (à droite). Pour chaque  $Re$  sont représentés sur la partie gauche les isolignes de la composante azimutale (10 valeurs entre 0 et 10), et sur la partie droite, le champ de vitesse méridien. Pour chaque figure, l'axe vertical gauche est situé en  $r = R_i = 1$  et l'axe vertical droit en  $r = R_o = 2$ .

### 3 Première bifurcation hydrodynamique : formation des rouleaux de Taylor

Nous considérons d'abord le cas hydrodynamique, sans champ magnétique imposé. La mise en rotation du cylindre intérieur aboutit, pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds, à un écoulement axisymétrique de Couette (C), admettant une solution analytique dans le cas axialement périodique. Une augmentation du nombre de Reynolds entraîne l'apparition de jets radiaux qui compensent l'excès de moment cinétique dû à la rotation rapide du cylindre intérieur. On obtient un écoulement formé de rouleaux de Taylor (TV) axisymétriques et stationnaires qui brisent la symétrie de translation le long de l'axe des cylindres. Taylor [4] a prédit le seuil de cette instabilité en supposant que les cylindres étaient axialement périodiques. Dans ces conditions, la bifurcation qui aboutit à un écoulement en rouleaux (TV) est une bifurcation fourche super-critique dont le paramètre d'ordre, qui peut être l'intensité des rouleaux, varie comme la racine carrée de l'écart au seuil  $Re - Re^c$ .

Pour nos calculs, nous avons choisi  $L_z = 2\pi$ , ce qui évite d'obtenir un écoulement dominé par les couvercles des cylindres, mais de taille raisonnable afin de minimiser les temps de calcul. Nous avons de plus choisi  $R_i = 1$  et  $R_o = 2$  de manière à avoir  $\eta = 0.5$ ,  $\delta = 1$  et  $\Gamma = 2\pi$ . Les conditions aux limites utilisées pour le champ de vitesse sont des conditions aux limites de non-glisement sur les parois des différents cylindres

- $U_r = U_z = 0$  pour  $r = R_i$  et  $r = R_o$ ,
- $U_\theta = 1$  pour  $r = R_i$  et  $U_\theta = 0$  pour  $r = R_o$ ,
- $U_r = U_z = U_\theta = 0$  pour  $z = 0$  et  $z = L_z$ .

On remarquera que nous avons arbitrairement choisi ici d'immobiliser les deux couvercles des cylindres coaxiaux.

Près des couvercles, on peut observer sur la figure 1 l'apparition de couches limites d'Ekman dans lesquelles le fluide se dirige vers l'axe du cylindre en spiralant, pour tout  $Re$ . Les rouleaux de Taylor se développent d'abord dans ces couches limites, pour de faibles  $Re$  (figure 1 à gauche,  $Re < Re^c$ ) et envahissent l'ensemble de l'écoulement lorsque l'on s'approche de la valeur critique  $Re^c$  (figure 1 à droite,  $Re > Re^c$ ). Benjamin [5] a interprété la formation de ces rouleaux de Taylor dans un dispositif de dimension finie comme une bifurcation fourche imparfaite. Nous retrouvons cette caractéristique en traçant le carré de la norme  $L^2([0, T[, L^2(\Omega))$  de la composante radiale de la vitesse dans une faible épaisseur

proche du plan médian (de façon à minimiser les effets de bord) en fonction de  $Re$  (figure non montrée). Une interpolation linéaire de ces résultats aboutit à une valeur critique  $Re^c = 65$  qui est légèrement inférieure à la valeur obtenue par Willis et Barenghi [6] dans le cas des cylindres axialement périodiques  $Re_{perio}^c = 68.2$ . La figure 1 (en bas) montre un écoulement formé de trois paires de rouleaux contra-rotatifs de rapport d'aspect pratiquement égal à l'unité et les propriétés de symétrie de cet écoulement par rapport au plan  $z = 0$  sont  $(U_r(r, \theta, -z), U_\theta(r, \theta, -z), U_z(r, \theta, -z)) = (U_r(r, \theta, z), U_\theta(r, \theta, z), -U_z(r, \theta, z))$ . Nous allons maintenant utiliser cet écoulement, qui sera noté  $\mathbf{U}^{\text{TV}}$ , pour effectuer des simulations dans le cadre de la dynamo cinématique.

## 4 Dynamo cinématique

Pour l'étude en dynamo cinématique, nous utilisons l'écoulement  $\mathbf{U}^{\text{TV}}$  obtenu pour  $Re = 120 = 1.85Re^c$  pour la résolution de l'équation de l'induction (régime linéaire). L'écoulement étant axisymétrique, les différents modes azimutaux du champ magnétique sont découplés et nous n'étudierons que le mode  $m = 1$  qui est le mode le plus instable dans le cas périodique [6]. Nous attendons une échelle magnétique axiale de l'ordre de deux fois celle du champ de vitesse [7], le champ magnétique initial doit donc présenter une modulation axiale quelconque, de manière à ce que le mode axial le plus instable soit excité, après interaction avec le champ de vitesse.

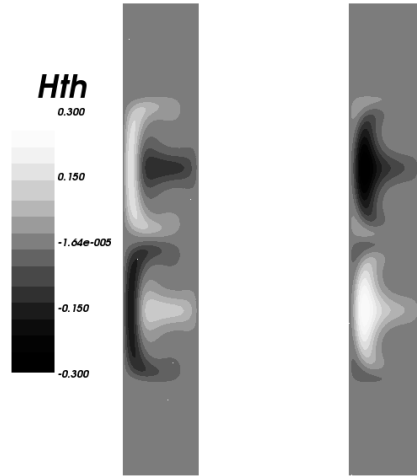
Nous avons choisi d'initialiser nos simulations avec un champ magnétique qui vérifie les conditions de continuité à l'interface avec un champ potentiel nul à l'extérieur. Soit  $\mathbf{A}$  tel que  $\mathbf{H}^c = \nabla \times \mathbf{A}$  et  $k_0$  le nombre d'onde axial du champ magnétique dans le domaine conducteur.  $\mathbf{H}^c$  est déterminé par la fonction radiale  $f$  vérifiant

$$\begin{cases} H_r = \frac{1}{r} f(r) \cos(\theta) \sin(k_0 z), \\ H_\theta = -f'(r) \sin(\theta) \sin(k_0 z), \\ H_z = 0, \end{cases} \quad (3)$$

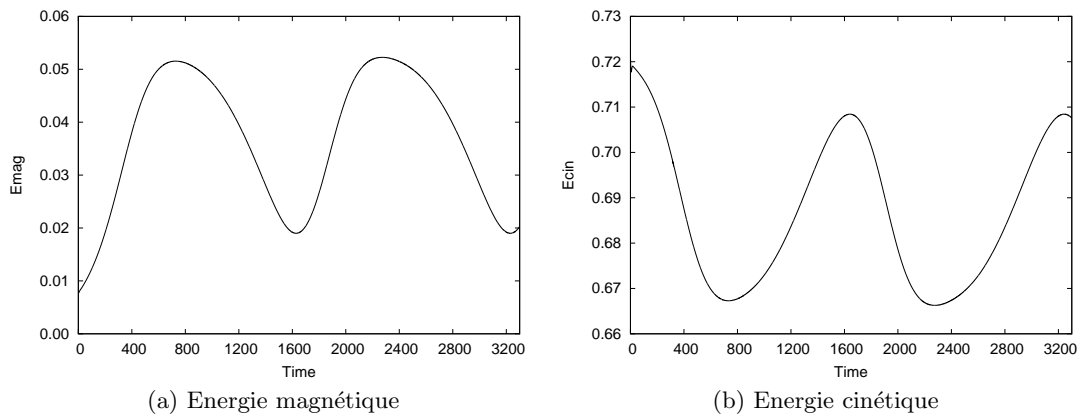
où  $f'$  est la dérivée de  $f$  et  $k_0 = n_0 2\pi / L_z$ . En utilisant les quatre conditions aux limites, on peut choisir un polynôme d'ordre 4 pour  $f$  et on obtient  $f(r) = A(R_i - r)^2(R_o - r)^2$ . L'évolution de l'énergie magnétique du mode azimutal  $m = 1$  en fonction du temps a été obtenue pour différentes valeurs de  $Re_m \in [120, 360]$ . Ce qui nous a permis d'obtenir les taux de croissances  $\sigma_H$  du champ magnétique en fonction de  $Re_m$ . Nous avons de plus vérifié que les évolutions asymptotiques des énergies n'étaient pas affectées par la valeur  $n_0$  dans la solution initiale. La valeur critique du nombre de Reynolds magnétique obtenu pour  $\sigma_H = 0$  vaut  $Re_m^c = 210$ , résultat à comparer avec la valeur correspondant au cas périodique  $Re_m^c(perio) = 190$ . La différence entre ces deux valeurs provient certainement de la différence de topologie entre les écoulements de fluide dans les cas fini et périodique et aussi de la différence des conditions magnétiques vérifiées sur les deux couvercles.

Au delà de la valeur seuil, on observe que l'évolution du champ magnétique en un point fixé est composée d'une partie exponentielle croissante et d'une partie oscillante. De plus, les oppositions de phase entre les parties cosinus et sinus des différentes composantes traduisent la présence d'une structure magnétique en rotation autour de l'axe des cylindres. La composante dominante est la composante azimutale, d'amplitude environ 3 fois plus élevée que les composantes axiale et radiale qui sont comparables. La bifurcation est une bifurcation de Hopf super-critique.

Le mode propre est présenté en figure 2 dans les plans méridiens  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$ . On remarque que comme dans le cas périodique, la taille caractéristique des structures magnétiques est deux fois plus importante que celle des structures hydrodynamiques (rouleaux de Taylor de la figure 1). En raison de l'extension finie du cylindre, on ne voit apparaître que deux cellules magnétiques. Enfin, la symétrie de ce mode propre magnétique est  $(H_r(r, \theta, -z, t), H_\theta(r, \theta, -z, t), H_z(r, \theta, -z, t)) = (-H_r(r, \theta, z, t), -H_\theta(r, \theta, z, t), H_z(r, \theta, z, t))$ .



**Fig.2.** Composante azimutale du champ magnétique pour la dynamo cinématique de Taylor-Couette avec  $Re = 120$  et  $Re_m = 240 > Re_m^c \approx 210$  dans les plans  $\theta = 0$  (à gauche) et  $\theta = \pi/2$  (à droite). Pour chaque figure, l'axe vertical gauche est situé en  $r = R_i = 1$  et l'axe vertical droit en  $r = R_o = 2$ .



**Fig.3.** Dynamo non-linéaire pour  $Re = 120$  et  $Re_m = 240$  avec 12 modes azimutaux. Evolution temporelle de l'énergie magnétique (à gauche) et de l'énergie cinétique (à droite).

## 5 Dynamo non-linéaire

La solution hydrodynamique non linéaire  $\mathbf{U}^{\text{TV}}$  ainsi que le mode propre magnétique obtenu pour  $Re = 120$  et  $Re_m = 240$  vont maintenant être utilisés comme conditions initiales d'un calcul non linéaire. La résolution azimutale est de 12 modes ( $m = 0 \dots 11$ ) et le maillage méridien utilisé est le même que celui utilisé dans la section précédente. Nous présentons sur la figure 3 les évolutions des énergies magnétique (à gauche) et cinétique (à droite) en fonction du temps. Comme attendu, on observe une première phase ( $0 \leq t \leq 300$ ) de croissance exponentielle de l'énergie magnétique dont le taux de croissance est proche de celui obtenu dans le cas cinématique, alors que l'énergie cinétique décroît. Ensuite, les énergies magnétique et cinétique saturent vers  $t = 800$  avant d'aborder une seconde phase pendant laquelle les tendances s'inversent ( $800 \leq t \leq 1600$ ). L'énergie magnétique atteint alors un minimum pour  $t = 1600$  et se remet à croître jusqu'à  $t = 2300$ . Nous avons reproduit deux cycles d'environ 1500 unités de temps adimensionnées pendant lesquelles les énergies oscillent en opposition de phase. Il est instructif de suivre l'évolution temporelle des symétries du mode propre magnétique par rapport au plan  $z = 0$ . Dans la première phase, le champ magnétique est amplifié en gardant la même symétrie que la condition initiale jusqu'à ce que

les effets non-linéaires rentrent en jeu et brisent cette symétrie. Dans la seconde phase, la composante azimutale du champ magnétique est à peu près paire en  $z$  et la dynamo est interrompue. Lorsque le champ magnétique redevient faible, de sorte que la force de Lorentz n'influe plus sur l'écoulement, le flot retrouve sa configuration initiale ( $\mathbf{U}^{\text{TV}}$ ) et le mode propre magnétique symétrique se remet à croître ( $1600 \leq t \leq 1900$ ). On observe une dynamo laminaire cyclique.

## 6 Conclusion

Nous avons retrouvé que la première bifurcation hydrodynamique est une bifurcation fourche imparfaite vers des rouleaux de Taylor. Nous avons prouvé que, dans le cadre de la dynamo cinématique, la bifurcation est une bifurcation de Hopf supercritique qui produit une structure magnétique localisée et unique pour la hauteur des cylindres considérée. Nous avons montré l'existence d'une dynamo non-linéaire cyclique dont le comportement est influencé par les symétries par rapport au plan médian des champs de vitesse et magnétique. Nous envisageons dans la suite d'effectuer des calculs de dynamo non-linéaire en imposant certaines symétries, afin de comprendre leur rôle dans l'évolution cyclique mise en évidence dans cette note.

## Références

1. S. CHANDRASEKHAR, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability *Oxford University Press* (1961).
2. J.-L. GUERMOND, R. LAGUERRE, J. LÉORAT ET C. NORE, An Interior Penalty Galerkin method for the MHD equations in heterogeneous domains, *Journal of Computational Physics*, **221**, 349-369 (2007).
3. R. LAGUERRE, C. NORE, J. LÉORAT ET J.-L. GUERMOND, Effects of conductivity jumps in the envelope of a kinematic dynamo flow, *C. R. Mécanique*, **334**, 593-598 (2006).
4. G.I. TAYLOR, Stability of a viscous liquid container between two rotating cylinders, *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **223**, 289-343 (1923).
5. T.B. BENJAMIN, Bifurcation phenomena in steady flows of viscous liquid. I. Theory *Proc. Roy. Soc. London A*, **359**, 1-26 (1978).
6. A. P. WILLIS AND C. F. BARENGHI, A Taylor-Couette dynamo *Astronomy and Astrophysics*, **393**, 339-343 (2002).
7. P. LAURE, P. CHOSSAT ET F. DAVIAUD, Generation of magnetic field in the Couette-Taylor system *Dynamo and dynamics, a mathematical challenge, Nato Sci Ser. II*, **26**, 17, (2000).

# Bifurcation d'enveloppe d'un oscillateur optoélectronique micro-onde à retard, à haute pureté spectrale

L. Larger<sup>1</sup>, Y. Chembo<sup>1</sup>, T. Erneux<sup>2</sup>, H. Tavernier<sup>1</sup>, R. Bendoula<sup>1</sup>, P. Colet<sup>3</sup>, & E. Rubiola<sup>1</sup>

<sup>1</sup> FEMTO-ST, UMR 6174, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, F-25030 Besançon cedex, France

<sup>2</sup> Université Libre de Bruxelles, Optique Non Linéaire Théorique, Campus Plaine, B-1050 Bruxelles, Belgique

<sup>3</sup> IMEDEA, CSIC-UIB, Campus Universitat Illes Balears, E-07122 Palma de Mallorca, Espagne

laurent.larger@univ-fcomte.fr

**Résumé.** De nouvelles architectures optoélectroniques pour la génération de références de Temps-Fréquence sont apparues récemment [1]. Elles permettent d'atteindre des puretés spectrales extrêmes grâce à l'utilisation d'un élément de stockage de l'énergie inhabituel dans le contexte des oscillateurs électroniques de grande pureté spectrale : une très grande ligne à retard optique, au lieu du concept classique d'un résonateur. Nous proposons de développer une approche dynamique non linéaire de ce système à retard particulier, qui conduit à la prédiction de phénomènes inattendus d'instabilité d'enveloppe.

**Abstract.** Recent advances in ultra-stable microwave oscillations have introduced novel architectures which are referred to as optoelectronic oscillators [1]. They can provide extreme spectral purity through the introduction of an unusual energy storage principle, based on long optical fiber delay lines instead of the classical concept of resonators. We here propose a nonlinear dynamics approach leading to the prediction of unexpected envelop bifurcation phenomena.

## 1 Les oscillateurs optoélectroniques

Le système physique étudié reprend une architecture (voir figure 1) récemment reportée dans un tout autre contexte, aux perspectives d'application pourtant totalement antagonistes : la génération de comportements chaotiques sur une très large gamme de fréquences, pour utilisation dans des systèmes de communication par chaos [2]. On constate ainsi la richesse dynamique des systèmes à retard, capables de produire des comportements chaotiques de très grande complexité, ou au contraire des oscillations sinusoïdales à très grande pureté spectrale, comme il en est question ici.

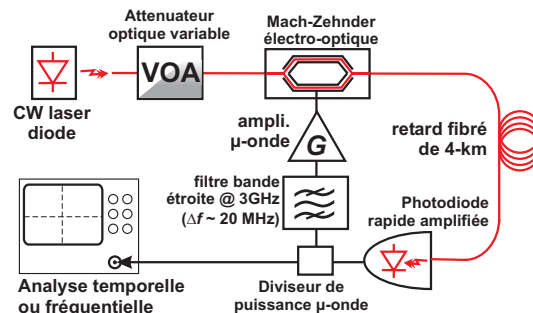


Fig.1. Oscillateur optoélectronique à retard, sélectif en fréquence.

Dans le cas étudié, la différence essentielle entre les paramètres physiques de l'architecture dédié à la génération de chaos, réside dans la présence d'un processus dynamique très sélectif en fréquence, et d'un très grand retard comparé à la période propre du processus dynamique. Ainsi, la dynamique d'oscillateur

harmonique est caractérisée par un amortissement  $m$  très faible (facteur de qualité  $Q = 1/(2m) \simeq 150$ ), avec une fréquence propre  $f_0$  de l'ordre de 3 GHz ( $T_0 \simeq 330$  ps). Quant au retard temporel, celui-ci est réalisé à l'aide d'une fibre optique télécom de très faible absorption (0,2 dB/km), de 4 km de long ( $T = 20 \mu\text{s} \simeq 2.10^5 T_0$ ), qui permet de retarder l'oscillation micro-onde lorsque celle-ci est utilisée pour moduler une lumière laser de la seconde fenêtre télécom (1,55  $\mu\text{m}$ ). Le rôle de cette grande ligne à retard peut être vue dans le domaine temporel comme un élément de stockage de l'énergie sur un très grand nombre de périodes propres, ou dans le domaine fréquentiel comme un élément sélectif en fréquence du fait du très faible intervalle spectral libre entre deux modes adjacents liés au retard ( $\Delta f_T = 1/T = 50$  kHz). C'est pratiquement un modulateur de Mach-Zehnder électro-optique télécom, intégré sur Niobate de Lithium, qui sert à transporter l'oscillation micro-onde sur la porteuse optique. Ce modulateur réalise un interféromètre à deux ondes, dont la condition d'interférence est accordable par l'intermédiaire de la tension micro-onde appliquée. La fonction de transfert de modulation est donc potentiellement fortement non linéaire (fonction  $\cos^2(\cdot)$ ), selon l'amplitude de la tension de modulation, par rapport à la tension caractéristique du modulateur correspondant à un déphasage de  $\pi$  dans l'interférence (tension généralement appelée  $V_\pi$ ).

Une modélisation simple mais assez réaliste de la dynamique d'un tel oscillateur peut être faite à l'aide de l'équation intégréo-différentielle non linéaire à retard suivante :

$$\tau \frac{dx}{dt}(t) + x(t) + \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t x(s) ds = \beta \cos^2[x(t-T) + \Phi], \quad (1)$$

où  $\beta$  représente le gain de la chaîne d'oscillation qui dépend de la sensibilité de la photodiode en sortie de fibre, de l'amplification électronique, de la tension demi-onde  $V_\pi$  du modulateur, et de la puissance  $P_0$  du laser illuminant le modulateur. Les constantes de temps  $\theta \simeq 0.35$  ps et  $\tau \simeq 8$  ns sont caractéristiques de la dynamique d'oscillateur harmonique déjà décrite, elles vérifient  $Q = \sqrt{\tau/\theta}$  et  $T_0 = 2\pi\sqrt{\theta\tau}$ .

## 2 Échelles de temps multiples

Connaissant la solution expérimentale *a priori* du régime d'oscillation périodique, nous ré-écrivons l'équation dynamique d'origine à l'aide d'un changement de variable qui normalise le temps par rapport à la période d'oscillation, soit  $s = t/\sqrt{\tau\theta}$ . La petite quantité  $\varepsilon = 1/Q$  permet de mieux mettre en évidence la solution harmonique à l'échelle de temps rapide  $s$ , ainsi qu'une échelle de temps lente  $\xi = \varepsilon s$ . L'équation physique de départ (1) peut alors se ré-écrire sous forme différentielle :

$$\frac{d^2x}{ds^2}(s) + x(s) = +\varepsilon \frac{d}{ds} \left\{ -x(s) + \beta \cos^2[x(s-S) + \Phi] \right\}, \quad (2)$$

équation pour laquelle nous cherchons naturellement une solution du type  $x(s, \xi) = x_0(s, \xi) + \varepsilon x_1(s, \xi)$ . Les deux termes de la solution à échelle de temps multiples peuvent être explicités en les injectant dans (2), en considérant les deux échelles de temps comme des variables indépendantes, et en annulant les deux premiers ordres en  $\varepsilon$  qui en résultent :

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial s^2} + x_0 = 0 \quad \text{soit} \quad x_0(s, \xi) = A(\xi) \cos[s + \psi(\xi)] \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial s \partial \xi} - \frac{\partial x_0}{\partial s} - \beta \frac{\partial x_0}{\partial s} (s-S) \sin[2(x_0(s-S) + \Phi)]. \quad (4)$$

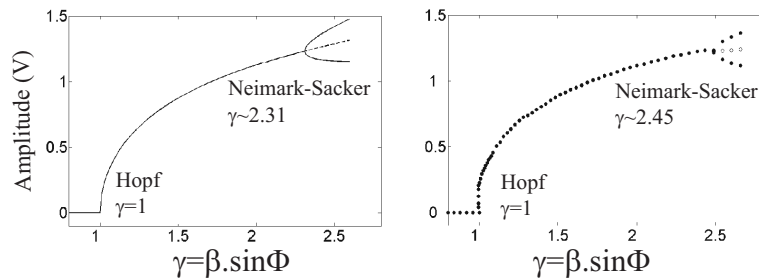
L'évaluation de (4) qui comprend la non linéarité du processus dynamique, et l'annulation des termes séculaires que cette équation présente, permet de dériver une dynamique d'enveloppe complexe  $\mathcal{A} = A e^{i\psi}$  de la solution oscillant à la période  $T_0$  (en revenant au temps réel  $t$ ) :

$$2\tau \dot{\mathcal{A}}(t) + \mathcal{A}(t) = -\gamma J_1[|\mathcal{A}(t-T)|] e^{i(\psi(t-T) - 2\pi T/T_0)}, \quad (5)$$



où  $J_1[.]$  est la fonction de Bessel classique, qui apparaît par filtrage du seul harmonique issu de la non linéarité du modulateur de Mach-Zehnder à l'intérieur de la bande de fréquence du processus dynamique résonant. Le facteur  $\gamma$  correspond au gain dynamique de la fonction de modulation du Mach-Zehnder, soit  $\gamma = \beta \sin \Phi$ .

À la dynamique de phase près  $\psi(t)$ , l'équation différentielle non linéaire à retard est de la même famille que les dynamiques scalaires à retard généralement étudiées dans la littérature [3]. Moyennant quelques hypothèses simplificatrices concernant le régime de point fixe stable, il est possible de découpler les dynamiques d'amplitude de  $A(t)$  et de phase de  $\psi(t)$ , afin d'aborder une analyse de stabilité de l'amplitude, telle que décrite dans [4] pour le cas des dynamiques scalaires à grand retard. Il est important de noter que cette dynamique scalaire non linéaire à retard dérivée, et non intrinsèque, est issue d'une dynamique à retard initiale de type intégré-différentielle, faisant intervenir un processus dynamique sélectif en fréquence. Le temps caractéristique (lent)  $2\tau$  finalement obtenu pour la dynamique scalaire à retard d'amplitude, est pratiquement défini par l'inverse de la sélectivité spectrale du processus dynamique résonant ( $2/(\Delta f) = 2QT_0$ ).



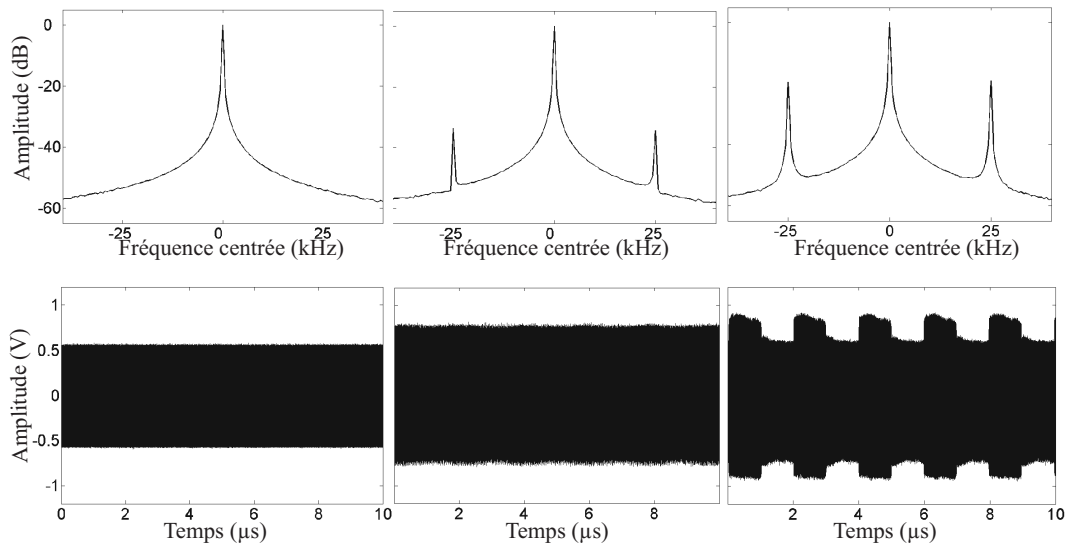
**Fig.2.** Diagramme de bifurcation de l'amplitude micro-onde (gauche : numérique, droite : expérimental).

Lors de l'analyse de stabilité d'amplitude, il apparaît que, contrairement à ce qui était admis, pour des gains d'oscillation suffisamment importants (dans la partie décroissante de la fonction de Bessel  $J_1$ , où la pente devient suffisamment forte et négative), la solution de point fixe en amplitude perd sa stabilité, et l'oscillation micro-onde subit une bifurcation de Neimark-Sacker. La bifurcation de Hopf bien connue pour ce système à retard, et donnant naissance à l'oscillation micro-onde pour  $\beta = 1$ , est donc suivie par une telle bifurcation secondaire pour  $\beta \simeq 2.31$ , qui correspond pratiquement à l'apparition d'un cycle limite aux temps lents de l'enveloppe micro-onde, c'est à dire à une auto-modulation d'amplitude avec une période  $2T$  de l'oscillation micro-onde de période  $T_0 \ll 2T$  (voir figure 2).

### 3 Résultats expérimentaux

Le montage expérimental est celui décrit dans la section 1, avec les valeurs numériques indiquées. Le filtre sélectif en fréquence réalise le processus dynamique résonant, avec une fréquence centrale de 3 GHz, et une largeur de bande à -3 dB de 20 MHz environ. Le modulateur de Mach-Zehnder est conçu pour fonctionner à des débits télécom de 20 Gb/s, avec une bande passante analogique de l'ordre de 18 GHz, avec un  $V_\pi$  de l'ordre de 4,5 V. La diode laser nous permet de disposer de plus de 20 mW optique. Une fibre télécom standard (SMF28) de 4 km nous permet de produire un retard "pur" de 20  $\mu$ s. La photodiode utilisée est pré-amplifiée, avec un gain de conversion de l'ordre de 2,2 V/mW, et avec une bande passante de plus de 14 GHz. Un amplificateur de puissance RF large bande (30 kHz à 25 GHz) capable de délivrer près de 26 dBm (environ 12V crête à crête), avec un gain de 18 dB (amplification x8) nous permet d'atteindre expérimentalement des gains normalisés  $\beta$  suffisamment élevés (jusqu'à 4-5).

L'enregistrement de la trace temporelle correspondant à l'oscillation micro-onde est rendue possible grâce à l'utilisation d'un oscilloscope numérique à 6 GHz de bande passante, fonctionnant à 40 Géch/s, avec une profondeur mémoire d'enregistrement de la trace de 16 millions de points. Les traces temporelles



**Fig.3.** Traces temporelles (au dessus) et spectres correspondants (en bas) pour différentes valeurs du gain.

enregistrées pour 3 valeurs différentes du gain (pratiquement ajusté par la puissance optique du laser) sont représentées à la figure 3, avec le calcul de leur spectre par transformée de Fourier rapide. On a pu ainsi clairement identifier l'apparition des raies latérales de modulation, à des fréquences décalées de  $1/(2T)$  par rapport à la porteuse micro-onde. L'allure temporelle en régime fortement non linéaire laisse apparaître une enveloppe quasi-rectangulaire sur l'oscillation micro-onde, comme dans le cas des dynamiques d'Ikeda ou Mackey-Glass.

## 4 Conclusion

Une dynamique intégró-différentielle non linéaire à très grand retard, à forte résonance, a été présentée. Une étude analytique de stabilité de l'oscillation à laquelle elle donne lieu, a été effectuée à l'aide d'une approche à échelle de temps multiples : le temps court correspond à la période propre de la résonance, et le temps long correspond à son facteur de qualité. Un temps encore plus long, correspondant au grand retard temporel impliqué dans le processus d'oscillation, se manifeste par la période  $T_2$  qui apparaît lors de la perte de stabilité de l'enveloppe de l'oscillation rapide.

Les architectures pratiques concernées par cette étude sont étudiées dans le contexte d'une nouvelle génération d'oscillateurs micro-ondes, qui présentent le potentiel d'une grande pureté spectrale. Les implications de ces phénomènes d'instabilité en termes de pureté spectrale sont à l'étude, dans le cadre d'un projet ANR O<sup>2</sup>E (Oscillateurs Opto-Electroniques).

## Références

1. X. S. YAO AND L. MALEKI, High frequency optical subcarrier generator, *Electronics Letters*, **30** (18), 1525-1526 (1994).
2. A. ARGYRIS *et al.*, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **438**, 343-346 (2005).
3. J. D. FARMER, Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system, *Physica D*, **4**, 366-393 (1982).
4. T. ERNEUX, L. LARGER M.W. LEE AND J.-P. GOEDGEBUER, Ikeda Hopf bifurcation revisited, *Physica D*, **194**, 49-64 (2004).

# Effets de la force de Coriolis sur l'instabilité elliptique en géométries cylindrique et sphérique

Michael Le Bars, Stéphane Le Dizès, & Patrice Le Gal

IRPHE - CNRS UMR 6594, 49 rue F. Joliot Curie, B.P. 146, F-13384 Marseille Cedex 13  
lebars@irphe.univ-mrs.fr

**Résumé.** Nous avons étudié expérimentalement les effets de la force de Coriolis sur l'instabilité elliptique dans des cylindres et des sphères mis en rotation et embarqués sur une table tournante. Différents modes instables peuvent être excités en ajustant le rapport  $\Omega^G$  entre la rotation globale de la table et la rotation du fluide, en accord avec la théorie globale de l'instabilité elliptique. Aucune instabilité n'est présente pour  $-3/2 < \Omega^G < -1/2$ . En diminuant  $\Omega^G$  progressivement vers  $-1/2$ , nous observons différentes bandes de résonance, tout d'abord discrètes, puis se superposant. Simultanément, les taux de croissance et nombre d'onde du mode le plus instable augmentent significativement, en accord quantitatif avec la théorie locale. En géométrie sphérique, de nouvelles résonances ont été observées pour la première fois, en complément du mode classique de "spin-over". Ces résultats ont des implications significatives dans des contextes astro- et géophysiques.

**Abstract.** The effects of Coriolis force on the elliptical instability are studied experimentally in cylindrical and spherical rotating containers embarked on a table rotating at a fixed rate. For a given set-up, changing the ratio  $\Omega^G$  of global rotation to flow rotation leads to the selection of various unstable modes due to the presence of resonance bands, in close agreement with the normal mode theory. No instability takes place when  $\Omega^G$  ranges between  $-3/2$  and  $-1/2$  typically. When decreasing  $\Omega^G$  toward  $-1/2$ , resonance bands are first discretized for  $\Omega^G > 0$  and progressively overlap for  $-1/2 < \Omega^G < 0$ . Simultaneously, the growth rates and wavenumbers of the prevalent stationary unstable mode significantly increase, in quantitative agreement with the viscous short-wavelength analysis. New complex resonances have been observed for the first time in the sphere, in addition to the standard spin-over. We argue that these results have significant implications in geo- and astrophysical contexts.

## 1 Introduction

The elliptical instability corresponds to the three-dimensional destabilisation of two-dimensional rotating flows with elliptical streamlines (see the review by Kerswell [7] and references therein). It has first been discovered in the context of strained vortices, but it generally appears in any turbulent flow exhibiting some coherent structures with elliptical motion as well as in a large range of industrial and natural systems (e.g. in the wake vortices behind aircrafts, in planetary liquid cores, in binary stars and accretion disks), where the ellipticity is generated either by vortex interactions or by tidal effects.

In most practical cases, the strain field responsible for the elliptical pattern rotates around the same axis as the flow, but with a different rate and possibly in an opposite direction. In the present paper, we thus systematically study the effects of Coriolis force on the elliptical instability, both in a rotating cylinder and in a rotating spheroid. Our experimental set-up is inspired from Malkus [14] : it is similar to the one already used in [4] and [11] respectively. Contrary to former devices, it permits to analyse the growth and the saturation of the elliptical instability. A deformable and transparent container - either a cylinder of radius  $\tilde{R} = 2.75\text{cm}$  and height  $\tilde{H} = 21.4\text{cm}$  or a hollow sphere of radius  $\tilde{R} = 2.175\text{cm}$  - is set in rotation about its axis ( $Oz$ ) with an angular velocity  $\tilde{\Omega}^F$  up to 300rpm and is simultaneously deformed elliptically by two fixed rollers parallel to ( $Oz$ ). The container is filled with water seeded with anisotropic particles (Kalliroscope). A light sheet is formed in a plane containing the rotation axis for visualisation, allowing the measurement of wavelengths and frequencies of excited modes. Besides, the whole set-up (with also the camera and light projector) is placed on a 0.5m-diameter rotating table, which allows rotation with angular velocity  $\tilde{\Omega}^G$  up to  $\pm 60\text{rpm}$ . Our protocol is the same all along the

experiments presented here. First, we set the global rotation to its assigned value and wait for solid body rotation to take place in the container. Then we start the rotation of the container : a spin-up phase first takes place, before the possible development of an instability. All presented experiments are carried out near the instability threshold : the characteristic growth time is then much larger than the spin-up time and decorrelation of both phenomena is expected.

## 2 Theoretical and experimental study in the cylinder

### 2.1 Theoretical approaches

The elliptical instability mechanism has been reviewed in [7]. It is associated with the parametric resonance of two inertial waves of the undistorted circular flow induced by the underlying strain field (e.g. [17,7]). For small deformations, the global (or normal mode) theory permits to calculate explicitly the conditions of resonance for a given geometry and provides information on the structure of the eigenmodes. Results for the elliptical instability in a cylinder with Coriolis effects have been obtained by Kerswell [6]. Numerous resonances with various structures can be excited by changing the global rotation rate  $\Omega^G = \tilde{\Omega}^G/\tilde{\Omega}^F$  only, except in a forbidden band for  $\Omega^G$  between  $-3/2$  and  $-1/2$  where the elliptical instability cannot develop.

In addition to the conditions for resonance given by the global approach, the local approach allows the analytical determination of the growth rate of the instability. It is based on the inviscid short-wavelength Lagrangian theory [2,3]. In this approach, perturbations are assumed to be sufficiently localised in order to be advected along flow trajectories and are searched in the form of local plane waves. This method has been applied to the elliptical instability with global rotation by Le Dizès [13]. He determined the exponential growth rate at order 1 in eccentricity  $\varepsilon$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{3 + 2\Omega^G}{4(1 + \Omega^G)}\right)^4 \varepsilon^2 - \left(1 - 2|1 + \Omega^G| \cos(a)\right)^2}, \quad (1)$$

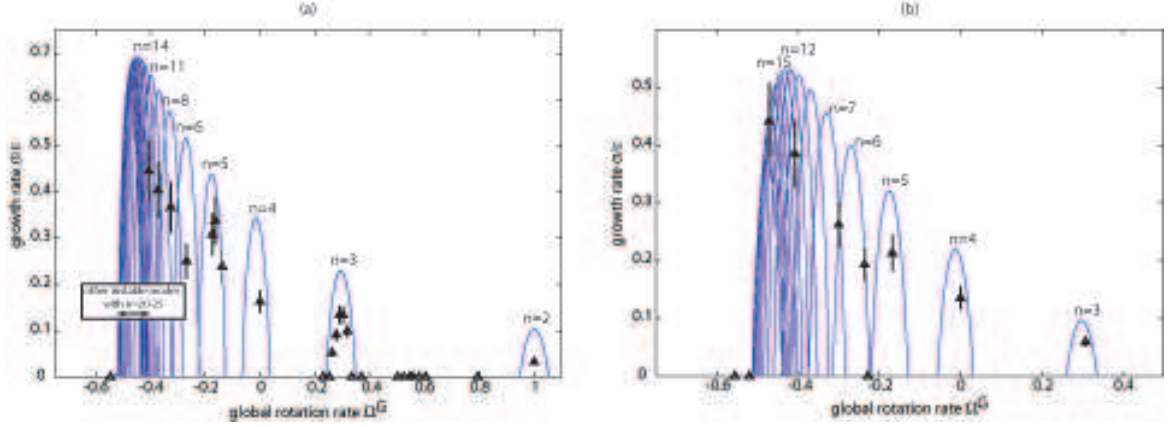
where  $a$  is the angle between the flow rotation axis and the wavevector.

Assuming that the viscous dissipation is of order  $\varepsilon$ , viscous effects on the localised perturbations can be easily taken into account by adding the viscous damping rate  $-k^2\text{Re}^{-1}$  [3]. Here  $\text{Re}$  is the Reynolds number defined by  $\text{Re} = \tilde{\Omega}^F \tilde{R}^2/\nu$ ,  $\nu$  the kinematic viscosity of the fluid and  $k$  the wavevector of the perturbation. Viscous effects on the surface of the container for plane wave perturbations can be estimated using the work of Kudlick [9] and introduce corrections of order  $\text{Re}^{-1/2}$ . For given values of  $(\tilde{R}, \tilde{H}, \tilde{\Omega}^F, \nu, \varepsilon)$ , bands of instability then take place depending on the global rotation rate  $\Omega^G$ , each band corresponding to a given axial structure determined by the number  $n$  of axial half-periods. Two examples of these theoretical predictions are shown in figure 1, together with our experimental data.

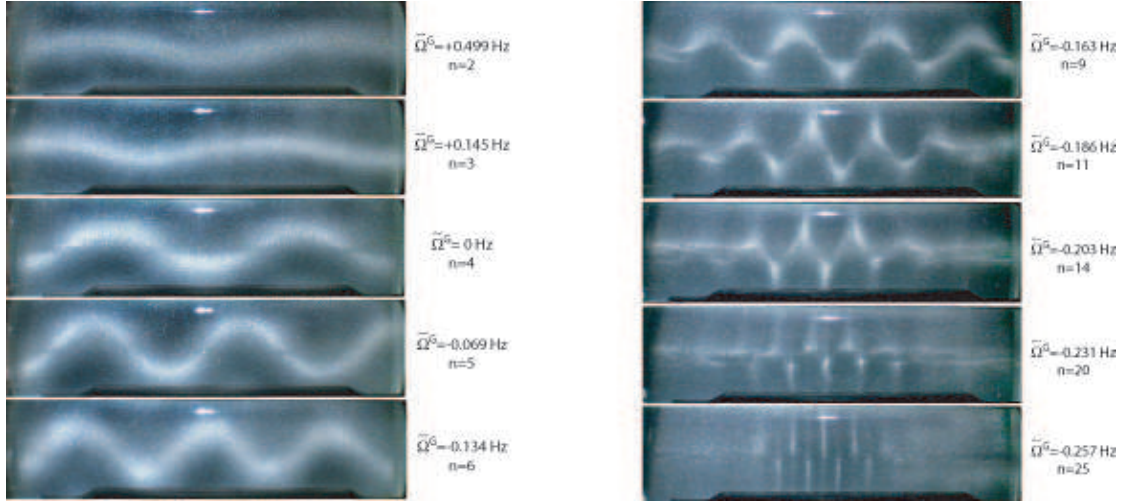
### 2.2 Experimental study

A series of experiments was performed using a cylinder of height  $\tilde{H} = 21.4\text{cm}$  and eccentricity  $\varepsilon = 0.085$ , systematically changing  $\tilde{\Omega}^F$  and  $\tilde{\Omega}^G$ . Good agreement is found with the linear inviscid global approach : stationary mode with a sinusoidal rotation axis and various wavelengths (figure 2) as well as other more exotic modes recognised by their complex radial structure and/or by their periodic behaviour can be selected by changing the dimensionless ratio  $\Omega^G$  only, providing the Reynolds number is large enough.

The growth rate of the stationary mode can be determined experimentally : from sequences of images, we measure the maximum amplitude of the sinusoidally deformed rotation axis ; its temporal evolution is then fitted with an exponential growth, which can be compared to the exponential growth rate determined by the local theory (see figure 1). First, one can notice that the threshold for instability agrees with the theory, with for instance the sharp disappearance of resonant modes at  $\Omega_c^G = -0.520 \pm 0.004$  for  $\tilde{\Omega}^F = 0.505 \pm 0.005\text{Hz}$ . Besides, measurements of the growth rate qualitatively agree with the theory, regarding



**Fig.1.** Viscous growth rate of the elliptical instability determined by the local analysis as a function of the global rotation rate  $\Omega^G$  for a given cylinder of radius  $\tilde{R} = 2.75\text{cm}$ , height  $\tilde{H} = 21.4\text{cm}$ , eccentricity  $\varepsilon = 0.085$ , filled with water ( $\nu = 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ): (a)  $\tilde{\Omega}^F = 0.505 \pm 0.005\text{Hz}$  ( $\text{Re} = 2.40 \times 10^3$ ) and (b)  $\tilde{\Omega}^F = 0.255 \pm 0.002\text{Hz}$  ( $\text{Re} = 1.21 \times 10^3$ ). Triangles stand for experimental measurements and solid lines for theoretical predictions. The predicted number  $n$  of axial half-wavelengths increases by 1 from the right to the left on each resonant band, starting from  $n = 2$  in (a) and  $n = 3$  in (b); measured values are indicated above each experimental point. Note that in (a), additional resonances were observed for  $\Omega^G$  in the range  $[-0.507; -0.403]$ ; nevertheless, because of their small wavelength and their rapid growth rate, quantitative measurements were not accurate.

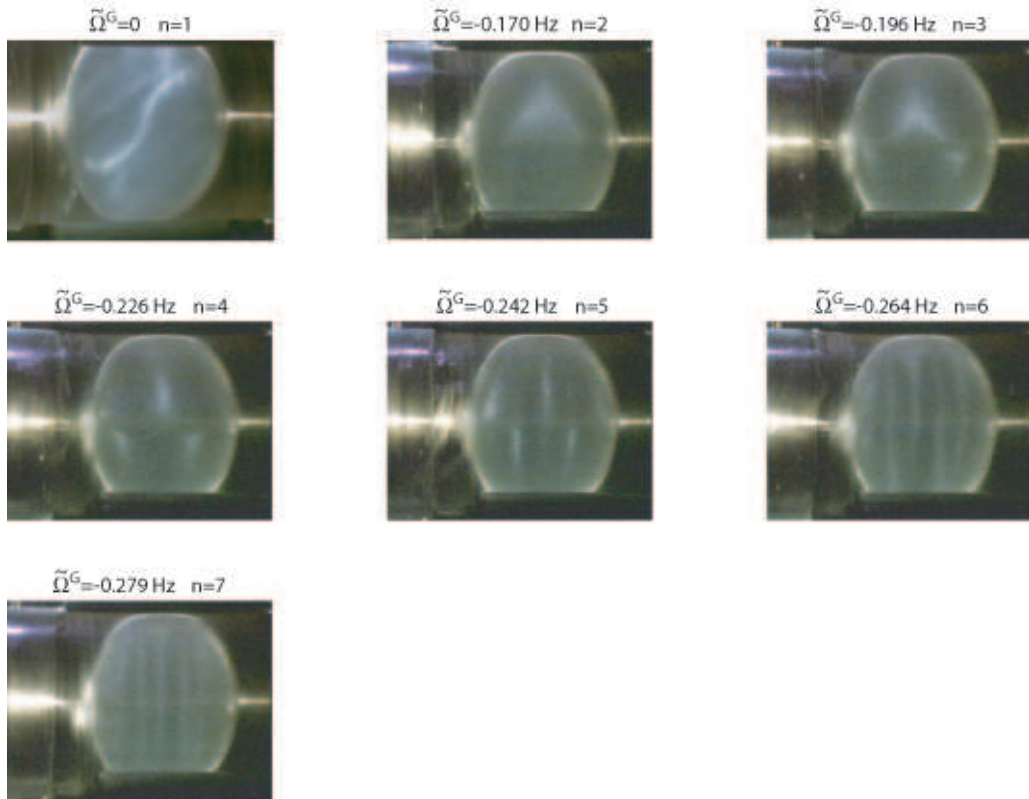


**Fig.2.** Variation of the wavelength of the elliptical instability versus the global rotation  $\tilde{\Omega}^G$  for a given cylinder of radius  $\tilde{R} = 2.75\text{cm}$  and height  $\tilde{H} = 21.4\text{cm}$  with an eccentricity  $\varepsilon = 0.085$  rotating at  $\tilde{\Omega}^F = 0.505 \pm 0.005\text{Hz}$  ( $\text{Re} = 2.40 \times 10^3$ ). In these pictures, the rotation axis is horizontal.

the general increasing trend when  $\Omega^G$  decreases toward  $-1/2$ , and also regarding the specific shape of one resonance band (see for instance in figure 1a the band around  $\Omega^G = 0.285$  that we have explored in detail). Quantitatively, orders of magnitude also agree, but theoretical values always overestimate experimental values. Three main explanations can be provided. First, non-linear effects were not taken into account in the theory, but are expected to be stabilising [4]. Then, it is worth recalling that the theoretical estimate is based on a short-wavelength (i.e. large  $k$ ) asymptotic analysis: the discrepancy could therefore be associated with finite  $k$  effects. The last source of discrepancy is experimental, since in our set-up, rollers only deform the central part of the cylinder.

### 3 Theoretical and experimental study in the sphere

The eigenmodes of the sphere have been studied in the non-rotating case by Greenspan [5]. His study can be modified to take into account an additional Coriolis force, similarly to what has been done for the cylindrical case. The global rotation leads to exactly the same changes as in the cylinder. Hence, in contrast with the non-rotating case where the only exact resonance in the sphere leads to the spin-over mode (i.e. a solid body rotation around the axis of maximum strain, see [11]), the analytical study suggests that more complex instabilities can be triggered by the global rotation.



**Fig.3.** Pictures of the flow structure associated with the elliptical instability for different global rotation rates  $\tilde{\Omega}^G$  in the deformed sphere with an eccentricity  $\varepsilon = 0.20$  and a fixed fluid rotation  $\tilde{\Omega}^F = 0.500 \pm 0.005\text{Hz}$  ( $\text{Re} = 1.49 \times 10^3$ ). The measured number  $n$  of axial half-wavelengths is also indicated. In these pictures, the rotation axis is horizontal.

A series of experiments was performed in the sphere of radius  $\tilde{R} = 2.175\text{cm}$  with a fixed eccentricity  $\varepsilon = 0.20$ , systematically changing  $\tilde{\Omega}^G$  and  $\tilde{\Omega}^F$  to excite various resonances. In the explored range  $-0.6 < \Omega^G < 0$ , we observed the same behaviour as in the cylinder : when  $\Omega^G$  decreases towards  $-1/2$ , the number of axial structures as well as the growth rate of the instability rapidly increase (see figure 3), until the instability suddenly disappears in the vicinity of  $\Omega^G \sim -1/2$ . Excited modes are in good agreement with analytical predictions for  $\Omega^G$  ranging in a resonance band of  $\pm 0.03$  typically around the theoretical perfect-resonance value. With our experimental device, the visualisation in the sphere was not precise enough to allow a systematic measurement of the growth rate of the elliptical instability, but we determined experimentally the viscous threshold of instability for two given values of the flow rotation rate :  $\Omega_c^G = -0.557 \pm 0.004$  for  $\tilde{\Omega}^F = 0.501 \pm 0.005\text{Hz}$  and  $\Omega_c^G = -0.551 \pm 0.004$  for  $\tilde{\Omega}^F = 0.747 \pm 0.005\text{Hz}$ . We recall that in the absence of global rotation, the only perfect resonance and the only observed mode

in the vicinity of threshold (i.e. at low Reynolds number) is the spin-over, corresponding to a single additional rotation around the axis of maximum strain [11].

## 4 Conclusion

In this paper, we have presented the analytical and experimental study of the influence of Coriolis force on the elliptical instability. For a given container - either cylindrical with a fixed aspect ratio  $\tilde{H}/\tilde{R}$  or spherical -, the global rotation rate allows to select various resonances, in good agreement with the global theory. In particular, we have observed in the sphere numerous complex stationary modes at relatively low values of the Reynolds number, in addition to the simple spin-over that takes place in the non-rotating case. For both the cylinder and the sphere, when decreasing progressively the global rotation rate, we have observed that various bands of resonance coexist for  $\Omega^G \geq \Omega_c^G \sim -1/2$ , first separated by large regions of stability (especially for cyclones), then progressively overlapping (especially for anticyclones). All resonances sharply disappear once the global rotation rate reaches a critical value  $\Omega_c^G \sim -1/2$ . Focusing on the stationary modes, we have shown that the instability wavenumber as well as its growth rate significantly increase and reach a maximum just before  $\Omega_c^G$ . In the cylindrical geometry, all these results agree quantitatively with the theoretical estimations taking into account the viscous corrections. Our conclusions in the cylinder and in the sphere also agree qualitatively with the general trend observed by Afanasyev [1] in vortex pairs and by Stegner et al. [16] in Karman vortex streets, even if our experimental set-up is totally different (i.e. their vortices are not confined and are subjected to rather large elliptical deformations). Indeed, both studies report the systematic destruction of elliptical anticyclones by a sinusoidal mode with a decreasing wavelength when  $\Omega^G$  decreases up to a certain critical value, corresponding to the overlapping resonances mentioned here. We thus argue that this behaviour is universal, except for the explicit value of  $\Omega_c^G$  that will depend both on the considered vortical structure and on the value of the eccentricity (see also [15,13]).

Conclusions in the spherical geometry are especially interesting in the geophysical and astrophysical contexts. For instance, complex motions can be expected in the Earth's core in addition to the simple spin-over excited by both precession and elliptical instability. More generally, one can imagine that binary stars and moon-planet systems where the elliptical instability is expected to take place, encounter various bands of instability during their evolution : depending on the relative changes in their rotation and revolution rates, different and complex histories regarding energy dissipation and flow motions can thus be expected. Clearly, the role of the elliptical instability in natural flows [8] still demands more works, in order to fully understand the implications of all natural complexities on the standard and well-known hydrodynamical model (see also [10,12]).

## Références

1. Y. D. AFANASYEV, Experiments on instability of columnar vortex pairs in rotating fluid, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **96**(1), 31–48 (2002).
2. B. J. BAYLY, Three-dimensional instability of elliptical flow, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2160–63 (1986).
3. A. D. D. CRAIK & W. O. CRIMINALE, Evolution of wavelike disturbances in shear flows — a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations, *Proc. Roy. Soc.* **A406**, 13–26 (1986).
4. C. ELOY, P. LE GAL & S. LE DIZÈS, Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* **476**, 357–388 (2003).
5. H. P. GREENSPAN, *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press (1968).
6. R. R. KERSWELL, Tidal excitation of hydromagnetic waves and their damping in the Earth. *J. Fluid Mech.* **274**, 219–41 (1994).
7. R. R. KERSWELL, Elliptical instability, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **34**, 83–113 (2002).
8. R. R. KERSWELL & W. V. R. MALKUS, Tidal instability as the source for Io's magnetic signature, *Geophys. Res. Lett.* **25**, 603–6 (1998).

9. M. KUDLICK, *On the transient motions in a contained rotating fluid*, PhD thesis, MIT (1966).
10. L. LACAZE, W. HERREMAN, M. LE BARS, S. LE DIZÈS & P. LE GAL, Magnetic field induced by elliptical instability in a rotating spheroid, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **100**, 299–317 (2006).
11. L. LACAZE, P. LE GAL & S. LE DIZÈS, Elliptical instability in a rotating spheroid, *J. Fluid Mech.*, **505**, 1–22 (2004).
12. M. LE BARS & S. LE DIZÈS, Thermo-elliptical instability in a rotating cylindrical shell, *J. Fluid Mech.*, **563**, 189–198 (2006).
13. S. LE DIZÈS, Three-dimensional instability of a multipolar vortex in a rotating flow, *Phys. Fluids* **12**, 2762–74 (2000).
14. W. V. R. MALKUS, An experimental study of the global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **48**, 123–34 (1989).
15. D. SIPP, E. LAUGA & L. JACQUIN, Vortices in rotating systems : centrifugal, elliptic and hyperbolic type instabilities, *Phys. Fluids*, **11**, 3716–28 (1999).
16. A. STEGNER, T. PICHON & M. BEUNIER, Elliptical-inertial instability of rotating Karman streets, *Phys. Fluids*, **17**, 066602 (2005).
17. F. A. WALEFFE, On the three-dimensional instability of strained vortices, *Phys. Fluids*, **2**, 76–80 (1990).



# Étude théorique d'ondes de Rossby thermiques non linéaires en géométrie sphérique : influence du mode de chauffage

Lebranchu Yannick<sup>1</sup>, Plaut Emmanuel<sup>1</sup>, Simatev Radostin<sup>2</sup>, & Busse Friedrich<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LEMTA, INPL-UHP-CNRS, 2, avenue de la forêt de Haye, 54 516 Vandœuvre-lès-Nancy cédex

<sup>2</sup> Department of Mathematics, University of Glasgow, Glasgow G12 8QW, Royaume Uni

<sup>3</sup> Institute of Physics, University of Bayreuth, 95 440 Bayreuth, Allemagne

yannick.lebranchu@ensem.inpl-nancy.fr

**Résumé.** Les ondes de Rossby thermiques apparaissent par instabilités thermoconvectives dans le noyau liquide de planètes en rotation. Notre étude reposant sur des modèles quasi géostrophiques 2D et des modèles 3D, les premiers étant validés par rapport aux seconds, montre que le mode de chauffage de ce noyau, interne ou externe, peut modifier la nature de la bifurcation vers ces ondes.

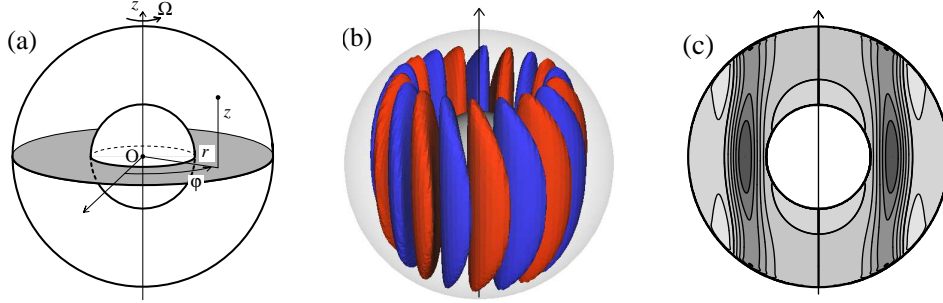
**Abstract.** Thermal Rossby waves appear by thermoconvective instabilities in the liquid core of rotating planets. Our study, which uses 2D quasigeostrophic models and 3D models, the latter being used to validate the formers, shows that the heating mode, internal or external, can modify the nature of the bifurcation towards these waves.

## 1 Introduction

Les ondes de Rossby thermiques constituent un exemple intéressant d'ondes apparaissant par instabilités thermoconvectives dans un noyau planétaire liquide, entre la graine centrale solide et chaude de rayon  $r_i$  et le manteau externe solide et relativement froid de rayon  $r_e$  (figure 1a). La rotation diurne de la planète à la vitesse angulaire  $\Omega$  crée des forces de Coriolis qui tendent à bidimensionaliser l'écoulement, d'où la structure colonnaire de ces ondes (figure 1b).

Des écoulements similaires à ceux engendrés par ces ondes ont des conséquences importantes, comme la génération du champ magnétique terrestre par effets magnétohydrodynamiques dans le cas de la Terre. Des modes moyens de vitesse ou « écoulements zonaux » résultant d'effets non linéaires (figure 1c) introduiraient une rotation différentielle dans le noyau qui jouerait un rôle important dans la dynamo par effet  $\Omega$  [1]. En l'absence d'effets magnétohydrodynamiques, malgré de nombreuses approximations, telles que l'usage de diffusivités turbulentes, les approximations de Boussinesq, etc..., les modèles 3D complets [2] ne permettent, du fait de leur lourdeur, qu'une exploration lente et partielle de l'espace des paramètres. En effet, cinq paramètres subsistent : le rapport des rayons  $\eta = r_i/r_e$  (fixé à 0.4 ici), le nombre de Prandtl  $P$  (que nous avons fixé à 0.1, 1 et 10), le nombre d'Ekman inverse  $E^{-1}$  (que nous faisons varier entre 500 et  $5 \cdot 10^7$  en 2D) et les deux nombres de Rayleigh  $R_i$  et  $R_e$  liés aux chauffages interne et externe (voir par exemple [2] pour une définition de ces paramètres). Le chauffage interne résulte de la désintégration d'éléments radioactifs dans le noyau, qui fournit une source d'énergie interne, et le chauffage externe de l'absence de tels éléments. Un modèle mixte serait pertinent pour le noyau terrestre [3].

La contrainte de Proudman-Taylor implique que l'écoulement près du seuil de convection doit être essentiellement 2D. [4] a ainsi proposé de développer des modèles plus légers que les modèles 3D, à savoir des modèles quasi géostrophiques 2D reposant sur une intégration par rapport à la coordonnée axiale. Ces modèles furent posés dans une géométrie si simplifiée, avec notamment une approximation de petit inter-rayon, que tous les modes de chauffage se confondaient. Une géométrie sphérique avec ses différents modes de chauffage fut considérée plus récemment [5,6,7,8,9]. [5,6,7] ne considèrent que le chauffage interne, alors que [8,9] considèrent seulement le chauffage externe. Nous présentons ici deux modèles quasi géostrophiques, en chauffage interne et externe, ainsi qu'une comparaison systématique à de nouveaux résultats 3D du code de thermoconvection de [2], y compris en régime faiblement non linéaire. Ceci représente une avancée par rapport à [5,6,7,8,9], qui n'ont présenté de telles comparaisons 2D/3D qu'en régime linéaire.



**Fig.1.** (a) : schéma de la planète tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  selon l'axe  $z$ , et des coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$ . (b) : surfaces d'isovaleurs de la vitesse radiale d'une onde de Rossby thermique calculée pour  $E^{-1} = 5000$ ,  $P = 1$ ,  $R_e = 0$  et  $R_i = 1.01R_{ic}$ . (c) : dans un plan méridien, niveaux de l'écoulement azimutal moyenné en azimut créé par effet non linéaire par cette onde.

## 2 Présentation des modèles

Les modèles 3D ont été présentés dans [2]; on utilise une version avec condition d'adhérence aux deux parois, pertinente pour des planètes de type tellurique. On utilise les mêmes unités d'adimensionnement que [2], par exemple l'inter-rayon  $d = r_i - r_e$  pour les distances, et le temps visqueux  $d^2/\nu$  pour les temps, avec  $\nu$  la diffusivité de vitesse. Ainsi  $E^{-1} = d^2\Omega/\nu$ . Notre modèle de vitesse quasi géostrophique

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z) = \mathbf{v}_e(r, \varphi) + \mathbf{v}_z(r, \varphi, z) \quad (1)$$

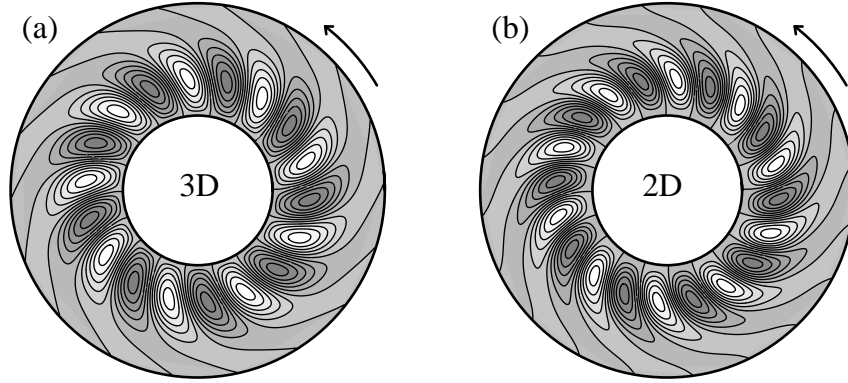
se décompose en une vitesse équatoriale  $\mathbf{v}_e(r, \varphi) = r^{-1}(\partial_\varphi\psi)\mathbf{e}_r - (\partial_r\psi)\mathbf{e}_\varphi$ , avec  $\psi$  la fonction courant, et une vitesse verticale  $\mathbf{v}_z(r, \varphi, z) = -(rz/L^2)v_r(r, \varphi)\mathbf{e}_z$  linéaire en  $z$  pour respecter la condition de non-pénétration du fluide au niveau des parois situées en  $z = \pm L$ , avec  $L = \sqrt{r_e^2 - r^2}$  la demi hauteur d'une colonne de fluide. L'équation de la vorticité axiale  $\zeta = -\Delta\psi$  s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t\zeta + \mathbf{v}_e \cdot \nabla\zeta - 2E^{-1} \partial_z v_z &= \Delta\zeta - \partial_\varphi\theta \\ \partial_t\zeta + \mathbf{v}_e \cdot \nabla\zeta + 2E^{-1} L^{-2}\partial_\varphi\psi &= \Delta\zeta - \partial_\varphi\theta \end{aligned} \quad (2)$$

avec  $\theta$  la perturbation en température, telle que le champ de température complet  $T$  soit de la forme  $T = T_s + \theta$ ,  $T_s$  étant la température en régime de conduction pure. Dans le cas du chauffage externe, contrairement à [8,9], nous ne calculons pas  $T_s$  à partir de l'équation de la chaleur considérée en 2 dimensions, i.e.  $\Delta_{2D}T_{s2D} = 0$ , mais travaillons sur l'équation de l'évolution de la perturbation de température  $\theta$  écrite en 3D après résolution de  $\Delta_{3D}T_{s3D} = 0$ . Ceci permet de s'affranchir des opérations d'ajustement entre  $T_{s2D}$  et  $T_{s3D}$  dépendant de l'inter-rayon, présentées dans le paragraphe 15 de [8]. L'équation de la chaleur que nous obtenons ainsi est

$$\partial_t\theta + \mathbf{v}_e \cdot \nabla\theta = \Delta\theta + \frac{2}{3}R_i\partial_\varphi\psi + R_e \frac{\eta}{(1-\eta)^3} \frac{\partial_\varphi\psi}{rL^2} \left[ \frac{1}{r} - (1-\eta) \frac{r}{L} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{L}{r}\right) \right]. \quad (3)$$

Ces équations sont résolues dans l'anneau équatorial  $r \in [r_i, r_e]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Chaque modèle possède les mêmes conditions limites thermiques, i.e. une perturbation en température nulle aux parois et deux types de conditions limites pour la perturbation de vitesse : soit glissement sans frottement au niveau de la paroi interne (en effet la moyenne axiale de la vitesse au niveau de la graine peut être non nulle, cf. la figure 1c) et adhérence au niveau de la paroi externe, soit adhérence aux deux parois. Par une méthode de Galerkin - résidus pondérés, on approche, sur le logiciel Mathematica, la solution par une base de polynômes de haut degré. On utilise des polynômes de Tchebychev modifiés pour respecter les conditions limites.



**Fig.2.** Dans le plan équatorial, pour  $E^{-1} = 5000$ ,  $P = 1$ ,  $R_e = 0$  et  $R_i = R_{ic}$ . (a) : niveaux de vitesse radiale obtenus par un modèle 3D. (b) : niveaux de vitesse radiale obtenus par le modèle 2D en condition d'adhérence en  $r_i$  et  $r_e$ . On observe dans les deux cas des ondes cellulaires davantage spiralées en 2D.

**Tab.1.** Comparaison des propriétés critiques 2D avec celles déduites des calculs 3D pour un nombre de Prandtl  $P = 1$  et différents modèles. CI : chauffage interne; CE : chauffage externe; AA : adhérence en  $r = r_i$  et  $r = r_e$ ; GA : glissement en  $r = r_i$  et adhérence en  $r = r_e$ . Les chiffres entre parenthèse indiquent l'erreur relative entre les modèles 2D et 3D.

$E^{-1}$	Quantité	3D CI	2D CI	AA	2D CI	GA	3D CE	2D CE	AA	2D CE	GA
500	$R_c$	$1.237 \cdot 10^4$	$1.007 \cdot 10^4$	(19%)	$0.9626 \cdot 10^4$	(22%)	$1.542 \cdot 10^4$	$1.543 \cdot 10^4$	(0%)	$1.342 \cdot 10^4$	(13%)
500	$m_c$	4	6	(50%)	5	(25%)	4	5	(25%)	5	(25%)
500	$\omega_c$	14.73	48.71	(230%)	45.33	(210%)	13.15	37.59	(190%)	37.25	(180%)
5000	$R_c$	$1.881 \cdot 10^5$	$1.552 \cdot 10^5$	(17%)	$1.513 \cdot 10^5$	(20%)	$1.773 \cdot 10^5$	$1.635 \cdot 10^5$	(7.8%)	$1.479 \cdot 10^5$	(17%)
5000	$m_c$	9	10	(11%)	10	(11%)	8	9	(12%)	8	(0%)
5000	$\omega_c$	104.3	199.6	(91%)	196.3	(88%)	85.65	160	(87%)	154.4	(80%)
50000	$R_c$	$3.71 \cdot 10^6$	$2.893 \cdot 10^6$	(22%)	$2.875 \cdot 10^6$	(22%)	$2.629 \cdot 10^6$	$2.306 \cdot 10^6$	(12%)	$2.16 \cdot 10^6$	(18%)
50000	$m_c$	17	19	(12%)	18	(5.9%)	15	17	(13%)	16	(6.7%)
50000	$\omega_c$	545.9	863.3	(58%)	839.1	(54%)	457	708.9	(55%)	695.8	(52%)

### 3 Ondes de Rossby thermiques linéaires

Une analyse de stabilité des équations (2) et (3) est effectuée numériquement en calculant des modes normaux de la forme

$$\psi = \psi_1 = \Psi(r) \exp [i (m\varphi - \omega t)] , \quad \theta = \theta_1 = \Theta(r) \exp [i (m\varphi - \omega t)] , \quad (4)$$

où  $m$  est le nombre d'onde,  $\omega$  la fréquence angulaire des ondes. Ces ondes apparaissent par instabilité du noyau purement conductif chauffé progressivement, pour un nombre de Rayleigh  $R_i > R_{ic}$  et  $R_e = 0$  en chauffage interne, ou  $R_e > R_{ec}$  et  $R_i = 0$  en chauffage externe.

Les paramètres critiques, nombres de Rayleigh critiques  $R_{ic}$  en chauffage interne et  $R_{ec}$  en chauffage externe, nombre d'onde critique  $m_c$ , provenant de nos calculs 2D s'approchent de ceux obtenus en 3D quand le nombre d'Ekman inverse augmente (tableau 1), et ce plus rapidement que la fréquence angulaire critique  $\omega_c$ . On a un accord semi-quantitatif 2D/3D sur les nombres de Rayleigh critiques  $R_{ic}$  et  $R_{ec}$  et les nombres d'ondes critiques associés dès que  $E^{-1} \geq 5000$ , et sur les fréquences angulaires critiques  $\omega_c$  seulement à partir de  $E^{-1} \geq 50000$ . La convection se développe au voisinage de la graine (pour  $r$  proche de  $r_i$ ) en formant des cellules spiralées (figure 2). Les deux premières lois asymptotiques de Busse

$$m_c \propto E^{-1/3} , \quad R_c \propto E^{-4/3} , \quad \omega_c \propto E^{-2/3} \quad (5)$$

sont bien vérifiées quand  $E^{-1} \rightarrow +\infty$  pour  $\eta = 0.4$ , et la troisième de surcroît si on fixe  $\eta = 0.35$ .

## 4 Ondes de Rossby thermiques non linéaires

### 4.1 Comparaison 2D/3D pour $E^{-1} \leq 50000$ .

Un calcul faiblement non linéaire systématique nous donne les paramètres non linéaires de la bifurcation pour une large gamme de valeurs des paramètres de contrôle. Pour cela, on calcule une solution faiblement non linéaire valable pour de faibles amplitudes et près du seuil

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= (A\mathbf{v}_1(r) + c.c.) + |A|^2 \mathbf{V}_0(r) + (A^2\mathbf{v}_2(r)f^2 + c.c.) \\ \theta &= (A\theta_1(r) + c.c.) + |A|^2 \Theta_0(r) + (A^2\theta_2(r)f^2 + c.c.) \end{aligned} \quad (6)$$

mode 1                      mode 0                      mode 2

avec  $f = \exp[i(m_c\varphi - \omega_c t)]$  et  $\mathbf{v}_1$  la vitesse équatoriale de l'onde primaire qui dérive de la fonction courant  $\psi_1$ . Les modes 2 de vitesse et de température de cette décomposition sont des corrections calculées en résolvant de manière quasi statique les équations (2) et (3) à l'ordre  $A^2$ . L'écoulement moyen  $\mathbf{V}_0 = V_0 \mathbf{e}_\varphi$  (figure 3) modifié par effet non linéaire quadratique, appelé écoulement zonal (ou mode 0), est calculé en résolvant de manière quasi statique la moyenne azimutale de la composante azimutale de l'équation de Navier-Stokes à l'ordre  $|A|^2$ ,

$$0 = \Delta V_0 - r^{-2}V_0 - f_E V_0 + (\operatorname{div} \bar{\tau})_\varphi \quad \text{où} \quad (\operatorname{div} \bar{\tau})_\varphi = \partial_r (\tau_{r\varphi}) + 2r^{-1} \tau_{r\varphi} \quad (7)$$

avec  $f_E = E^{-1/2} r_e^{1/2} L^{-3/2}$  le coefficient du friction d'Ekman dû une recirculation au niveau des couches limites correspondantes [8],  $\tau_{r\varphi} = \langle (r^{-1}(\partial_\varphi \psi_1) + c.c.)((\partial_r \psi_1) + c.c.) \rangle_\varphi$  la contrainte de Reynolds et  $\langle \cdot \rangle_\varphi$  la moyenne sur un tour. Résoudre l'équation (7) au lieu de l'équation (2) pour le mode 0 permet d'assurer la nullité du gradient de pression azimutal moyen. Le mode 0 de température  $\Theta_0$  est quand à lui calculé par résolution de l'équation de la chaleur (3) à l'ordre  $|A|^2$ .

A l'ordre  $|A|^2 A$ , un calcul des termes non linéaires de nombre d'onde  $m_c$  résonants dans les équations (2) et (3), projetés sur le mode adjoint critique  $(\psi_a, \theta_a)$ , nous permet d'accéder aux coefficients non linéaires de l'équation d'amplitude

$$\tau_0 \partial_t A = (1 + is)\epsilon A - g(1 + ic)|A|^2 A \quad (8)$$

avec  $\tau_0$  le temps caractéristique de l'instabilité,  $\epsilon = R_i/R_{ic} - 1$  en chauffage interne,  $R_e/R_{ec} - 1$  en chauffage externe, l'écart au seuil réduit,  $s$  le coefficient de décalage fréquentiel linéaire,  $g$  le coefficient de saturation ou d'antisaturation selon son signe, et  $c$  le coefficient de décalage fréquentiel non linéaire. On connaît ainsi l'amplitude réelle de l'écoulement zonal pour un écart au seuil  $\epsilon = 1\%$  qui est reliée à l'amplitude  $|A| = \sqrt{\frac{\epsilon}{g}}$  des modes de la première équation de (6). On déduit également la fréquence de l'onde critique saturée qui est

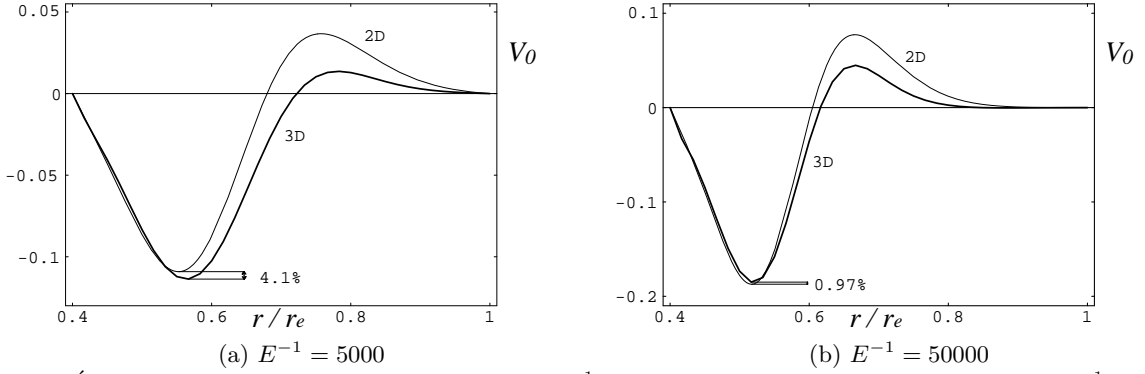
$$\omega = \omega_c - \frac{c-s}{\tau_0} \epsilon = \omega_c - \epsilon \omega', \quad (9)$$

avec  $\omega'$  le décalage fréquentiel total.

Les données non linéaires sont résumées dans le tableau 2. Le rapport qui caractérise l'importance de l'écoulement zonal par rapport à l'intensité de la convection primaire obtenu en 2D est assez proche de celui obtenu en 3D. Les écoulements zonaux eux mêmes ont une bonne forme (cf. la figure 3). On remarque que les ondes ralentissent fortement en régime non linéaire ( $\omega' \approx 0.5$ ). Par contre, même si les calculs 3D et 2D nous fournissent ce même signe pour le décalage fréquentiel en chauffage interne et en chauffage externe à haut Ekman inverse, un désaccord subsiste sur le plan quantitatif. Au final, en comparant toutes nos propriétés linéaires et non linéaires au 3D, on s'aperçoit que les conditions limites changent peu nos résultats et que les modèles 2D en chauffage interne approchent mieux les modèles 3D en chauffage interne que les modèles 2D en chauffage externe n'approchent les modèles 3D en chauffage externe.

**Tab.2.** Comparaison des propriétés des ondes non linéaires 2D avec celles des ondes non linéaires 3D mesurées dans le plan équatorial pour un nombre de Prandtl  $P = 1$  avec un écart au seuil de 1% et différents modèles. Les abréviations utilisées ont été définies dans la légende du tableau 1. La première quantité  $\max(v_r)$  représente la vigueur de la convection primaire, la seconde le minimum de l'écoulement zonal, la troisième le rapport des deux premières, et la dernière le décalage fréquentiel total.

$E^{-1}$	Quantité	3D CI	2D CI	AA	2D CI	GA	3D CE	2D CE	AA	2D CE	GA
500	$\max(v_r)$	+1.366	+2.094	(53%)	+2.05	(50%)	1.42	1.85	(30%)	1.87	(31%)
500	$\min(V_0)$	-0.060	-0.072	(22%)	-0.093	(57%)	-0.068	-0.058	(15%)	-0.0674	(1.3%)
500	$\min(V_0)/\max(v_r)$	-0.0436	-0.0346	(21%)	-0.046	(4.5%)	-0.048	-0.031	(35%)	-0.0361	(25%)
500	$\omega'$	+0.997	+0.044	(96%)	+0.051	(95%)	+1.68	-0.053	(100%)	+0.073	(96%)
5000	$\max(v_r)$	+2.576	+3.044	(18%)	+2.97	(15%)	2.52	3.18	(26%)	3.18	(26%)
5000	$\min(V_0)$	-0.114	-0.109	(4.1%)	-0.112	(1.7%)	-0.103	-0.087	(16%)	-0.104	(1.3%)
5000	$\min(V_0)/\max(v_r)$	-0.0442	-0.0359	(19%)	-0.0377	(15%)	-0.041	-0.0273	(33%)	-0.0329	(20%)
5000	$\omega'$	+0.368	+0.0135	(96%)	+0.049	(87%)	+0.508	-0.0139	(100%)	+0.0422	(92%)
50000	$\max(v_r)$	+4.291	+5.08	(18%)	+5.04	(17%)	4.89	5.88	(20%)	5.87	(20%)
50000	$\min(V_0)$	-0.185	-0.187	(0.97%)	-0.197	(6.3%)	-0.186	-0.158	(15%)	-0.186	(0.34%)
50000	$\min(V_0)/\max(v_r)$	-0.0432	-0.0368	(15%)	-0.0391	(9.5%)	-0.038	-0.0268	(29%)	-0.0317	(16%)
50000	$\omega'$	+0.3172	+0.455	(43%)	+0.461	(45%)	+0.254	+0.05	(80%)	+0.0974	(62%)



**Fig.3.** Écoulement zonal pour  $P = 1$ , à gauche pour  $E^{-1} = 5000$  (cas de la figure 1c) et à droite pour  $E^{-1} = 50000$ , en chauffage interne avec des conditions limites d'adhérence et un écart au seuil de 1%. En trait épais, l'écoulement zonal déduit des calculs 3D ; en trait fin, celui calculé en 2D.

## 4.2 Résultats 2D pour $E^{-1} > 50000$

En faisant varier les paramètres de contrôle, on s'aperçoit que la rétroaction de l'écoulement zonal entre autre rend la bifurcation sous-critique ( $g < 0$ ) à haut nombre d'Ekman inverse en chauffage interne ( $E^{-1} \geq E_c^{-1} = 10^5$  pour  $P = 0.1$ ,  $E^{-1} \geq E_c^{-1} = 5 \cdot 10^5$  pour  $P = 1$ , et  $E^{-1} \geq E_c^{-1} = 10^6$  pour  $P = 10$ ) et de surcroît pour des valeurs de Prandtl plus petites en chauffage externe ( $E^{-1} \geq E_c^{-1} = 3.7 \cdot 10^5$  pour  $P = 0.1$ ). Ce dernier résultat contredit l'interprétation suggérée par [9] liant la sous-criticité à l'existence d'un désaccord entre les Rayleigh critiques prédits par les théories asymptotiques locale et globale, car ce désaccord n'existe pas en chauffage externe [5,10]. Pour tenter de comprendre ces changements de nature de la bifurcation vers les ondes de Rossby thermiques, on décompose alors de façon physique le coefficient de saturation en huit contributions afin de déterminer lesquelles sont les plus négatives :

$$\begin{aligned}
 g = & \underbrace{\operatorname{Re} \langle \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \zeta(\mathbf{v}_1) \psi_a^* \rangle_{r,\varphi}}_{G_{01}^v} + \operatorname{Re} \langle \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \zeta(\mathbf{V}_0) \psi_a^* \rangle_{r,\varphi} + \operatorname{Re} \langle \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \theta_1 \theta_a^* \rangle_{r,\varphi} + \underbrace{\operatorname{Re} \langle \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \theta_0 \theta_a^* \rangle_{r,\varphi}}_{G_{10}^t} \\
 & + \operatorname{Re} \langle \mathbf{v}_1^* \cdot \nabla \zeta(\mathbf{v}_2) \psi_a^* \rangle_{r,\varphi} + \operatorname{Re} \langle \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \zeta(\mathbf{v}_1^*) \psi_a^* \rangle_{r,\varphi} + \operatorname{Re} \langle \mathbf{v}_1^* \cdot \nabla \theta_2 \theta_a^* \rangle_{r,\varphi} + \operatorname{Re} \langle \mathbf{v}_2 \cdot \nabla \theta_1^* \theta_a^* \rangle_{r,\varphi}
 \end{aligned} \quad (10)$$

avec  $\langle \cdot \rangle_{r,\varphi}$  la moyenne dans l'anneau équatorial, \* le conjugué, et  $\zeta(\mathbf{v}_e)$  la vorticité axiale correspondant à la vitesse équatoriale  $\mathbf{v}_e$ . On s'aperçoit que les harmoniques  $\mathbf{v}_2$  et  $\theta_2$  jouent un rôle mineur dans le

processus de saturation ou d'antisaturation des ondes, car les contributions correspondantes sont petites par rapport à celles des modes 0,  $\mathbf{V}_0$  et  $\Theta_0$ . On détermine les contributions dominantes pour la plupart des cas (en faisant varier le nombre de Prandtl et ce pour les quatre modèles) : une contribution hydrodynamique  $G_{01}^v$  et une contribution thermique  $G_{10}^t$  indiquées équation (10). Le terme de couplage  $G_{01}^v$  entre le mode 0 de vitesse et l'onde primaire est presque toujours négatif à bas nombre de Prandtl et haut nombre Ekman inverse. Au contraire, le coefficient  $G_{10}^t$  présente un comportement très différent en chauffage interne et externe : alors qu'il est très négatif en chauffage interne à bas nombre d'Ekman, il reste toujours positif en chauffage externe à bas nombre d'Ekman. Une analyse physique des mécanismes prépondérants pour chaque modèle est en cours mais les contributions dominantes au coefficient de saturation ou d'antisaturation  $g$  font intervenir trois facteurs (équation 10) : un mode 0 ( $\mathbf{V}_0$  ou  $\Theta_0$ ), un mode 1 ( $\mathbf{v}_1$  ou  $\theta_1$ ) et son adjoint ( $\psi_a$  ou  $\theta_a$ ). Ces deux derniers modes possèdent chacun une phase « rapide » qui est déjà difficile à interpréter. Au bilan, on obtient pour chaque intégrand une fonction qui oscille « rapidement » dans  $[r_i, r_e]$ , et il est difficile d'expliquer physiquement le signe de l'intégrale.

## 5 Discussion

La table 2 est la première « validation » 2D/3D des modèles quasi géostrophiques en régime non linéaire. Inclure dans les modèles 2D de calcul de l'onde primaire des effets de pompage d'Ekman comme [9] devrait permettre d'atteindre un accord semi-quantitatif concernant les caractéristiques dynamiques des ondes (fréquences et décalage fréquentiel). De tels modèles 2D quasi géostrophiques validés pourraient aider au développement de modèles dynamo quasi-géostrophiques du type de ceux de [11], mais en thermoconvection.

## Références

1. A. KAGEYAMA & T. SATO, Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo, *Phys. Rev. E*, **55**, 4617 (1997).
2. R. SIMITEV & F. H. BUSSE, Patterns of convection in rotating spherical shells, *New J. Phys.*, **5**, 1 (2003).
3. K. M. LEE, G. STEINLE-NEUMANN & R. JEANLOZ, Ab-initio high-pressure alloying of iron and potassium : implications for the Earth's core, *Geophys. Res. Lett.*, **31**, 11603 (2004).
4. F. H. BUSSE, Thermal instabilities in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.*, **44**, 441 (1970).
5. S. COLE, Nonlinear rapidly rotating spherical convection, *PhD Thesis*, (2004).
6. V. MORIN & E. DORMY, Time dependent  $\beta$ -convection in rapidly rotating spherical shells, *Phys. Fluids*, **16**, 1603 (2004).
7. V. MORIN & E. DORMY, Dissipation mechanisms for convection in rapidly rotating spheres and the formation of banded structures, *Phys. Fluids*, **18**, 68014 (2006).
8. J. AUBERT, N. GILLET & P. CARDIN, Quasi-geostrophic models of convection in rotating spherical shells, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **4**, 1052 (2003).
9. N. GILLET & C. A. JONES, The quasi-geostrophic model for rapidly rotating spherical convection outside the tangent cylinder, *J. Fluid Mech.*, **554**, 343 (2006).
10. C. A. JONES, A. M. SOWARD & A. I. MUSSA, The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere, *J. Fluid Mech.*, **405**, 157 (2000).
11. N. SCHAEFFER & P. CARDIN, Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic Prandtl number *Earth Planet. Sci. Lett.*, **245**, 595 (2006).

# Instabilités secondaires et structures cellulaires de canaux ioniques

M. Leonetti<sup>1</sup>, M. Georgelin<sup>1</sup>, M. Jaeger<sup>2</sup> & F. Homblé<sup>3</sup>

<sup>1</sup> IRPHE, Aix-Marseille Université, CNRS, Technopôle de Château-Gombert, BP 146, 13384 Marseille Cedex 13 France

<sup>2</sup> MSNM-GP, Aix-Marseille Université, Technopôle de Château-Gombert, BP, Marseille Cedex France

<sup>3</sup> Structure et Fonction des Membranes Biologiques, Centre de Biologie Structurale et Bioinformatique Campus Plaine (CP206/2), B-1050 Bruxelles, Belgique

leonetti@irphe.univ-mrs.fr

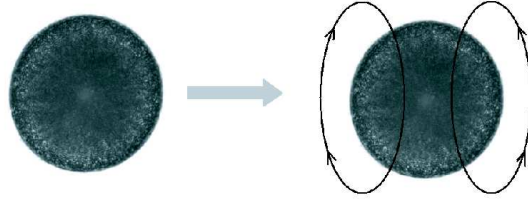
**Résumé.** De nombreuses cellules ou organismes sont traversés par des circulations ioniques stationnaires. En particulier, leur émergence autour des algues verte Chara corallina et brune Fucus est le résultat d'une auto-organisation. Dans la famille des fucoides, la structure est une circulation dipolaire (Figure 1) d'ions calcium et potassium qui brise la symétrie sphérique initiale. La structure est labile et se réoriente si un gradient est appliqué qu'il soit d'origine électrique, chimique, lumineux ou bien encore hydrodynamique. Un mécanisme proposé dans la littérature tire son origine dans le couplage entre le courant produit par les protéines membranaires et leurs mobilités électrophorétiques. Ce modèle a été étudié essentiellement à une dimension par la théorie du câble. Nous avons développé un modèle adapté en géométrie circulaire ou bien sphérique. L'étude numérique et analytique a mis en évidence plusieurs instabilités secondaires : un mode de type  $2\lambda \rightarrow \lambda$ , l'autre type Eckhaus, une brisure de parité et une oscillation globale. Notre étude a plus porté sur l'instabilité de dérive que nous avons caractérisée. Dans le cas sous-critique, cette instabilité pourrait permettre de transférer de l'information le long de cellules ou d'organismes.

**Abstract.** Numerous stationary ionic circulations exist around biological cells such as alga, roots, fungi... Particularly, their emergence in the freshwater algae Chara corallina and the marine brown algae Fucus result from self-organization. In fucoids, the structure is a dipolar circulation (Figure 1) of calcium and potassium ions that breaks the initial spherical symmetry. The structure is also labile and reorients in any cue (electrical, chemical, hydrodynamical and ). One mechanism proposed in the literature is based on a coupling between the current through membrane channels and their electrophoretic mobility. This model has been studied in one dimension using the limited cable theory. We have developed a more suitable model and applied it to a circular geometry. The numerical and analytical studies of the stability of the primary structure in such a confined geometry has provided four secondary instabilities : a  $2\lambda \rightarrow \lambda$  mode, an Eckhaus-like, an instability by parity breaking and a global oscillation of the channels's density. This paper is focused on the drift instability which is characterized. In the sub-critical case, this instability provides a mean to transfer some information along cells or organisms.

## 1 Introduction

De nombreuses cellules ou organismes sont traversés par des circulations ioniques stationnaires. Elles jouent un rôle important dans divers phénomènes tels que la polarisation, l'acquisition de nutriments, la croissance, la morphogenèse et quelques fois, en motilité. S'il est parfois difficile de découpler ces courants macroscopiques d'inhomogénéités intracellulaires ou de processus complexes de croissance cellulaire (couplage forme-courants), il existe au moins deux "prototypes" relativement bien caractérisés dans la littérature : l'algue marine brune Fucus ou Pelvetia (Fig. 1) et l'algue verte d'eau douce Chara corallina. Le fucus est un organisme modèle du développement embryonnaire des plantes. Durant les premières, la circulation dipolaire d'ions (Fig. 1) reste labile et se réoriente en présence d'un gradient externe dont l'origine peut être très variée : chimique, lumière, hydrodynamique ou bien encore champ électrique... En revanche, en absence de gradients appliqués, le site d'entrée du sperme fixe l'axe de la brisure de symétrie. Le système s'auto-organise donc en fonction des perturbations de son environnement après avoir été

activé par l'entrée du sperme. Une première hypothèse est que la polymérisation locale de l'actine résulte de l'entrée de calcium [1,2].



**Fig.1.** Fucus. Elles ont été récoltées sur les côtes bretonnes et flamandes. Initialement, l'oeuf est à symétrie sphérique. Les organelles sont uniformément distribués et aucune asymétrie n'a été détectée. Trente minutes après la fertilisation, la brisure de symétrie est patente par l'observation de deux phénomènes : l'apparition d'une circulation dipolaire d'ions calcium et potassium (droite) et un site de polymérisation de l'actine qui coïncide avec l'influx maximal de calcium.

## 2 Modèle de l'instabilité d'auto-agrégation de protéines membranaires

Dans ce modèle, nous reprenons deux hypothèses classiques de la théorie du câble :

a) Les concentrations ioniques ne sont pas affectées par les flux transmembranaires. Cette hypothèse permet de linéariser le flux du au champ électrique local et finalement, de ne considérer que la loi d'Ohm dans les volumes intracellulaire et extracellulaire. Dans le modèle le plus simple, la dynamique du système ne dépend que du potentiel électrique de membrane  $V$  :

$$V = (\phi_i - \phi_e)_{memb} \quad (1)$$

où  $\phi$  est le potentiel électrostatique (origine à l'infini).  $i, e$  désignent les compartiments intracellulaire et extracellulaire et  $memb$  que la valeur est prise sur la membrane.

b) Le courant qui traverse la membrane  $I_m$  via les pompes, canaux et co-transporteurs donne lieu à une variation du courant capacitif  $C_m \partial V / \partial t$  et à la génération éventuelle d'un courant Ohmique macroscopique dans les volumes extracellulaire et intracellulaire  $\sigma_{i,e} \nabla \phi_{i,e}$ . La bicouche lipidique joue le rôle de capacité dans le système.

En réalité, le courant capacitif n'est que le résultat d'une variation de la charge diffuse (couche de Debye) de part et d'autre de la membrane. L'expansion spatiale normale à la membrane de la densité de charges ioniques est fournie par la longueur de Debye de l'ordre de quelques nanomètres qui est bien inférieure à la taille cellulaire. Ainsi, dans le volume, à l'extérieur de ces couches, il est légitime de considérer valide l'hypothèse d'électroneutralité. Le potentiel électrostatique satisfait alors l'équation de Laplace :

$$\Delta \phi_{i,e} = 0 \quad (2)$$

Les conditions limites associées se déduisent de la condition de continuité du courant électrique et de la condition de champ nul à l'infini :

$$(\nabla \phi_e)_\infty = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$I_m = \pm \sigma_{i,e} (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi_{i,e})_{memb} + C_m \frac{\partial V}{\partial t}_{memb} \quad (4)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface membranaire tourné vers l'extérieur.  $\sigma_{i,e}$  désigne la conductivité du milieu.  $+$  ( $-$ ) pour la condition intérieure (extérieure). Il y a donc continuité du courant macroscopique :  $\sigma_i (\nabla \phi_i)_{memb} = \sigma_e (\nabla \phi_e)_{memb}$ . La physique du problème étudié est donc dans le choix du



courant transmembranaire  $I_m$ . Rappelons que le cas d'ions diffusant de manière différente est beaucoup plus complexe et nécessite un modèle plus approprié.

Deux instabilités sont susceptibles d'expliquer la formation de courants ioniques transcellulaires dans le zygote (oeuf fécondé) du Fucus. Ici, nous présentons les résultats obtenus dans le cas de l'instabilité d'auto-agrégation de protéines membranaires, la plus simple mathématiquement à étudier analytiquement. Ce modèle a été initialement suggéré par deux biologistes Jaffe et Nuccitelli [3]. Ils indiquent que les flux dipolaires calciques dans le Fucus doivent résulter de la migration électrophorétique de canaux calciques le long de la membrane sous l'action du champ électrique présent. Les auteurs n'expliquent donc pas pourquoi cette circulation existe. Larter et Ortoleva ont les premiers décrits cette instabilité [4]. Toutefois, le modèle utilisé (électrodifusif) et donc les résultats quantitatifs souffrent de quelques inconsistances. Zimmermann et Fromherz ont très correctement décrit le processus en utilisant le modèle du câble et donc nécessairement dans une géométrie unidimensionnelle [5]. Ici, les résultats sont étendus à  $2D$  et les instabilités secondaires sont étudiés afin d'émettre des pistes pour expliquer la très grande labilité de la circulation dans le Fucus. Le courant transmembranaire  $I_m$  est du à la présence d'un courant de pompes immobiles et de canaux mobiles de densité  $n$  dont l'activité varie linéairement avec le potentiel de membrane.

$$I_m = I_p + GV + \Lambda n(V - E) \quad (5)$$

où  $I_p$  est le courant de pompe et  $G$  la conductance de l'ensemble des protéines immobiles (elle prend aussi en compte les fuites).  $\Lambda$  est la conductance d'un canal mobile tandis que  $E$  est la force électromotrice caractérisant l'ion transféré par ce type de canaux (ici, le calcium). Dans le cadre de ce modèle qui correspond à celui de Fromherz-Zimmerman hormis la géométrie, les canaux sont mobiles sous l'action d'un champ électrique :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_p \nabla_s^2 n + \frac{eD_p}{k_B T} \nabla_s \cdot [n(z_{pi} \nabla_s \phi_i + z_{pe} \nabla_s \phi_e)] - \frac{n - \bar{n}}{\tau} \quad (6)$$

où  $D_p$  est le coefficient de diffusion latérale de la protéine membranaire considérée,  $z_{pi,pe}$  ses valences interne et externe et  $\nabla_s$  l'opérateur le long de la surface membranaire.  $\tau$  caractérise la cinétique de réaction du canal avec son environnement (cytosquelette par exemple) autour de sa densité moyenne  $\bar{n}$ .

### 3 Instabilité d'auto-agrégation de protéines membranaires

La cellule considérée est circulaire de rayon  $R$ . Notre étude ne porte que sur le mode dipolaire et son harmonique, le mode quadrupolaire. La stabilité de l'état homogène  $(n, \phi_i, \phi_e) = (\bar{n}, V_0, 0)$  est étudiée en introduisant une perturbation proportionnelle à  $e^{\omega t + im\theta}$ .  $V_0$  et  $\bar{n}$  satisfont  $I_m(\bar{n}, V_0) = 0$ . La relation de dispersion fournit la variation du taux de croissance  $\omega$  de l'instabilité :

$$\omega = -\frac{1}{\tau} - \frac{D_p}{R^2} m^2 + \frac{D_p}{R^2} m^2 \frac{\tilde{\mu}}{m + \frac{RG}{\sigma} + \frac{R\Lambda\bar{n}}{\sigma}} \quad (7)$$

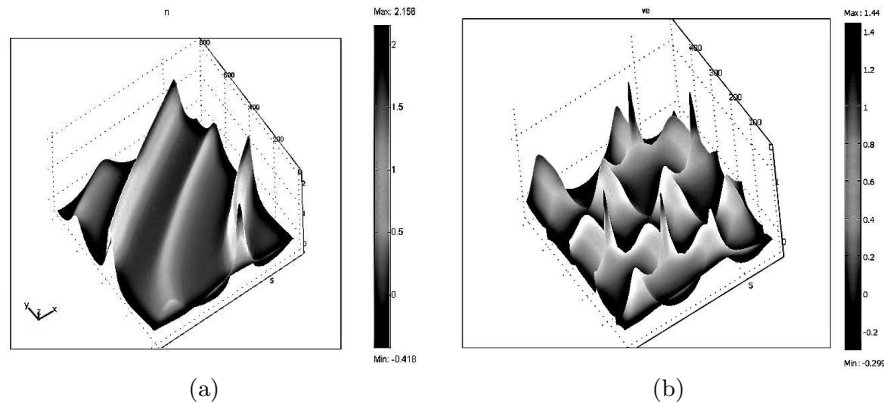
où  $\sigma_{i,e} = \sigma$  pour simplifier et  $\tilde{\mu} = (e/k_B T) D_p \Lambda \bar{n} (V_0 - E)(z_i - z_e)/R\sigma$ . Une condition nécessaire d'instabilité est  $\tilde{\mu} > 0$ . C'est à dire que le champ électrique produit par une fluctuation de densité de canaux doit induire leur électrophorèse amplifiant la perturbation initiale. Pour cela, elles doivent être chargées correctement. L'Eq. 7 montre que les courbes neutres des modes dipolaire et quadrupolaire se coupent, un indice fort pour la présence d'instabilités secondaires.

Dans le voisinage du point défini au paragraphe précédent, une troncation à l'ordre 3 des amplitudes a permis d'obtenir un système de deux ODE couplées des amplitudes des modes dipolaires  $A_1$  et quadrupolaire  $A_2$  :

$$\frac{dA_1}{dt} = \omega(1)A_1 - \tilde{\mu}b_1\bar{A}_1A_2 - \tilde{\mu}(c_1|A_1|^2 + d_1|A_2|^2)A_1 \quad (8)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \omega(2)A_2 + \tilde{\mu}b_2A_1^2 - \tilde{\mu}(c_2|A_1|^2 + d_2|A_2|^2)A_2 \quad (9)$$

où les coefficients ont été calculés :  $b_1 = 25/294$ ,  $b_2 = 25/21$ ,  $c_1 = -55/588$ ,  $c_2 = -233/1764$ ,  $d_1 = 85/1372$ ,  $d_2 = 115/882$ ,  $\omega(1) = -(D_p/R^2 + 1/\tau) + 5\tilde{\mu}D_p/7R^2$  and  $\omega(2) = [-(4D_p/R^2 + 1/\tau) + 10\tilde{\mu}D_p/6R^2]$ . Le signe des coefficients de  $\bar{A}_1A_2$  et  $A_1^2$  sont opposés indiquant la présence d'une instabilité de brisure de parité ou dérive (Fig. 1). L'analyse numérique a confirmé cette étude et a validé la valeur obtenue pour le seuil. D'autre part, en augmentant le paramètre de contrôle, une nouvelle instabilité est apparue : une oscillation de la densité de protéines. Comme le montre le diagramme spatiotemporel, cette instabilité secondaire ne correspond pas à une onde stationnaire, instabilité secondaire classique dans les systèmes étendus.



**Fig.2.** Diagrammes spatiotemporels : x-angle polaire de la cellule circulaire, y-temps et z-densité de canaux. Gauche : Instabilité de brisure de parité. Initialement, le potentiel de membrane est instable. Une structure dipolaire se forme. Le second pic moins intense correspond à la présence de son harmonique. En augmentant le courant transporté par les protéines mobiles, la structure se déstabilise. Le profil du potentiel de membrane devient asymétrique et la structure se met à tourner. C'est une instabilité classique de dérive que l'on rencontre dans de nombreux systèmes physiques. Droite : OSC. Les modes dipolaire et quadrupolaire sont successivement instables par deux mécanismes d'origine différente.

## 4 Conclusion

La structure primaire produite par l'instabilité d'auto-agrégation de protéines membranaires est instable vis à vis de quatre instabilités secondaires : un mode  $\lambda \rightarrow 2\lambda$ , une autre de type Eckhaus, l'instabilité de dérive et une oscillation globale de la densité [6]. L'instabilité de dérive a été caractérisée. Dans le cas sous-critique, elle peut être un moyen de transférer de l'information.

## Références

1. K. R. ROBINSON & L. F. JAFFE, Polarizing fucoid eggs drive a calcium current through themselves, *Science*, **187**, 70-72 (1975).
2. K. R. ROBINSON *et al.*, Symmetry breaking in the zygotes of the fucoid algae : controverses and recent progress, *Curr. Top. Dev. Biol.*, **44**, 101-125 (1999).
3. L. F. JAFFE, Electrophoresis along cell membranes, *Nature*, 600-602 (1977).
4. R. LARTER & P. ORTOLEVA, A study of instability to electrical symmetry breaking in unicellular systems, *J. Theor. Biol.*, **96**, 175-200 (1982).
5. P. FROMHERZ & W. ZIMMERMANN, Stable spatially periodic patterns of ion channels in biomembranes, *Phys. Rev. E*, **51**, R1659-R1662 (1995).
6. M. LEONETTI, J. NUEBLER & F. HOMBLÉ, Parity-breaking bifurcation and global oscillation in patterns of ion channels, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 218101 (2006).

# Reconstruction phénoménologique de systèmes complexes forcés

Delphine Lejri & Jean-Marc Malamsoma

Laboratoire Géomatériaux DGCB-URA CNRS 1652  
 ENTPE, rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin cedex  
 lejri@entpe.fr

**Résumé.** La modélisation phénoménologique de systèmes dynamiques complexes a pour but de reconstruire la dynamique d'un système, à partir d'une série chronologique chaotique scalaire. Smirnov et Bezruchkov ont proposé en 2001 une méthode adaptée aux systèmes non autonomes, que nous avons mis en oeuvre pour une série issue du système d'Ondaçuhu et al., comprenant un terme de forçage périodique ou quasi-périodique. D'autre part, la méthode a été éprouvée vis-à-vis de la coexistence d'attracteurs chaotiques.

**Abstract.** Different methods of global nonlinear modeling have been developed for last two decades. Smirnov and Bezruchkov suggested in 2001 an approach to reconstructing the dynamic of nonautonomous systems. We applied this method to scalar time series coming from Ondaçuhu and al.'s system. We obtained ordinary differential equations that successfully describe the harmonically and the quasi-periodically driven systems. Moreover, we observed the efficiency of this approach when it comes to coexistence of chaotic attractors.

## 1 Présentation de la méthode de reconstruction de systèmes non autonomes

La modélisation phénoménologique de systèmes dynamiques complexes est un sujet de recherche qui suscite toujours beaucoup d'intérêt. Elle a pour but de reconstruire la dynamique d'un système, à partir de l'analyse d'une série chronologique chaotique scalaire, à laquelle on a souvent accès par la mesure, dans des domaines scientifiques très variés.

Pour pouvoir mettre en oeuvre ces techniques, cette série doit avant tout subir un prétraitement, qui consiste essentiellement à plonger la série scalaire dans un espace de dimension  $D$ , après un éventuel débruitage. Cet espace dit « de plongement », a une dimension, telle qu'il peut contenir la dynamique complexe du système étudié [1], ainsi caractérisée par  $D$  variables obtenues à partir des dérivées successives de la série ou grâce aux décalages. Nous nous placerons ici, dans le système de coordonnées dérivées qui est plus adapté à la reconstruction de systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Les systèmes non autonomes sont caractérisés par la présence explicite du temps au sein des équations. L'approche classique pour ce type de systèmes consiste à s'affranchir de cette dépendance explicite en temps, afin de se ramener à un système autonome. Ceci conduit nécessairement à augmenter le nombre d'équations du système, ce qui en terme de reconstruction revient à un nombre de variables  $D$  plus grand. En pratique, augmenter la dimension  $D$  n'est pas souhaitable, car cela génère des erreurs supplémentaires (dérivation, bruit) et aussi augmente la complexité du modèle à déterminer. C'est pourquoi, il est préférable de conserver une dimension  $D$  et se rapprocher du cas de la reconstruction de système autonome, qui peut-être décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = s_2 \\ \dot{s}_2 = s_3 \\ \dot{s}_3 = s_4 \\ \vdots \\ \dot{s}_D = \mathcal{F}(s_1, s_2, \dots, s_D) \end{cases} \quad (1)$$

où  $s_1$  est une observable et  $s_2 \dots s_D$ , les dérivées successives de  $s_1$ .

Les techniques de reconstruction consistent alors à déterminer la fonction  $\mathcal{F}$ , en projetant le vecteur  $\dot{s}_D$  sur une base de fonctions des vecteurs  $(s_1 \dots s_D)$ . Cette projection peut se faire sur une base de polynômes, de fractions rationnelles, d'exponentielles ou autres. Nous nous placerons dans le cas où  $\mathcal{F}$  est une base de polynômes de degré  $M$  et la projection sur la base de polynômes se fait à l'aide de la méthode de Gram-Schmidt Modifiée [2].

Smirnov et Bezruchkov [3] ont proposé en 2001 une méthode adaptée aux systèmes non autonomes. L'idée consiste alors à projeter la série dérivée  $\dot{s}_D$  sur une base étendue, qui permettrait d'inclure dans la fonction  $\mathcal{F}$ , la dépendance explicite en temps, due à la présence du terme de forçage. Dans un premier temps, on se propose par exemple de décomposer chaque terme de la fonction  $\mathcal{F}$  en 3 termes : un terme constant, un terme en  $\cos \omega t$ , et un terme en  $\sin \omega t$ , ce qui permet de traiter les systèmes avec un terme de forçage périodique.

Cette méthode a l'avantage d'être assez facile à mettre en oeuvre à partir du cas autonome. Par contre, elle a pour inconvénient d'introduire une voire plusieurs inconnues supplémentaires : la (ou les) pulsation(s) du terme de forçage.

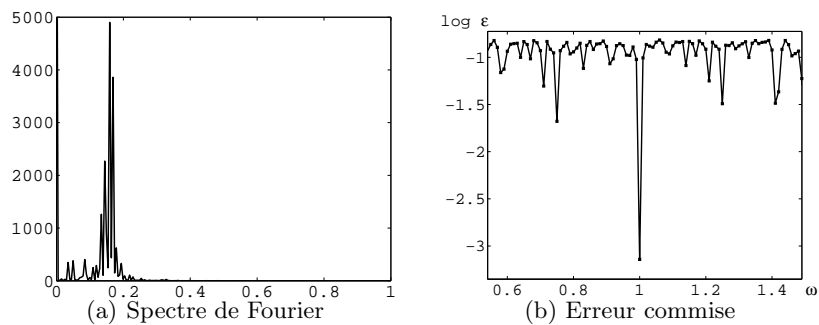
### Détermination de la pulsation

Supposons que l'on n'ait à priori aucun renseignement sur la nature fréquentielle de ce terme de forçage. La série étudiée est une série chaotique, au contenu fréquentiel complexe. Ainsi, les techniques classiques d'analyse spectrale, telles que le spectre de Fourier, ne sont pas pertinentes.

En effet, si on prend l'exemple du spectre présenté sur la figure(1), on est incapable d'isoler la fréquence associée au terme de forçage parmi les fréquences qui caractérisent l'attracteur chaotique. Toutefois, ce spectre nous indique un ensemble de valeurs que l'on peut envisager de tester. Faute de mieux, la détermination de la pulsation se fait donc à postériori. Ainsi, on effectue la reconstruction pour différentes valeurs de  $\omega$  susceptibles de convenir. On quantifie alors la qualité de chacun des modèles obtenus, afin de pouvoir sélectionner la pulsation qui conduit à la meilleure approximation du système.

Le critère de comparaison des modèles obtenus s'appuie sur l'erreur commise en estimant la série dérivée à l'aide des polynômes de la base qui ont été sélectionnés par la méthode. Ainsi, l'erreur commise au sens des moindres carrés, a pour expression :

$$\epsilon(\omega) = \sqrt{\frac{1}{L-T} \sum_{i=1}^L [s_D(i) - \tilde{\mathcal{F}}_\omega(s_1(i), s_2(i), \dots, s_D(i))]^2}$$



**Fig.1.** Détermination de la pulsation

## 2 Application au cas du système issu de la mécanique des fluides

### 2.1 Cas d'un forçage périodique

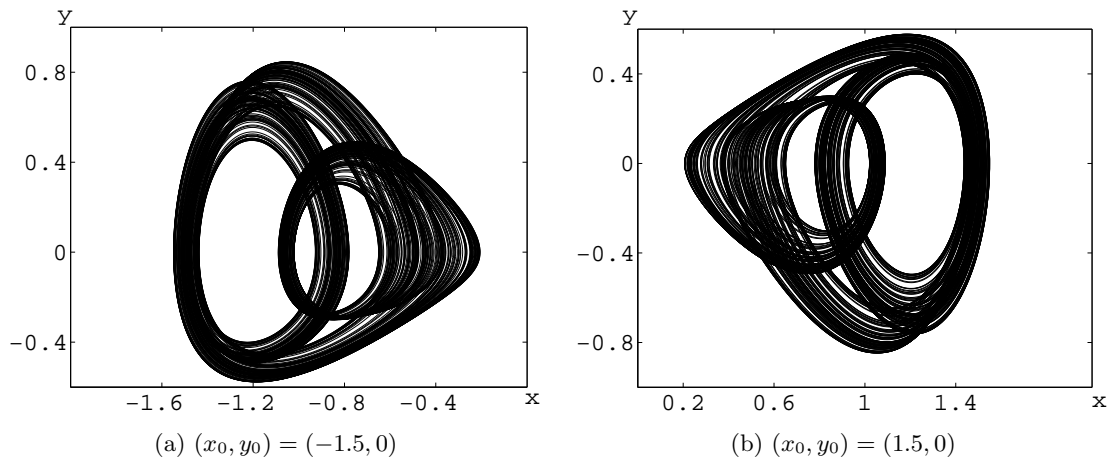
Nous avons mis en oeuvre cette technique de modélisation, en utilisant une série chronologique numérique, obtenue par intégration du système d'Ondarçuhu et al. [4]. Ce système forcé périodiquement (Eq. 2) avec la pulsation  $\omega$ , modélise un aspect de l'expérience dite de Bénard-Marangoni et sa dynamique est caractérisée par la présence de deux attracteurs chaotiques symétriques qui coexistent.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 + \epsilon \cos \omega t)x + \nu(1 + \epsilon \cos \omega t)y + x^2y - x^3 \end{cases} \quad (2)$$

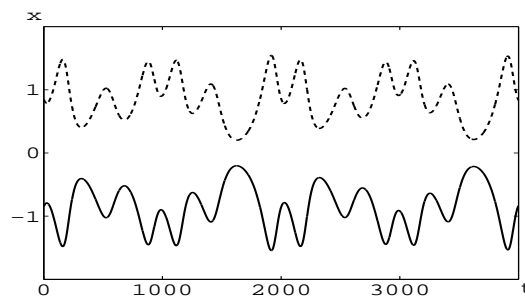
Le système a été étudié pour les valeurs de paramètres suivantes :

$$(\mu, \nu, \epsilon, \omega) = (1.0434, -1.0, 0.45, 0.4).$$

Pour ces valeurs, on se trouve en présence de deux attracteurs chaotiques symétriques l'un de l'autre (Fig. 2).



**Fig.2.** Les attracteurs sont obtenus pour les conditions initiales respectives.

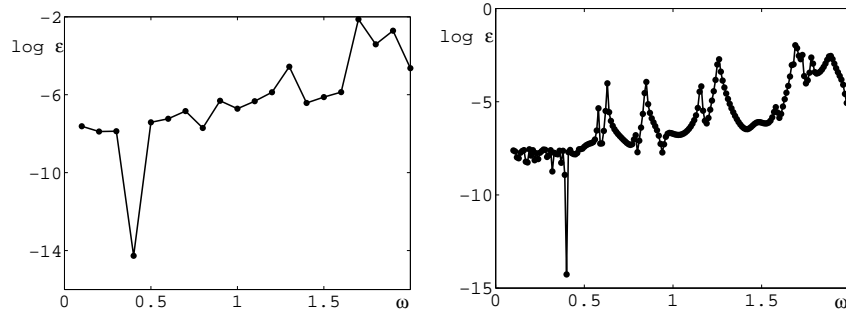


**Fig.3.** Les séries utilisées pour la reconstruction issues de la variable  $x$  du système original.

#### *Détermination de la pulsation*

La première étape de la reconstruction de l'attracteur chaotique consiste à déterminer la pulsation du

terme de forçage. On observe très nettement que l'erreur est minimale pour  $\omega = 0.4$ . D'ailleurs, si on diminue encore le pas, l'erreur est toujours minimale pour cette valeur de  $\omega$ .



**Fig.4.** Représentations de l'erreur commise  $\epsilon(\omega)$  lors de la reconstruction avec un balayage sur la valeur de  $\omega$  respectivement de 0.1 et 0.01

*Reconstruction à partir d'une série issue de l'attracteur 1*

terme	système reconstruit	système original	erreur relative
$X$	$1.043395e + 000$	1.0434	$4.7920e - 006$
$\dot{X}$	$-9.999903e - 001$	-1	$9.7000e - 006$
$X^3$	$-9.999955e - 001$	-1	$4.5000e - 006$
$\dot{X}X^2$	$1.000007e + 000$	1	$7.0000e - 006$
$X \cos(0.4t)$	$4.695278e - 001$	0.46953	$4.6855e - 006$
$\dot{X} \cos(0.4t)$	$-4.499907e - 001$	-0.45	$2.0667e - 005$
$\ddot{X}X \cos(0.4t)$	$9.048722e - 006$	0	$9.0487e - 006$
$\dot{X}X$	$1.600213e - 005$	0	$1.6002e - 005$

Ce tableau présente les termes obtenus lors de la reconstruction. En intégrant ces équations, on obtient l'attracteur chaotique 1, malgré la présence de deux termes parasites, qui ne sont pas présents dans les équations du système original (Eq.2). D'autre part, en changeant les conditions initiales, on parvient à reconstruire son symétrique, l'attracteur 2. Ainsi, la dynamique du système reconstruit reproduit la coexistence d'attracteurs chaotiques présente dans le système original.

Bien évidemment, si on néglige les deux termes parasites, les résultats obtenus sont les mêmes.

*Reconstruction à partir d'une série issue de l'attracteur 2*

terme	système reconstruit	système original	erreur relative
$X$	$1.043395e + 000$	1.0434	$4.7920e - 006$
$\dot{X}$	$-9.999932e - 001$	-1	$6.8000e - 006$
$X^3$	$-9.999953e - 001$	-1	$4.7000e - 006$
$\dot{X}X^2$	$1.000003e + 000$	1	$3.0000e - 006$
$X \cos(0.4t)$	$4.695279e - 001$	0.46953	$4.4726e - 006$
$\dot{X} \cos(0.4t)$	$-4.499937e - 001$	-0.45	$1.4000e - 005$
$\ddot{X}X \cos(0.4t)$	$-5.598544e - 006$	0	$-5.5985e - 006$
$\dot{X}X$	$-9.682801e - 006$	0	$-9.6828e - 006$

Le système reconstruit, obtenu à partir d'une série issue de l'attracteur 2, comporte exactement les mêmes termes. Ce système, lorsqu'il est intégré, conduit à l'attracteur chaotique 1 pour  $(x_0, y_0) = (-1.5, 0)$  et à l'attracteur 2 pour  $(x_0, y_0) = (1.5, 0)$ .

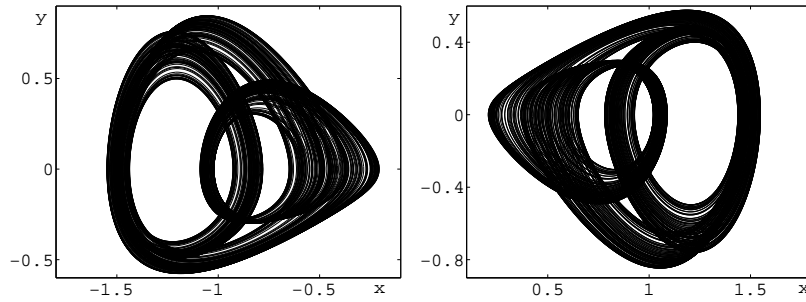


Fig.5. Attracteurs reconstruits à partir d'une série issue de l'attracteur 1

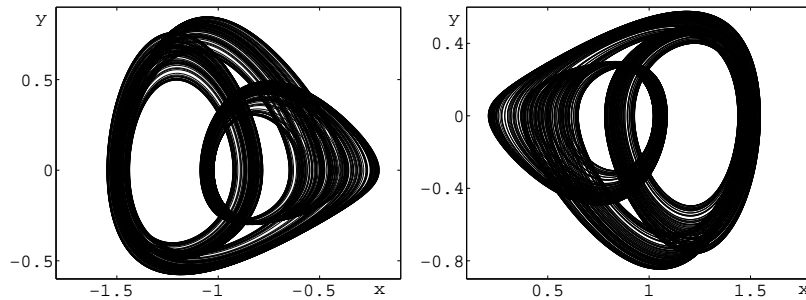


Fig.6. Attracteurs reconstruits à partir d'une série issue de l'attracteur 2

## 2.2 Cas d'un forçage quasi-périodique

Nous avons également traité le cas où le système est forcé quasipériodiquement.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 + \epsilon_1 \cos \omega_1 t)x + \nu(1 + \epsilon_2 \cos \omega_2 t)y + x^2y - x^3 \end{cases}$$

Le système a été étudié pour les valeurs de paramètres suivants :

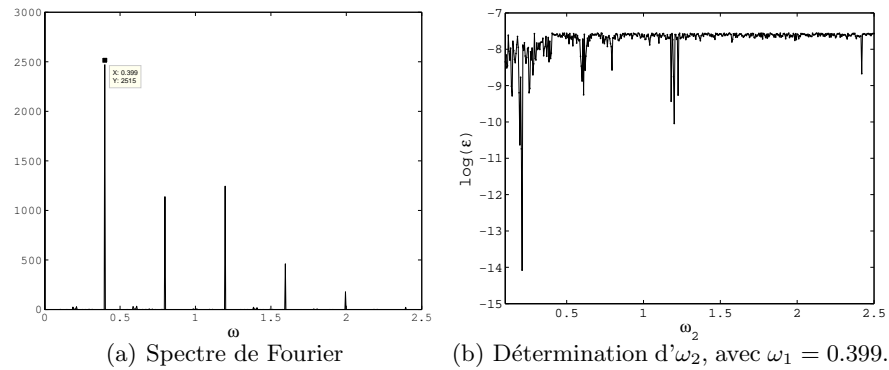
$$(\mu, \nu, \epsilon_1, \omega_1, \epsilon_2, \omega_2) = (1.0434, -1.0, 0.45, 0.399, 0.01, 0.21)$$

### Détermination de la pulsation

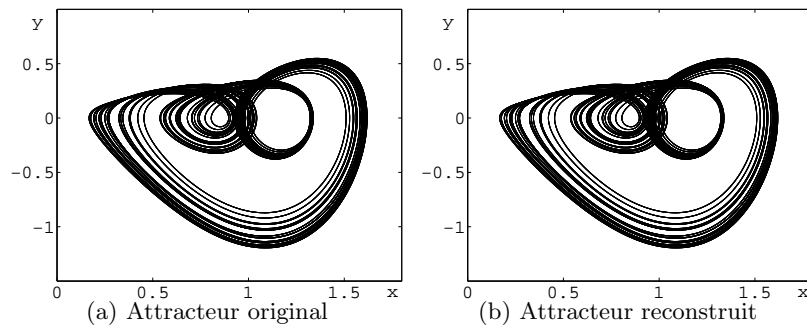
Cette première étape indispensable pour pouvoir effectuer la reconstruction du système, s'avère plus difficile dans le cas d'un forçage quasi-périodique, car il y a deux pulsations inconnues à déterminer. Pour cela, on utilise le spectre de Fourier, qui donne un point de départ à notre recherche. Dans le cas considéré, on observe une valeur remarquable :  $\omega = 0.399$ . En fixant  $\omega_1 = 0.399$ , on applique la méthode du cas périodique pour  $\omega_2$ . On obtient le graphe de la figure 7, lorsqu'on fait varier  $\omega_2$ .

Reconstruction avec  $\omega_1 = 0.399$  et  $\omega_2 = 0.21$

terme	système reconstruit	système original	erreur relative
$X$	$1.043047e + 000$	1.0434	$3.3832e - 004$
$\dot{X}$	$-9.998304e - 001$	-1	$1.6960e - 004$
$X^3$	$-9.996612e - 001$	-1	$3.3880e - 004$
$\dot{X}X^2$	$9.998308e - 001$	1	$1.6920e - 004$
$X \cos(0.399t)$	$4.693704e - 001$	0.46953	$3.3991e - 004$
$\dot{X} \cos(0.21t)$	$-9.998229e - 003$	-0.001	$1.7710e - 004$
$\cos(0.399t)$	$4.718024e - 007$	0	$4.7180e - 007$
$\dot{X}X^2 \cos(0.399t)$	$-3.011196e - 007$	0	$3.0112e - 007$



**Fig.7.** Détermination de la pulsation dans le cas quasi-périodique



**Fig.8.** Comparaison des diagrammes de phases  $(x, \dot{x})$ .

D'autre part, il se trouve que pour ces valeurs de paramètres, l'attracteur chaotique coexiste avec son symétrique. On obtient alors les mêmes résultats en terme de reconstruction concernant cette coexistence que dans le cas du forçage périodique.

## Conclusion

Les résultats présentés dans cet article montrent que la technique développée pour les systèmes non autonomes est robuste. En effet, elle permet non seulement de traiter les cas de forçage périodique et quasi-périodique, mais aussi de reconstruire la dynamique complète du système considéré, dans le cas où deux attracteurs coexistent. Nous avons éprouvé la méthode sur des systèmes numériques. Il s'agit à présent de traiter des séries bruitées numériquement, voire des séries expérimentales, afin d'observer comment la méthode se comporte.

## Références

1. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381 (1981).
2. S. CHEN, S.A. BILLINGS & W. LUO, Orthogonal least squares methods and their application to nonlinear system identification, *Int.J.Control*, **50** (5), 1873-1896 (1989).
3. BORIS P. BEZRUCHKO & DMITRY A. SMIRNOV, Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series, *Phys. Rev. E*, **63** (1), 016207 (2001).
4. T. ONDARÇUHU, G.B. MINDLIN, H.L. MANCINI & C. PÉREZ GARCIA, Dynamical patterns in Bénard-Marangoni Convection in a square container *Phys. Rev. Lett.*, **70** (25), 3892-3895 (1993).



# Influence d'un gradient de température dans le système de Couette-Taylor

V. Lepiller, R. Guillerm, A. Prigent, & I. Mutabazi

LMPG, Université du Havre, 53 rue de Prony, BP 540, 76058 Le Havre cedex  
[valerie.lepillier@univ-lehavre.fr](mailto:valerie.lepillier@univ-lehavre.fr)

**Résumé.** Cette étude expérimentale porte sur le couplage des instabilités hydrodynamiques et thermiques dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient de température. Un liquide est confiné entre deux cylindres coaxiaux verticaux maintenus à des températures différentes. Le rapport d'aspect est de 114 et le rapport des rayons est de 0,8. Les paramètres de contrôle physiques sont le nombre de Grashof lié à l'écart de température et le nombre de Taylor lié à la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Le nombre de Grashof est fixé et le nombre de Taylor est augmenté progressivement. A partir d'une valeur critique du nombre de Taylor, cet écoulement de base se déstabilise et un écoulement spiralé apparaît dans le système. Pour  $Gr < 1165$ , le motif est présent dans la partie inférieure du système et sa taille augmente avec le nombre de Taylor. Pour  $Gr > 1165$ , le motif spiralé apparaît au centre et remplit la quasi totalité du système. Dès le seuil, le motif possède une modulation basse fréquence de son amplitude.

**Abstract.** We investigate experimentally the influence of a radial temperature gradient in a vertical rotating cylindrical annulus. The geometrical parameters are fixed with aspect ratio and radii ratio respectively equal to 114 and 0.8. The physical parameters are the Grashof number related to the radial temperature gradient and the Taylor number related to the angular velocity. After imposing a Grashof number, the convection cell is destabilized by inertial forces due to the increasing of the rotation of the inner cylinder. Above a critical value of the control parameter, the Taylor number, a spiral pattern occurs giving rise to a finite extent propagating pattern. For  $Gr < 1165$ , the pattern occurs at the bottom of the system and for  $Gr > 1165$ , the pattern occurs in the middle of the system with a modulation.

## 1 Introduction

Nous nous intéressons aux effets induits par un gradient radial de température sur les modes d'instabilité du système de Couette-Taylor avec seul le cylindre intérieur en rotation. Ce type de configurations est rencontré dans de nombreuses applications industrielles comme les systèmes de refroidissement des machines tournantes ou des composants électroniques [1]. Il est également présent dans des modèles géophysiques expliquant la circulation de fluides dans le manteau supérieur ou dans l'atmosphère [2]. La stabilité d'un fluide confiné entre deux cylindres coaxiaux verticaux avec un gradient radial de température a fait l'objet de nombreuses études numériques, théoriques et expérimentales [3,4,5]. Des études théoriques et numériques [6,7] se sont intéressées à l'ajout de la rotation pour mieux comprendre le couplage entre la force centrifuge et le couple de forces induit par la stratification radiale de la masse volumique. Toutefois, peu d'études expérimentales [8,9,10] se sont intéressées au problème du système de Couette-Taylor couplé avec un gradient de température. Ces études se sont limitées à une visualisation de l'écoulement et peu de données quantitatives en ont été extraites. Dans ce qui suit nous décrirons ces différents motifs observés et en déduirons les propriétés de l'écoulement en fonction de deux paramètres de contrôle, le nombre de Taylor  $Ta$ , lié à la vitesse de rotation du cylindre intérieur et le nombre de Grashof  $Gr$ , lié au gradient radial de température. Le nombre de Taylor  $Ta = \Omega ad/\nu\sqrt{d/a}$  est défini comme le rapport du temps caractéristique de diffusion visqueuse  $\tau_\nu = d^2/\nu$  sur le temps caractéristique de diffusion centrifuge  $\tau_c = 1/\Omega\sqrt{d/a}$ . Le nombre de Grashof  $Gr = g\alpha\Delta T d^3/\nu^2$  est défini comme le rapport du temps caractéristique de diffusion visqueuse  $\tau_\nu$  au carré sur le temps de la poussée d'Archimède au carré  $\tau_A^2 = (g\alpha\Delta T d)/\nu$ . Snyder et Karlsson [8] ont observé un motif spiralé suite à l'ajout d'un

gradient radial de température. Leur gamme de nombres de Grashof est peu étendue s'étalant de -365 à 365.

## 2 Dispositif expérimental

Le système se compose de trois cylindres coaxiaux verticaux de même longueur  $H = 57$  cm : un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon  $a = 2$  cm, un cylindre extérieur en verre transparent de rayon  $b = 2,5$  cm et un cylindre d'isolation en verre transparent de rayon  $c = 5$  cm (Fig. 1). Le liquide étudié, l'eau déminéralisée, se trouve confiné dans l'espace entre les deux premiers cylindres dont la distance est  $d = b - a = 0,5$  cm. Ainsi le rapport d'aspect est  $\Gamma = H/d = 114$  et le rapport des rayons est  $\eta = a/b = 0,8$ . Le cylindre intérieur et l'espace compris entre les cylindres extérieur et d'isolation peuvent être maintenus à des températures différentes respectivement  $T_1$  et  $T_2$  grâce à deux circulations d'eau provenant de deux cryo-thermostats. Un gradient radial de température  $\delta T = \mu * (T_1 - T_2) = \mu * \Delta T$  est ainsi créé dans l'entrefer, où le coefficient  $\mu$  dépend de la conductivité des matériaux des cylindres et de l'eau. Dans notre expérience,  $\mu$  vaut 0,61. Afin de visualiser l'écoulement, on ajoute 2 % de Kalliroscope AQ-1000 [11], qui est une suspension de 1-2 % de plaquettes réfléchissantes de dimensions  $30 \mu\text{m} \times 6 \mu\text{m} \times 0,07 \mu\text{m}$ . Deux miroirs plans entourent le dispositif expérimental pour permettre une visualisation complète de l'écoulement dont nous enregistrons une hauteur de 32 cm à l'aide d'une caméra 2D [12,13]. Un faisceau monochromatique issu du laser He-Ne ( $\lambda = 638$  nm) est transformé par une lentille cylindrique en une nappe plane verticale perpendiculaire à l'axe des cylindres. L'intersection de cette nappe avec l'entrefer permet de visualiser une section droite verticale de l'écoulement. Une caméra CCD linéaire de 2048 pixels enregistre, à intervalles de temps réguliers, un signal de distribution de l'intensité lumineuse le long d'une ligne verticale de la section. Le signal est représenté sous forme de 256 niveaux de gris. Les lignes ainsi enregistrées sont disposées les unes à la suite des autres et forment un diagramme spatio-temporel (Fig. 2).

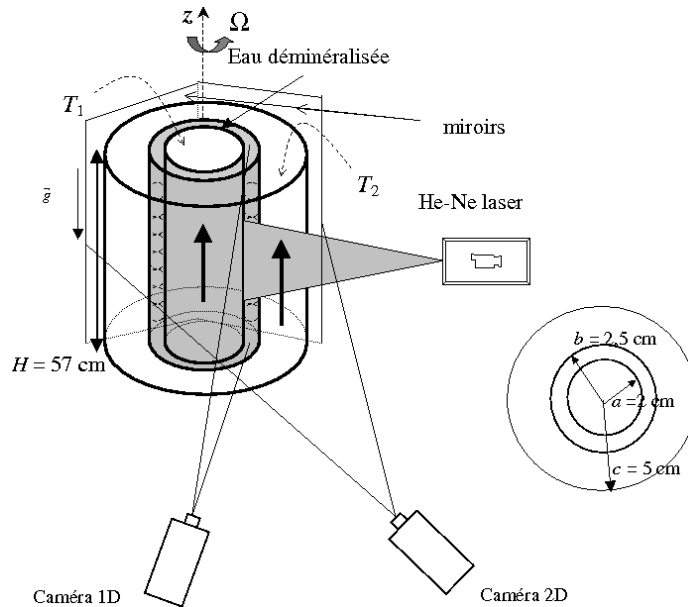
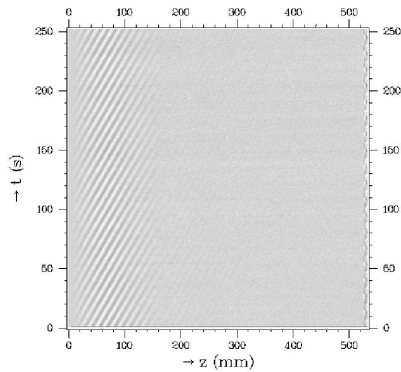
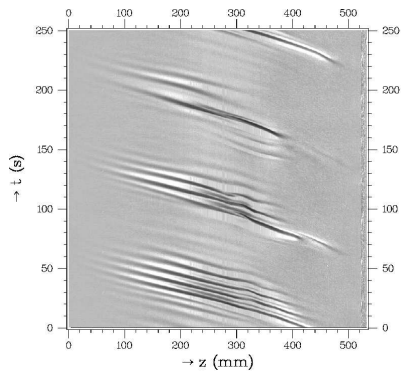


Fig.1. Schéma du dispositif expérimental.

(a)  $Ta_c = 28$  et  $Gr = -500$ (b)  $Ta_c = 12.5$  et  $Gr = 4350$ **Fig.2.** Diagrammes spatio-temporels du motif.(a)  $Ta_c = 28$  et  $Gr = -500$  (b)  $Ta_c = 12.5$  et  $Gr = 4350$ **Fig.3.** Photos du motif.

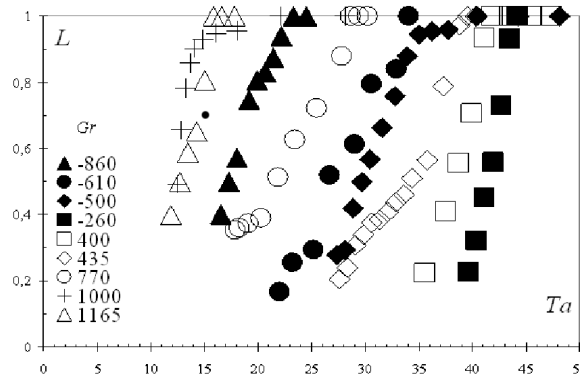
### 3 Protocole expérimental

Nous étudions le mécanisme de déstabilisation de l'écoulement de base faisant intervenir la stratification radiale du moment cinétique et de la masse volumique. Dans cette perspective, nous imposons au départ la même température aux deux bains thermostatés. Puis, nous créons un écart radial de température constant avec une température du cylindre extérieur  $T_2 = 30$  °C. Nous augmentons progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Près du seuil du motif, cette vitesse est augmentée par pas de 1 mHz. Ainsi seul un paramètre de contrôle, le nombre de Taylor, varie tandis que le nombre de Grashof est fixé.

## 4 Résultats

### 4.1 $Gr < 1165$

Deux types de motifs ont été observés en fonction de l'écart de température. Lorsque nous appliquons un faible nombre de Grashof  $Gr < 1165$ , un motif spiralé apparaît dans la partie inférieure du système à partir d'une valeur critique du nombre de Taylor. Aucun rouleau d'Eckman n'a été observé aux bords inférieur et supérieur du système. Les figures 2 et 3(a) correspondent respectivement à un diagramme spatio-temporel et à une photo représentant le motif (un quart de la circonférence du système) pour  $Gr = -500$  et  $Ta_c = 28$ . L'écoulement axial de la cellule de convection générée par la différence de température supprime la stationnarité des rouleaux de Taylor, première instabilité dans le cas isotherme. La taille du motif augmente avec le nombre de Taylor jusqu'à atteindre la taille du système. La figure 4 représente la taille du motif adimensionnée par la hauteur du système pour différents nombres de Grashof.



**Fig.4.** Variation de la taille du motif adimensionnée avec la taille du système en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Grashof.

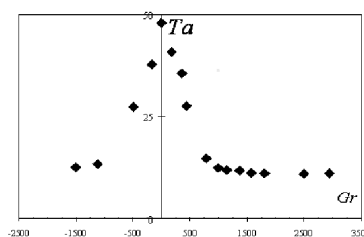
#### 4.2 $Gr > 1165$

Pour des nombres de Grashof plus élevés, le motif apparaissant au seuil se compose d'une spirale modulée présente déjà dans la quasi totalité du système. Une petite augmentation du nombre de Taylor suffit à provoquer le remplissage du motif dans toute la cavité annulaire. Les figures 2 et 3(b) représentent un diagramme spatio-temporel et une photo représentant le motif (un quart de la circonférence du système) pour  $Gr = 4350$  et  $Ta_c = 12, 5$ .

#### 4.3 Caractéristiques des motifs

La figure 5 représente la variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Grashof. On constate une diminution de  $Ta_c$  puis une stagnation pour les grands nombres de Grashof. Cette différence de comportement du nombre de Taylor correspond aux deux motifs rencontrés au seuil.

Dans les deux situations observées, nous avons constaté que le sens de propagation de la spirale dépend uniquement du nombre de Grashof, c'est-à-dire du gradient radial de température. Par contre, le sens d'inclinaison de la spirale par rapport à l'horizontale dépend du signe du produit entre le nombre de Grashof et le nombre de Taylor [7].



**Fig.5.** Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Grashof.

Pour de faibles nombres de Grashof, le motif est caractérisé par une seule et unique fréquence et un seul nombre d'onde.

Pour les nombres de Grashof élevés, le motif devient modulé dans le temps. Sur les spectres de puissance temporels, une basse fréquence apparaît. La figure 6 représente la variation de la fréquence en fonction de Taylor pour différents nombres de Grashof. Nous avons observé l'augmentation de la fréquence de modulation  $f_{mod}$  avec le nombre de Taylor suivant la relation :  $f_{mod} = 0,0365Ta - 0,0601$ .

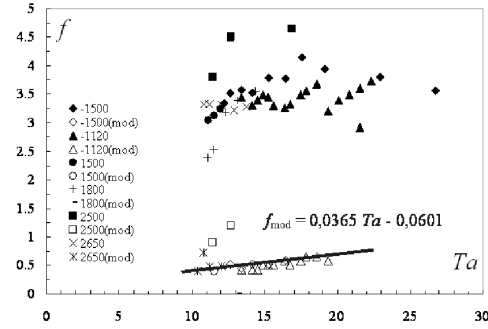


Fig.6. Variation de la fréquence du motif en fonction du nombre de Taylor pour différents nombres de Grashof.

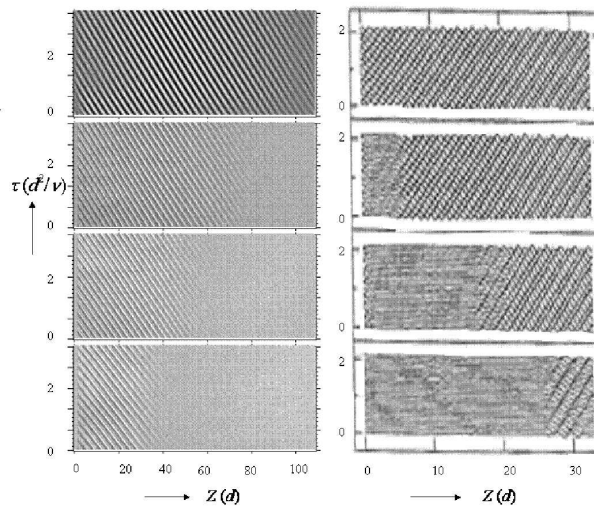
## 5 Discussion

Le système étudié peut être rapproché du système de Couette-Taylor avec écoulement axial. En effet, l'ajout d'un gradient radial de température induit l'apparition d'un écoulement axial : ascendant le long de la paroi chauffée et descendant le long de la paroi refroidie. Dans le cas d'un système de Couette-Taylor avec écoulement axial, la première instabilité est axisymétrique sous forme de rouleaux de Taylor propagatifs. Babcock [14] a observé un motif de rouleaux de Taylor propagatifs près de la sortie et a supposé que l'entrée est génératrice de bruit. Or nous avons observé expérimentalement la présence d'un motif très proche du leur dans la partie inférieure du système. Les diagrammes spatio-temporels (Fig.7) représentent la croissance du motif spiralé, obtenu pour un nombre de Grashof  $Gr = 770$ , le long de la direction axiale pour différentes valeurs du paramètre de contrôle  $\epsilon$ .  $\epsilon$  correspond au nombre de Taylor réduit, écrit comme  $\epsilon = \Omega - \Omega_c / \Omega_c$ , où  $\Omega_c$  représente la vitesse de rotation du cylindre intérieur pour la première instabilité dans le cas isotherme. La taille du motif augmente avec  $\epsilon$ . Ainsi ces comportements sont similaires à ceux rencontrés dans l'écoulement de Couette-Taylor axial par Babcock [14]. Ils en ont déduit que lorsque la taille du motif croît, l'instabilité est de nature convective. Le motif devient absolument instable lorsqu'il est présent dans tout le dispositif.

Pour des écarts de températures plus élevés, l'écoulement axial généré ne peut plus être considéré comme un bruit. L'écoulement de base se compose à la fois d'un écoulement de Couette circulaire et d'un écoulement barocline :  $\mathbf{V}_b = V_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + W(r)\mathbf{e}_z$ . La stabilité des écoulements centrifuges peut être en général expliquée par le critère de stabilité de Rayleigh, basé sur le déséquilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression centripète égal et opposé dans un écoulement non visqueux. On peut généraliser le critère de Rayleigh aux écoulements centrifuges avec un gradient radial de température en ajoutant une partie thermique  $\Phi_{th}$  au discriminant de Rayleigh  $\Phi_0(r) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} [rv(r)]^2$  qui mesure la stratification du moment cinétique dans la direction radiale. Le discriminant thermique s'écrit sous la forme :  $\Phi_{th} = -\alpha(T(r) - T_0)\Phi_0(r) - \alpha \frac{dT}{dr} \frac{V^2}{r}$ . L'étude du signe permet de déterminer la stabilité du système. Le discriminant généralisé avec une très faible contribution thermique est négatif. La force centrifuge domine le gradient de pression et éloigne la particule de sa position d'équilibre, l'écoulement est déstabilisé.

## 6 Conclusion

Nous avons montré que lorsqu'un gradient radial de température est appliqué à l'écoulement circulaire de Couette, l'écoulement laminaire de base se déstabilise. Des vortex spiralés apparaissent près du bord inférieur du dispositif via une bifurcation supercritique pour  $Gr < 1165$ . Ce type de comportement est analogue au système de Couette Taylor avec un faible écoulement axial. Pour  $Gr > 1165$ , des vortex apparaissent dans presque tout le dispositif via une bifurcation sous-critique.



**Fig.7.** A gauche : Diagrammes spatio-temporels obtenus pour  $Gr = 770$  et  $\epsilon = -0,61$ ;  $\epsilon = -0,53$ ;  $\epsilon = -0,46$ ;  $\epsilon = -0,37$ . A droite : Diagrammes spatio-temporels obtenus dans l'étude de Couette-Taylor avec écoulement axial.

## Références

1. F. KREITH, *Convection Heat Transfer in Rotating Systems*, in *Advances in Heat Transfer* 5, Academic Press New-York, pp. 129-251, (1968).
2. M. AUER, F.H. BUSSE & E. GANGLER, Instabilities of flows between differentially rotating coaxial cylinders in the presence of a radial temperature gradient, *Eur. J. Mechanics B*, **15**, 605 (1996).
3. I.G. CHOI & S.A. KORPELA, Stability of conduction regime of natural convection in a tall vertical annulus, *J. Fluid Mech.*, **99**, 725-738 (1980).
4. A. BAHLOUL, I. MUTABAZI & A. AMBARI, Codimension 2 points in the flow inside a cylindrical annulus with a radial temperature gradient, *Eur. Phys. J. AP*, **9**, 253-264 (2000).
5. V. LEPILLER, A. PRIGENT, F. DUMOUCHEL & I. MUTABAZI, Convection naturelle dans un anneau cylindrique vertical, *Compte-rendus de la 7ème rencontre du Non-Linéaire Paris*, 167-172 (2004).
6. K.S. BALL & B. FAROUK, Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow with buoyancy effects, *J. Fluid Mech.*, **197**, 479-501 (1988).
7. P.D. WEIDMAN & M.E. ALI, On the stability of circular Couette flow with radial heating, *J. Fluid Mech.*, **220**, 53 (1990).
8. H.A. SNYDER & S.K.F. KARLSSON, Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient, *Phys. Fluids*, **7**, 1696-1706 (1964).
9. K.S. BALL, B. FAROUK & V.C DIXIT, An experimental study of heat transfer in a vertical annulus with a rotating inner cylinder, *J. Heat Mass Transfer*, **32**, 1517-1526 (1989).
10. M.M. SOROUR & J.E.R. CONEY, The effect of temperature gradient on the stability of flow between vertical concentric, rotating cylinders, *J. Mech. Eng. Science*, **21**, 403-409 (1979).
11. M.A. DOMINGUEZ-LERMA, G. AHLERS & D.S. CANNELL, Effects of 'kalliroscope' flow visualization particles on rotating Couette-Taylor flow, *Phys. Fluids*, **28**, 1204-1206 (1985).
12. A. PRIGENT & O. DAUCHOT, Visualization of a Taylor-Couette flow avoiding parasitic reflections, *Physics of Fluids*, **12**, 2688-2690 (2000).
13. H. LITSCHKE & K.G. ROESNER, New experimental methods for turbulent spots and turbulent spirals in the Taylor-Couette flow, *Exp. Fluids*, **24**, 201 (1998).
14. K.L. BABCOCK, G. AHLERS & D.S. CANNELL, Noise-sustained structure in Taylor-Couette flow with through flow, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3392-3395 (1991).

# Robustesse d'une reconstruction du portrait de phase et observabilité

Christophe Letellier<sup>1</sup>, Robert Gilmore<sup>2</sup>, & Luis A. Aguirre<sup>3</sup>

<sup>1</sup> CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

<sup>2</sup> Physics Department, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA

<sup>3</sup> Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, M.G., Brazil

Christophe.Letellier@coria.fr

**Résumé.** Un test topologique est proposé pour l'estimation de la qualité de la reconstruction du portrait de phase. Il est ici utilisé pour montrer la dépendance de celle-ci au choix de la variable et pour estimer l'observabilité de la dynamique directement à partir d'une série temporelle. Il est montré que le choix du décalage temporel n'est pas anodin et qu'il ne peut être varié sur des plages aussi grandes qu'il est habituellement annoncé.

**Abstract.** A simple topological test is proposed to estimate the quality of the phase space reconstruction. It is used to show how the reconstruction depends on the choice of the observable and to estimate the observability of the dynamics, directly from a time series. It is shown that the choice of the time delay is quite sensitive and that it cannot be varied over intervals as large as commonly announced.

## 1 Introduction

La reconstruction de l'espace des phases à partir de la connaissance de l'évolution d'une seule grandeur physique est l'étape qui conditionne le plus souvent l'ensemble de l'analyse de la dynamique sous-jacente du système étudié. Le théorème de Takens [1] est toujours invoqué pour se rassurer en se disant qu'il suffit d'augmenter la dimension de l'espace reconstruit pour être assuré d'avoir un espace difféomorphiquement équivalent à l'espace original. Malheureusement, notre compréhension fine de la structure de l'espace des phases se limite aux espaces tri-dimensionnels et augmenter la dimension de l'espace reconstruit n'offre que peu d'avantage. De plus, il a été montré que la qualité de l'espace reconstruit dépend fortement de l'observable utilisée [2]. Cette dépendance dérive directement des propriétés du changement de variables entre l'espace des phases original et l'espace des phases reconstruit [3] : la perte d'observabilité résulte essentiellement de l'existence de singularités au sein du changement de variables qui interdisent l'observation d'un ensemble plus ou moins limité de l'espace original. Malheureusement, l'estimation de l'observabilité de l'espace des phases original à partir d'une variable donnée ne pouvait être obtenu que lorsque les équations du système étaient connues ; en d'autres termes, il n'était pas possible d'estimer le degré de confiance que nous pouvions avoir en une série de mesures.

Toutes les tentatives dérivées de la théorie du contrôle sont par essence vouées à l'échec. La brèche est venue par la topologie d'une manière assez inattendue. Récemment, deux d'entre nous ont introduit un test topologique pour décider si le portrait de phase reconstruit constitue un plongement ou non [4]. Typiquement, ce test repose sur la distance minimum entre deux orbites périodiques données et sur l'estimation des nombres d'enlacement entre celles-ci. Nous montrons ici comment ce test topologique peut être utilisé pour estimer, de manière relative, l'observabilité de l'espace des phases à partir de séries temporelles et ce, sans connaître les équations du système sous-jacent.

## 2 Système de Rössler

Nous commençons par considérer le système de Rössler défini par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1)$$

avec des paramètres respectivement pris égaux à  $a = 0.432$ ,  $b = 2$  et  $c = 4$ . L'attracteur chaotique alors solution est unimodal, c'est-à-dire qu'il est caractérisé par une application de premier retour à une section de Poincaré constituée de deux branches monotones séparées par un unique point critique portrait de phase reconstruit à partir de la variable  $x$  « mesurée » avec un pas de temps  $\delta t = 0.05$  s. La pseudo-période du système étant de 6.02 s, cela correspond à environ 120 points par oscillation autour du point singulier intérieur. Le décalage temporel  $\tau$  est choisi, à l'œil — ce qui reste encore la méthode la plus fiable — égal à  $14\delta t$ . L'espace reconstruit est alors représenté par les coordonnées  $X_x = x(t)$ ,  $Y_x = x(t + \tau)$  et  $Z_x = x(t + 2\tau)$ . La section de Poincaré est définie comme  $X_x = x_- = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}$  (coordonnée du point singulier intérieur) et  $\dot{X}_x > 0$ . Les orbites périodiques peuvent alors être codées selon la localisation des points périodiques sur l'application de premier retour : « 0 » pour un point sur la branche croissante et « 1 » pour un point sur la branche décroissante.

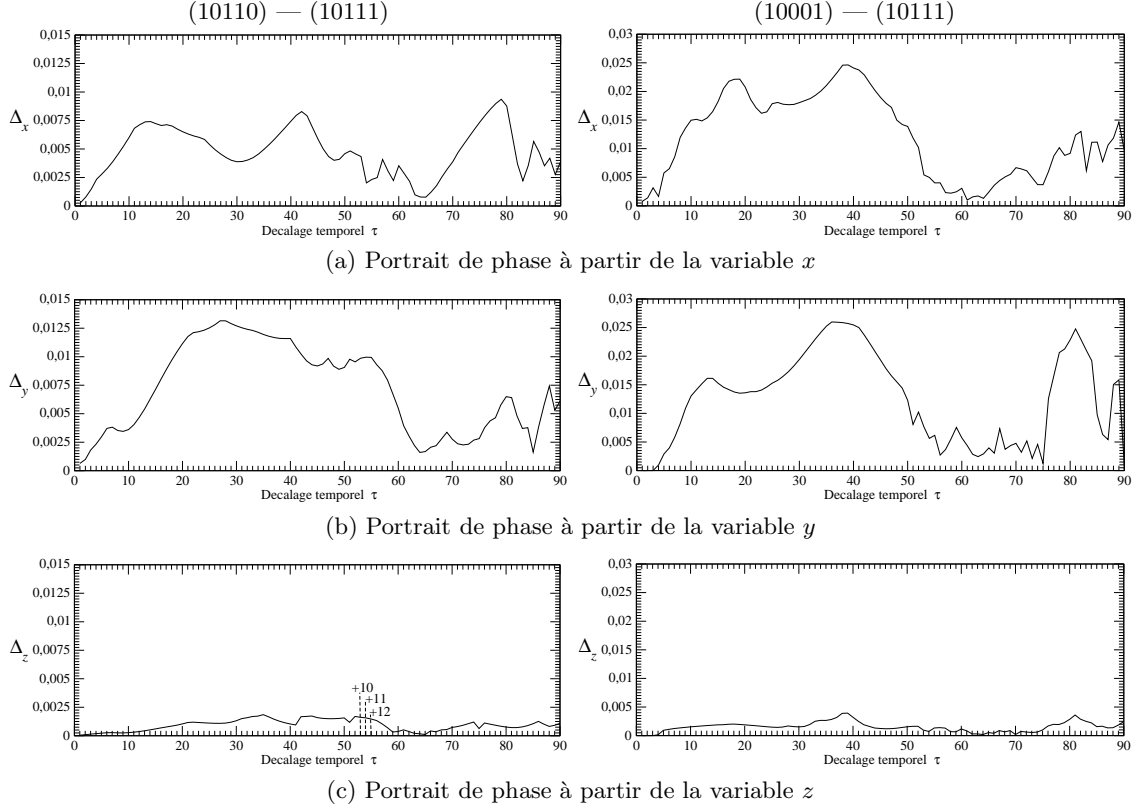
Nous avons choisi de travailler avec plusieurs couples d'orbites périodiques. Le premier est formé par les deux orbites de période 5 et codées respectivement par (10110) et (10111), le deuxième est constitué des deux orbites de période 3 (101) et (100), et le troisième des orbites de période 5 (10001) et (10000). Ces trois couples d'orbites correspondent à des orbites créées par une bifurcation nœud-col. Enfin, nous avons utilisé un couple constitué de deux orbites créées par deux bifurcations nœud-col différentes, à savoir les orbites (10001) et (10111). Ces différents choix nous permettrons d'expliquer la dépendance des résultats obtenus au choix des orbites utilisées.

Une fois les orbites extraites, la distance minimale entre les orbites de chacun de ces couples est calculée en fonction du décalage temporel utilisé ( $\tau \in [0 ; 90]$ ). Le calcul est répété pour les orbites périodiques codées par les mêmes séquences mais extraites des portraits de phase respectivement reconstruits à partir des variables  $y$  et  $z$ . Cette dépendance est représentée Fig. 1 pour deux des quatre couples. La distance minimale est normalisée par rapport aux amplitudes maximales observées sur la variable utilisée pour la reconstruction du portrait de phase. Une première constatation peut être faite : les résultats obtenus sont très différents lorsque le portrait de phase est reconstruit à partir de la variable  $z$ . La distance minimale est très petite — comparée à celles obtenues dans les espaces reconstruits à partir des variables  $x$  et  $y$  — et ne dépend que peu du décalage temporel. L'explication la plus évidente est que la distance minimale obtenue, même pour des décalages relativement petits, est de l'ordre de la résolution du portrait de phase en raison de l'échantillonnage en temps des séries temporelles. En d'autres termes, la représentation de la dynamique obtenues à partir de la variable  $z$  et ce, quel que soit le décalage temporel utilisé, n'offre qu'un faible pouvoir séparateur des différentes orbites.

Pour les petites valeurs du décalages, le nombre d'enlacement est de +10, comme cela se doit pour ce couple d'orbites périodiques [5]. Le changement de signe — les nombres d'enlacements sont négatifs dans l'espace des phases original — provient simplement du passage d'un triède direct à un triède direct par le changement de coordonnées : ceci n'a aucune conséquence sur la topologie à proprement parler. Malgré cela, la première modification du nombre d'enlacement  $Ne(10110,10111)$  ne survient que pour un décalage assez élevé de  $\tau = 54\delta t$ . À partir de cette valeur du décalage, le nombre d'enlacement change d'une unité à chaque fois que le décalage est augmenté de  $\delta t$ , tandis que le nombre de croisements identifiés dans une projection plane ne cesse d'augmenter. Dans ce cas, même pour le portrait de phase reconstruit à partir de la variable  $z$ , ce couple d'orbites peut être reconstruit avec la bonne topologie pour des décalages correspondant à pratiquement la moitié de la pseudo-période ( $0.45 T_0$ ).

Des observations similaires sont obtenues dans les espaces reconstruits à partir des autres variables ( $x$  et  $y$ ). Les valeurs moyennes des distances minimales normalisées sont estimées pour différents couples d'orbites périodiques et pour des décalages répartis sur l'intervalle où le nombre d'enlacement n'est pas affecté ( $\tau \in [1 ; 50]$ ) et sont reportés Tab. 1. Si nous comparons les différentes valeurs moyennes obtenues et, considérant que plus des orbites sont distantes l'une de l'autre, mieux elle résiste aux modifications du portrait de phase sous variations du décalage, la variable  $y$  fournit la représentation la plus robuste, suivie par la variable  $x$ ; la variable  $z$  fournissant sans surprise la distance moyenne la plus faible. De ce point de vue, nous retrouvons le classement des variables par observabilité décroissante, à savoir  $y \triangleright x \triangleright z$  [2]. Ce classement se retrouve également lorsque le couple (101)-(100) est utilisé et, de manière un peu moins claire, lorsque le couple (10001)-(10000). Que ce dernier couple offre une moins bonne estimation de la sensibilité n'est pas très surprenant : en les valeurs moyennes sont écrasées vers les petites valeurs. Ceci





**Fig.1.** Distance minimale normalisée entre deux orbites de période 5 respectivement codées par (10110) et (10111) — à gauche — et (10001) et (10111) — à droite — estimée en fonction de la valeur du décalage temporel  $\tau$ . Cas du système de Rössler avec  $a = 0.432$ ,  $b = 2$  et  $c = 4$ .

résulte du fait que ces deux orbites visitent le voisinage du point singulier intérieur, région de l'espace des phases où les points périodiques sont très concentrés (petites valeurs des vecteurs vitesse). Il est donc préférable d'utiliser des orbites ne visitant pas trop le voisinage du point singulier intérieur, zone par ailleurs réputée sensible à la moindre contamination par du bruit.

**Tab.1.** Valeurs moyennes des distances minimales estimées pour différents couples d'orbites périodiques et pour des décalages  $\tau$  compris entre 1 et 50. Cas du système de Rössler avec  $a = 0.432$ ,  $b = 2$  et  $c = 4$ .

	(10110) - (10111)	(101)-(100)	(10001)-(10000)	(10001) - (10111)
$\overline{\Delta_x}$	$0.0053 \pm 0.0018$	$0.0089 \pm 0.0026$	$0.0008 \pm 0.0003$	$0.0167 \pm 0.0061$
$\overline{\Delta_y}$	$0.0089 \pm 0.0039$	$0.0137 \pm 0.0059$	$0.0008 \pm 0.0003$	$0.0156 \pm 0.0072$
$\overline{\Delta_z}$	$0.0010 \pm 0.0005$	$0.0011 \pm 0.0009$	$0.0002 \pm 0.0001$	$0.0017 \pm 0.0008$

Le cas du couple (10001)-(10111) mérite d'être un peu discuté. Ces deux orbites ne sont pas issues de la même bifurcation nœud-col. En conséquence, elles visitent de manière très différentes l'espace des phases et seront donc affectées différemment par les modifications du portrait de phase en fonction du décalage choisi. D'une certaine manière ces deux orbites sont un peu extrêmes, l'orbite (10111) plutôt

au début de l'ordre unimodal [5], l'orbite (10001) plutôt à la fin. Une fois encore, ce n'est que pour un décalage de  $\tau = 53\delta t$ , que le nombre d'enlacement, en principe égal à -5, devient différent. Dans le cas du système de Rössler, la modification des nombres d'enlacement survient donc quasi-simultanément pour l'ensemble des couples d'orbites périodiques qui peuvent être considérés. Par contre, l'utilisation de la distance minimale moyenne comme comparateur de l'observabilité perd de sa fiabilité dans ce dernier cas. Les valeurs obtenues dans les espaces des phases reconstruits respectivement à partir des variables  $x$  et  $y$  demeurent supérieures à celle obtenue à partir de la variable  $z$ , mais la valeur pour la variable  $x$  devient supérieure à celle obtenue pour la variable  $y$ . Il en résulte que cette distance minimale n'est pertinente pour l'estimation de l'observabilité que lorsqu'elle calculée sur des couples d'orbites périodiques issues de la même bifurcation nœud-col ou, de manière moins contraignante, visitant des régions de l'espace des phases peu différentes.

### 3 Système de Lorenz

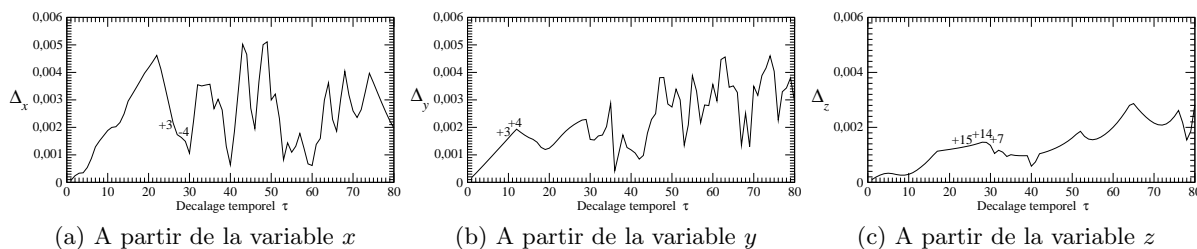
Le système de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (2)$$

est maintenant étudié pour des valeurs des paramètres respectivement égale à  $R = 203.5$ ,  $\sigma = 10$  et  $b = 8/3$ . Ce choix n'est pas anodin. En effet, pour les valeurs habituelles ( $R = 28$ ), l'attracteur est à l'intérieur d'une surface toroïdale de genre 3, ce qui a pour effet de nécessiter une section de Poincaré composite [6]. Notre objectif étant de comparer la faisabilité de notre technique sur deux systèmes différents, nous avons préféré utiliser un attracteur chaotique issu d'une cascade de doublements de période dans les deux cas ; les attracteurs étant enfermés dans des surfaces toroïdales de genre 1, ce qui conduit à une analyse habituelle. Comme pour le système de Rössler, nous utilisons un couple d'orbites que nous avons choisi comme apparaissant assez tôt dans l'ordre unimodal et issu d'une seule bifurcation nœud-col. Le système de Lorenz présentant une symétrie de rotation autour de l'axe  $Oz$ , l'une des conséquences majeures est que l'espace des phases reconstruit à partir de la variable  $z$  invariante (puisque selon l'axe de rotation), le portrait de phase ne présente non seulement plus de symétrie, mais encore, les orbites de période 3 deviennent des orbites de période 6 ! Aussi, ce sont les orbites de période 3 qui seront étudiées lorsque le portrait reconstruit est issu des variables  $x$  ou  $y$  et de période 6 lorsque la variable  $z$  est mesurée. Les variables sont enregistrées avec un pas de temps  $\delta t$  de 0.003s, ce qui fait environ 170 points par oscillations des foyers intérieurs. Le pas de temps est plus petit relativement à la pseudo-période ( $T_0 = 0.51$  s) que pour le système de Rössler ; ceci résulte d'une variabilité plus grande des vitesses sur l'espace des phases et, comme nous le verrons par la suite, les décalages appropriés ne seront pas très grands.

Comme sur le système de Rössler, les dépendances des distances minimales en fonction du choix du décalage sont très différentes d'une variable à l'autre. La variable  $x$  présente indéniablement un meilleur pouvoir séparateur que les deux autres, la variable  $z$  étant celle dont les capacités sont les plus faibles. Les variables  $x$  et  $z$  présentent des nombres d'enlacement ne dépendant pas du décalage  $\tau$  tant que ceux-ci sont respectivement inférieurs à  $28\delta t$  et  $24\delta t$ . La topologie est donc stable tant que le décalage est inférieur à environ à 15% de la pseudo-période, ce qui est peu comparé à l'intervalle habituellement recommandé ( $\tau \in [0, T_0/4]$ ). Ainsi, la borne supérieure habituellement recommandée conduit à une topologie inéquivalente à la dynamique originale. Le cas de la variable  $y$  est encore plus critique, puisqu'un décalage aussi petit que  $11\delta t$  suffit à modifier la topologie, le nombre d'enlacement  $Ne(101111, 101110)$  passant de +3 à +4. Cette grande différence entre les deux variables s'est déjà manifestée lors d'étude de l'observabilité [2]. Notamment, seuls des modèles globaux estimés à partir de la variable  $x$  ont pu être obtenus, la variable  $y$  se montrant plus que réfractaire à la modélisation. Le classement par observabilité décroissante donne effectivement  $x \succ y$  [2].

La modification des nombres d'enlacement est illustrée pour les cas des orbites extraites des portraits de phase reconstruits à partir des variables  $x$  et  $y$ . La modification du nombre d'enlacement  $Ne(101, 100)$  est drastique lorsque le décalage passe de  $28\delta t$  à  $29\delta t$  ; le nombre d'enlacement passant de +3 à -4. Cette



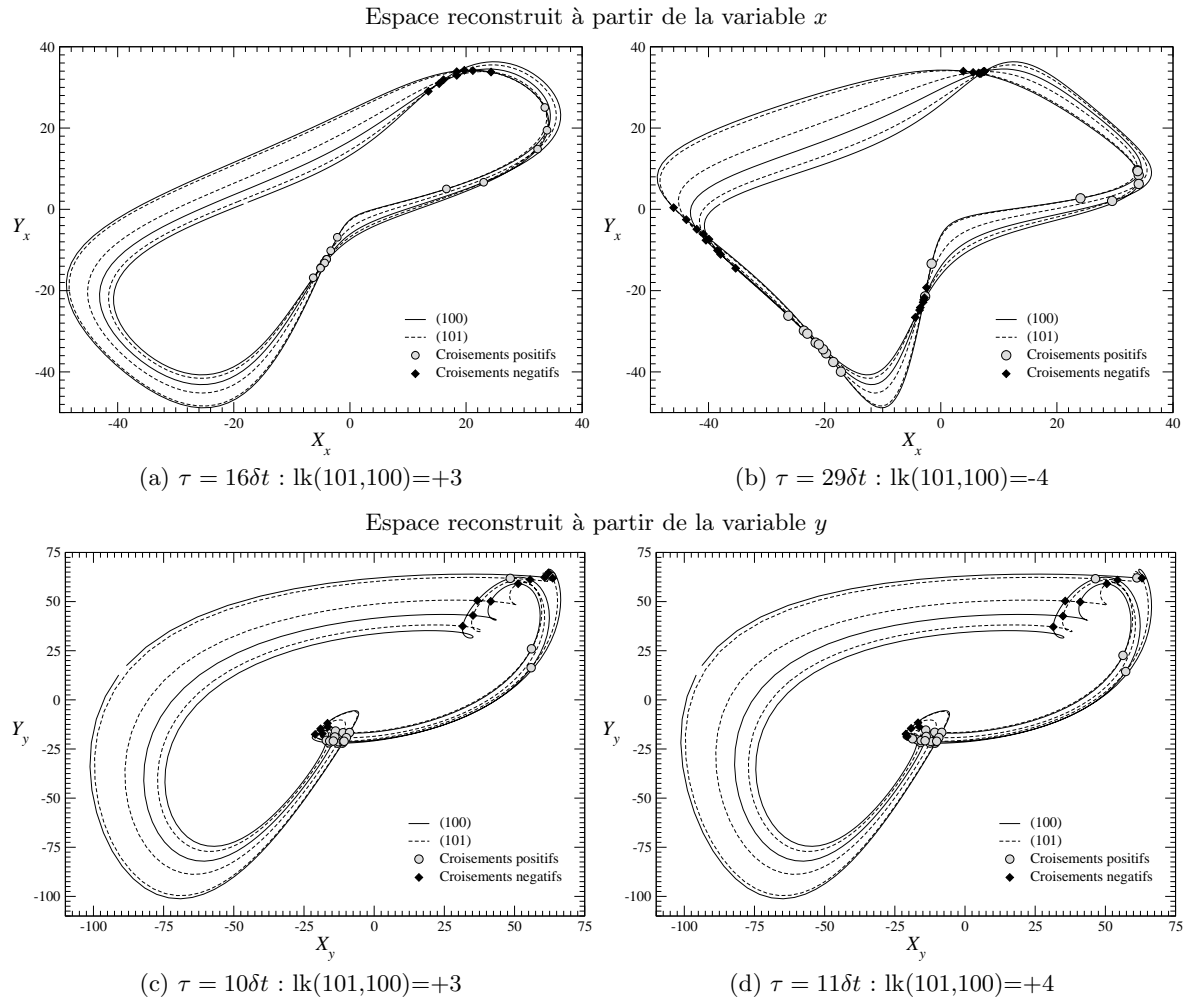
**Fig.2.** Distance minimale entre deux orbites estimée en fonction de la valeur du décalage temporel  $\tau$ . Dans le cas des portraits de phase respectivement reconstruits à partir des variables  $x$  et  $y$ , les orbites sont de période 3 et codées par (101) et (100). Lorsque la variable  $z$  est mesurée, les orbites correspondantes sont de période 6 et sont respectivement codées par (101111) et (101110). Cas du système de Lorenz avec  $R = 203.5$ ,  $\sigma = 10$  et  $b = 8/3$ .

modification importante des propriétés provient de la zone inférieure gauche (Fig. 3(b)) où les différentes révolutions sont toutes concentrées dans une petite zone de l'espace des phases. La plus légère modification entraîne de nombreuses permutations entre différents segments des orbites, affectant le nombre d'enlacement. Un pas de temps beaucoup plus petit serait nécessaire pour voir ces modifications survenir une à une. Le cas apparemment plus simple de la variable  $y$  révèle des nombres d'enlacement qui diffèrent dès le décalage de  $11\delta t$ . Nous avons là une preuve de la dépendance de la qualité de la reconstruction au choix de la variable mesurée. En d'autres termes, l'observabilité de la dynamique est un concept également important pour la topologie de l'attracteur reconstruit, un point jamais étudié en détails auparavant. Enfin, les valeurs moyennes des distances minimales normalisées sont respectivement :  $\overline{\Delta}_x = 0.0023 \pm 0.0001$ ,  $\overline{\Delta}_y = 0.0014 \pm 0.0005$  et  $\overline{\Delta}_z = 0.0008 \pm 0.0005$ . Sans surprise, nous retrouvons bien que la variable  $x$  offre le portrait de phase le plus robuste à toute perturbation. La variable  $y$  vient ensuite, suivie de la variable  $z$ . Le fait que la variable  $z$  se retrouve derrière les deux premières variables n'est pas en accord avec les estimations des indices d'observabilité [2] mais, comme il a été bien précisé dans des travaux antérieurs, les indices d'observabilité sont incapables de tenir compte de propriétés globales telles que les propriétés de symétrie, propriétés qui pourraient bien être à l'origine de ce désaccord. Par conséquent, la classification  $x \triangleright y \triangleright z$  par cette nouvelle méthode est tout à fait opportune.

## 4 Conclusion

À l'aide d'un simple test topologique, il nous a été possible de montrer que la topologie dépendait également du choix de l'observable, notamment par l'intermédiaire de la robustesse du portrait de phase face à des variations du décalage utilisé pour la reconstruction. Contrairement à ce qui est mentionné dans le cadre du théorème de Takens, le choix du décalage est d'importance et selon le système, la plage où nous sommes assurés d'avoir un plongement de la dynamique original n'est pas si grand. La recommandation habituelle de prendre le décalage aussi petit que possible se retrouve bien ici. La borne supérieure du quart de la pseudo-période se révèle être déjà trop grande dans certains cas comme le système de Lorenz.

Nous avons montré par ailleurs, que l'utilisation de la distance minimale normalisée pouvait être utilisée pour une estimation de l'observabilité de la dynamique à partir d'une série temporelle, une estimation qu'il avait été impossible d'obtenir jusqu'ici en l'absence des équations. Bien sûr cette estimation est relative et permet le classement des différentes variables entre elles ; au moins permet telle de décider entre telle ou telle variable à notre disposition.



**Fig.3.** Lien entre les deux orbites de période 3 extraite de l'attracteur solution du système de Lorenz pour les valeurs des paramètres suivantes :  $R = 203.5$ ,  $\sigma = 10$  et  $b = 8/3$ . Les deux nombres d'enlacement sont différents, les attracteurs reconstruits ne sont donc pas topologiquement équivalents. Cas du système de Lorenz avec  $R = 203.5$ ,  $\sigma = 10$  et  $b = 8/3$ .

## Références

1. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381, 1981.
2. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Investigating nonlinear dynamics from time series : the influence of symmetries and the choice of observables, *Chaos*, **12**, 549-558, 2002.
3. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Physical Review E*, **71**, 066213, 2005.
4. C. LETELLIER, I. M. MOROZ & R. GILMORE, A topological test for embedding, *Physics Review Letters*, soumis.
5. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282, 1995.
6. G. BYRNE, R. GILMORE & C. LETELLIER, Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors, *Physical Review E*, **70**, 056214, 2004.

## Écoulement de Couette plan transitionnel : phénomène critique ou désenchevêtrement homocline ?

Paul Manneville

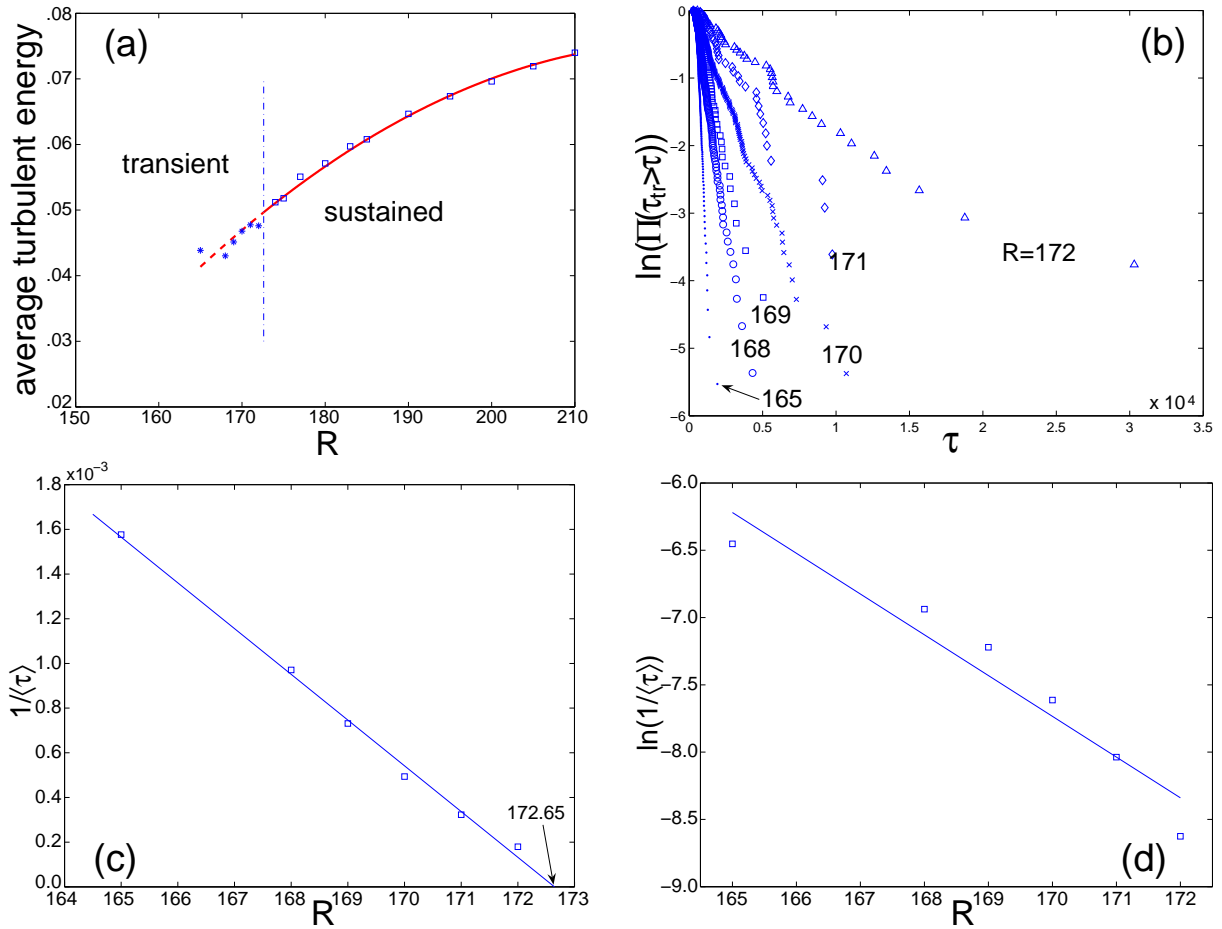
LadHyX (CNRS UMR 7646) École Polytechnique, F-91128 Palaiseau  
paul.manneville@ladhyx.polytechnique.fr

En toute généralité, les bifurcations entre régimes d'écoulement sous-critiques sont marquées par la coexistence d'états et l'hystérésis, la transition d'un régime à l'autre étant contrôlée par des processus de nucléation. L'écoulement de Couette plan (éCp dans la suite), linéairement stable pour tout nombre de Reynolds  $R = U_p h / \nu$ , ( $U_p$  : vitesse des plaques entraînant l'écoulement,  $h$  : demi-distance entre les plaques,  $\nu$  : viscosité cinématique) transite de l'état laminaire *directement* vers la turbulence par nucléation de poches turbulentes qui n'ont qu'une durée de vie finie pour  $R < R_g \simeq 325$  et une probabilité finie ( $< 1$ ) de durer indéfiniment pour  $R > R_g$ . À l'inverse, un écoulement turbulent préparé pour  $R = R_i \gg R_g$  et porté rapidement à une valeur  $R = R_f$  («trempe») plus basse relaxe tout en restant turbulent tant que  $R_f > R_g$  mais relaxe vers l'état laminaire avec probabilité 1 pour  $R_f < R_g$  après un transitoire plus ou moins long. Pour une revue du problème mise dans une perspective plus générale, on pourra consulter [1]. Les expériences de S. Bottin [2] ont montré que, pour des séries de trempes préparées de la même façon, les temps de relaxation suivaient une distribution exponentiellement décroissante,  $\Pi(\tau_{tr} > \tau) \propto \exp(-\tau/\langle\tau_{tr}\rangle)$ , dont le temps caractéristique  $\langle\tau_{tr}\rangle$  est une fonction de  $R$  divergeant en  $R_g$  comme  $1/(R_g - R)$ . La modélisation du phénomène au moyen de réseaux d'itérations couplées par H. Chaté [2] avait montré le même comportement qualitatif mais avec un temps caractéristique divergeant comme  $1/(R_g - R)^2$ <sup>1</sup>.

Suspectant que la modélisation par réseaux d'itérations, dans l'esprit de l'intermittence spatio-temporelle à la Pomeau [3], soit trop idéalisée, j'ai depuis longtemps cherché à développer des modélisations du problème de Couette plus directement reliées aux équations de Navier–Stokes. Partant de l'idée que, dans le régime transitionnel, la structure transverse à l'écoulement était valablement approchée par la combinaison de quelques modes de base dont les amplitudes seraient fonctions du temps et des coordonnées dans le plan de l'écoulement, par une méthode de Galerkin standard j'ai obtenu des systèmes simplifiés mais gardant une structure typiquement hydrodynamique. Dans un premier temps des conditions aux limites non-réalistes de glissement aux parois ('sf' pour 'stress-free') avaient été considérées en raison de la simplicité des calculs auxquels elles conduisaient [4]. Plus récemment l'approche a été étendue au cas des conditions aux limites réalistes de non-glissement ('ns' pour 'no-slip') [5].

La simulation du système d'EDPs ainsi obtenu montre un comportement semi-quantitativement identique à l'expérience. La figure 1(a) présente la moyenne de l'énergie totale contenue dans la perturbation en fonction de  $R$ , en trait plein lorsque la turbulence est considérée comme permanente et en trait tireté lorsqu'elle est transitoire. Elle suggère  $R_g^{ns} \approx 173$  très amélioré par rapport au  $R_g^{sf}$  correspondant, puisque d'un facteur 2 seulement inférieur à la réalité. La déficience résiduelle du modèle ns est imputable à la sous-estimation notable de la dissipation visqueuse autant qu'à celle du transfert d'énergie vers les petites échelles transverses à l'écoulement puisque le développement de Galerkin ne garde que les modes nécessaires à la description du problème à l'ordre le plus bas. Cependant sa simplicité doit permettre une étude plus approfondie du caractère spatio-temporel des transitoires (et accessoirement à d'autres mécanismes où la dépendance fonctionnelle dans le plan de l'écoulement joue un rôle primordial, e.g. le développement des poches turbulentes au voisinage de  $R_g$ ). La figure 1(b) montre la distribution des durées de ces transitoires pour  $R < R_g$ , le choix d'une échelle semi-logarithmique illustrant le caractère exponentiel de la distribution de probabilité. Il y apparaît clairement que la pente diminue à mesure que l'on se rapproche de  $R_g$ . Porter celle-ci fonction de  $R$ , cf. Figure 1(c), suggère fortement qu'elle s'annule pour  $R \approx 172.7$  de sorte qu'au delà la turbulence se maintiendrait indéfiniment (du moins dans des expé-

<sup>1</sup>  $R$  n'est alors pas le nombre de Reynolds mais simplement le paramètre de contrôle du modèle.



**Fig.1.** (a) Diagramme de bifurcation du modèle d'éCp. (b) Distribution des durées de transitoires turbulents pour différentes valeurs de  $R$ . (c,d) Variations de  $1/\langle\tau\rangle$  avec  $R$  supposant un comportement de  $\langle\tau\rangle$  en  $1/(R_g - R)$  ou en  $\exp(\gamma R)$ . Résultats obtenus sur un système de taille  $32 \times 32$ ; conditions aux limites périodiques et schéma pseudo-spectral d'ordre  $\delta t^2$  avec  $dt = 0.01$  et  $dx = dz = 0.25$  [5].

riences de type *trempe* telles que celles considérées dans l'expérience. En fait une ré-analyse récente des expériences de S. Bottin par B. Hof et coll. [10] vise à prouver que le comportement indiqué plus haut était dû à un biais dans le post-traitement masquant le véritable comportement, à savoir une croissance exponentielle indéfinie du temps de relaxation moyen et non une divergence pour une valeur finie  $R_g$ . J'ai porté sur la Figure 1(d) le logarithme de l'inverse de ce temps caractéristique fonction de  $R$ . La régularité de la courbe qui semble plonger vers  $-\infty$  au delà de  $R = 172$  semble exclure la croissance exponentielle postulée et, indirectement, conforter l'analyse initiale de S. Bottin.

La prédiction d'un comportement exponentiel étant faite sur la base d'une analogie avec le problème voisin de la transition de l'écoulement de Poiseuille dans un tube de section circulaire (éPt dans la suite), je concentrerai le reste de cette présentation sur une discussion des résultats obtenus dans ce cas, une comparaison avec le cas de l'éCp, et la conjecture qui oriente mon travail actuel.

Les analogies entre éPt et eCp sont en effet très fortes puisque l'éPt est lui aussi stable vis à vis de perturbations infinitésimales pour tout nombre de Reynolds [6] et ne transite vers la turbulence que sous l'effet de perturbations localisées d'amplitude finie. À première vue, il paraît même plus facile à réaliser que les écoulements de Couette ou de Poiseuille plans idéaux (c'est-à-dire sans effets de bord parasites). Dès la fin du XIXème siècle, Reynolds lui-même [7] avait observé la transition entre un régime

d'écoulement régulier et un régime qu'il avait qualifié de *sinueux*, ainsi que l'hystérésis à transition. Tout le monde est à peu près d'accord sur le fait que, dans la partie haute de plage de valeurs de  $R$ ,<sup>2</sup>  $R \in [1750, 2500]$ , où se produit la transition on observe de *bouchons turbulents* ("turbulent slugs") alors que dans la partie basse, ce sont plutôt des *bouffées turbulentes* ("turbulent puffs"). La principale différence entre les deux tient à ce que les premiers ressemblent plus à un objet matériel qui, s'allongeant tout en étant transporté par l'écoulement moyen, entraînent du fluide aussi bien à leur tête qu'à leur queue alors que les seconds, à plus bas  $R$ , se comportent plutôt comme des ondes traversant le fluide, incorporant du fluide à leur tête et le reperdant à leur queue (voir par exemple [8] et références citées).

Je m'intéresserai ici à la partie basse de la plage transitionnelle qui correspond à la première introduction de phénomènes chaotiques dans l'écoulement et qui a récemment fait l'objet de débats polémiques en particulier en raison de l'affirmation un peu provocante de Hof et coll. [10] qui terminent leur article en indiquant que voir relaxer une bouffée turbulente à  $R = 2400$  dans un tuyau d'arrosage nécessiterait 5 ans d'observation et une longueur de tuyau de 40000 km. Cette conclusion résulte de l'extrapolation (exponentielle) de leur statistique des temps de relaxation de bouffées turbulentes, statistique réalisée sur un système de taille inégale auparavant réalisant un écoulement gravitaire qui maintient une différence de pression constante entre les deux extrémités du tube (horizontal), donc à gradient de pression imposé. D'autres expériences réalisées par Peixhino & Mullin concluent à un l'existence d'un seuil  $R_g$  au delà de laquelle une bouffée turbulente qui a réussi à ce développer suffisamment (ce qui n'est pas le cas de toutes) persiste indéfiniment. Ces expériences diffèrent des précédentes car, un piston étant tiré à vitesse constante dans le tube, elle correspondent clairement à une expérience à débit constant. Sur le plan numérique, plusieurs expériences de simulation directe des équations de Navier–Stokes conduisent également à des résultats contradictoires. Ainsi, Hof et coll. [10] récidivent en décrivant comportement exponentiel des temps de relaxation par des simulations sur un système de longueur  $\ell = 5d$  mais, dans des conditions qui sont sans doute plus représentatives de véritables bouffées ( $\ell = 50d$  à comparer à la longueur d'une bouffée typique  $\sim 20d$ ), Willis & Kerswell [11] obtiennent un comportement critique en  $1/(R_g - R)$  avec  $R_g \approx 1870$  en bon accord avec les résultats de Peixhino & Mullin [9].

Le moment est ainsi venu de reprendre les termes du titre de cette contribution. En effet, pour Hof *et al.* (2006) [10], le comportement exponentiel qui devrait être observé, aussi bien pour l'éCp que l'éPt, est lié à la présence de solutions périodiques instables et à l'enchevêtrement homocline qui résulte des intersections entre variétés stables et instables de ces solutions particulières selon la théorie classique des transitoires turbulents en théorie des systèmes dynamiques [12]. Pour l'éPt, ces solutions particulières ont été effectivement vues de façon fugace au cours de l'évolution et peuvent être mises en évidence numériquement [13]. Leur existence est également connue pour l'éCp [14] mais inobservées et probablement inobservables au laboratoire. Aux nombres de Reynolds correspondant à la plage transitionnelle considérée, il peut sembler assez légitime de rester dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques à petit nombre de degrés de liberté car, dans cette plage, la cohérence est encore forte et même si l'on peut voir apparaître certaines structures que l'on peut juger à petite échelle, il est admissible de les considérer comme des harmoniques esclaves des plus grandes structures. Cependant, la prédiction d'un comportement exponentiel indéfini repose sur l'hypothèse que rien ne viendra perturber l'existence de la structure homocline et donc qu'aucune bifurcation globale autre que celle qui lui a donné naissance ne se produira. Il existe cependant de nombreux exemples simples du contraire. Ainsi, le modèle de Hénon ( $X_{k+1} = 1 - aX_k^2 + bY_k$ ,  $Y_{k+1} = X_k$ ) possède un attracteur chaotique pour  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$  et un attracteur périodique pour  $a = 1.3$ ,  $b = 0.3$  apparaissant par une crise liée à une bifurcation globale qui voit la variété portant l'attracteur de Hénon "picorée" par le bassin d'attraction de la solution périodique. On peut également construire des systèmes simples pour lesquels un comportement critique est observable au voisinage du point de crise. La prédiction du comportement critique n'est pas toujours aussi facile que pour l'application unidimensionnelle en accent circonflexe  $X_{k+1} = 2r|X_k|$  au voisinage de  $r = 1$  pour lequel on trouve que le temps de vie moyen diverge en  $1/(r - 1)$  mais des exemples existent [12,15]. Selon moi, le comportement exponentiel décrit par Hof et coll. [10] n'est pas générique mais peut être spécifique

<sup>2</sup>  $R = \overline{U}d/\nu$  avec  $\overline{U}$  : vitesse moyenne de l'écoulement, i.e. débit volumique/surface de section,  $d$  : diamètre du tube,  $\nu$  : viscosité cinématique.

à la façon particulière de réaliser l'éPt car Willis & Kerswell [11] ont montré l'extrême sensibilité de la solution à la forme et à l'amplitude des perturbations. D'autre part, le fait que ces derniers ne retrouvent pas le comportement annoncé lorsque la longueur du domaine est grande ( $\sim 2,5$  fois la longueur d'une bouffée typique) montre qu'il faut sans doute prendre en compte le caractère déjà spatio-temporel de la relaxation des transitoires et que les prédictions faites sur la base de domaines trop courts (ici  $1/4$  de longueur de bouffée), donc dans un cadre strictement temporel, sont de moindre valeur.

C'est la raison pour laquelle je considère que ce que j'ai présenté dans la figure 1 est encore très préliminaire. Je privilégie actuellement l'étude des propriétés statistiques de la relaxation de la turbulence dans des systèmes très étendus, car il apparaît que la transition se produit par effondrement local de régions turbulentes. Les idées de Pomeau [3] sur l'intermittence spatio-temporelle retrouverait ainsi à s'appliquer de nouveau mais plus solidement ancrées sur l'hydrodynamique. Cela suggère aussi de chercher à dériver un modèle quasi-unidimensionnel d'éPt qui fasse le pendant du modèle quasi-bidimensionnel d'éCp et permette d'étudier la relaxation de la turbulence sans être gêné par les effets de taille ou de temps de simulation.

## Références

1. P. MANNEVILLE, *Instabilités, chaos et turbulence* (Éd. École Polytechnique, 2004), Chap. 6, et plus particulièrement § 6.3.4.
2. S. BOTTIN & H. CHATÉ, *Eur. Phys. J. B*, **6**, 143–155 (1998).
3. Y. POMEAU, *Physica D*, **23**, 3–11 (1986).
4. P. MANNEVILLE, dans *Rencontres du Non-Linéaire 2000*, Y. Pomeau & R. Ribotta, eds. (Paris Onze Éditions, Orsay) pp. 123–128 — P. MANNEVILLE & F. LOCHER, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **328** Serie IIb, 159–164 (2000).
5. M. LAGHA & P. MANNEVILLE, *Eur. Phys. J. B*, soumis, — M. LAGHA, Thèse École Polytechnique, Déc. 2006.
6. H. SALWEN, F.W. COTTON & C.E. GROSCH, *J. Fluid Mech.*, **98**, 273–284 (1980) et références citées.
7. O. REYNOLDS, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **174**, 935–982 (1883).
8. H. SHAN, B. MA, Z. ZHANG & F.T.M. NIEUWSTADT, *J. Fluid Mech.*, **387**, 39–60 (1999).
9. J. PEIXINHO & T. MULLIN, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 094501 (2006).
10. B. HOF *et al.*, *Nature*, **443**, 59–62 (2006).
11. A. P. WALLIS & R. R. KERSWELL, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 014501 (2007).
12. T. TÉL, “Transient chaos” dans Hao Bai-lin, *Directions in Chaos*, vol. 3 (World Scientific, 1990).
13. B. HOF, C. W. H. VAN DOORNE, J. WESTERWEEL, F. T. M. NIEUWSTADT, H. FAISST, B. ECKHARDT, K. WEDIN, R. R. KERSWELL & F. WALEFFE, *Science*, **305**, 1594–1598 (2004).
14. H. FAISST & B. ECKHARDT, “Dynamical systems and the transition to turbulence”, dans T. Mullin & R.R. Kerswell *IUTAM symposium on Laminar–Turbulent Transition and Finite Amplitude Solutions* Springer (2005).
15. C. GREBOGI, E. OTT & J.A. YORKE, *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1284–1287 (1986).



# Etats stationnaires, théorèmes de fluctuation-dissipation et température effective dans un écoulement de von Karman turbulent

R. Monchaux<sup>1</sup>, P.-H. Chavanis<sup>2</sup>, A. Chiffaudel<sup>1</sup>, F. Daviaud<sup>1</sup>, & B. Dubrulle<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Service de Physique de l'État Condensé, DSM, CEA Saclay, CNRS URA 2464, 91191 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique Théorique (UMR 5152), Université Paul Sabatier

118, route de Narbonne 31062 Toulouse, France

romain.monchaux@cea.fr

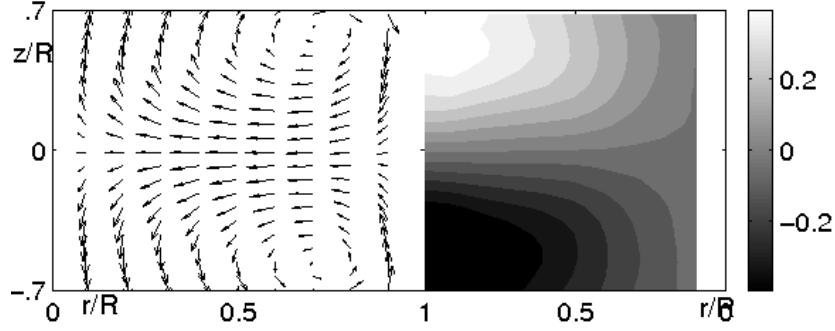
**Résumé.** Une question non résolue de la physique statistique est de savoir si certains systèmes hors équilibre partagent des propriétés avec les états d'équilibre classiques. La turbulence est un bon cadre pour étudier cette question. En effet, les écoulements incompressibles soumis à un forçage statistiquement stationnaire atteignent en général une sorte d'état d'équilibre (au sens statistique), indépendant des conditions initiales. Depuis Onsager, on rêve de décrire la turbulence à l'aide d'outils issus de la mécanique statistique. En 2D, les équilibres des équations de Navier-Stokes ont été classifiés à l'aide de principes de mécanique statistique par Robert *et al.* Des progrès plus récents ont été faits dans l'étude des écoulements axisymétriques (une situation intermédiaire entre 2D et 3D) par Leprovost *et al.*. Nous présentons des résultats obtenus dans le cadre d'un écoulement de von Kármán.

**Abstract.** A yet unanswered question in statistical physics is whether stationary out-of-equilibrium systems share any resemblance with classical equilibrium systems. A good paradigm to explore this question is offered by turbulent flows. Incompressible flows subject to statistically stationary forcing generally reach a kind of equilibrium (in the statistical sense), independent of the initial conditions. Description of turbulence with tools borrowed from statistical mechanics is a long-standing dream, starting with Onsager. In 2D, equilibrium states of the Navier-Stokes equations have been classified through statistical mechanics principle by Robert and his collaborators. More recent advances have been recently made for 3D axisymmetric flows (an intermediate situation between 2D and 3D) by Leprovost *et al.* We present results obtained in the framework of a von Kármán flow.

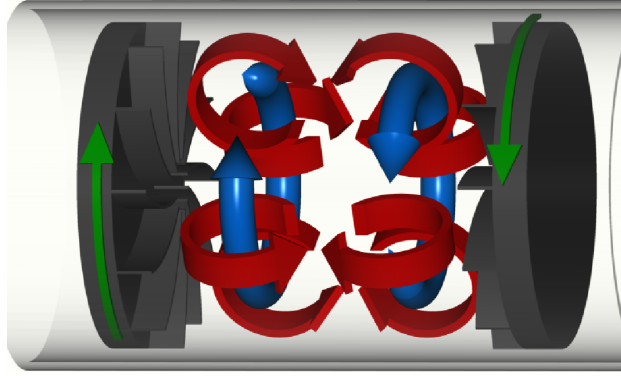
Une question ouverte de la physique statistique est de savoir si les systèmes hors-équilibre partagent des propriétés avec les systèmes classiques à l'équilibre. La turbulence offre un bon cadre pour chercher des réponses à cette question. Les écoulements incompressibles soumis à un forçage statistiquement stationnaire atteignent en général une sorte d'état d'équilibre (au sens statistique du terme), indépendant des conditions initiales. Décrire la turbulence avec des outils empruntés à la mécanique statistique est un vieux rêve depuis les travaux d'Onsager. En 2D, les états d'équilibre des équations de Navier-Stokes ont été classifiés à l'aide de principes de mécanique statistique par Robert et ses collaborateurs [1,2]. Des progrès plus récents ont été faits dans l'étude des écoulements axisymétriques (une situation intermédiaire entre 2D et 3D) par Leprovost *et al.* [3]. Dans la suite, nous présentons des résultats obtenus dans le cadre d'un écoulement de von Kármán.

## 1 Etats stationnaires axisymétriques

On se place dans la limite de l'équation d'Euler pour un écoulement turbulent dans lequel le forçage et la viscosité sont négligés. Dans cette limite, un écoulement axisymétrique est caractérisé par un ensemble de grandeurs globales conservées comme l'énergie et l'hélicité. De plus, pour des raisons de symétries, on montre la conservation du moment cinétique le long d'une ligne de courant résultant en un théorème de Liouville et en la conservation de grandeurs globales supplémentaires comme les casimirs du moment cinétique. Ceci permet de définir une entropie de mélange et la dérivation d'un état de Gibbs pour le



(a) Profil de vitesse



(b) schéma des deux cellules de recirculation

**Fig.1.** (a) Profil de vitesse à  $Re = 5 \times 10^5$  : contour en niveau de gris pour la composante azimutale, représentation avec des vecteurs de la partie poloïdale d'un écoulement de von Kármán généré par deux turbines contra-rotatives dans un cylindre. Le rayon et la hauteur du cylindre sont respectivement :  $R = 100$  mm et  $H = 180$  mm. Les turbines sont constituées de disques d'inox sur lesquels sont soudés un nombre variable de pales courbées. Pour plus de détails, nous renvoyons à Ref. [4]. A la fréquence  $f$ , le nombre de Reynolds est  $Re = 2\pi f R^2 \nu^{-1}$  avec  $\nu$  la viscosité cinématique de l'eau. L'écoulement moyen est divisé en deux cellules de recirculation toriques séparées par une couche de cisaillement. Les mesures de vitesse sont faites à l'aide d'un système de vélocimétrie par imagerie de particule stéréoscopique (SPIV) fournit par DANTEC.

problème en maximisant cette entropie sous contrainte des grandeurs conservées. A partir de l'état de Gibbs, on peut dériver des relations générales caractérisant les états stationnaires [3,5] :

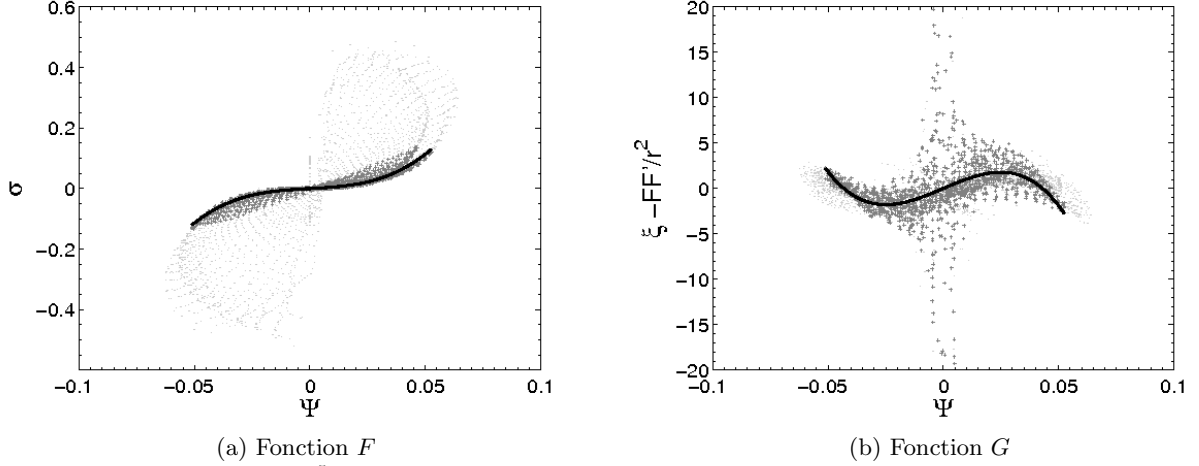
$$\sigma = F(\Psi); \quad \xi - \frac{FF'}{r^2} = G(\Psi); \quad \text{avec } \xi = \omega_\theta/r, \quad (1)$$

où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions arbitraires liées aux lois de conservation du système,  $\sigma$  est le moment cinétique,  $\psi$  la fonction de courant et  $\omega_\theta$  la composante azimutale de la vorticité. De plus,  $r^{-1}\partial_r(r^{-1}\partial_r\psi) + r^{-2}\partial_z^2\psi = -\xi$ .

Nous avons vérifié l'existence de relations similaires pour les  tats stationnaires d'un écoulement de von K rman expérimental pour différents types de turbines et dans une grande gamme de nombres de Reynolds (de 100   314000). Le dispositif expérimental est décrit en figure (1). Un résultat représentatif de l'ensemble de nos mesures est donné en figure (2). Bien que la dispersion sur l'ensemble du cylindre soit trop grande pour permettre d'identifier une fonction  $F$ , les données correspondant aux points de mesure éloignés des parois et des turbines se regroupent le long d'une fonction de type cubique

$$F(\Psi) = p_1\Psi + p_3\Psi^3$$

qui peut être ajustée par deux paramètres. Cet ajustement est ensuite utilisé pour déterminer  $G$  de la même façon.



**Fig.2.**  $F$  et  $G$  à  $Re = 5 \times 10^5$ . Les points gris clairs correspondent à l'ensemble de l'écoulement, les croix gris foncé à 50% de l'écoulement :  $r/R \in [-0.6; 0.6]$ ,  $z/R \in [-0.4; 0.4]$  et le trait noir épais à l'ajustement cubique.

Nous avons trouvé par ailleurs que les fonctions  $F$  et  $G$  dépendent de la forme des turbines et du nombre de Reynolds. Par exemple, avec un autre type de turbines,  $F$  (resp.  $G$ ) tend à être linéaire (resp. nulle) à mesure que le nombre de Reynolds augmente [5]. Ceci peut être interprété comme une manifestation indirecte de la « Beltramization » de l'écoulement, c'est-à-dire de la réduction des non-linéarités.

## 2 Fluctuations

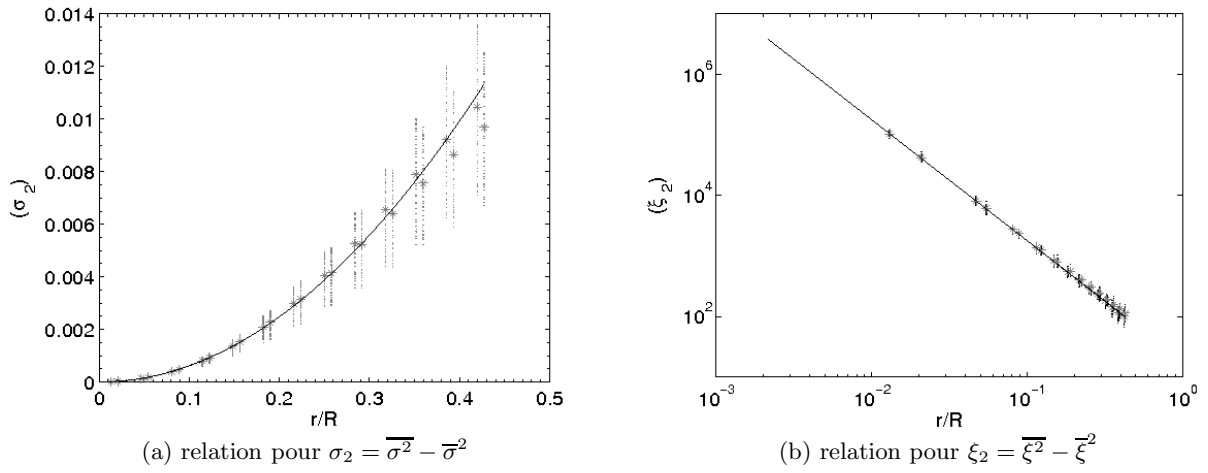
Dans la limite de Beltrami, l'état de Gibbs des équations d'Euler peut être utilisé pour dériver deux relations de fluctuation entre les solutions stationnaires et leurs fluctuations :

$$\begin{aligned} \overline{(\mu\sigma)^2} - \overline{\mu\sigma}^2 &= -\frac{\delta\overline{\mu\sigma}}{\delta\xi} = \frac{\mu^2}{\beta} r^2, \\ \overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2 &= -\frac{\delta\overline{\xi}}{\delta\mu\sigma} = \frac{\beta}{\mu^2} \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\beta^{-1}$  est une température effective et  $\mu$  une susceptibilité vorticale (les paramètres de Lagrange respectivement associés à l'énergie et l'hélicité). Nous avons également testé ces deux relations dans notre expérience. Les résultats sont présentés sur la figure (3). Une fois de plus, ces relations sont satisfaites au cœur de l'écoulement. Température et susceptibilité vorticale peuvent être mesurées à partir des paramètres des ajustements. L'étude de la dépendance de ces grandeurs thermodynamiques avec le nombre de Reynolds et la forme du forçage est en cours [6].

## Références

1. J. SOMMERIA & R. ROBERT, *J. Fluid Mech.*, **229**, 291 (1991).
2. P. H. CHAVANIS, *Phys. Rev. E*, **68**, 036108 (2003).
3. N. LEPROVOST, B. DUBRULLE & P. H. CHAVANIS, *Phys. Rev. E*, **73**, 046308 (2006).



**Fig.3.** Relations de fluctuations à  $Re = 5 \times 10^5$  avec le même fenêtrage en  $r$  et  $z$  que sur la figure 2. Les petits points correspondent aux données expérimentales pour toutes les valeurs de  $z/R$ , les étoiles correspondent aux moyennes sur  $z$  à  $r$  fixé, la ligne est un ajustement en  $(r/R)^2$  (resp.  $(R/r)^2$ ).

4. F. RAVELET, L. MARIÉ, A. CHIFFAUDEL & F. DAVIAUD, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 164501 (2004).
5. R. MONCHAUX *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 124502 (2006).
6. R. MONCHAUX *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, soumis.

## Oscillateurs génétiques simples. Application à l'horloge circadienne d'une algue unicellulaire

Pierre-Emmanuel Morant<sup>1</sup>, Constant Vandermoere<sup>1</sup>, Quentin Thommen<sup>1</sup>, Benjamin Parent<sup>2</sup>, François Lemaire<sup>3</sup>, Florence Corellou<sup>4</sup>, Christian Schwartz<sup>4</sup>, François-Yves Bouget<sup>4</sup>, Marc Lefranc<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules, UMR CNRS 8523, UFR de Physique, Bât. P5, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France.

<sup>2</sup> Unité de Glycobiologie Structurale et Fonctionnelle, UMR CNRS 8576, Bât. C9, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France.

<sup>3</sup> Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR CNRS 8022, Bât. M3, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France.

<sup>4</sup> Laboratoire Modèles en Biologie Cellulaire et Evolutive, UMR CNRS-Paris 6 7628, Observatoire Océanologique de Banyuls sur mer, BP44, 66651 Banyuls sur Mer Cedex, France.

marc.lefranc@univ-lille1.fr

**Résumé.** Un gène réprimé par l'expression de sa propre protéine constitue l'exemple le plus simple de circuit génétique à boucle de rétroaction négative, et l'apparition d'oscillations dans ce système est un problème classique de la biologie théorique. Nous nous intéressons ici au cas où le taux de transcription ne suit pas instantanément la concentration en protéine, mais se comporte comme une variable dynamique indépendante. Nous observons que l'existence d'une dynamique transcriptionnelle favorise les oscillations, et que ces dernières apparaissent de manière systématique dans la limite où les dégradations de l'ARN et de la protéine sont totalement saturées. Nous considérons également la généralisation la plus directe du gène auto-régulé : une boucle à deux gènes, l'un activateur, l'autre répresseur, se régulant réciproquement, et nous comparons ses prédictions aux données expérimentales concernant les oscillations circadiennes d'une algue unicellulaire verte.

**Abstract.** A gene which is repressed by its own protein is the simplest example of a genetic circuit with a negative feedback, and the appearance of oscillations in this system is a classical problem in theoretical biology. Here we study the case where the transcription rate does not react instantaneously to changes in protein concentration but is an independent dynamical variable. We observe that the transcriptional dynamics favors oscillations, and that periodic regimes appear unconditionally in the limit where enzymatic degradations of ARN and protein are completely saturated. We also consider the simplest generalization of this oscillator, a circuit with two genes, an activator and a repressor, regulating each other, and compare its predictions to experimental data about circadian oscillations in a unicellular green alga.

### 1 Introduction

Les dizaines de milliers de gènes que porte la molécule d'ADN au cœur de chaque cellule contiennent l'information nécessaire à la synthèse des briques de la machinerie moléculaire de la Vie, les protéines. Cette synthèse s'effectue en deux étapes : "transcription" de la séquence codante en une molécule d'ARN messenger, puis "traduction" de cet ARN en une séquence d'acides aminés, c'est-à-dire une protéine. Or, les taux de production des ARN ne sont pas constants : l'activité des gènes est en effet régulée par des protéines produites par d'autres gènes, au travers de réseaux complexes. L'ensemble constitue donc un système dynamique fortement non linéaire, susceptible de présenter toute une gamme de comportements bien connus : bistabilité, mais aussi oscillations, comme par exemple celles intervenant dans la segmentation des somites lors de l'embryogénèse [1], ou dans les horloges circadiennes [2]. Ces dernières fournissent à un grand nombre d'organismes une mesure interne du temps leur permettant de faire varier de nombreuses grandeurs physiologiques sur une période de 24 heures, et de s'adapter ainsi à l'alternance jour-nuit. Leur caractère autonome est démontré par le fait qu'elles persistent en éclaircissement constant, avec une période naturelle légèrement différente de 24 heures.

L'oscillateur génétique le plus simple est a priori celui constitué d'un gène réprimé par la protéine qu'il produit, comme sans doute le gène *hes1* dans la segmentation des somites [1]. Il s'agit d'un problème ancien [3,4], pour lequel il est admis qu'on ne peut observer des oscillations que si on introduit soit une étape cinétique intermédiaire, par exemple une phosphorylation de la protéine [5] ou un transport entre cytoplasme et noyau [6], soit un terme explicite de délai dans les équations [7,8,9]. Nous avons revisité ce problème en tenant compte de deux effets complémentaires.

D'une part, des expériences récentes ont montré que le processus de transcription se caractérise par une cinétique complexe, et notamment par l'existence de "salves de transcription" [10] modulant l'activité transcriptionnelle sur des durées allant jusqu'à quelques dizaines de minutes. Comme François et Hakim [11], nous considérons donc le taux de transcription comme une variable dynamique à part entière, contrairement à l'immense majorité des études où on suppose qu'il réagit instantanément à la concentration en protéine. D'autre part, les analyses théoriques postulent généralement que les acteurs moléculaires sont dégradés par des mécanismes génériques, par exemple dégradation spontanée ou dirigée par une enzyme, avec une cinétique de type Michaelis-Menten. Or, l'importance de la cinétique de dégradation, et le pouvoir déstabilisant d'effets non linéaires, tels que la stabilisation de la forme dimère d'une protéine [12], ont été récemment soulignés [13].

Dans le cas du gène auto-régulé, nous avons constaté que l'existence d'une dynamique transcriptionnelle peut élargir considérablement le domaine de paramètres dans lequel un mécanisme de dégradation non linéaire induit des oscillations. Celles-ci sont observées de manière systématique dans la limite où les dégradations de l'ARN et de la protéine sont saturées mais peuvent apparaître bien avant.

## 2 Oscillations d'un gène réprimé par sa propre protéine

Comme François et Hakim [11], nous décrivons la dynamique transcriptionnelle par une simple équation cinétique décrivant des processus élémentaires d'association/dissociation entre la protéine et l'ADN, mais une modélisation plus complexe pourrait être envisagée. Dans ces conditions, la dynamique du circuit à un gène auto-régulé peut être modélisée par les trois équations adimensionnées suivantes :

$$\dot{g} = \theta [1 - g(1 + p^n)] \quad (1a)$$

$$\dot{p} = n\alpha [1 - g(1 + p^n)] + \delta[m - f(p)] \quad (1b)$$

$$\dot{m} = \mu + \lambda g - h(m) \quad (1c)$$

où  $g, p$  et  $m$  représentent respectivement l'activité du gène, et les quantités de protéines et d'ARN. L'entier  $n$  indique la coopérativité de la régulation, c'est-à-dire le nombre de protéines contenues dans le complexe protéique modulant l'activité du gène. L'unité de temps est le temps de demi-vie de l'ARN. Les coefficients  $\theta, \alpha$  contrôlent les échelles de temps des processus de dissociation et d'association à l'ADN, tandis que  $1/\delta$  est le temps de demi-vie de la protéine. Les paramètres  $\mu$  et  $\lambda$  déterminent l'activité du gène selon que celui-ci est libre et actif ( $g = 1$ ) ou lié et réprimé ( $g = 0$ ). Les fonctions  $f(p)$  et  $h(m)$ , qu'on suppose de pente unité à l'origine, décrivent respectivement les mécanismes de dégradation de la protéine et de l'ARN.

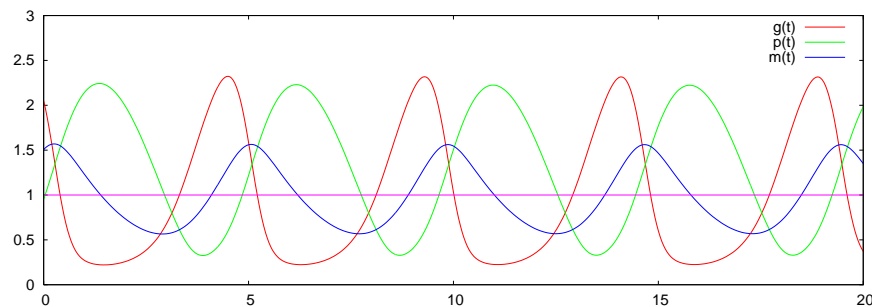
Pour étudier l'apparition d'oscillations dans ce système, nous n'envisagerons ici que la déstabilisation de l'état stationnaire des équations (1) via une bifurcation de Hopf menant à des oscillations périodiques. L'analyse de stabilité linéaire du système (1) montre que deux valeurs propres de la matrice jacobienne traversent l'axe imaginaire et acquièrent une partie réelle positive quand l'expression  $\mathcal{H}$  ci-dessous passe par zéro pour devenir négative (critère de Routh-Hurwitz) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & u h_0^2 (\alpha h_0 + \delta s \lambda) (\delta s \lambda + u \lambda + \alpha h_0) \\ & + \lambda^2 h_0 [h_0 (-\delta h_0 + 2u\alpha + \alpha \delta s) + \lambda(u + \delta s)^2] \theta \\ & + \lambda^4 (u + \delta s) \theta^2 \end{aligned} \quad (2)$$

où  $s$  et  $u$  sont les pentes des fonctions de dégradation  $f(p)$  et  $h(m)$  au point fixe et  $h_0$  est la valeur prise par la fonction de dégradation  $h(m)$  en ce point.

On voit facilement que lorsque  $T = u + \delta s \leq 0$ , l'expression (2) est négative pour toutes valeurs des constantes cinétiques  $\theta$  et  $\alpha$ . Cela indique que l'on observe alors systématiquement des oscillations, même pour des dynamiques transcriptionnelles extrêmement rapides, et en particulier dans le cas  $u, s \rightarrow 0$  où les dégradations enzymatiques sur l'ARN et la protéine sont saturées, un facteur d'instabilité bien connu [14]. Cela n'a rien de surprenant, car  $-T$  est la trace du jacobien du modèle à deux variables où l'activité du gène  $g$  est supposée être asservie à la concentration en protéine  $p$ , et l'on sait que pour un système à deux variables, la positivité de cette trace est synonyme d'instabilité [12,15].

L'expression (2) est plus intéressante si on adopte le point de vue que les constantes  $\theta$  et  $\alpha$  ne sont pas très grandes, comme on le suppose généralement, mais qu'elles doivent correspondre aux échelles de temps des "salves de transcription" observées expérimentalement. Ces dernières se caractérisent par des temps d'extinction allant jusqu'à quelques dizaines de minutes [10], soit  $\theta = O(1)$ . Nous avons observé que des oscillations peuvent alors apparaître pour des valeurs de  $T = u + \delta s$  nettement positives, ce qui correspond à des dégradations nettement moins saturées que lorsque  $\theta, \alpha \rightarrow \infty$ . La figure 1 montre ainsi des oscillations observées pour  $\theta \sim 0.25$ , ce qui correspond à des temps d'extinction d'environ 40 minutes pour une demi-vie de l'ARN de 10 minutes. Les pentes des fonctions de dégradation au point fixe sont alors  $u = 0.14$  et  $s = 0.56$ , à comparer à une valeur unité à faible concentration. On voit si la dégradation de la protéine est relativement saturée, celle de l'ARN ne l'est que modérément.



**Fig.1.** Oscillations du modèle (1) pour les valeurs des paramètres suivantes :  $\theta = 0.25$ ,  $\alpha = 8 \times 10^{-4}$ ,  $\delta = 0.76$ ,  $\lambda = 55.7$ ,  $\mu = 0.6$ ,  $n = 2$ . Les variables  $g$ ,  $p$ ,  $m$  sont normalisées par rapport à leur valeur au point fixe. La protéine est supposée être dégradée par une enzyme allostérique avec une cinétique d'ordre 2, tandis que la dégradation de l'ARN suit une cinétique de Michaelis-Menten classique. L'unité de temps est la demi-vie de l'ARN.

On peut légitimement se poser la question de la validité du modèle déterministe (1) si l'activité du gène  $g$  doit être considérée non comme une variable continue mais comme une variable stochastique alternant entre 0 et 1, et si les temps de commutation ne sont pas petits devant les temps d'évolution. A cela on peut répondre que les oscillations du modèle déterministe doivent se refléter de manière mesurable dans les propriétés statistiques du modèle stochastique, et entraîner par exemple une dispersion beaucoup moins importante des temps de commutation. D'autre part, il n'est pas exclu qu'une prise en compte plus fine des mécanismes de transcription montre la nécessité d'introduire certaines variables continues dans les description de ces mécanismes.

### 3 La boucle à deux gènes

Une généralisation naturelle du circuit à un gène auto-régulé est celui formé par une boucle de deux gènes, l'un activant le deuxième, le deuxième réprimant le premier. Nous utilisons dans ce qui suit un modèle semblable à (1), excepté que nous négligeons la dynamique transcriptionnelle. Nous nous intéressons ici à ce système en ce qu'il constitue un modèle minimal de l'horloge circadienne d'*Ostreococcus tauri*,

une algue verte unicellulaire dont la physiologie et l'appareil génétique se caractérisent par une compacité extrême, mais qui présente néanmoins de nombreux points communs avec les végétaux supérieurs. Deux gènes *TOC1* et *CCA1*, homologues de deux gènes centraux de l'horloge d'*Arabidopsis thaliana*, le modèle des végétaux supérieurs, ont pour l'instant été identifiés comme faisant partie de l'horloge circadienne de cette algue, qui est étudiée à l'Observatoire Océanologique de Banyuls.

En supposant des mécanismes de dégradation de type Michaelis-Menten, les équations réduites gouvernant la dynamique de la boucle à deux gènes peuvent s'écrire :

$$\frac{dm_T}{d\tau} = \mu_T + \frac{\lambda_T}{1 + p_C^{n_C}} - \delta \frac{\kappa_{m_T} m_T}{\kappa_{m_T} + m_T} \quad (3a)$$

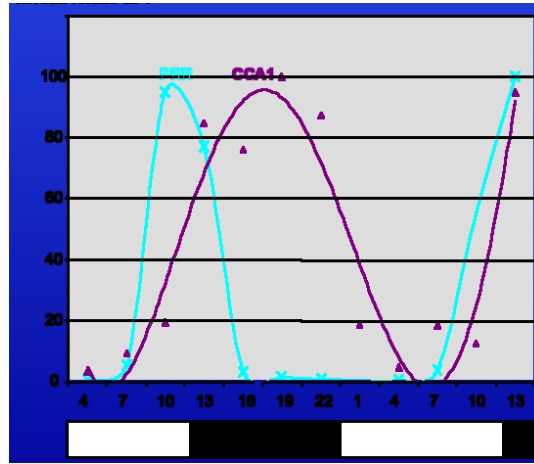
$$\frac{dp_T}{d\tau} = \delta_{p_T} \left( m_T - \frac{\kappa_{p_T} p_T}{\kappa_{p_T} + p_T} \right) \quad (3b)$$

$$\frac{dm_C}{d\tau} = \mu_C + \frac{\lambda_C p_T^{n_T}}{1 + p_T^{n_T}} - \frac{\kappa_{m_C} m_C}{\kappa_{m_C} + m_C} \quad (3c)$$

$$\frac{dp_C}{d\tau} = \delta_{p_C} \left( m_C - \frac{\kappa_{p_C} p_C}{\kappa_{p_C} + p_C} \right). \quad (3d)$$

où  $m_T$  et  $p_T$  ( $m_C$  et  $p_C$ ) représentent les quantités d'ARN et de protéine du gène *TOC1* (*CCA1*). Les paramètres  $n_{T,C}$ ,  $\lambda_{T,C}$ ,  $\mu_{T,C}$  et  $\delta$ ,  $\delta_{p_T,p_C}$  ont la même signification que dans (1). Les coefficients  $\kappa_i$  caractérisent la saturabilité des dégradations enzymatiques des différentes molécules en présence.

De même que pour le modèle (1), l'apparition d'oscillations dans le modèle (3) dépend de manière cruciale des mécanismes de dégradation. Plus précisément, il faut qu'au moins un certain nombre des quatre molécules impliquées dans la boucle soient dégradées de manière enzymatique, et que cette dégradation soit suffisamment saturée (à un moindre degré cependant que pour le circuit à un gène). Il est intéressant de noter au passage que le système (3) peut se ramener dans une certaine limite à la variante du célèbre oscillateur de Goodwin [3] donnée par Bliss *et al.* [17].



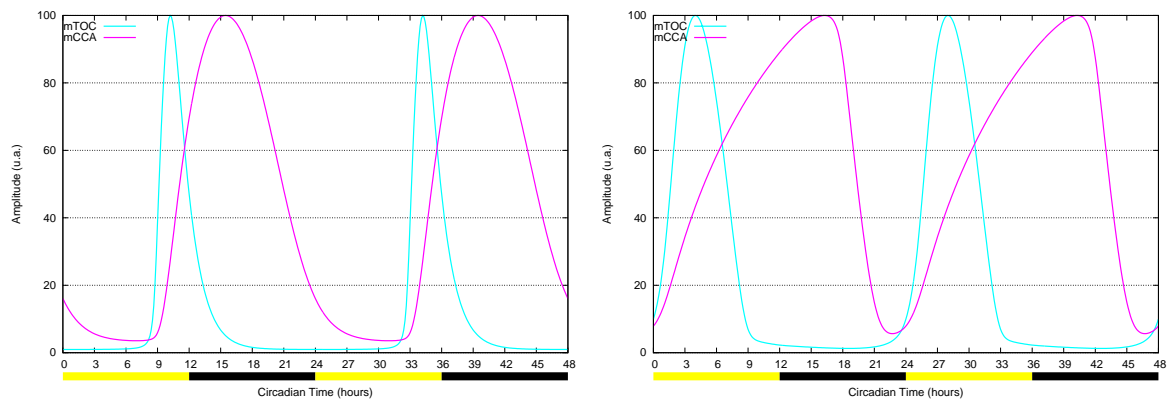
**Fig.2.** Niveaux d'expression en alternance jour/nuit des gènes *TOC1* (alias *PRR*) et *CCA1* d'O. tauri en fonction du temps circadien (CT : "circadian time"), CT0 correspondant au début du jour. Données expérimentales du groupe Horloge circadienne et cycle cellulaire de l'observatoire océanologique de Banyuls/mer. Malgré les incertitudes de mesure, on peut caractériser les deux courbes par des grandeurs relativement reproductibles. Ainsi, la quantité d'ARN de *TOC1* est maximale vers CT10.5, avec une largeur à mi-hauteur d'environ 6 heures, et un long passage à zéro entre CT17 et CT7. En ce qui concerne *CCA1*, la présence de l'ARN est beaucoup plus étalée dans le temps, avec un pic vers CT17, une largeur à mi-hauteur d'environ 12 heures et un point bas aux alentours de CT7.



Notre but est de comparer les prédictions du modèle (3) aux données expérimentales concernant les variations dans le temps des ARN et des protéines de l'horloge. Cette comparaison est d'autant plus intéressante que la boucle TOC1/CCA1 a été un temps évoquée comme modèle pour l'horloge d'*Arabidopsis* [16,18] avant d'être délaissée au profit de circuits plus sophistiqués à plusieurs boucles de rétroaction [19]. Or, comme on le voit sur la figure 1, qui montre les variations dans le temps des niveaux d'ARN des gènes TOC1 et CCA1 en alternance jour/nuit, l'horloge d'*Ostreococcus* présente une différence importante avec celle d'*Arabidopsis* : CCA1 est à son maximum d'expression en début de nuit plutôt qu'au petit matin. Etant donné qu'*Ostreococcus* se caractérise généralement par une relative simplicité, il était donc important de déterminer si la boucle à deux gènes pourrait être un meilleur modèle pour cette algue que pour *Arabidopsis*. Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à reproduire les régimes en alternance jour/nuit, généralement plus reproductibles que les régimes en éclairage constant.

Le modèle (3) décrit la régulation réciproque des gènes TOC1 et CCA1, mais ne précise pas le mécanisme d'action de la lumière sur la boucle. En l'absence d'informations précises, il nous faut donc envisager plusieurs scénarios différents, associés à des modulations différentes des paramètres. L'horloge pourrait être ainsi entraînée et synchronisée au cycle jour/nuit par une dégradation accélérée d'une protéine ou d'une autre, et ce le jour ou plutôt la nuit, ou encore par une réduction de l'activité transcriptionnelle d'une des deux protéines dans l'une des deux périodes. On peut évidemment espérer que les tests de ces différents mécanismes nous fournissent des pistes sur le couplage effectivement présent.

La figure 2 montre ainsi deux simulations préliminaires du modèle (3). Ces profils temporels ont été obtenus en cherchant des jeux de paramètres pour lesquels ils se rapprochaient le plus des données expérimentales (fig. 2). On constate sur la partie gauche de la figure que l'hypothèse d'une dégradation accélérée de la protéine TOC1 la nuit permet au modèle à deux gènes d'ajuster relativement bien les données expérimentales : les caractéristiques des profils expérimentaux et théoriques coïncident avec une très bonne précision, si ce n'est un pic de CCA1 un peu en avance. On note toutefois sur la figure 2 qu'il n'est pas exclu que ce pic arrive en fait plus tôt que ne l'indique la ligne tracée pour guider l'oeil.



**Fig.3.** Simulations numériques du modèle (3) avec deux hypothèses différentes de coopérativité et de couplage de la lumière externe à la boucle génétique. Dans les deux cas, on teste un grand nombre de jeux de paramètres différents, et celui pour lequel les solutions s'approchent le plus de des courbes expérimentales de la figure 2 est retenue. (gauche) Dégradation accélérée de la protéine TOC1 la nuit, régulation par un monomère de TOC1 et un dimère de CCA1 ; (droite) Dégradation accélérée de la protéine CCA1 la nuit, régulation par des monomères de TOC1 et de CCA1. On constate que l'hypothèse de gauche est nettement plus vraisemblable que celle de droite.

Evidemment, des comparaisons plus précises impliquant également les profils temporels des protéines ainsi que les données en éclairage constant seront nécessaires avant de se prononcer définitivement sur la pertinence du système (3) en tant que modèle de l'horloge circadienne d'*Ostreococcus*. Les résultats préliminaires présentés ici sont cependant étonnamment encourageants.

## 4 Conclusion

Nous avons observé que la prise en compte d'une dynamique transcriptionnelle élargit les zones de paramètres où des mécanismes de dégradation non linéaires peuvent induire des oscillations dans l'expression d'un gène réprimé par sa propre protéine. Ces mécanismes de dégradation sont également importants pour comprendre l'apparition d'oscillations dans la boucle à deux gènes, qui est par ailleurs un modèle hypothétique de l'horloge circadienne de l'algue unicellulaire *Ostreococcus tauri*. Des calculs préliminaires montrent qu'à condition de supposer certains modes d'action de la lumière sur les acteurs moléculaires, ce système semble bien reproduire les observations expérimentales.

## Références

1. H. HIRATA *et al.*, Oscillatory expression of the bHLH factor Hes1 regulated by a negative feedback loop, *Science* **298**, 840–843 (2002).
2. C. A. STRAYER & S. A. KAY, The ins and outs of circadian regulated gene expression, *Curr. Opin. Plant Biol.* **2**, 114 (1999).
3. B. C. GOODWIN, Oscillatory behavior of enzymatic control processes, *Adv. Enzyme Regul.* **3**, 425–439 (1965).
4. J. S. GRIFFITH, Mathematics of cellular control processes I. Negative feedback to one gene, *J. Theor. Biol.* **20**, 202 (1968).
5. A. GOLDBETER, A model for circadian oscillations in the Drosophila period protein (PER), *Proc. R. Soc. Lond. B* **261**, 319 (1995).
6. J.-C. LELOUP, D. GONZE, AND A. GOLDBETER, Limit cycle models for circadian rhythms based on transcriptional regulation in Drosophila and Neurospora, *J. Biol. Rhythms* **14**, 433 (1999).
7. M. H. JENSEN, K. SNEPPEN & G. TIANA, Sustained oscillations and time delays in gene expression of protein Hes1, *FEBS Lett.* **541**, 176–177 (2003).
8. N. A. M. MONK, Oscillatory expression of Hes1, p53 and NK- $\kappa$ B driven by transcriptional time delays, *Curr. Biol.* **13**, 1409 (2003).
9. J. LEWIS, Autoinhibition with transcriptional delay : a simple mechanism for the zebrafish somitogenesis oscillator, *Curr. Biol.* **13**, 1398 (2003).
10. I. GOLDING, J. PAULSSON, S. M. ZAWILSKI, AND E. C. COX, Real-time kinetics of gene activity in individual bacteria, *Cell* **123**, 1025 (2005).
11. P. FRANÇOIS & V. HAKIM, Core genetic module : the mixed feedback loop, *Phys. Rev. E* **72**, 031908 (2005).
12. J. J. TYSON, C. I. HONG, D. THRON AND B. NOVAK, A simple model of circadian rhythms based on dimerization and proteolysis of PER and TIM, *Biophys. J.* **77**, 2411 (1999).
13. N. E. BUCHLER, U. GERLAND, AND T. HWA, Nonlinear protein degradation and the function of genetic circuits, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102**, 9559 (2005).
14. A. GOLDBETER, *Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms : The molecular bases of periodic and chaotic behaviour* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
15. C. P. FALL, E. S. MARLAND, J. M. WAGNER, AND J. J. TYSON, *Computational Cell Biology* (Springer, New York, 2002).
16. D. ALABADI, T. OYAMA, M. J. YANOVSKY, F. G. HARMON, P. MAS, S. A. KAY, Reciprocal regulation between TOC1 and LHY/CCA1 within the Arabidopsis circadian clock, *Science* **293**, 880 (2001).
17. R. D. BLISS, P. R. PAINTER, AND A. G. MARR, Role of feedback inhibition in stabilizing the classical operon, *J. Theor. Biol.* **97**, 177 (1982).
18. J. C. W LOCKE, A. J. MILLAR, AND M. S. TURNER, Modelling genetic networks with noisy and varied experimental data : the circadian clock in *Arabidopsis thaliana*, *J. Theor. Biol.* **234**, 383 (2005).
19. J. C. W LOCKE, M. M. SOUTHERN, L. KOZMA-BOGNAR, V. HIBBERD, P. E. BROWN, M. S. TURNER, AND A. J. MILLAR, Extension of a genetic network model by iterative experimentation and analysis, *Mol. Systems Biol.*, doi :10.138/msb4100018.

# Extraction des zones d'intérêt d'une image à l'aide d'un réseau cellulaire non linéaire

B. Nofiele, S. Morfu & P. Marquié

Laboratoire LE2I UMR 5158, Aile des sciences de l'ingénieur BP 47870 , 21078 Dijon Cedex  
 brice.nofiele@u-bourgogne.fr, smorfu@u-bourgogne.fr & marquie@u-bourgogne.fr

**Résumé.** Nous proposons un réseau cellulaire non linéaire ou *CNN* (Cellular Nonlinear Network) régi par des équations de réaction-diffusion pour une application de traitement d'images. Nous montrons que l'utilisation d'une non linéarité appropriée permet d'extraire les zones d'intérêt d'une image bruitée et faiblement contrastée. Nous construisons ainsi un système multistable dont le nombre d'états stables est adaptable en fonction de l'image à traiter. Nous terminons en proposant une approche pour l'implémentation électronique ou microélectronique du réseau multistable proposé. En particulier nous détaillons la réalisation électronique de la cellule élémentaire du réseau. Nous montrons que le comportement théorique de la cellule élémentaire est vérifié expérimentalement.

**Abstract.** We propose a cellular nonlinear network based on reaction-diffusion equations for image processing purpose. We show that using a specific nonlinearity allows to extract regions of interest in a noisy and weakly contrasted image without needing any processing time setting. We finally present the sketch of an elementary cell of the *CNN* for further electronic implementation.

## 1 Introduction

Au cours des dix dernières années, de puissants outils de traitement d'images basés sur les réseaux cellulaires non linéaires ou *CNNs* (Cellular Nonlinear Networks) ont été développés [1,2]. En effet, l'efficacité des *CNNs* à résoudre des problèmes d'une grande complexité algorithmique provient de leur architecture parallèle. Ainsi, la recherche du plus court chemin dans un labyrinthe [3], l'extraction du squelette d'une image [4], la restauration des composantes individuelles d'une image [5], sont quelques exemples remarquables d'applications des *CNNs*. Par ailleurs, dans de nombreux problèmes de reconnaissances de formes, des opérations simples de traitement d'images peuvent être réalisées avec les *CNNs*, comme la détection de contours [6], le filtrage du bruit [7] ou encore le réhaussement de contraste [8,9],

...

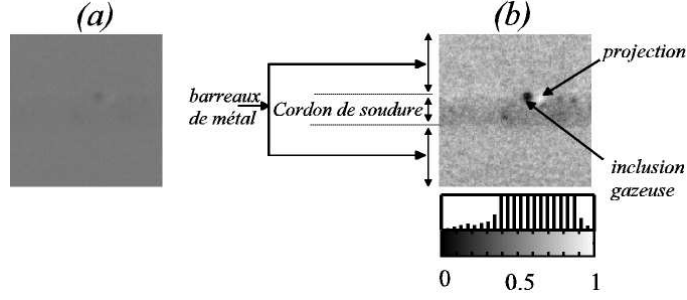
Nous proposons un *CNN* régi par des équations de réaction-diffusion pour l'extraction de zones d'intérêt d'une image bruitée et faiblement contrastée, et ce grâce à l'utilisation d'une non linéarité appropriée. Nous construisons ainsi un système multistable dont le nombre d'états stables est adaptable en fonction de l'image à traiter.

Pour tester notre *CNN*, nous utilisons l'image de la Fig. 1 (a) obtenue après numérisation d'une radiographie représentant la soudure de deux barreaux métalliques. Cette image, fournie par le laboratoire LCND du CEA de Valduc, doit permettre de caractériser les défauts survenus lors de la soudure.

Nous avons réhaussé le contraste de l'image de la Fig. 1 (a) en renormalisant son échelle de gris sur l'intervalle  $[0; 1]$ . L'image ainsi pré-traitée de la Fig. 1 (b) révèle quatre zones d'intérêt (les défauts) qu'il s'agit d'extraire avec notre *CNN* :

- Le "*fond*" en gris clair correspond aux deux barreaux de métal.
- La partie centrale représente le "*cordon de soudure*".
- A l'extérieur du "*cordon de soudure*", la "*projection*" de matière survenue lors de la soudure apparaît comme un disque gris clair.
- Le petit disque gris foncé à l'intérieur du "*cordon de soudure*" correspond à une "*inclusion gazeuse*".

Pour finir, nous présentons une approche pour l'implémentation électronique du réseau multistable proposé. En particulier, nous détaillons la réalisation électronique de la cellule élémentaire du réseau à partir



**Fig.1.** (a) : Image faiblement contrastée fournie par le laboratoire LCND du CEA de Valduc, France. (b) : Image réhaussée après une renormalisation de son histogramme dans l'intervalle  $[0; 1]$ . Les flèches indiquent les zones d'intérêts qui doivent être extraites.

de composants discrets, ce qui pourrait permettre une intégration électronique ou microélectronique de l'ensemble du réseau pour des applications de traitement d'image en temps réel.

## 2 Le *CNN* bistable

Nous considérons un *CNN* dont l'état des cellules  $X_{i,j}$ , est défini par les équations suivantes :

$$\frac{dX_{i,j}}{dt} = f(X_{i,j}) + D \sum_{(k,l) \in Nr} (X_{k,l} - X_{i,j}), \quad \text{avec } i, j = 1 \dots N, 1 \dots M. \quad (1)$$

où  $f$  représente la non linéarité,  $Nr = \{i - 1, i, i + 1\} \times \{j - 1, j, j + 1\}$  est le voisinage considéré pour la cellule d'indice  $i, j$ ,  $N \times M$  est la taille de l'image et  $D$  est le coefficient de diffusion. La condition initiale appliquée à la cellule d'indice  $i, j$  du réseau correspond au niveau de gris du pixel  $(i, j)$  de l'image à traiter. L'image filtrée, pour un temps de traitement  $t$ , s'obtient en relevant l'état de chaque cellule  $X_{i,j}(t)$  à cet instant  $t$ .

Dans le cas de l'équation de Nagumo [12],  $f$  est choisie cubique avec trois zéros, 0,  $a$  et 1. Les racines 0 et 1 correspondent à des états stables du système, tandis que le seuil de non linéarité " $a$ " correspond à un état instable.

Ce *CNN* a prouvé son efficacité pour réaliser des opérations telles que la détection de contour pour  $a \neq 0.5$  [6] et des opérations de filtrage du bruit pour  $a = 0.5$  [7]. Cependant, ces applications dépendent l'une comme l'autre du temps de traitement, ce qui nuit à une automatisation possible.

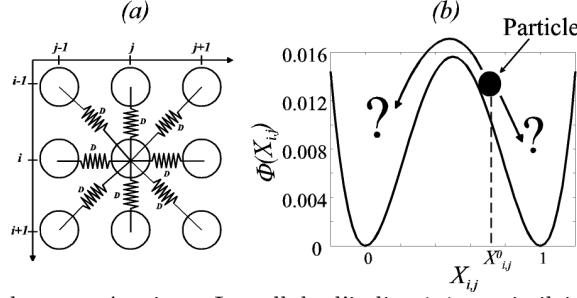
Nous limiterons notre étude pour  $a = 0.5$  et au cas stationnaire, c'est à dire quand les cellules du réseau n'évoluent plus.

Si l'on considère l'analogie mécanique décrite à la Fig. 2, l'équation (1) modélise également un réseau sur-amorti de  $N \times M$  particules couplées avec des ressorts et soumises à une force non linéaire  $f$  dérivant d'un potentiel de type double puits  $\Phi(x) = - \int_0^x f(u) du$ .

Par conséquent, selon la valeur de la force non linéaire  $f(X_{i,j})$  par rapport à la résultante des forces élastiques  $D \sum_{(k,l) \in Nr} (X_{k,l} - X_{i,j})$  appliquée à la particule  $(i, j)$ , la particule de position initiale  $X_{i,j}^0$  est attirée dans l'un ou l'autre des deux puits de potentiel [10].

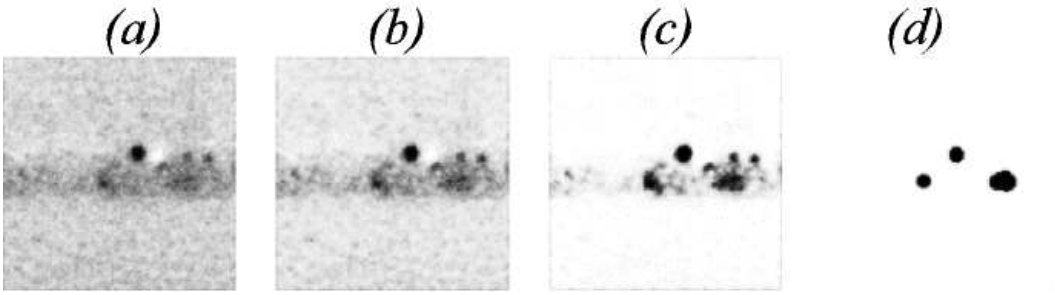
D'un point de vue traitement d'images, cela signifie que chaque pixel, en fonction de son niveau de gris initial  $X_{i,j}^0$ , prendra une valeur de niveau de gris correspondant à la position de l'un ou l'autre des minima du potentiel, soit 0 pour le noir ou 1 pour le blanc [9].

Ainsi, pour un temps de traitement suffisamment long, et en utilisant une non linéarité avec deux états stables 0 et 1, l'image obtenue ne conservera que deux zones d'intérêt qui apparaîtront en noir et en



**Fig.2.** Le CNN d'un point de vue mécanique. La cellule d'indice  $i, j$  est similaire à une particule sur-amortie couplée avec ses 8 voisins par des ressorts de raideur  $D$  (voir (a)). Cette particule est également soumise à une force non linéaire  $f(X_{i,j}) = -X_{i,j}(X_{i,j} - 0.5)(X_{i,j} - 1)$  qui dépend du déplacement de la particule  $X_{i,j}$ . En fonction de la force exercée par les ressorts sur la particule et de la force non linéaire  $f$ , celle-ci sera attirée dans l'un ou l'autre des deux puits du potentiel représenté en (b).

blanc. Ceci rend donc le CNN bistable non adapté pour l'extraction des zones d'intérêt de notre image, tel que le révèle la Fig. 3.



**Fig.3.** Image obtenue par simulation numérique du CNN bistable par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 avec un pas d'intégration temporelle  $dt = 10^{-3}$  pour  $a = 0.5$  et  $D = 0.025$  pour différents temps de traitements. (a)  $t = 3$ , (b)  $t = 5$ , (c)  $t = 10$ , (d)  $t = 3000$ .

En effet, la figure 3 montre que au cours du temps, le bruit est tout d'abord filtré (a) et (b). Cependant, la structure cohérente de l'image est détruite puisque "le cordon de soudure" commence à disparaître pour  $t = 3$  (figure 3 (b)). D'ailleurs comme le montre la figure 3 (c), pour un temps de traitement plus long  $t = 10$ , "la projection" disparaît elle aussi dans "le fond" en blanc. Enfin, quand toutes les cellules n'évoluent plus, l'image obtenue est représentée Fig. 3 (d) où "le cordon de soudure" a complètement disparu dans "le fond" en blanc, de même que "la projection" à partir du temps  $t = 5$  figure 3 (b). Le CNN bistable est donc inadapté pour le traitement envisagé.

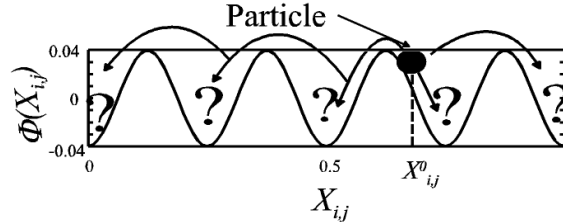
### 3 Le CNN multistable

Dans cette partie, nous augmentons le nombre d'états stables, pour pouvoir extraire toutes les zones d'intérêt de l'image et pour pouvoir conserver la structure cohérente de l'image initiale. Pour cela nous considérons un CNN multistable défini par l'équation (1), mais cette fois avec la force non linéaire :

$$f(x) = -\beta(n-1) \sin \left[ 2\pi(n-1)x \right], \quad (2)$$

qui dérive d'un potentiel de type multi-puits  $\Phi(x) = -\int_0^x f(u)du$  comme celui représenté sur la figure 4. Dans l'équation (2),  $n$  fixe le nombre d'états stables, ce qui correspond au nombre de puits du potentiel,

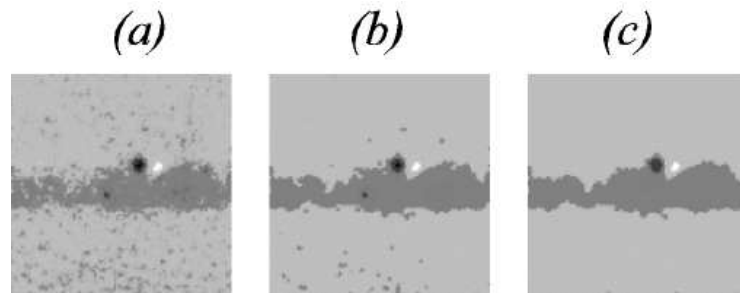
tandis que  $\beta$  permet de régler la hauteur de la barrière de potentiel entre deux extrema du potentiel.



**Fig.4.** Potentiel multistable pour  $n = 5$  et  $\beta = 0.25$ . Un pixel avec un niveau de gris initial  $X_{i,j}^0$  est assimilable à une particule soumise à une force élastique qui peut produire des transitions dans l'un des cinq fonds de puits du potentiel.

Comme pour le *CNN* bistable, nous avons simulé le *CNN* multistable régi par les équations (1) et (2) en utilisant l'algorithme de Runge Kutta d'ordre quatre avec un pas d'intégration temporel  $dt = 10^{-3}$ . De plus, nous utilisons l'image de la figure 1 comme condition initiale dans le réseau. Après un temps de traitement  $t$ , nous notons l'état du réseau pour obtenir l'image filtrée. Les résultats obtenus avec le *CNN* multistable sont représentés sur la figure 5 pour différents temps de traitement.

Contrairement au *CNN* bistable, les figures 5 (a) et (b) pour  $t = 0.1$  et  $t = 0.5$  montrent que le bruit



**Fig.5.** Image obtenue avec le *CNN* multistable. Paramètres de simulations :  $n = 5$ ,  $\beta = 0.25$ ,  $D = 1.4$ . (a)  $t = 0.1$ , (b)  $t = 0.5$ , (c)  $t = 50000$ .

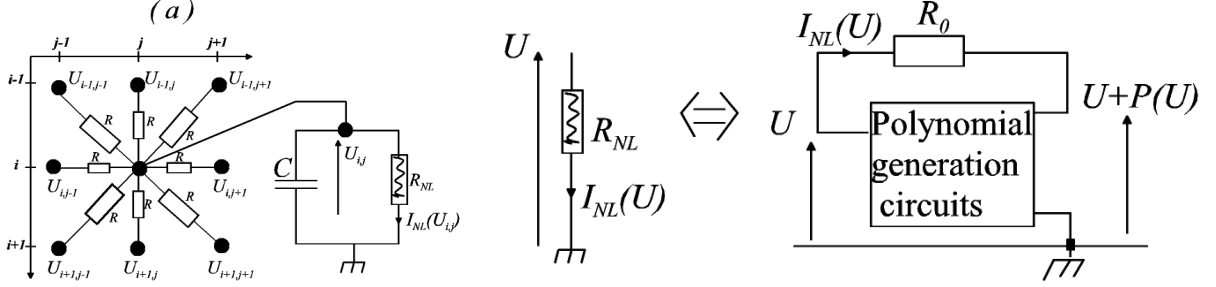
est tout d'abord filtré tandis que la structure cohérente de l'image à savoir "*la projection*", "*l'inclusion gazeuse*", "*le fond*" et "*le cordon de soudure*", est conservée. Enfin pour un temps de traitement suffisamment long, l'image n'évolue plus et chaque zone d'intérêt apparaît avec un niveau de gris moyen différent, correspondant à l'un des cinq minimum du potentiel. Un seuillage permet finalement d'extraire individuellement chaque défaut présent dans l'image initiale.

#### 4 Implémentation Electronique du *CNN* multistable

Dans cette partie, nous proposons une implémentation électronique de la cellule élémentaire du *CNN* multistable décrit par les équations (1) et (2). Le *CNN* est réalisé en couplant les cellules de la figure 6 (a) à leur huit voisins par une résistance linéaire  $R$ . La cellule élémentaire du *CNN* est constituée d'un condensateur en parallèle avec une résistance non linéaire dont la caractéristique courant-tension est

définie sur l'intervalle  $[-2V; 2V]$  par la fonction sinusoïdale :

$$I_{NL}(U) = 2 \times 10^{-3} \sin(2\pi U). \quad (3)$$



**Fig.6.** (a) Schéma de principe du CNN. (b) Résistance non linéaire et son circuit équivalent utilisant une source polynomiale  $R_0 = 2K\Omega$ .

En appliquant les lois de Kirchhoff au nœud  $i, j$  du CNN, nous obtenons directement l'équation qui décrit le réseau :

$$C \frac{dU_{i,j}}{d\tau} = -I_{NL}(U_{i,j}) + \frac{1}{R} \sum_{(k,l) \in Nr} (U_{k,l} - U_{i,j}),$$

où  $Nr = \{i-1, i, i+1\} \times \{j-1, j, j+1\}$  est le voisinage considéré et  $\tau$  correspond au temps expérimental.

La résistance non linéaire est développée par la méthode décrite dans [11] et son schéma de principe est rappelé à la figure 6 (b). Le courant non linéaire  $I_{NL}(U)$  est obtenu via la loi d'Ohm aux bornes d'une résistance linéaire  $R_0$  qui sert de contre réaction entre l'entrée  $U$  et la sortie de la source polynomiale qui produit la tension  $P(U) + U$ . Le courant non linéaire s'écrit donc

$$I_{NL}(U) = -P(U)/R_0. \quad (4)$$

Pour synthétiser le courant sinusoïdal (3) dans l'intervalle  $[-2V, 2V]$ , nous l'avons interpolé par un polynôme en utilisant la méthode des moindres carrés. On déduit ainsi les coefficients du polynôme  $P(U)$  qui permet de réaliser le courant sinusoïdal.

La figure 7 montre un bon accord entre l'expression théorique (3) et la caractéristique courant-tension expérimentale de la résistance non linéaire. Les faibles écarts sont en fait liés à l'approximation de la loi sinusoïdale avec la méthode des moindres carrés.

En appliquant les changements de variables aux équations (1) et (2)

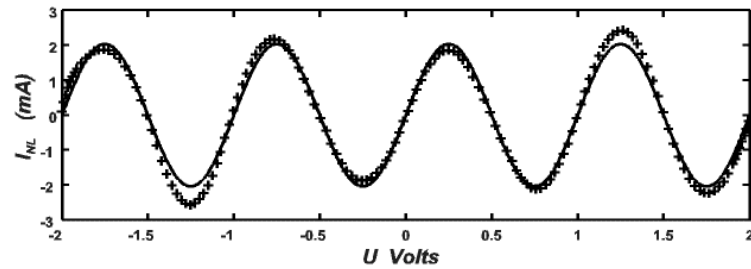
$$\tau = tR_0C, \quad \beta = \frac{2R_0}{(n-1)^2} \times 10^{-3}, \quad U_{i,j} = X_{i,j}(n-1) - 2, \quad \text{et} \quad D = \frac{R_0}{R},$$

l'équation du réseau peut se réduire à la forme normalisée

$$\frac{dX_{i,j}}{dt} = \frac{P(X_{i,j}(n-1) - 2)}{n-1} + D \sum_{(k,l) \in Nr} (X_{k,l} - X_{i,j}). \quad (5)$$

Cette forme normalisée de l'équation du réseau correspond à celle qui a été simulée au paragraphe 3 à des fins de traitement d'images.

Il est ainsi possible de réaliser électroniquement le traitement d'images proposé au paragraphe 3.



**Fig.7.** Caractéristique courant-tension de la résistance non linéaire. l'expression théorique en trait plein est comparée aux valeurs expérimentales représentées par des croix.

## 5 Conclusion

Nous avons proposé un *CNN* pour l'extraction des zones d'intérêt d'une image. Contrairement à certains *CNNs* existants [5], notre approche s'implémente sans réglage du temps de traitement, puisque l'image filtrée est obtenue quand toutes les cellules du *CNN* n'évoluent plus. Cette caractéristique peut être d'un grand intérêt pour une intégration électronique ou microélectronique du *CNN* pour effectuer des traitements en temps réel.

## Références

1. L.O. CHUA, *A Paradigm for Complexity*, (World Scientifique), Singapore (1998).
2. P. JULIÁN, R. DOGARU & L. CHUA, A piecewise-Linear Simplicial Coupling Cell for CNN Gray-Level Image Processing, *IEEE Transaction on circuits and systems-I*, **49**, 904-913, (2002).
3. N.G. RAMBIDI & D. YAKOVENCHUK, Chemical reaction-diffusion implementation of finding the shortest paths in a labyrinth, *Phys. Rev. E*, **63**, 026607, (2001).
4. A. ADAMATZKY, B. DE LACY COSTELLO & N. M. RATCLIFFE, Experimental reaction-diffusion pre-processor for shape recognition *Phys. Lett. A*, **297**, 344-352, (2002).
5. N.G. RAMBIDI, K.E. SHAMAYAEV & G. YU PESHKOV, Image processing using light-sensitive chemical waves, *Phys. Lett. A*, **298**, 375-382, (2002).
6. J.C. COMTE, P. MARQUIÉ & J.M. BILBAULT, Contour detection based on nonlinear discrete diffusion in a cellular nonlinear network, *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **11**, 179-183, (2001).
7. J.C. COMTE, P. MARQUIÉ, J.M. BILBAULT & S. BINCZAK, Noise removal using a nonlinear two-dimensional diffusion network, *Ann. Télécommun.*, **53**, 483-487, (1998).
8. S. MORFU & J.C. COMTE, A nonlinear oscillators network devoted to image processing *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **14**, 1385-1394, (2004).
9. S. MORFU, Image processing with a cellular nonlinear network, *Phys. Lett. A*, **343**, 281-292, (2005).
10. S. MORFU, *Phys. Lett. A*, **317**, 73-79 (2003).
11. J.C. COMTE & P. MARQUIÉ, *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **12**, 447-449, (2002).
12. J.D. MURRAY, *Mathematical Biology*, (Springer-Verlag), Berlin (1989).



# Caractérisation expérimentale de la compétition non-linéaire de modes de Kelvin-Helmholtz dans un écoulement en cavité

R. Pethieu, L. R. Pastur, F. Lusseyran, & Th. M. Faure

LIMSI-CNRS BP 133  
Bât 508 - Université Paris Sud  
91403 Orsay Cedex  
luc.pastur@limsi.fr

**Résumé.** Un phénomène non-linéaire de compétition de modes d'oscillation de la couche de cisaillement d'un écoulement affleurant une cavité est observé sur une large gamme de vitesses amont. À partir de mesures LDV sur l'écoulement en aval de la cavité, nous montrons que ce phénomène résulte essentiellement d'un échange de stabilité non-linéaire entre les deux modes principaux, et caractérisons les taux de présence de chacun des modes. En discriminant les événements associés à chaque mode d'oscillation, nous déterminons, à partir de champs de vitesse sous-échantillonnés obtenus par PIV, les structures cohérentes spatiales associées à chacun de ces deux modes.

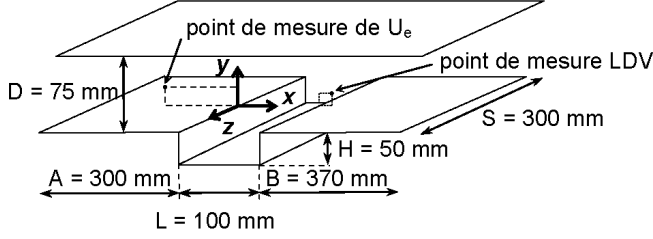
**Abstract.** A nonlinear phenomenon of competing modes, in the oscillating shear layer of a cavity flow at moderate Reynolds numbers, is observed over a large range of upstream velocities. From LDV measurements downstream of the flow, we show that the phenomenon is essentially due to a nonlinear switching mode phenomenon between the two main spectral components. We characterize the existence rate of each mode. From under-sampled PIV realizations of the velocity field, we are able to identify the spatial coherent structures associated to each mode of the shear layer oscillations.

## 1 Introduction

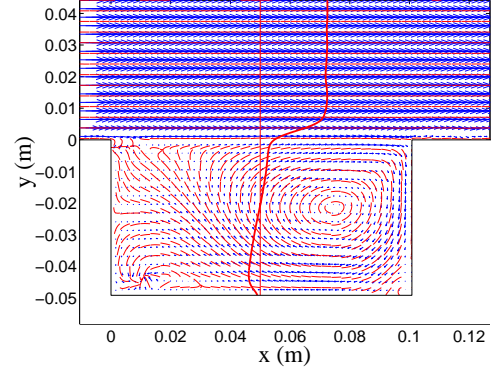
L'écoulement en cavité est un paradigme abondamment étudié pour les écoulements autour de discontinuités structurelles d'engins [1]. Dans notre expérience, l'écoulement s'effectue à basse vitesse, et peut donc être considéré comme incompressible. La couche de cisaillement qui se forme à l'affleurement amont de la cavité est théoriquement instable dès lors que l'écoulement amont existe [2]. Nous présentons les caractéristiques de l'instabilité pour des valeurs  $U_e$  de la vitesse amont comprises entre 0,7 et 2,8 m/s (le nombre de Reynolds correspondant  $Re = U_e L / \nu$ , construit sur la longueur  $L$  de la cavité, varie entre 4600 et 18600 ;  $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  pour l'air). Nous verrons dans la section 3 que la plupart des régimes font apparaître deux modes d'oscillation non harmoniques dans le spectre de puissance réalisé sur des mesures par vélocimétrie laser Doppler (acronyme anglo-saxon : LDV) dans l'écoulement aval de la cavité. Ces deux modes entrent en compétition non-linéaire de telle manière que la présence d'un mode tend à défavoriser le développement du second. Dans la section 4, nous étudions plus précisément ce phénomène pour  $U_e = 2 \text{ m/s}$  ( $Re \simeq 14000$ ), et nous identifions les structures spatiales associées à chacun de ces deux modes d'oscillation par moyenne de phase sur des champs de vitesse instantanés de l'écoulement dans la section 6.

## 2 Dispositif expérimental

La cavité a pour longueur  $L = 100 \text{ mm}$ , hauteur  $H = 50 \text{ mm}$ , largeur  $S = 300 \text{ mm}$  (cf Figure 1a). Les axes  $(x, y, z)$  sont exprimés en unités de la longueur  $L$ . Le rapport de forme de la cavité vaut  $R = L/H = 2$ . Le bord amont se trouve en  $x = 0$ ,  $y = 0$ , le bord aval en  $x = +1$ , le fond de la cavité en  $y = -1/2$ , et les bords latéraux en  $z = \pm 1,5$ . L'écoulement est créé par un ventilateur centrifuge placé en amont de la chambre de tranquillisation de la soufflerie. Un conduit se terminant par un nid d'abeille



(a) Schéma



(b) Champ de vitesse

**Fig.1.** a) Schéma de la veine d'essais et de la cavité. Le volume de mesure LDV est placé à 15 mm en aval de la cavité ( $x = +1,15$ ), 15 mm au-dessus de la plaque aval ( $y = +0,15$ ,  $z = 0$ ). b) Champ de vitesse moyen  $\bar{u}(x, y)$ , à  $U_e = 2$  m/s, réalisé sur 1100 champs instantanés obtenus par PIV. Les lignes de courant sont également représentées, ainsi que le profil de vitesse longitudinale  $u_x(y)$  en fonction de l'altitude  $y$  (en unités arbitraires), à l'abscisse  $x = 0,05$  (milieu de la cavité).

et un convergent amène l'écoulement vers la section d'essais. La paroi supérieure de la section d'essais se trouve à 75 mm au-dessus de la cavité ( $y = +0,75$ ). L'épaisseur de la couche limite sur cette paroi reste inférieure à 10 mm et a essentiellement pour effet d'accélérer le fluide au-dessus de la cavité ( $U_1 > U_e$ ), par conservation du débit. La vitesse amont  $U_e$  est mesurée à 102 mm en amont de la cavité ( $x = -1,02$ ), et 25.5 mm au-dessus de la plaque amont ( $y = +0,255$ ,  $z = 0$ ).

La vitesse longitudinale  $u_x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x$  de l'écoulement est mesurée par LDV au point aval représenté sur la Figure 1a. La source lumineuse est fournie par un laser Argon-ion continu à 488 nm (bleu). La fréquence moyenne d'échantillonnage, utilisée pour ré-échantillonner la série, vaut  $f_{LDV} = 1530$  Hz.

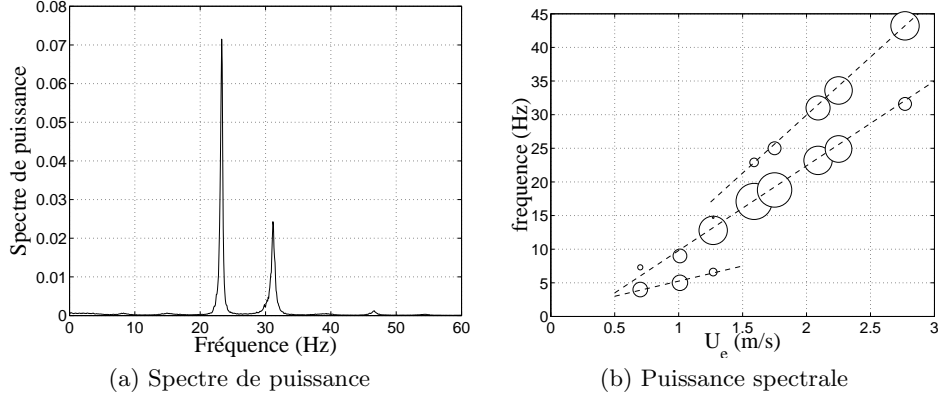
Le champ de vitesse est obtenu par vélocimétrie par image de particules (acronyme anglo-saxon : PIV) basé sur un algorithme de flot optique utilisant une programmation dynamique orthogonale [3]. La fréquence d'échantillonnage vaut  $f_{PIV} = 10$  Hz. Le système de PIV comprend un laser YAG pulsé de 30 mJ à la longueur d'onde 532 nm (vert), dont le faisceau est étendu en une nappe d'épaisseur 0,25 mm. L'enregistrement des images est assuré par une caméra CCD de résolution  $1032 \times 778$  cadencée à 20 Hz.

### 3 Étude paramétrique de l'instabilité

Sur la Figure 1b est présenté le champ de vitesse moyen de l'écoulement à  $U_e = 2$  m/s, obtenu par PIV. Le profil de vitesse, relevé à l'abscisse  $x = 0.05$ , présente un point d'inflexion qui le rend instable d'après le critère de Rayleigh [2].

Le spectre de puissance associé à la série LDV à  $U_e = 2$  m/s présente 2 pics principaux non harmoniques, à  $f_1 = 23,2$  Hz et  $f_2 = 31,0$  Hz, d'intensités inégales (Figure 2a). C'est le cas le plus fréquemment rencontré lorsque  $U_e$  varie. Un cas particulier est observé autour de  $U_e = 1,3$  m/s, où le spectre se réduit quasiment à un seul pic principal autour de la valeur  $f_1 \sim 13$  Hz. Pour des vitesses  $U_e < 1,3$  m/s, le spectre fait apparaître deux modes  $f_0$  et  $f_1 > f_0$ , dont les intensités relatives varient avec  $U_e$ . Le mode  $f_0$  disparaît pour  $U_e > 1,3$  m/s, mais un second mode  $f_2 > f_1$  le remplace et croît en intensité avec  $U_e$  (Figure 2b). Les deux modes ne coexistent cependant que rarement dans le signal au cours du temps. Pour déterminer l'amplitude instantanée  $\rho_i(t)$  de chacun des modes, nous réalisons une démodulation complexe de la série  $s(t)$  filtrée autour du mode  $f_i$ , basée sur la transformée intégrale de Hilbert  $\mathcal{H}\{\}$  d'un signal réel  $f(t)$  :

$$\mathcal{H}\{f(t)\} = \frac{1}{\pi t} * f(t) \quad (1)$$

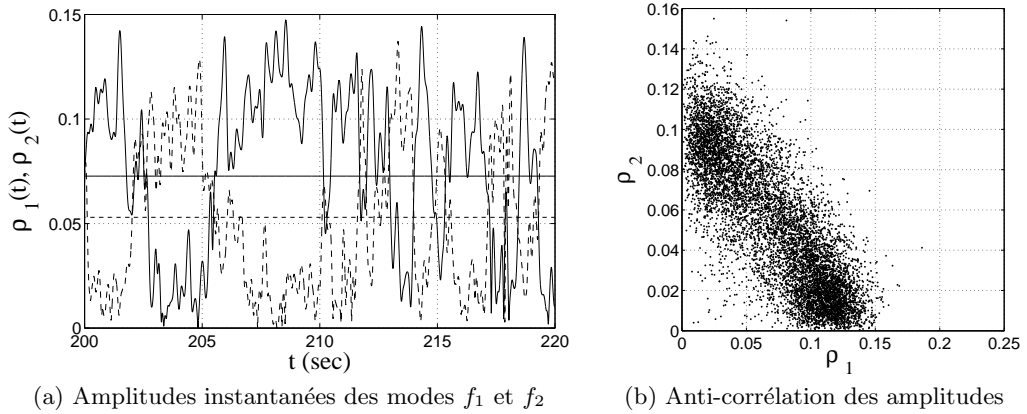


**Fig.2.** a) Spectre de puissance (normalisé à 1) du signal LDV, à  $U_e = 2$  m/s. b) Puissance spectrale des pics principaux dans le plan  $(U_e, f)$ . Le rayon d'un cercle est proportionnel au  $\log_{10}$  du pic de puissance (dBW). La variation avec  $U_e$  de la fréquence des modes  $f_0, f_1, f_2$ , est soulignée par les droites en pointillé du bas, du milieu, du haut, respectivement.

où  $*$  est le produit de convolution. Dans l'espace de Fourier, l'opérateur  $\mathcal{H}$  revient à effectuer une rotation de  $\pi/2$  de la partie positive du spectre, et de  $-\pi/2$  de sa partie négative. Le signal résultant est ainsi en quelque sorte en quadrature de phase avec le signal de départ. On construit alors une fonction analytique complexe

$$w(t) = f(t) + i\mathcal{H}\{f\} = \rho(t)e^{i\theta(t)}, \quad (2)$$

dont on peut extraire l'amplitude  $\rho^2 = f^2 + \mathcal{H}\{f\}^2$  et la phase  $\theta(t) = \arctan(\mathcal{H}\{f\}/f)$ .



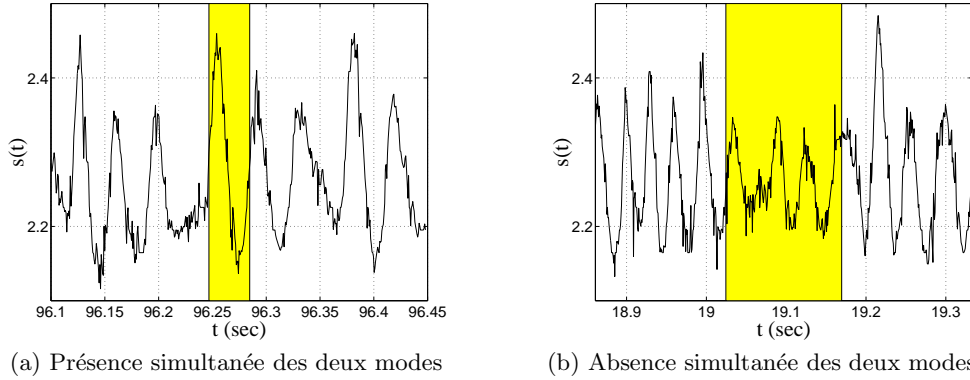
**Fig.3.** Exemple pour  $U_e = 2$  m/s. a) Amplitudes instantanées  $\rho_1(t)$  (trait plein) et  $\rho_2(t)$  (trait pointillé) des modes  $f_1$  et  $f_2$ , obtenues par démodulation complexe (unités arbitraires). Les amplitudes moyennes  $\bar{\rho}_1$  et  $\bar{\rho}_2$  sont les lignes horizontales en trait plein et pointillé, respectivement. b) Anti-corrélation des amplitudes  $\rho_1$  et  $\rho_2$  révélée dans le plan  $(\rho_1, \rho_2)$ .

En appliquant la transformée de Hilbert sur le signal LDV  $s_1(t)$  filtré autour du mode  $f_1 = 23,2$  Hz avec une largeur de bande  $\Delta f_1 = 8$  Hz (filtrage de type Butterworth d'ordre 4 non causal), on extrait l'amplitude  $\rho_1(t)$  du mode  $f_1$ , la dérivée de la phase  $\partial\theta_1/\partial t$  étant à tout instant égale à  $f_1$ , à  $\Delta f_1$  près. En procédant identiquement autour de  $f_2 = 31,0$  Hz, avec une largeur de filtre  $\Delta f_2 = 9$  Hz, on extrait l'amplitude  $\rho_2(t)$ . Les amplitudes  $\rho_1(t)$  et  $\rho_2(t)$  sont représentées sur la Figure 3a pour un intervalle

de temps arbitraire. On voit nettement apparaître une anti-corrélation entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , confirmée par la Figure 3b. Le scénario est donc essentiellement une compétition non-linéaire où chaque mode tend à exclure l'autre.

#### 4 Étude quantitative à $U_e = 2$ m/s

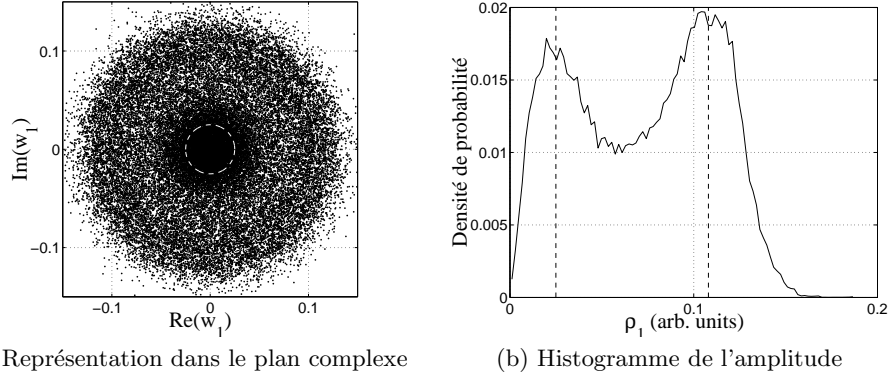
Il est utile de déterminer les instants pour lesquels la couche de mélange oscille dans un mode plutôt qu'un autre, notamment lorsqu'on voudra associer une structure spatiale cohérente à un mode d'oscillation donné. Le critère d'existence que nous introduisons est basé sur l'amplitude moyenne  $\bar{\rho}_i = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_i(t) dt$  du mode  $f_i$  : si  $\rho_i(t) > \bar{\rho}_i$ , le mode est considéré présent dans le signal à l'instant  $t$ , absent sinon. Ce critère peut se révéler inadapté, par exemple lorsque le taux de présence d'un mode est très largement supérieur à celui de l'autre mode, mais convient au cas étudié [4]. On définit le taux de présence du mode  $f_i$  par  $\eta_i = t_i/T$ , où  $t_i$  est le temps de présence cumulé du mode,  $T$  la durée totale du signal. On obtient  $\eta_1 = 0,524$  et  $\eta_2 = 0,479$ . Bien que  $\eta_1 + \eta_2 \simeq 1,00$ , les deux modes ne s'excluent pas parfaitement l'un l'autre au cours du temps. En effet, si l'on définit de la même façon les taux de présence simultanée  $\eta_{12}$  et d'absence simultanée  $\eta_0$  des 2 modes, on obtient  $\eta_{12} = 6,8\%$  et  $\eta_0 = 6,5\%$ , c'est-à-dire que sur une fraction de temps petite, mais non négligeable, les deux modes peuvent coexister ou disparaître simultanément (selon le critère d'existence introduit). Sur la Figure 4 sont représentés deux intervalles de temps de présence simultanée (Figure 4a) et d'absence simultanée (Figure 4b).



**Fig.4.** Dans la bande grisée, exemples a) de présence simultanée des deux modes, b) d'absence simultanée des deux modes, d'après le critère d'existence défini en section 4.

#### 5 Structures cohérentes

Nous disposons d'un ensemble représentatif de  $M = 1100$  réalisations  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  de l'écoulement, obtenues par PIV, et synchronisées aux séries LDV. Les champs PIV étant sous-échantillonnés relativement au phénomène observé ( $f_{PIV} < f_1$ ), on se basera sur le signal LDV pour déterminer quelles réalisations de l'écoulement correspondent aux modes d'oscillation à  $f_1$  et  $f_2$  seuls. On dispose ainsi de deux sous-ensembles  $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k)\}_{k=1 \dots M_1}^{f_1}$  et  $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k)\}_{k=1 \dots M_2}^{f_2}$ , des réalisations  $\mathbf{u}$  associées aux modes  $f_1$  et  $f_2$ , respectivement. La représentation dans le plan complexe de  $w_j(t)$ , construit à partir du signal LDV  $s_j(t)$  filtré autour du mode  $f_j$ , fait apparaître deux ensembles de points (Figure 5a, centrés sur les cercles en trait blanc pointillé), que l'on retrouve dans l'histogramme des amplitude  $\rho_i$  représenté sur la Figure 5b. Le premier ensemble de points forme une structure torique, à distance finie de l'origine, caractéristique d'un phénomène cyclique (Figure 5a). Le second ensemble est distribué autour de l'origine, et correspond aux événements où  $\rho_j$  est petit (mode  $f_j$  absent du signal  $s(t)$ ). En écrivant  $w_j(t) = \rho_j e^{i\theta_j}$ , on peut découper le plan complexe en  $n = 16$  secteurs angulaires  $\theta_j$ , centrés sur l'origine, et d'ouverture angulaire



**Fig.5.** a) Représentation dans le plan complexe ( $s_1, \mathcal{H}\{s_1\}$ ) du signal analytique  $w_1(t) = s_1(t) + i\mathcal{H}\{s_1\}$ . L'angle  $\theta$ , qui définit également la phase du cycle d'oscillation de la couche de mélange, est défini par rapport au demi axe horizontal  $\Im(w_1) = 0, \Re(w_1) > 0$ . Le plan complexe est alors découpé en  $n = 16$  secteurs, d'ouverture angulaire  $\Delta\theta = 360/n = 22.5^\circ$ . b) Histogramme de l'amplitude  $\rho_1$  du mode  $f_1$ . Les maxima de l'histogramme, repérés par les droites verticales pointillées, correspondent dans le plan complexe aux cercles en trait pointillé.

$\Delta\theta = 360/n = 22,5^\circ$ . Chaque secteur ainsi défini contient un ensemble de points correspondant à des instants  $t_k$  de l'écoulement. En identifiant les temps  $t_k$  des champs PIV contenus dans chacun des deux sous-ensembles  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , on parvient à regrouper les réalisations de l'écoulement correspondant à une même phase d'oscillation de la couche de mélange, à  $\Delta\theta$  près. On réalise alors une moyenne en phase pour chaque secteur de phase du plan. Les champs moyens de fluctuation de vitesse pour 6 phases  $\{\theta_k\}$  différentes, représentés sur les Figures 6a et 6b, sont définis par :

$$\mathbf{u}'_{\theta_k}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, \theta) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) \rangle_{\theta=\theta_k}^{\mathcal{S}_i}, \quad (3)$$

où  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \theta)$  est le champ instantané de vitesse à un instant  $t$  correspondant à la phase  $\theta$ , à  $\Delta\theta$  près,

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) dt \quad (4)$$

est le champ moyen de l'écoulement, et  $\langle \cdot \rangle_{\theta_k}^{\mathcal{S}_i}$  est la moyenne d'ensemble sur la phase  $\theta_k$ , à  $\Delta\theta$  près, sur le sous-ensemble  $\mathcal{S}_i$ . Les champs moyens nous permettent alors de déterminer les longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  associées aux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , ainsi que les taux d'amplification spatiale  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . On ajuste pour cela le profil de vitesse verticale  $u_y = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y$  sur la ligne horizontale affleurante à la cavité ( $y = 0$ ), avec une fonction du type :

$$u_y^{fit}(x) = A + B e^{\beta x} \cos(2\pi x/\lambda + \phi), \quad (5)$$

Les valeurs obtenues, regroupées dans la Table 1, donnent pour valeurs moyennes :

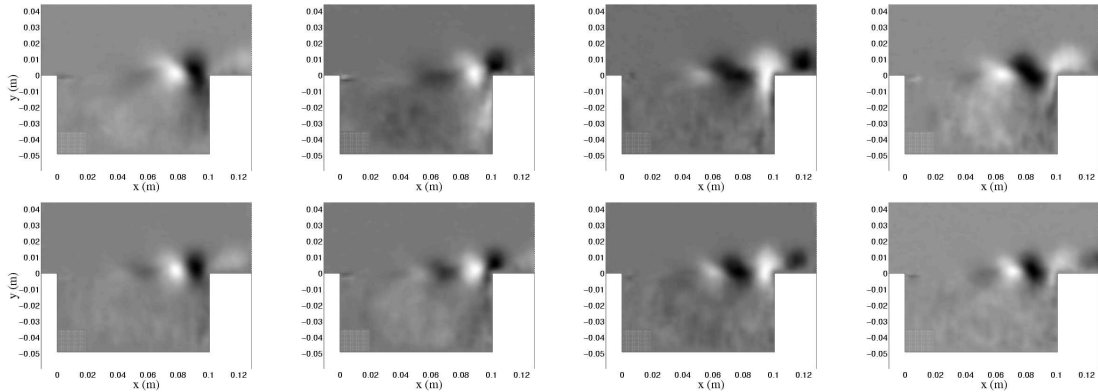
$$\lambda_1 = 4,95 \pm 1,00 \text{ cm} \quad \lambda_2 = 3,75 \pm 0,72 \text{ cm},$$

soit pour célérités  $c_1 = \lambda_1 f_1 = 1,13 \pm 0,23 \text{ m/s}$  et  $c_2 = \lambda_2 f_2 = 1,16 \pm 0,22 \text{ m/s}$ .

## 6 Discussion

Nous avons comparé ce résultat à celui prédit par un modèle de stabilité d'une couche de cisaillement libre. Celui-ci prédit une relation de dispersion  $c = \lambda f = \bar{U}/2$ , où la vitesse moyenne  $\bar{U} = (U_1 + U_2)/2$  est construite sur les vitesses  $U_1$  et  $U_2$  en  $y \rightarrow \pm\infty$ . En ajustant le profil vertical de la vitesse longitudinale  $u_x(y)$  du champ moyen présenté en Figure 1b en  $x = 0,05$ , par une fonction :

$$u_x^{fit}(y) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\frac{y - y_0}{\delta}\right), \quad (6)$$



**Fig.6.** De gauche à droite : composante  $u_y$  des champs de fluctuation moyens de vitesse  $\mathbf{u}'_{\theta_k}(\mathbf{r})$  aux phases  $\theta = 0, 90, 180, 270^\circ$  du cycle d'oscillation de la couche de mélange ; en haut : pour le mode  $f_1$  ; en bas : pour le mode  $f_2$ . On voit apparaître la propagation de l'onde d'instabilité dans la couche de cisaillement.

**Tab.1.** Longueurs d'onde  $\lambda_1, \lambda_2$  et coefficients d'amplification spatiale  $\beta_1, \beta_2$ , obtenus pour 8 des 16 champs moyennés en phase, associés aux modes  $f_1$  et  $f_2$ , pour  $U_e = 2$  m/s

$\theta$ ( $^\circ$ )	0	45	90	135	180	225	270	315
$\lambda_1$ (cm)	5.33	5.67	5.95	4.79	4.83	4.54	4.58	4.74
$\beta_1$ (cm $^{-1}$ )	35.2	37.38	42.57	51.34	69.3	70.26	62.25	36.52
$\lambda_2$ (cm)	3.92	3.64	3.38	3.80	3.61	3.79	3.55	4.07
$\beta_2$ (cm $^{-1}$ )	35.74	39.60	34.74	55.34	64.52	55.54	34.84	35.08

on mesure  $U_1 = 2,19$  m/s et  $U_2 = -4,1$  cm/s, soit  $c = 1,075$  m/s, que vérifient raisonnablement  $c_1$  et  $c_2$  (aux incertitudes près). Bien entendu, un tel modèle ne permet pas d'expliquer la sélection des modes effectivement excités dans la cavité, celle-ci faisant intervenir l'interaction de l'écoulement avec le bord aval de la cavité. Le mécanisme de rétro-action, aux vitesses considérées, n'est pas encore clairement compris. Néanmoins, il paraît acquis qu'une étude de l'instabilité en termes de modes globaux s'impose. D'autre part, les variations des amplitudes  $\rho_1(t)$  et  $\rho_2(t)$  étant pour l'essentiel relativement lentes, devant les oscillations de base à  $f_1$  et  $f_2$ , il est attendu que le scénario observé, d'échange de stabilité entre les deux modes excités, puisse être correctement reproduit par des équations d'amplitude de type Ginzburg-Landau complexes couplées, a priori cubiques, aucune hystérésis n'ayant pour le moment été mise en évidence sur la plage d'existence des modes.

## Références

1. D. ROCKWELL & E. NAUDASCHER, Self-sustained oscillations of impinging free shear layers, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **11**, 67–94, 1979.
2. P. HUERRE & M. ROSSI, *Hydrodynamic instabilities in open flows*, Cambridge University Press, chap 2, pp 81–294, 1998.
3. G. M. QUÉNOT, J. PAKLEZA & T. A. KOWALEWSKI, Particule image velocimetry with optical flow, *Experiments in Fluids*, **25**, 177–189, 1998.
4. L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE, R. PETHIEU & P. DEBESSE, Quantifying the non-linear mode competition in the flow over an open cavity at medium reynolds number, *Experiments in fluids*, soumis.

# Effet tunnel quantique pour des solitons optiques

Yves Pomeau<sup>1</sup> & Martine Le Berre<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole normale supérieure,  
24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

<sup>2</sup> Laboratoire de Photophysique Moléculaire, Bat.210, 91405 Orsay, France.

Martine.le-berre@ppm.u-psud.fr

**Résumé.** En considérant le soliton comme une particule quantique, nous montrons qu'il est possible de prévoir un effet tunnel entre deux fibres couplées, phénomène interdit classiquement dans la limite des faibles couplages. Nous évitons la quantification explicite en nous plaçant dans la limite WKB, où la transmission par effet tunnel se calcule à partir de l'action quantique associée à la trajectoire sous la barrière de potentiel. Pour calculer cette trajectoire, nous ne quantifions pas les deux NLS couplées modélisant la propagation dans les fibres couplées, mais un système d'ODEs dérivées grâce à des fonctions d'essai, qui forment un système Hamiltonien à deux degrés de liberté, où les variables amplitudes et durée du pulse sont conjuguées de la phase, et de sa dérive, respectivement. Nous montrons que la transmission par effet tunnel quantique est possible, éventuellement freinée par la perte de cohérence de la fonction d'onde du soliton.

**Abstract.** Considering the soliton as a "true" particle, we show that it is possible to predict quantum tunneling between two coupled fibers at low coupling, that is totally forbidden within the classical theory. We get rid of almost any explicit quantization by working in the WKB limit, that allows to express the transmission coefficient in terms of the classical Hamilton-Jacobi action after changes of variables. The trajectory is calculated with a reduced model deduced from the original NLS coupled equations, by using a set of trial functions, leading to an Hamiltonian system of ODE's with two-degrees of freedom. Quantum tunneling is shown to be possible, eventually slowed down if the coherence time of the soliton is shorter than the tunneling time.

## 1 Introduction

Généralement les solitons dans les fibres optiques se comportent comme des objets classiques (=non quantiques), car ils contiennent un très grand nombre de photons. En linéarisant la solution autour de la solution classique, Certains phénomènes quantiques, liés aux fluctuations du bruit des photons, ont cependant été mis en évidence [3]. Ici nous faisons un pas de plus en considérant le soliton comme une 'vraie' particule, c'est à dire un objet classique que l'on quantifie. L'idée n'est pas nouvelle, en effet la quantification des équations de propagation de champs classiques a été déjà étudiée (voir par exemple la revue [4]), mais le phénomène macroscopique étudié est nouveau, et la méthode est différente de celle employée dans les deux cas précédents. Nous étudions l'effet tunnel sous une barrière de potentiel, lors de la propagation d'un soliton dans un "coupleur directionnel", composé de deux fibres optiques identiques adjacentes. Le problème classique, a été amplement étudié dans le cadre de deux equations NLS couplées linéairement [5]-[6] : il est connu que seul un soliton asymétrique peut se propager et être stable à faible couplage. L'énergie d'un tel soliton est essentiellement dans l'une des fibres, et s'y propage indéfiniment. Donc, pour une énergie donnée, il y a deux états possibles exactement symétriques par permutation des fibres. Dans la version quantique du même problème, les deux solitons fusionnent en un seul état quantique, dont l'amplitude est étalée sur les deux fibres, à cause de la possibilité d'un passage par effet tunnel *quantique* d'une fibre à l'autre.

La méthode employée ici évite la lourdeur mathématique des manipulations d'opérateurs ou d'intégrales de chemin. Nous travaillons dans le cadre de l'approximation WKB, qui a l'avantage de décrire certains phénomènes quantiques comme l'effet tunnel, grâce à un choix particulier de variables issues des équations classiques modifiées. Ces équations sont celles proposées par Malomed et al. [6], qui reproduisent correctement le diagramme de bifurcation des solutions NLS. Leur structure Hamiltonienne

à deux degrés de liberté est relativement simple à quantifier, on en déduit le coefficient de transmission  $T$  par effet tunnel, entre les deux états quantiques représentant classiquement la propagation des deux solitons asymétriques d'une fibre dans l'autre. Pour calculer  $T = \exp(-2S/\hbar)$ , on doit calculer l'action  $S$  de la trajectoire hétérocline joignant les deux points d'équilibre, passant sous la barrière de potentiel. C'est un problème standard de mécanique Hamiltonienne [7], appelé version Euclidienne du problème initial, où le potentiel Euclidien est inversé par rapport au potentiel Hamiltonien original. On trouve que le coefficient de transmission dépend algébriquement du couplage entre les deux fibres, et non exponentiellement comme on aurait pu l'attendre. Finalement, on doit passer des équations sans dimensions utilisées dans cette étude, aux variables physiques afin de connaître l'ordre de grandeur des effets, et discuter les applications possibles. Si l'action est très grande devant  $\hbar$ , on doit pouvoir observer des phénomènes quantiques tels que l'effet tunnel et éventuellement des interférences entre états quantiques cohérents. Notons que l'action qui est responsable de l'effet tunnel n'est pas l'action totale du champ électromagnétique, dont le terme dominant est proportionnel au nombre moyen de photons  $N$  dans le pulse, mais résulte de petites perturbations ajoutées à ce terme dominant, notamment dues à l'effet Kerr, donc proportionnelles au carré de l'intensité, terme en  $N^2$ , et à la dispersion. Nous négligeons les pertes par absorption et les changements de fréquence des photons par effet Raman.

## 2 Propagation classique

### 2.1 Equations NLS

Le modèle classique pour la propagation sans dissipation de solitons dans deux fibres couplées est l'ensemble des deux équations *classical* (= non quantiques) de Schrödinger nonlinéaire écrite sous la forme adimensionnelle [5,6] :

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = -\kappa v, \quad (1)$$

et

$$i \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + |v|^2 v = -\kappa u, \quad (2)$$

où  $\kappa$  est la force du couplage,  $u(z, t)$  et  $v(z, t)$  sont les amplitudes complexes des champs électriques supposées lentement variables dans l'approximation paraxiale,  $z$  est la variable position sur l'axe optique, et  $t$  est le temps dans le référentiel associé à l'enveloppe de l'onde. Bien qu'on les appelle NLS, ces équations ne forment pas un système quantique, mais décrivent un champ purement classique, dont l'action est

$$\mathcal{S}_{\text{NLS}} = \int_{z_1}^{z_2} dz \int dt \left[ \frac{i}{2} \left( \bar{u} \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \frac{i}{2} \left( \bar{v} \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} |u|^4 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} |v|^4 - \frac{\kappa}{2} (u\bar{v} + v\bar{u}) \right]. \quad (3)$$

Les solutions stationnaires de la forme  $u(z, t) = U(t)e^{iqz}$  and  $v(z, t) = V(t)e^{iqz}$  correspondent à des solitons d'enveloppe indépendante de  $z$ , elles ont été étudiées [5] numériquement et analytiquement. Un calcul exact montre la solution "symétrique",  $u = v$  est instable pour  $q/\kappa \geq 5/3$ , la bifurcation vers la solution stable "a-symétrique" étant légèrement sous-critique. Dans les études numériques il faut noter qu'on observe des pertes radiatives, comme dans le cas d'une seule NLS, d'autant plus importantes que la condition initiale est "loin" de l'état stable vers lequel la solution évolue. Nous négligerons ces pertes radiatives dans la suite, notre formalisme ne nous permettant pas de les inclure. Même si elles sont présentes, il a été montré [4] qu'elles ne détruisent pas le soliton de NLS dans sa version quantique.

### 2.2 Equations réduites

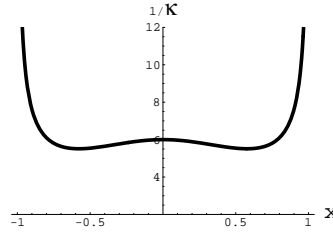
En suivant la méthode générale des extréma de fonctionelles à l'aide de fonctions d'essai, plusieurs auteurs ont simplifié l'étude dynamique des équations (1, 2). La réduction de l'espace des fonctions à celui des fonctions d'essai est évidemment contestable, il est donc nécessaire de vérifier la qualité des



approximations en comparant leurs prédictions aux résultats "exacts", ce qui est fait en détail dans les papiers de Malomed *et al.* [6]. En suivant leur choix justifié, nous posons

$$u(z, t) = a(z)\sqrt{\eta(z)}\operatorname{sech}[\eta(z)t] \cos(\Theta(z))\exp[i(\Phi(z) + \Psi(z) + q(z)t^2)] \quad (4)$$

et l'expression analogue pour  $v(z,t)$  où  $\cos(\Theta(z)) \rightarrow \sin(\Theta(z))$ , et  $\Psi(z) \rightarrow -\Psi(z)$ . Remplaçant  $u, v$  par ces fonctions d'essai dans l'équation (3), et intégrant sur  $t$ , on trouve une action "réduite"  $\mathcal{S}_r = \int dz \mathcal{L}$ . Les équations du mouvement pour les 5 fonctions  $a, \Theta, \Psi, \eta$ , and  $q$ , sont données dans Uzunov *et al.* [6]. Leurs solutions stationnaires, Fig. 1, sont en bon accord avec celles des équations ((1, 2), en particulier elles reproduisent bien le diagramme de bifurcation sous-critique des solutions symétriques  $\rightarrow$  a-symétriques.

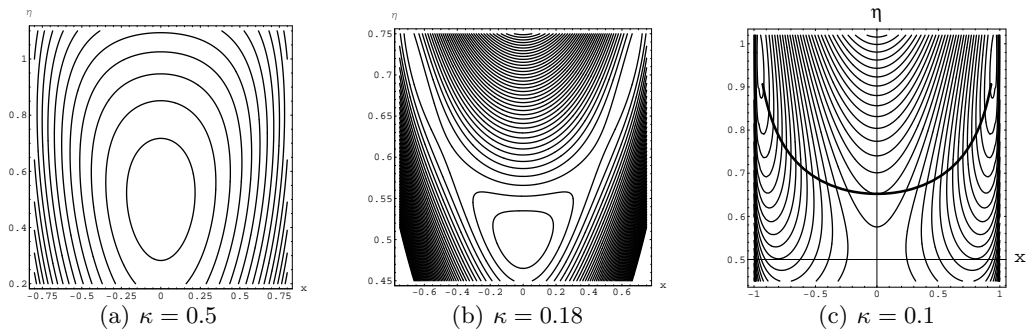


**Fig.1.**  $\kappa^{-1}$  en fonction des valeurs stationnaires de  $x = \cos(2\Theta)$ , la solution  $x = 0$  est stable pour  $1/\kappa < 6$

De plus le système dynamique réduit est un système hamiltonien à deux degrés de liberté, on a la relation  $\mathcal{S}_r = \int (\sum_{i=1,2} p_i dq_i - \mathcal{H} dz)$ , avec

$$\mathcal{H}_{\text{trial}}^{\text{cl}} = -2\kappa \cos(2\Psi) \sin(2\Theta) + \frac{1}{3}\eta \sin^2(2\Theta) - \frac{2\eta}{3} + \frac{\eta^2}{3} + \frac{\pi^2 q^2}{3\eta^2}. \quad (5)$$

où on a posé  $a^2 = 1$ . Les deux paires de variables conjuguées sont  $\{\Psi, 2x = 2\cos(2\Theta)\}$  et  $\{q, y = \frac{\pi^2}{6\eta^2}\}$ , c'est-à-dire les différences de phase et d'amplitude, et d'autre part la dérive et la largeur temporelle. Pour obtenir le potentiel, il suffit d'annuler l'impulsion,  $\Psi, q$  dans (5), soit  $\mathcal{H}_{\text{pot}} = -2\kappa \sin(2\Theta) + \frac{1}{3}\eta \sin^2(2\Theta) - \frac{2\eta}{3} + \frac{\eta^2}{3}$ . Les courbes de niveau du potentiel sont représentées Figs.(2) pour 3 valeurs de  $\kappa$  pour montrer la bifurcation de l'état d'équilibre symétrique à fort couplage, ( $x = 0, \eta = 1/2$ ) courbe (a), vers les deux états équivalents a-symétriques à faible couplage, courbe (c). La barrière est évidente sur la Fig. 2c, séparant les deux minima  $x \sim \pm 1, \eta \sim 1$  correspondant chacun à un état a-symétrique, l'état instable correspondant au point selle  $x = 0, \eta = 1/2$ .



**Fig.2.** Courbes de niveaux du potentiel  $\mathcal{H}_{\text{pot}}$ , dans le plan  $x, \eta$ . Le gros trait de (c) représente la trajectoire semi-classique, voir section 3

### 3 Quantification semi-classique

Nous évitons la quantification des équations NLS, ainsi que des équations réduites, en nous plaçant dans le cadre de l'approximation WKB, où la fonction d'onde s'écrit  $\Phi(\vec{x}) \propto \exp(i\frac{S}{\hbar})$ ,  $S = \int \mathbf{p}d\mathbf{q} - Hz$  étant l'action classique de Hamilton-Jacobi où  $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$  sont les variables conjuguées. Dans un problème tel que le franchissement d'une barrière de potentiel, la phase de  $\Phi$  devient complexe sous le "tunnel" (comme la composante longitudinale du vecteur d'onde de l'onde de Fresnel dans la description de l'onde évanescente de Fresnel).

#### 3.1 Coefficient de transmission

Le coefficient de transmission par effet tunnel (rapport des intensités sortantes et entrantes) est  $T = \exp(-2\mathcal{S}_E/\hbar)$ , où l'action abrégée (Euclidienne)  $\mathcal{S}_E = \int_{q[0]}^{q[z_f]} p dq$  s'obtient en changeant les impulsions  $\mathbf{p} = (\Psi, q)$  en  $i\mathbf{p}$  dans l'hamiltonien classique 5. Il devient

$$\mathcal{H}^{\text{qu}} = -2\kappa \cosh(2\Psi) \sin(2\Theta) + \frac{1}{3}\eta \sin 2(2\Theta) - \frac{2\eta}{3} + \frac{\eta^2}{3} - \frac{\pi^2 q^2}{3\eta^2}. \quad (6)$$

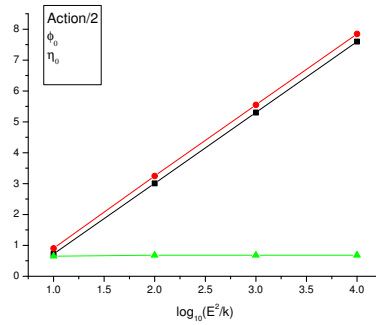
On déduit le système dynamique (Euclidien)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = -2\kappa \sinh(2\Psi) \sqrt{1-x^2} \\ \frac{d(2\Psi)}{dz} = \frac{2}{3}\eta x - 2\kappa \cosh(2\Psi) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d\eta}{dz} = 2q\eta \\ \frac{dq}{dz} = 2q^2 + \frac{2}{\pi^2}(\eta^4 - \eta^3 \frac{1+x^2}{2}) \end{cases}$$

permettant de calculer l'action  $\mathcal{S}_E$  le long d'une trajectoire quelconque. Le résultat de l'intégration numérique est représenté Figs. 2-c et 3. La trajectoire représentée Fig. 2-c est celle qui relie les deux minima du potentiel classique dans le plan des coordonnées  $(x, \eta)$ , pour  $\kappa = 0.1$ . On a reporté Fig. 3 l'action le long de ce type de trajectoire, en fonction de  $\kappa$ , ainsi que les valeurs de  $\Psi(0)$ , et  $\eta(0)$ . On trouve que l'action obéit à la loi

$$\mathcal{S}_E = 2 \ln(\kappa_c/\kappa) \quad (7)$$

avec une excellente précision sur plusieurs décades.



**Fig.3.** Action (carrés), maximum de l'impulsion  $\Phi(0)$  (cercles), et  $\eta(0)$  (triangles) en fonction de  $\kappa^{-1}$

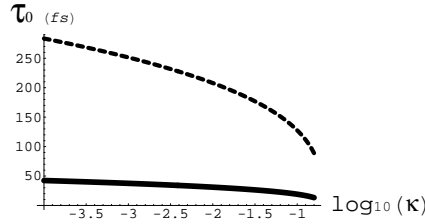
L'action calculée n'est pas l'action physique  $S$  qui doit avoir la dimension de  $\hbar$ . On a  $S = S^1 S_E$ , où le coefficient  $S^1$  dépend des propriétés de la fibre et de la lumière [8]. Une estimation [8] basée sur le développement de l'indice de réfraction  $n = n_0 + n_2 I$  conduit à la relation  $2S^1/\hbar = \gamma/(\omega_0 \tau_0)^3$  où

$$\gamma \sim 10\sigma(\varepsilon_0 c^2 k_0'')^2 / (n_2 \hbar) \quad (8)$$

dépend de l'aire et de l'indice nonlinéaire de la fibre. En prenant  $\sigma = 10\mu m^2$ , et en considérant deux fibres de silice d'indice (a)  $n_2 = 3.10^{-20}$  et (b)  $10^{-22}$  MKS, on trouve que l'action devient de l'ordre de  $\hbar$ , ou la transmission d'ordre unité

$$T = exp - \left[ \frac{2\gamma}{(\omega_0\tau_0)^3} \ln(\kappa_c/\kappa) \right] = \left( \frac{\kappa}{\kappa_c} \right)^{\frac{2\gamma}{(\omega_0\tau_0)^3}} \quad (9)$$

dès que la durée du pulse est supérieure à la valeur critique dessinée Fig. 4. Dans le cas de la fibre (a), ce régime est atteint dès que la durée du pulse est supérieure à quelques dizaines de  $fs$ , ce qui est le cas usuel.



**Fig.4.** Frontière  $S \sim \hbar$  entre les regimes semi-classiques et purement quantiques : trait plein pour le cas (a), pointillé pour (b).  $\tau_0$  est la durée du pulse,  $\kappa$  le coefficient de couplage normalisé.

### 3.2 Basculement quantique

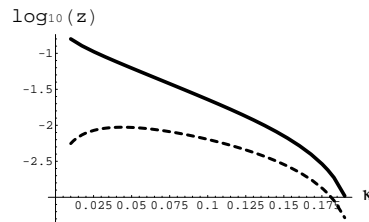
On utilise les résultats standard de la mécanique quantique : Dans le cas d'un potentiel à double puits, les niveaux de chaque puit sont dédoublés, les états propres étant  $\Phi_S$  (pair) et  $\Phi_A$  (impair) par permutation des deux fibres, avec des énergies légèrement différentes,  $2A = E_A - E_S$ . Les combinaisons  $\Phi_G = (\Phi_S - \Phi_A)/\sqrt{2}$ , et  $\Phi_D = (\Phi_S + \Phi_A)/\sqrt{2}$ , sont particulièrement intéressantes car elles correspondent à des états "asymétriques", dont les amplitudes sont majoritairement à gauche et à droite, respectivement. Leur dynamique est  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_S t/\hbar} (\Phi_S + \Phi_A e^{i\omega t})$ , ils oscillent donc de droite à gauche avec la période

$$T_{osc} \sim h/2A \quad (10)$$

qu'on peut évaluer en utilisant les résultats connus [7] pour une particule dans un potentiel en 1D [8]. La période spatiale (pour les fibres, le "temps" est la variable  $z$ , point sur l'axe optique) des oscillations est représentée Fig. 5, en fonction du couplage  $\kappa$ , pour deux valeurs de  $\tau_0$ , correspondant à un régime entièrement quantique (courbe en pointillé), et un régime mixte (courbe pleine). La période spatiale  $Z$  est d'autant plus courte que la transmission est élevée. En un point  $z$  de la fibre, la probabilité de présence du soliton oscille périodiquement avec une période temporelle  $\tau = nZ/c$ , qui vaut typiquement  $15ns$  à la frontière entre le régime quantique et semi-classique.

## 4 Conclusion

Alors que la théorie classique interdit le passage du soliton d'une fibre dans l'autre (dans le cas de faible couplage,  $\kappa < 0.2$ ), nous montrons que cela est possible dans des situations expérimentales courantes. Dans le cadre semi-classique, nous pouvons estimer ce temps de passage, qui est typiquement de l'ordre de quelques dizaines de  $ns$ . Pour cette étude nous avons supposé que le soliton est un objet cohérent. Nos résultats restent vrais si les temps calculés (temps de passage par effet tunnel, et période  $\tau$  de basculement entre les deux fibres), sont plus courts que le temps de cohérence du soliton,  $t_c^{sol}$ .



**Fig.5.** Période spatiale  $Z$  en MKS en fonction du couplage  $\kappa$ , pour  $\tau_0 = 20fs$  (trait plein) et  $50fs$  (pointillé).

On sait que dans le cas contraire, le passage par effet tunnel existe toujours, mais il est ralenti [9],  $\tau$  devient  $\tau^2/t_c^{sol}$ . Or il est possible que  $t_c^{sol}$  soit très petit, en particulier si on fait l'hypothèse de photons interagissant très faiblement. S'ils perdent leur cohérence par des processus inélastiques (pertes ou effet Raman) sans mémoire (processus de Poisson), le temps de cohérence du soliton est  $t_c^{sol} = t_c/N$ , où  $t_c$  est le temps de cohérence d'un seul photon du pulse, et  $N$  le nombre de photons, qui est typiquement égal à  $200/\tau_0$ , avec  $\tau_0$  en *ns*. Sur des échelles de temps beaucoup plus longues que  $t_c^{sol}$ , tout effet lié à la cohérence entre états est brouillé, l'état final étant un soliton se trouvant dans l'une ou l'autre fibre avec une probabilité 1/2. Ainsi, même dans une telle situation, les conclusions de notre étude sont radicalement différentes de celles de l'étude classique qui prévoit un soliton localisé dans la fibre initiale avec une probabilité égale à 1.

On peut aussi imaginer de créer des états corrélés entre deux fibres à partir d'un état classique (sans terme hors diagonal de la matrice densité, c'est-à-dire sans corrélation quantique de phase entre les états de chaque fibre), par pompage résonant : en pompant les fibres couplées propageant un tel état, à la fréquence de transition par effet tunnel, soit par des vibrations mécaniques soit par un champ EM extérieur.

## Références

1. H. HAKEN, Analogy between higher instabilities in fluids and lasers, *Physics Letters A*, **53** (1), 77-78 (1975).
2. H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* Gauthier-Vilars, Paris (1899).
3. see for example R. K. LEE, Y. LAI & Y.S. KIVSHAR, Quantum correlations in soliton collisions, *Phys. Rev. A*, **71**, 035801 (2005) and references herein.
4. L. D. FADEEV & V.E. KOREPIN, Quantization of solitons, *Phys. Reports C*, **42**, 270 (1978).
5. N. AKHMEDIEV & A. ANKIEWICZ, Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (16), 2395-2398 (1993) — J.M. SOTO-CRESPO & N. AKHMEDIEV, Stability of the soliton states in a nonlinear fiber coupler, *Phys. Rev. E*, **48** (6), 4710-4715 (1993) — N. AKHMEDIEV & J.M. SOTO-CRESPO, Propagation dynamics of ultrashort pulses in nonlinear fiber couplers, *Phys. Rev. E*, **49** (5), 4519-4529 (1994).
6. B. A. MALOMED, I. M. SKINNER, P. L. CHU & G. D. PENG, Symmetric and asymmetric solitons in twin-core nonlinear optical fibers, *Phys. Rev. E*, **53** (4), 4084-4091 (1996) — I. M. UZUNOV, R. MUSHALL, M. GOLLES, YU. S. KIVSHAR, B. A. MALOMED & F. LEDERER, Pulse switching in nonlinear directional couplers, *Phys. Rev. E*, **51** (3), 2527-2537 (1995).
7. L. LANDAU & E. M. LIFCHITZ, *Mécanique Quantique, Théorie non relativiste*, Ed. Mir, Moscou (1966).
8. Y. POMEAU & M. LE BERRE, Optical solitons as quantum objects, en cours.
9. Y. POMEAU, A. PUMIR, *Journ. de Phys. (Paris)*, **46**, 1797 (1985).

# Etude d'une dynamo expérimentale Bullard-Von Kármán

N. Plihon<sup>1</sup>, R. Volk<sup>1</sup>, M. Bourgoin<sup>2</sup>, & J.-F. Pinton<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, CNRS UMR5672  
46, Allée d'Italie, 69007 Lyon

<sup>2</sup> Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, CNRS UMR5519, BP53, 38041 Grenoble  
nicolas.plihon@ens-lyon.fr

**Résumé.** Reprenant l'idée originale de Bullard [1], nous présentons un dynamo expérimentale turbulente semi-homogène. Une partie du cycle dynamo est basée sur l'induction dans un écoulement Von Karman fortement turbulent en gallium liquide. L'autre partie du processus est réalisée par circulation de courant dans des bobines extérieures. En fonction de la topologie retenue, la bifurcation à travers une régime d'intermittence on/off possède des caractéristiques particulières. Les caractéristiques à basse fréquence des fluctuations turbulentes associées permettent l'observation de deux dynamos distinctes : un régime homopolaire et une dynamo bipolaire présentant des renversements.

**Abstract.** Inspired by a design originally proposed by Bullard [1], we report a semi-homogeneous experimental arrangement which generates a turbulent fluid dynamo in the laboratory. Part of the dynamo cycle is based on turbulent induction mechanisms in a von Kármán gallium flow. The other part of the cycle is realized by external wirings. The bifurcation is studied for the two topologies studied. Two states are observed depending on the low frequency component of the turbulent fluctuations : an homopolar dynamo and and bipolar dynamo exhibiting reversals.

## 1 Introduction

L'effet dynamo est considéré être à l'origine du champ magnétique des planètes et des étoiles [2]. Le processus de création d'un champ magnétique est basé sur la conversion d'une partie de l'énergie cinétique d'un liquide conducteur de l'électricité en énergie magnétique. Larmor a le premier envisagé la possibilité d'une instabilité non-linéaire au delà d'un seuil - lorsque les phénomènes d'induction dans le liquide dépassent la dissipation Joule. La complexité des dynamos réelles provient du caractère fortement turbulent du mouvement du fluide conducteur (dans le cas de la Terre, le mouvement du fer liquide dans le noyau) et de la diversité des échelles spatiales et temporelles en jeu. Face aux limites actuelles de la simulation, le recours aux expériences a connu des avancées majeures ces dernières années. Depuis une dizaine d'années, plusieurs expériences de dynamos fluides ont vu le jour. Les expériences de Riga [3] et Karlsruhe [4] ont mis en évidence expérimentalement la possibilité de dynamos fluides dans des écoulements fortement contraints (et assez peu turbulents) avec des conditions électriques homogènes. L'expérience VKS (Von Karman Sodium) a très récemment mis en évidence l'existence d'instabilités dynamos dans un écoulement non contraint et fortement turbulent, avec des conditions électriques homogènes [5,6]. Nous proposons l'étude du cas limite opposé aux expériences décrites précédemment en sodium liquide : l'écoulement est fortement turbulent et peu contraints, mais la circulation des courants est partiellement imposée.

Une description simplifiée d'un cycle dynamo est basée sur une série de processus d'inductions, qui, à partir d'un champ  $B_0$ , génère un champ induit  $B_1$ , qui à son tour génère un champ  $B_2$ ... pour obtenir un renforcement de  $B_0$  par la contribution d'ordre  $n$ . Nous proposons ici une expérience qui permet de mettre en évidence les caractéristiques de la bifurcation de l'instabilité dynamo en isolant certains ingrédients d'induction.

## 2 Présentation du dispositif expérimental

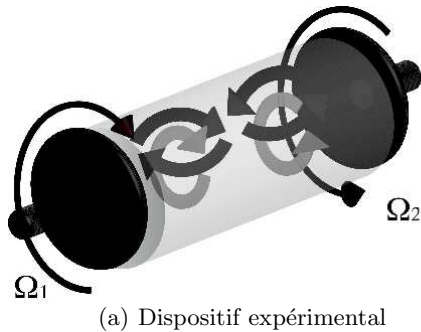
### 2.1 L'expérience Von Karman Gallium

Le dispositif expérimental est représenté en figure 1. Une colonne de gallium liquide est mise en mouvement grâce à deux turbines dans un cylindre en inox. Le rayon du cylindre est  $R = 97$  mm, sa longueur est 323 mm ; les turbines ont un diamètre de 165 mm et possèdent chacune 8 pales droites de 10 mm de hauteur et sont espacées de  $H = 203$  mm. La mise en mouvement du fluide est assurée par deux moteurs asynchrones de 11 kW régulés en vitesse. Dans cette étude, les deux turbines tournent en sens contraire avec les mêmes vitesses de rotation, dans la gamme  $\Omega \in [0, 20]Hz$ . La température est maintenue autour de  $40^\circ C$  par circulation d'eau derrière les turbines. Les propriétés mécaniques et électromagnétiques du gallium sont rappelées dans le tableau de la figure 1. Les écoulements ainsi générés sont caractérisés par des nombres de Reynolds cinétiques intégraux —  $Re \sim 2\pi R^2 \Omega / \nu$  — de l'ordre de  $10^6$ . A ces écoulements sont associés des nombres de Reynolds magnétiques intégraux —  $Rm \sim 2\pi R^2 \Omega / \lambda$  — pouvant atteindre 5.

Les caractéristiques principales de l'écoulement réalisé sont schématisées sur la figure 1 et peuvent être resumées ainsi :

- Présence de deux cellules symétriques de part et d'autre du plan médian.
- Pompage centrifuge par chacune des turbines : l'éjection radiale du fluide provoque un pompage vers le centre des turbines et une recirculation vers le plan médian aux parois.
- Zone de fort cisaillement au centre du cylindre : les deux turbines tendent à imposer des vitesses toroïdales en sens inverse.

Les mesures d'induction magnétiques sont assurées par des sondes à effet Hall. Les signaux sont numérisés à 1kHz avec une résolution de 23 bits sur une carte d'acquisition National Instrument PXI-4472.



Propriétés physiques du gallium liquide	
Densité	$\rho = 6,09 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Conductivité électrique	$\sigma = 3,68 \times 10^6 \text{ ohm}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Diffusivité magnétique	$\lambda = 1/\mu_0 \sigma = 0,22 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Viscosité cinématique	$\nu = 3,1 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Fig.1. Dispositif expérimental et propriétés du gallium liquide

### 2.2 Le bouclage Bullard Von Karman axial

Les nombres de Reynolds magnétique atteints dans ce dispositif expérimental ne permettent d'observer d'effet dynamo homogène. Nous avons ainsi mis en place un système inspiré de la dynamo solide proposée par E. Bullard [1]. Lorsque un champ magnétique axial  $B_{0z}$  est imposé par circulation de courant dans des bobines extérieures, la rotation différentielle du gallium induit un champ toroïdal  $B_\theta$  : cet effet est dénommé 'effet omega' [7]. L'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)) + \lambda \Delta \mathbf{B} \quad (1)$$

dans le régime quasi-statique dans les conditions d'études donne

$$B_{0z} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \lambda \Delta B_\theta \sim 0 \quad (2)$$

La moyenne temporelle du champ toroïdal s'écrit  $kR_m B_{0z}$  ( $k$  est un paramètre géométrique de l'ordre de 0,1). La nature turbulente du champ de vitesse induit des fluctuations temporelle de  $B_\theta$  dont la déviation standard est de l'ordre de sa moyenne.

La conversion poloïdal-toroïdal est obtenue en utilisant un signal proportionnel à  $B_\theta$  pour alimenter les bobines de champ axial ( $B_{0z} = GB_\theta$ ). Le schéma de rétroaction est donné en figure 2(a). Lorsque le  $GkR_m = 1$ , le système se destabilise. Si le principe de rétroaction est similaire à celui dessiné par Bullard, il contient néanmoins une partie fortement turbulente.

### 2.3 Le bouclage Bullard Von Karman transverse

Une seconde possibilité de bouclage est schématisée en figure 2(b). Deux bobines assurent la génération d'un champ transverse. Dans le plan médian de l'écoulement, deux processus permettent l'induction d'une composante axiale du champ magnétique [7] :

1. l'effet dit Parker qui fait intervenir l'hélicité de l'écoulement (rotation différentielle et pompage centrifuge)
2. un effet de reconnexion magnétique associée à la présence d'un champ induit perpendiculaire au champ appliqué dans chacune des cellules.

Un bouclage similaire au montage précédent permet l'obtention d'une dynamo semi-homogène.

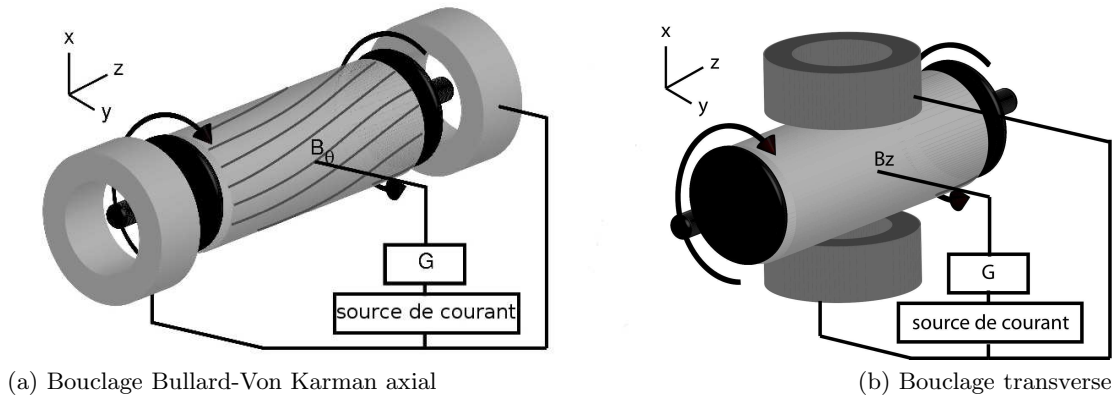


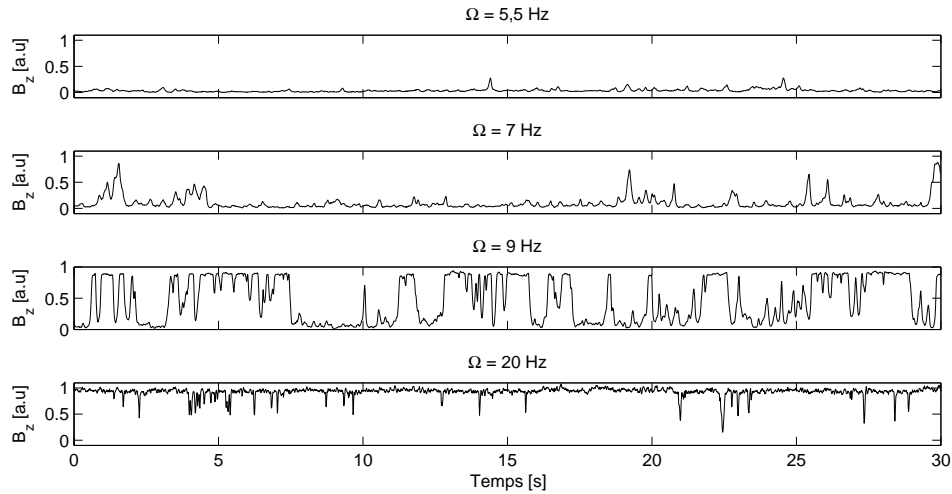
Fig.2. Bouclages Bullard-Von Karman étudiés.

## 3 Dynamique du bouclage axial

### 3.1 Aspects généraux

La figure 3 présente l'évolution temporelle du champ magnétique axial (mesuré dans le plan médian à  $r = 5$  cm) pour quatre vitesses de rotations. Le gain de la boucle est fixé de telle sorte que la vitesse de rotation critique ( $kR_m \Omega_c = 1$ ) soit  $\Omega_c \approx 8,3 Hz$ . Le courant circulant dans les bobines est limité à  $\pm 6A$  (par écrêtage), ce qui conduit à un champ de saturation de 30 G.

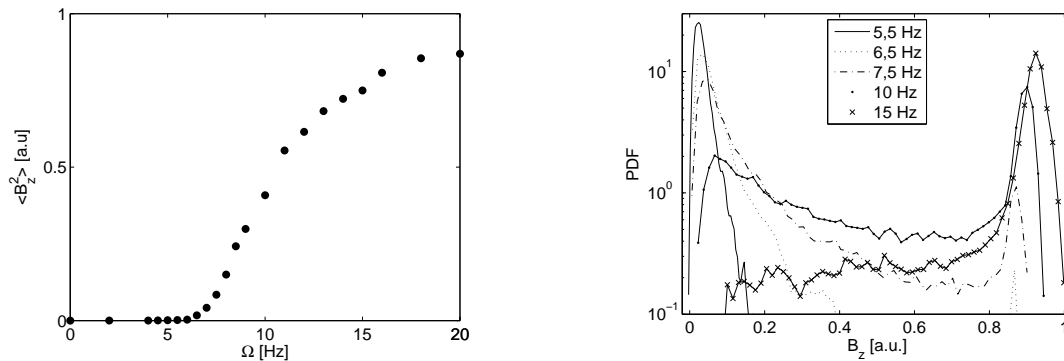
Lorsque la colonne de gallium est au repos, le champ magnétique (corrige du champ terrestre) est nul. Ceci reste vrai pour de faibles vitesses de rotation. Des bouffées intermittentes de plus en plus fréquentes



**Fig.3.** Evolution temporelle du champ  $B_z$  en fonction de la vitesse de rotation — bouclage axial.

apparaissent ensuite lorsque la vitesse est augmentée : le champ magnétique croît spontanément. Pour de fortes vitesses de rotations, le système est en régime saturé avec existence d'excursions importantes. Pour les fortes vitesses de rotation, lorsque le gain de la boucle est fortement augmenté, les excursions disparaissent et le système n'explore plus que le régime saturé. Les bouffées intermittentes et les excursions sont liées au caractère fortement turbulent de l'écoulement. Malgré l'existence de la symétrie  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$  pour un champ de vitesse inchangé dans l'équation de l'induction, le système bouclé est homopolaire (le sens privilégié de développement du champ magnétique semble prendre naissance du champ terrestre). Notons que la symétrie  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$  est retrouvée dans la dynamique du système lorsque celui-ci est bouclé sur un signal de la forme  $\langle B_\theta \rangle + gb_\theta$  lorsque  $g > 1,2$  ( $\langle B_\theta \rangle$  représente la moyenne temporelle du champ toroïdal et  $b_\theta$  est sa partie fluctuante) [8].

### 3.2 Bifurcation et caractérisation de l'intermittence on/off



(a) Diagramme de bifurcations  $\langle B_z^2 \rangle = f(\Omega)$  (b) Pdf du champ  $B_z$  en fonction de la vitesse de rotation

**Fig.4.** Bifurcation de la dynamo Bullard - Von Karman axiale

La figure 4 représente la variance de la composante  $B_z$  du champ magnétique en fonction de la vitesse de rotation. Pour les vitesses de rotation inférieures à 5,5 Hz, la valeur du champ est nul. Elle augmente

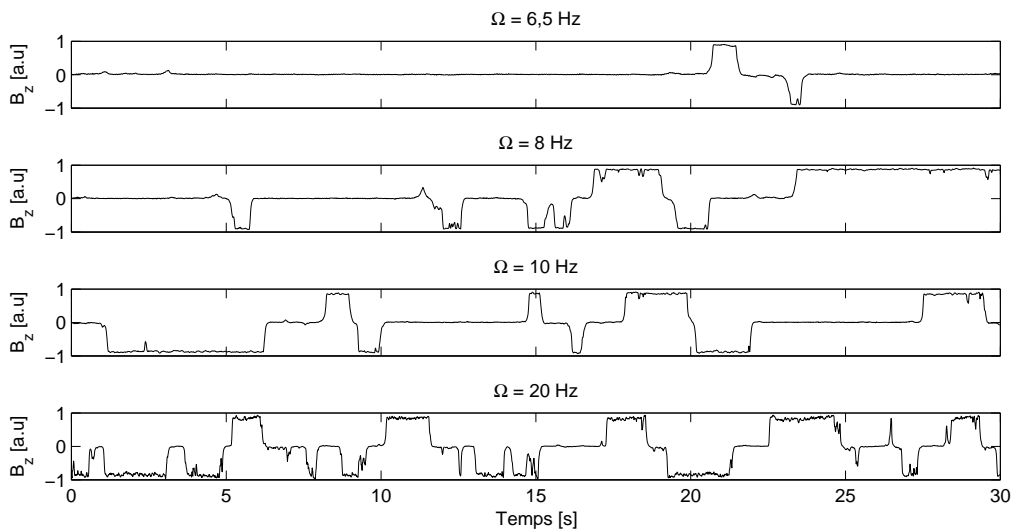


brutalement pour les vitesses de rotation supérieures. Cette augmentation diminue fortement lorsque le système explore son état saturé la majeure partie du temps. Ce système expérimental est particulièrement bien adapté pour étudier le régime linéaire de l'instabilité - lorsque le champ est rarement saturé. Il est ainsi intéressant de caractériser les caractéristiques de l'intermittence on/off proche du seuil d'instabilité. Schématiquement, le système possède deux états possibles : champ nul et  $+B_{sat}$ . L'intermittence on/off est observée pour des vitesses de rotation comprises entre 5,5 Hz et 10 Hz (proche du seuil prédit d'instabilité à 8,3 Hz). Au delà de 10 Hz, le système explore majoritairement le régime saturé  $+B_{sat}$ . L'évolution des fonctions de distributions de la composante  $B_z$  en fonction de la vitesse de rotation est donnée en figure 4. La transition entre le régime intermittent et le régime saturé est clairement observée : la valeur la plus probable du champ est zéro pour les faibles vitesses de rotation et  $+B_{sat}$  au delà de 10 Hz.

## 4 Dynamique du bouclage transverse

### 4.1 Aspects généraux

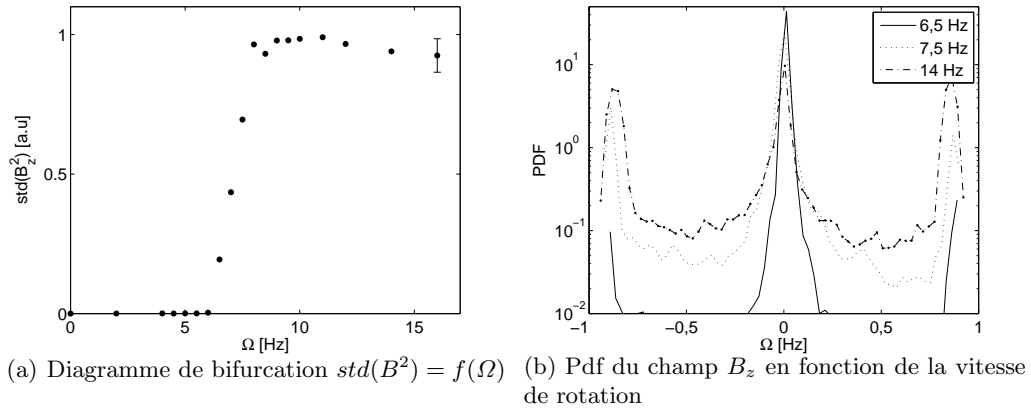
La dynamique temporelle du système bouclé en champ transverse est représentée en figure 5, avec un gain de boucle assurant une vitesse critique  $\Omega_c \approx 8,3 Hz$ . Le champ magnétique axial est mesuré à  $r = 8$  cm sur un rayon perpendiculaire aux lignes de champ créées par les bobines statiques. Le système présente toujours un caractère intermittent on/off à proximité de la bifurcation. Cependant la dynamique diffère assez fortement du cas précédent : (i) le système explore désormais trois états ( $-B_{sat}$ , 0,  $+B_{sat}$ ), (ii) le système passe en moyenne autant de temps dans l'état  $-B_{sat}$  que dans l'état  $+B_{sat}$ , (iii) la zone de comportement linéaire est fortement réduite (dès l'apparition des bursts, ceux-ci sont saturés), (iv) il n'existe plus de régime saturé (même à très fort gain de boucle des renversements chaotiques du champ magnétique sont observés).



**Fig.5.** Evolution temporelle du champ  $B_z$  en fonction de la vitesse de rotation — bouclage transverse.

### 4.2 Bifurcation et caractérisation de l'intermittence on/off

Le diagramme de bifurcation est présenté en figure 6(a). Deux zones sont clairement identifiées : (i) pour les vitesses de rotation inférieures à 6 Hz, le champ est nul, (ii) pour les vitesses de rotation supérieures à 8 Hz, le champ est majoritairement saturé. Ceci est aussi observé sur les pdfs (figure 6(b)) : les valeurs maximales sont atteintes autour de  $-B_{sat}$  et  $+B_{sat}$ . La zone de linéarité est fortement réduite par rapport au cas axial présenté précédemment ; une discussion est proposée dans la section suivante.



**Fig.6.** Bifurcation de la dynamo Bullard - Von Karman transverse

## 5 Conclusion

Une dynamo partiellement homogène et contenant une partie fortement turbulente a été mise en place. En fonction du bouclage réalisé, deux types de dynamos turbulentes ont été observées : une dynamo homopolaire et une dynamo bipolaire. Ces états dynamos présentent un fort caractère turbulent : des régimes d'intermittence on/off, des excursions et des retournements du champ ont été observés. Les caractéristiques de l'intermittence on/off de l'une et l'autre de ces dynamos varient fortement. L'analyse des spectres d'induction obtenus en champ appliqué axial ou transverse [7] montre que le contenu basse fréquence en champ appliqué transverse est plus important que celui obtenu en champ appliqué axial. Or il a été montré que le contenu basse fréquence du bruit multiplicatif est le paramètre qui contrôle la dynamique de l'intermittence on/off [9] : les bouffées intermittentes n'étant présentes que lorsque le contenu spectral à basse fréquence est suffisamment important. Ce résultat est en accord avec une analyse quantitative des mesures présentées.

## Références

1. E. C. BULLARD, The stability of a homopolar dynamo, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**, 744 (1955).
2. J. LARMOR, How could a rotating body such as the Sun become a magnet? *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.*, **159** (1919).
3. A. GAILITIS *et al.*, Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 4365 (2000).
4. R. STIEGLITZ & U. MÜLLER, Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo, *Phys. Fluids*, **13**, 561 (2001).
5. R. MONCHAUX *et al.*, Generation of magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 044502 (2007).
6. M. BERHANU *et al.*, Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo, *Europhys. Lett.* à paraître (2007)
7. R. VOLK *et al.*, Fluctuation of magnetic induction in von Kármán swirling flows *Phys. Fluids*, **18**, 085105 (2006).
8. M. BOURGOIN *et al.*, An experimental Bullard-von Karman dynamo, *New J. Phys.*, **8**, 329 (2006).
9. S. AUMAITRE, F. PÉTRÉLIS & K. MALLICK, Low frequency noise controls on-off intermittency of bifurcating systems, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 064101 (2005).

# Cohérence des branchements dendritiques en solidification directionnelle

Alain Pocheau, Simona Bodea, & Marc Georgelin

IRPHE, CNRS & Universités Aix-Marseille I & II, 49 rue Joliot-Curie, B.P. 146, Technopôle de Château-Gombert, F-13384 Marseille, Cedex 13, France  
[alain.pocheau@irphe.univ-mrs.fr](mailto:alain.pocheau@irphe.univ-mrs.fr)

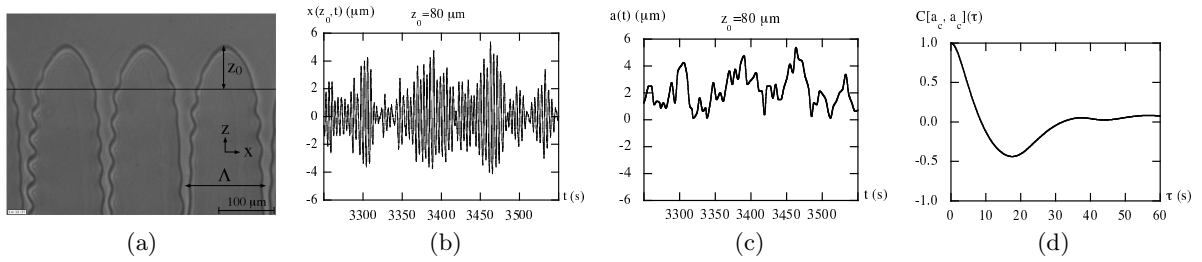
**Résumé.** En pratique, la solidification d'un alliage liquide s'opère souvent par croissance de microstructures arborescentes, les dendrites, dont les propriétés spatio-temporelles conditionnent celles du matériau résultant. Ces formes branchées correspondent à l'émission répétée de branches latérales à la pointe d'un doigt en croissance. Une question essentielle concerne leur régularité : y a-t-il un ordre dans les dendrites ? Nous montrons ici expérimentalement que les émissions dendritiques sont étonnamment cohérentes en solidification directionnelle. En particulier, près du seuil dendritique, les émissions se regroupent par paquets à l'intérieur desquels les branchements présentent une forte cohérence, largement inattendue. En revanche, comme dans la lumière naturelle, les paquets sont décorrélés en durée et en origine de phase. Ceci conduit à deux échelles de temps : une échelle longue et bruyante d'émission en paquets ; une échelle courte et cohérente d'émission de branchements. L'origine et le mécanisme des émissions en paquets et de la cohérence des branchements restent à élucider.

**Abstract.** In practice, solidification of a melt alloy often proceeds by growth of branched microstructures, the dendrites, whose spatio-temporal properties drive those of the solidified material. These branched forms involve the repetitive emission of lateral branches from the tip of a growing digit form. An outstanding issue refers to the regularity of this growth mode : is there any order in dendrites ? We show here experimentally that the dendritic emissions are surprisingly coherent in directional solidification. In particular, close to the onset of sidebranching, the emissions are grouped by bursts within which branches show an unexpected large coherence. However, as in natural light, the bursts are uncorrelated in length and in phase origin. This therefore yields two time scales : a long, noisy, scale of burst emission ; a short, coherent, scale of branch emission. The origin and the mechanism of both remain to be explained.

## 1 Introduction

Hormis les cristaux formés par épitaxie ou les alliages créés par frittage, les matériaux métalliques qui nous entourent sont issus d'une phase liquide à partir de laquelle ils se sont solidifiés. Les exemples vont des plaquettes de silicium utilisés en micro-électronique aux câbles de traction des téléphériques sans oublier les minerais issus de la solidification du magma terrestre. Ceci souligne l'importance naturelle et technologique du processus de solidification. En pratique, celui-ci met en jeu des interfaces solide-liquide dont la progression dans la phase liquide traduit la solidification croissante du milieu.

En dehors de conditions particulièrement contrôlées, ces interfaces de croissance développent en pratique des instabilités morphologiques conduisant à des microstructures de solidification [1,2]. Celles-ci correspondent à des interfaces en formes de doigt (cellules, doublons ou triplons), en général branchées : les dendrites (Fig.1-a). Ces formes d'interface resteraient cependant anecdotiques si elles ne s'accompagnaient de la formation d'inhomogénéités de concentration du solide formé. Celles-ci résultent du fait qu'une interface non-plane n'est pas une surface d'iso-concentration en soluté de la phase liquide. Sa croissance conduit alors à une modulation de concentration de la phase solide directement associée à ses modulations géométriques, et qui demeure figée dans le matériau solidifié, eu égard à la très faible diffusivité en soluté qui y règne. Par ce processus dit de "microségrégation", le matériau garde ainsi mémoire des détails morphologiques de l'interface de solidification dont il est issu. De cela découle l'intérêt pratique, notamment en métallurgie, de la détermination des caractéristiques spatio-temporelles des microstructures de solidification.



**Fig.1.** Branchement dendritique à  $V = 15\mu\text{m s}^{-1}$  et auto-corrélation du signal d'enveloppe  $a(t)$ . (a) Les signaux sont obtenus par intersections successives de l'axe  $x$  avec l'interface dendritique, à une distance  $z_0 = 80\mu\text{m}$  de la pointe des dendrites. (b) Partie du signal  $x_L(t)$  extrait du flanc gauche de la dendrite de gauche. Il montre des branchements de durée  $T_S = 4.2$  s regroupés en bouffées de 4 à 15 branchements. (c) Enveloppe du signal (b). (d) Fonction d'auto-corrélation  $C[a_c, a_c](\tau)$  de l'enveloppe centrée  $a_c = a - \bar{a}$  du signal complet. Le temps de cohérence  $\tau_a \approx 33$  s ne s'étend pas au delà de la durée moyenne des bouffées  $T_B \approx 35$  s. Ceci révèle l'absence de corrélation dans la distribution des bouffées.

Parmi les différents modes d'instabilités des interfaces de solidification, l'un domine en pratique l'espace des paramètres. Il s'agit du mode dendritique responsable de l'omniprésence des structures de solidification branchées dans notre environnement, depuis les flocons de neige et les figures de givre aux microstructures des métaux aux échelles de la centaine de microns. Ce mode consiste en l'émission récurrente de protrusions depuis la pointe d'un doigt en croissance. Leur croissance associée à celle du doigt sous-jacent conduit au développement de branchements qui défilent sur les cotés de cette "dendrite" (Fig.1-a). Une question importante émerge alors quant au type d'organisation de cette forme de croissance : est-elle ordonnée ou désordonnée ? En particulier, les émissions dendritiques de branchements sont elles coordonnées ou désynchronisées ?

Outre les implications technologiques quant à la production de matériaux "ordonnés", l'ubiquité des formes branchées dans les systèmes de croissance donnent à cette interrogation un relief plus général. Elle s'apparente notamment à la question de l'origine de la régularité de l'inflorescence des méristems, précurseur de la phylotaxie. Elle interpelle également sur la possible régularisation des croissances dendritiques neuronales ou d'électrodéposition. Elle interroge enfin sur la possibilité d'auto-organisation spontanée des interfaces de croissance aux échelles mésoscopiques.

L'expérience que nous avons réalisée a trait à l'étude de la cohérence des branchements émis par des dendrites en solidification directionnelle [3]. Un matériau plastique transparent, le succinonitrile, est utilisé pour réaliser une croissance dendritique observable en direct, *in situ* et de manière non intrusive. Un signal temporel représentatif des émissions dendritiques est extrait des images de croissance et analysé par traitement de corrélation. Il conduit à la mise en évidence d'une cohérence étonnamment large des branchements à l'intérieur de bouffées d'émissions par ailleurs décorréelées en phase et en durée.

## 2 Expérience et observations

Le dispositif expérimental [4] vise à pousser à vitesse contrôlée un échantillon mince du mélange à solidifier dans un gradient de température [5]. Celui-ci est créé par des fours chauffés par une feuille de résistance et placés en regard de refroidisseurs composés de modules à effet Peltier. Leur régulation électronique assure une stabilité des températures à  $0,05^\circ\text{C}$  près. Un espacement de 10mm entre ces parties à  $100^\circ\text{C}$  et  $10^\circ\text{C}$  conduit à un gradient thermique effectif de  $78\text{K.cm}^{-1}$ . La translation de l'échantillon dans ce gradient est assurée par un moteur pas à pas de 6400 pas par tour entraînant une vis de pas 5mm couplée à un écrou à recirculation de roulement. La position de l'échantillon est mesurée en permanence par un dispositif interférométrique de type Michelson. Ceci permet d'optimiser le dispositif et d'attester en permanence de la constance de la vitesse de poussée à 3% près sur un tour de vis. L'échantillon, de dimensions 20cm, 50mm,  $50\mu\text{m}$ , est rempli d'un mélange succinonitrile-éthylène dont la transparence

permet l'observation directe des formes de croissance par ombroscopie. La précision obtenue atteint la limite de diffraction,  $0.5\mu\text{m}$ .

Le mélange utilisé présente les caractéristiques suivantes : température de fusion du succinonitrile pur  $T_0 = 58^\circ\text{C}$ , diffusivité thermique  $D = 1.35 \times 10^3 \mu\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , coefficient de partage  $k = 0.3$ , pente du liquidus  $m = 1.72 \text{mol}\% \cdot \text{K}^{-1}$ , concentration en soluté  $c_\infty = 1.5 \text{mol}\%$  [4]. Il met en jeu une interface rugueuse qui reproduit, à plus basse température, un analogue de la solidification des métaux. Pour éviter de forcer une dissymétrie des dendrites, on sélectionne par fusion/solidification un mono-grain présentant des axes de croissance préférentielle parallèles à la vitesse de poussée et à l'épaisseur de l'échantillon. Ce dernier est par ailleurs assez fin,  $50\mu\text{m}$ , pour n'autoriser qu'une seule couche de dendrite dans son épaisseur.

Lorsque l'on augmente la vitesse de poussée de l'échantillon, le front de solidification, initialement plan, se déstabilise à une vitesse critique  $V_c = 1.7\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  en cellules de taille de l'ordre d'une centaine de microns. Ces formes de croissance digitales commencent à émettre des branchements au delà d'une vitesse seuil comprise entre  $8$  et  $15\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  suivant leur taille  $\Lambda$  (Fig.1-a) [4]. Ceci correspond à une instabilité supercritique, l'amplitude des branchements croissant continuellement avec la vitesse de poussée depuis le seuil de branchement. Comme la dendrite avance dans la phase liquide, ses branchements semblent défilier vers ses flancs dans son propre référentiel. Ce faisant, ils grandissent en amplitude, jusqu'à une valeur de saturation.

L'observation des dendrites révèle des émissions de branchements par bouffées de l'ordre de quatre à quinze branchements (Fig.1-b). Suffisamment près de la pointe, ces bouffées sont séparées par des brèves phases non branchées. Les bouffées se manifestent alors par une montée de l'amplitude de branchements, suivie d'un plateau et d'une décroissance avant qu'une autre bouffée ne survienne. Plus loin dans les sillons et suffisamment loin du seuil dendritique, la croissance de l'amplitude des branchements conduit leur bouffées à se recouvrir. Pour la clarté de l'analyse des séries de branchements, nous nous concentrons ici sur le régime de bouffées séparées. Un signal est alors extrait des images de dendrites en repérant les intersections successives  $x(z_0, t)$  d'un flanc de dendrite avec un axe parallèle aux isothermes et placé à distance  $z_0$  de sa pointe (Fig.1-a).

Nous décrivons dans la suite un signal typique obtenu sur le flanc gauche d'une dendrite de taille  $\Lambda = 150\mu\text{m}$ , de vitesse de croissance  $V = 15\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et de vitesse de seuil dendritique  $9\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , à une distance  $z_0 = 80\mu\text{m}$  de sa pointe (Fig.1-a,b). La durée moyenne d'un branchement est  $T_S = 4.2\text{s}$  et l'observation s'est étendue sur une heure, soit de l'ordre d'un millier de branchements. La période d'échantillonnage est d'un tiers de seconde, soit  $T_S/13$ . Les bouffées de branchements, visibles en figure 1-b présentent une durée moyenne  $T_B \approx 35\text{s}$ , soit environ huit branchements, avec une variabilité importante de l'ordre de cinq branchements. Par ailleurs, alors que les branchements affectent largement la forme de la dendrite, la vitesse de sa pointe reste étonnamment constante à une précision de  $0.1\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Deux échelles de temps sont donc présentes dans le phénomène de branchement : une échelle courte, celle du branchement lui-même,  $T_S \approx 4\text{s}$ , et une échelle longue, celle des bouffées de branchement,  $T_B \approx 35\text{s}$ . Pour étudier la cohérence du signal sur chacune d'elles, nous extrayons son enveloppe  $a(t)$  par interpolation entre maxima (Fig.1-c). On obtient ainsi une décomposition du signal  $x(z_0, t) = a(t)s(t)$  sous la forme d'un signal d'enveloppe  $a(t)$ , positif, variant sur l'échelle  $T_B$  et d'un signal de "phase"  $s(t)$  variant entre  $-1$  et  $1$  sur l'échelle  $T_S$ . La suite de l'étude se penche sur leurs corrélations propres et croisées.

### 3 Analyse des corrélations

Une mesure des corrélations moyennes entre deux signaux  $x_1, x_2$  de durée  $T$  est fournie par l'intégrale normalisée  $C$  de leur recouvrement pour un décalage de durée courante  $\tau$  :

$$C[x_1, x_2](\tau) = c_{1,2}(\tau) / [c_{1,1}(\tau)c_{2,2}(\tau)]^{1/2}$$

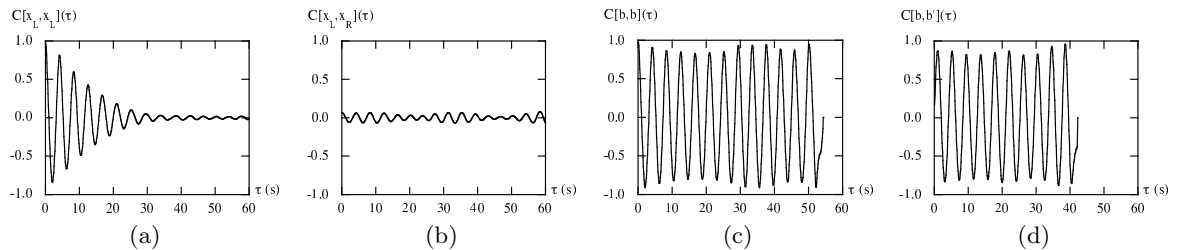
$$c_{i,j}(\tau) = \int_0^{T-\tau} \tilde{x}_i(t)\tilde{x}_j(t)dt \quad ; \quad \tilde{x}_i(t) = x_i(t) \quad ; \quad \tilde{x}_j(t) = x_j(t + \tau)$$

Par définition,  $C$  varie entre  $-1$  et  $1$ . La valeur  $|C| = 1$  (resp.  $C = 0$ ) signale des signaux parfaitement cohérents (resp. incohérents). La durée de décroissance de  $|C|$  vers  $0$  indique le temps de cohérence du ou des signaux.

La fonction d'auto-corrélation  $C[a_c, a_c](\tau)$  de l'enveloppe centrée du signal,  $a_c = a - \bar{a}$ , s'annule sur un temps de cohérence  $\tau_a$  de l'ordre de  $\tau_a \approx 33s$  (Fig.1-d). Celui-ci est comparable à la longueur moyenne des bursts,  $T_B \approx 35s$ . Cela signifie que les contributions intégrées du recouvrement du signal d'enveloppe par lui-même cessent lorsque les bouffées ne se superposent plus à elles-mêmes. Ceci témoigne d'une absence de corrélation en temps et en durée des bouffées de branchements.

La fonction d'auto-corrélation  $C[x_L, x_L](\tau)$  du signal complet  $x(z_0, t) \equiv x_L(t)$  présente des oscillations à la durée de branchement  $T_S$  dont l'amplitude décroît pour s'annuler au delà d'un temps de cohérence  $\tau_c \approx 7T_S$  (Fig.2-a). En comparaison du cas précédent, l'enveloppe  $a(t)$  est ici multipliée par le signal de phase  $s(t)$ . Ce dernier est responsable des oscillations de la fonction  $C[x_L, x_L](\tau)$  sur l'échelle de temps  $T_S$ . En revanche, il n'induit qu'une baisse minime du temps de cohérence :  $\tau_c \approx 30s \approx \tau_a$ . Ceci laisse présager que ce signal  $s(t)$  présente une forte cohérence interne, au moins sur la durée des bouffées de branchement.

Avant d'étudier ce point plus précisément, il est utile de considérer la fonction de corrélation croisée entre deux signaux de branchements pris à deux endroits différents de l'interface. Par simplicité, nous considérons ici le signal  $x_R(t)$  obtenu sur le flanc droit de la même dendrite, à même distance  $z_0 = 80\mu m$  de sa pointe (Fig.1-a). La fonction de corrélation  $C[x_L, x_R](\tau)$  montre alors des oscillations sur l'échelle de temps  $T_S$  mais une amplitude jamais supérieure à  $0.1$  (Fig.2-b). Cette faible valeur n'est pas due au recouvrement des enveloppes (positives) des deux signaux qui auraient induit une valeur médiane, mais à celui de leur signaux de phase  $-1 < s_L(t) < 1$ ,  $-1 < s_R(t) < 1$ . Ces derniers se révèlent, pour tout décalage  $\tau$ , non corrélés, conduisant ainsi à une fonction de corrélation croisée d'amplitude très faible : les branchements des deux flancs d'une même dendrite sont décorrélés. Cette conclusion s'étend sans surprise aux branchements de dendrites différentes.



**Fig.2.** Corrélation des branchements sur un large ensemble de bouffées ou sur des bouffées isolées. (a) Fonction d'auto-corrélation du signal  $x_L(t) = x(z_0, t)$  extrait de la figure 1-a sur une durée d'une heure. Son temps de cohérence n'est étonnamment pas réduit par rapport à celui de sa seule enveloppe (Fig. 1-d). Ceci signale une forte cohérence interne du signal de phase des branchements. (b) Corrélation croisée des signaux  $x_L(t)$ ,  $x_R(t)$  extraits des flancs gauches et droits de la même dendrite (dendrite de gauche de la figure 1-a). Sa faible amplitude témoigne d'une absence de cohérence entre ces signaux. (c) Fonction d'auto-corrélation  $C[b, b](\tau)$  de la bouffée centrale  $b(t)$  de la figure 1-b ( $3367s < t < 3421s$ ). Une forte cohérence est maintenue sur toute la bouffée dendritique. (d) Fonction de corrélation croisée  $C[b, b'](\tau)$  des bursts  $b(t)$  et  $b'(t)$  ( $3444s < t < 3486s$ ) de la figure 1-b. Une forte cohérence entre ces deux émissions est maintenue sur l'ensemble de leur recouvrement.

L'analyse du signal de branchement a ainsi conduit à suspecter une forte cohérence interne de son signal de phase sur la durée des bouffées de branchement. Pour tester ce point essentiel, nous extrayions des bouffées du signal de branchement afin de déterminer leur propre fonctions d'auto-corrélation et de corrélation croisée. Nous obtenons alors les résultats génériques suivants que nous illustrons sur des bouffées  $b(t)$ ,  $b'(t)$  extraites du signal de la figure 1-b.

La fonction d'auto-corrélation  $C[b, b](\tau)$  de la bouffée  $b(t)$ ,  $3367s < t < 3421s$ , montre une amplitude d'oscillation remarquablement proche de l'unité sur l'ensemble de sa durée (Fig.2-c). Ce résultat, valide

pour toute bouffée quelque soit sa longueur ou sa position, témoigne de la forte cohérence interne du signal de branchement dans une même bouffée d'émission. Il contraste avec la perte de cohérence de l'enveloppe du signal complet au delà d'une durée moyenne de bouffée (Fig.1-d). Au total, cela conduit à une vision partagée de la cohérence du signal de branchement : des branchements très cohérents mais émis par bouffées aléatoirement distribuées.

La fonction de corrélation croisée  $C[b, b'](\tau)$  des bouffées  $b(t)$  et  $b'(t)$ ,  $3444s < t < 3486s$ , présente également une amplitude proche de l'unité sur l'ensemble du recouvrement (Fig.2-d). Cela signifie que ces signaux cohérents délivrent, pour des décalages  $\tau$  successifs, des interférences constructives, sans battement notable. Ce résultat conforte la propriété de cohérence interne des bouffées de branchements. Il indique par ailleurs que la fréquence  $\nu$  de branchement est la même dans chaque bouffée à une variation relative  $\delta\nu/\nu$  inférieure à  $T_S/T_B \approx 10^{-1}$ .

En l'absence de décalage, i.e. pour  $\tau = 0$ , la fonction  $C[b, b'](\tau)$  présente par ailleurs une valeur inférieure à l'unité (Fig.2-d). Ceci signifie que les bouffées de branchement débutent avec des phases différentes et, de fait, aléatoires. On comprend alors que le recouvrement des bouffées dans la fonction d'auto-corrélation  $C[x_L, x_L](\tau)$  du signal complet  $x_L(t)$  conduise au total à des interférences destructives, limitant ainsi sa durée de cohérence à la taille moyenne des bouffées,  $T_B$  (Fig.2-a). Pour la même raison, on comprend également que la corrélation croisée de signaux différents donne des faibles valeurs, les origines de phase des bouffées étant décorréliées (Fig.2-b).

## 4 Discussion

Les branchements dendritiques présentent ainsi, par bouffée, une forte cohérence interne. La variabilité des bouffées en longueur et en origine de phase plaide pour une origine interne et naturelle. En particulier, la seule possibilité de forçage déterministe dans le dispositif expérimental mettrait en jeu le dispositif de translation par l'intermédiaire de sa vis ou des pas du moteur. Cependant, la première fait un tour en  $300s$  et les seconds sont espacés de  $0.05s$  environ. Ces temps sont ainsi trop éloignés des durées de branchements ( $T_S \approx 4s$ ) ou de bouffées ( $T_B \approx 35s$ ) pour en être à l'origine. En particulier, le temps de diffusion du champ thermique dans l'échantillon étant de  $200s$ , toute fluctuation de vitesse aux échelles  $T_S$  ou  $T_B$  transporterait l'interface en bloc, conduisant ainsi à des oscillations des pointes de dendrites contraires aux observations.

La nature des corrélations du signal dendritique présente des similitudes frappantes avec celles de la lumière naturelle : une succession aléatoire de trains d'onde cohérents, sans corrélation de leurs origines de phase. Comme ici, cela donne lieu à des interférences entre trains d'onde isolés (Fig.2-d), mais à aucune cohérence nette entre des paquets de ceux-ci (Fig.2-b).

Les précédentes études expérimentales sur les branchements dendritiques ont principalement concerné la croissance libre (i.e. à température homogène). Leurs conclusions étaient notablement disparates : les branchements ont été rapportés être non corrélés [6], partiellement corrélés [7] ou largement corrélés [8] ; la pointe de dendrite a été présentée avoir une vitesse constante [6,7] ou oscillante [8,9,10] ; son rayon de courbure a été décrit constant [6,7,10] ou oscillant [8]. Ici, la pointe de dendrite et son rayon de courbure sont constants, mais la cohérence apparente du signal dépend du poids respectif des bouffées et des branchements. Ceci pourrait expliquer la variabilité des conclusions expérimentales, les branchements cohérents étant rapportés sur des bouffées longues [8] et les branchements décorréliés sur des bouffées courtes [6,7].

La cohérence interne des branchements correspond à une auto-organisation à échelle mésoscopique qui révèle des caractéristiques non-linéaires sous-jacentes. En particulier, elle s'oppose à une modélisation des branchements par amplification linéaire des fluctuations naturelles [11] dont le produit ne peut être qu'aussi incohérent que le bruit originel. Ceci rejoint le désaccord entre la forme du taux de croissance alors prédit et la surface critique de branchements mesurée [12]. Cette cohérence s'oppose également aux modes globaux induits par une oscillation de pointe [13] qui reste indécélable ici. En revanche, elle pourrait résulter de couplages non-locaux, éventuellement diffusifs, entre branchements et pointes de dendrites. D'autres pistes pourraient mettre en jeu l'anisotropie, voire l'élasticité. Sans doute, les modèles de champ de phase devraient-ils permettre de tester avec efficacité les mécanismes proposés.

## 5 Conclusion

Nous avons mis en évidence une forte cohérence des branchements dendritiques à l'intérieur de bouffées d'émissions par ailleurs décorréelées. Ceci révèle une auto-organisation inattendue des interfaces de solidification : les dendrites possèdent un coeur, même si ses pulsations sont pathologiques. En revanche, chacun de ces phénomènes, la cohérence des branchements et l'existence de bouffées, reste pour l'heure inexpliqué. Leur compréhension représente cependant un enjeu de taille sur le plan fondamental comme sur le plan appliqué. Elle pourrait ainsi permettre d'identifier un mécanisme générique d'auto-organisation des formes de croissance branchées, éventuellement transposable à d'autres systèmes plus complexes que la solidification. Elle pourrait enfin conduire à des possibilités d'organisation spontanée des interfaces de croissance aux échelles mésoscopiques.

## Références

1. W.W. MULLINS AND R.F. SEKERKA, Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy, *J. Appl. Phys.*, **35**, 444-451 (1964).
2. J.S. LANGER, Instabilities and pattern formation in crystal growth, *Rev.Mod.Phys.*, **52**, 1-28 (1980).
3. M. GEORGELIN, S. BODEA AND A. POCHEAU, Coherence of dendritic sidebranching in directional solidification, *Eur. Phys. Lett.*, **77**, 46001-46006 (2007).
4. M. GEORGELIN AND A. POCHEAU, Onset of sidebranching in directional solidification, *Phys. Rev. E*, **57**, 3189-3203 (1998) ; A. POCHEAU AND M. GEORGELIN, Shape of growth cells in directional solidification, *Phys. Rev. E*, **73**, 011604-18 (2006). A. POCHEAU AND M. GEORGELIN, Cell tip undercooling in directional solidification, *J. Cryst. Growth*, **206**, 215-229 (1999).
5. J.D. HUNT, K.A. JACKSON AND H. BROWN, Temperature Gradient Microscope Stage Suitable for Freezing Materials with Melting Points between -100 and +200°C, *Rev. Sci. Instrum.*, **37**, 805-805 (1966).
6. U. BISANG AND J.H. BILGRAM, Shape of the tip and the formation of sidebranches of xenon dendrites, *Phys. Rev. E*, **54**, 5309-5326 (1996).
7. A. DOUGHERTY, P.D. KAPLAN AND J.P. GOLLUB, Development of sidebranching in dendritic crystal growth, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1652-1655 (1987).
8. H. HONJO, S. OHTA AND Y. SAWADA, New experimental findings in two-dimensional dendritic crystal-growth, *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 841-844 (1985) ; Y. SAWADA, B. PERRIN, P. TABELING AND P. BOUISSOU, Oscillatory growth of dendritic tips in a three-dimensional system, *Phys. Rev. A*, **43**, 5537-5540 (1991).
9. E. RAZ, S.G. LIPSON AND E. POLTURAK, Dendritic growth of ammonium-chloride crystals - Measurement of the concentration field and a proposed nucleation model for growth, *Phys. Rev. A*, **40**, 1088-1095 (1989).
10. V. FERREIRO, J.F. DOUGLAS, J. WARREN AND A. KARIM, Growth pulsations in symmetric dendritic crystallization in thin polymer blend films, *Phys. Rev. E*, **65**, 051606-16 (2002) ; J.C. LACOMBE, M.B. KOSS, J.E. FREI, C. GIUMMARRA, A.O. LUPULESCU AND M.E. GLICKSMAN, Evidence for tip velocity oscillations in dendritic solidification, *Phys. Rev. E*, **65**, 031604-6 (2002).
11. PELCÉ P. AND CLAVIN P, The stability of curved fronts, *Europhys.Lett.*, **3**, 907-913 (1987) ; R. PIETERS AND J.S. LANGER, Noise-driven sidebranching in the boundary-layer model of dendritic solidification, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 1948-1951 (1986) ; M.N. BARBER, A. BARBIERI AND J.S. LANGER, Dynamics of dendritic sidebranching in the two-dimensional symmetrical model of solidification, *Phys. Rev. A*, **36**, 3340-3349 (1987).
12. A. POCHEAU AND M. GEORGELIN, Cellular arrays in binary alloys : from geometry to stability, *J. Cryst. Growth*, **250**, 100-106 (2003).
13. D.A. KESSLER, J. KOPLIK AND H. LEVINE, Geometrical models of interface evolution. II. Numerical simulation, *Phys. Rev. A*, **30**, 3161-3174 (1984).



# Dynamique d'un laser soumis à une conduite asymétrique — effet de "cliquet"

Cristina Elena Preda<sup>1</sup>, Bernard Ségard<sup>1</sup>, & Pierre Glorieux<sup>1</sup>

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, CNRS (UMR 8523), Université de Lille 1, France  
elena.preda@phlam.univ-lille1.fr

**Résumé.** Nous montrons que la réponse d'un laser ( $Nd^{3+} : YVO_4$ ), à une modulation périodique en dent de scie de son pompage, dépend de façon critique de l'asymétrie de la dent de scie lorsque la valeur moyenne du taux de pompage reste inférieure au seuil. Si la partie ascendante de la dent de scie est lente, le laser émet de manière impulsionnelle et cohérente, alors que dans le cas contraire il reste éteint. Ce phénomène s'apparente à l'effet "cliquet" invoqué par Feynman pour expliquer comment un système stochastique peut fournir du travail.

**Abstract.** Subjecting lasers to triangular modulations of the pump produces phenomena that drastically depend on the asymmetry of the triangle. With slow up-rising, the laser delivers coherent pulses, while it does not with fast up-rising. This effect is reminiscent of the thermal ratchet with which a directed motion is extracted from a stochastic medium.

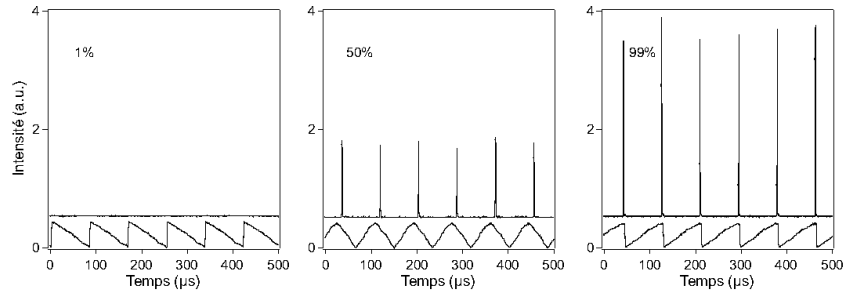
## 1 Introduction

Dans ce travail, nous avons concentré notre attention sur un aspect inexploré de la dynamique du laser qui s'apparente aux effets de "cliquet" induits sur des systèmes de particules browniennes [1] ou sur des nuages d'atomes froids [2,3]. Un système "cliquet", tel que définit par Feynman [1] dans les années soixante, est un dispositif microscopique capable de transporter des particules en absence de toute force macroscopique. L'ingrédient minimal indispensable au déplacement d'ensemble des particules est l'existence simultanée de fluctuations thermiques et d'un potentiel microscopique spatialement périodique et asymétrique. Le sens d'écoulement des particules est alors imposé par l'asymétrie du potentiel. Les résultats que nous présentons montrent qu'il est possible de transcrire ce type de processus aux lasers dont la dynamique est fortement influencée par les fluctuations introduites par l'émission spontanée. En d'autres termes, nous montrons que l'interaction entre l'émission spontanée et un forçage externe périodique asymétrique (via une modulation du pompage) influence la dynamique d'émission cohérente du laser que l'on peut associer à un écoulement dirigé de photons. Les expériences que nous avons réalisées ainsi que les simulations numériques correspondantes, ont été publiées par ailleurs [4].

## 2 Résultats expérimentaux

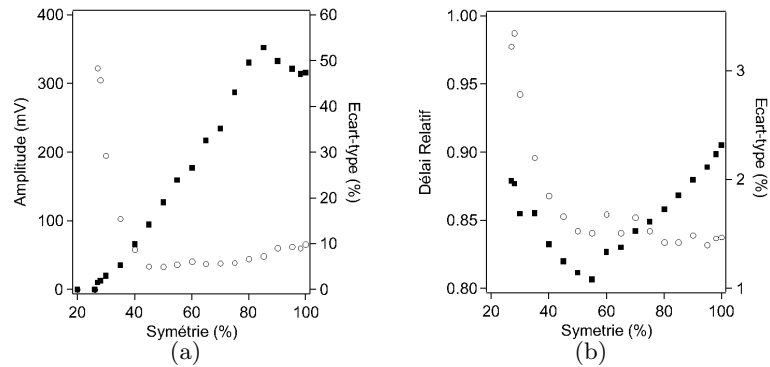
Les expériences que nous avons effectuées ont été réalisées sur un laser  $Nd^{3+} : YVO_4$ , pompé par une diode laser ( $\lambda = 808\text{nm}$ ). Le cristal d'orthovanadate d'yttrium dopé à 2% en ions néodyme est placé à l'intérieur d'une cavité hémisphérique de 25 mm de longueur.

La conduite du laser est assurée via une modulation triangulaire périodique et asymétrique du courant de la diode de pompe. La valeur moyenne du taux de pompage est maintenue en dessous du seuil de démarrage du laser tout en restant proche. L'asymétrie de la modulation est caractérisée par un paramètre d'asymétrie  $\eta$  défini comme le rapport entre la durée de la montée du triangle et sa période. La figure 1 montre l'influence de ce paramètre d'asymétrie sur la réponse du laser. On retrouve le résultat annoncé précédemment, pas d'émission pour  $\eta = 1\%$  et émission d'impulsions de grande amplitude pour  $\eta = 99\%$ . Pour la valeur intermédiaire, l'amplitude des impulsions émises est plus faible. La figure 2(a) montre l'évolution de l'amplitude des impulsions en fonction de  $\eta$ . Celle ci présente un maximum au



**Fig.1.** Évolution de la puissance de pompe et de l'intensité émise par la laser pour des valeurs du paramètre d'asymétrie  $\eta$  respectivement égales à 1%, 50% et 99%. Les paramètres utilisés sont :  $A_{min} = 0,68$ ,  $A_{max} = 1,2$  et la période de modulation  $T = 84\mu s$ .

voisinage de  $\eta = 80\%$ . Le seuil de démarrage est proche de  $\eta = 25\%$ . Au voisinage de ce seuil, on observe des fluctuations importantes de l'amplitude liées à l'émission spontanée dont l'influence sur la dynamique de démarrage est dominante pour  $0.25 < \eta < 0.55$ . Cette influence prépondérante de l'émission spontanée se retrouve sur le délai au démarrage qui présente un minimum au voisinage de  $\eta = 0.55$  (Fig. 2b).



**Fig.2.** Évolution des valeurs expérimentales de l'amplitude et du délai en fonction du paramètre d'asymétrie  $\eta$ . (■) valeurs absolues, (○) écart-types. Conditions de la figure 1.

Pour expliquer ces résultats expérimentaux, nous avons développé une approche analytique qui fait l'objet de la section suivante. Celle-ci est complétée par une approche numérique basée sur l'intégration du système d'équations différentielles stochastiques présenté dans la dernière section.

### 3 Approche analytique

Pour simplifier la démarche analytique, nous nous sommes limités à un triangle unique, mais les résultats obtenus sont généralisables à une conduite périodique. Nous utilisons un modèle standard de type équations de bilan où la dynamique du laser est décrite par l'évolution de l'intensité émise  $I$  et la différence de population  $D$  (grandeurs normalisées). Pour ce modèle les équations d'évolution sont :

$$\begin{aligned} \frac{dI(s)}{ds} &= K[I(s)(D(s) - 1)] \\ \frac{dD(s)}{ds} &= A(s) - D(s)(I(s) + 1). \end{aligned} \quad (1)$$

où  $s$  est le temps et  $1/K$  le temps de décroissance de l'intensité dans la cavité ( $1/\kappa$ ), tous deux normalisés à la durée de vie ( $1/\gamma_{\parallel}$ ) du niveau haut de la transition laser.  $A(s)$  est le taux de pompage normalisé à la puissance de pompe au seuil dont l'amplitude varie de la valeur minimum  $A_{min}$  ( $A_{min} < 1$ ) à la valeur maximum  $A_{max}$  ( $A_{max} > 1$ ). Dans un premier temps nous ne prendrons pas en compte l'émission spontanée. Nous supposons qu'à l'instant initial ( $s = 0$ ) le laser est dans l'état "éteint". La différence de population est alors  $D_0 = A_{min}$  et l'intensité émise  $I_0$  est très faible (mais non nulle, condition indispensable au démarrage du laser). La dynamique de démarrage du laser comporte une phase de latence pendant laquelle l'intensité émise demeure très faible ( $I \ll 1$ ). Pendant cette période, l'évolution conjointe de la différence de population  $D$  et de l'intensité  $I$  va permettre de préciser dans quelles conditions le laser est susceptible de démarrer et d'indiquer, le cas échéant, l'instant où celui-ci démarre. Le démarrage est caractérisé par l'émergence rapide d'un champ fort ( $I \gg 1$ ). Pendant cette seconde phase, l'évolution de  $I$  permet de déterminer l'intensité maximale émise. Le système d'équations (1) peut être résolu de manière approximative pour chacune de ces deux phases. Il suffit alors de connecter les deux solutions obtenues pour obtenir une formulation analytique approchée de l'évolution de l'intensité émise.

### 3.1 Évolution en champ faible

Tant que l'intensité reste faible ( $I(s) \ll 1$ ), on peut négliger son influence sur la dynamique d'évolution de la population. Dans ces conditions, le système (1) se simplifie et prend la forme :

$$\frac{dI}{ds} = KI(D - 1) \quad (2)$$

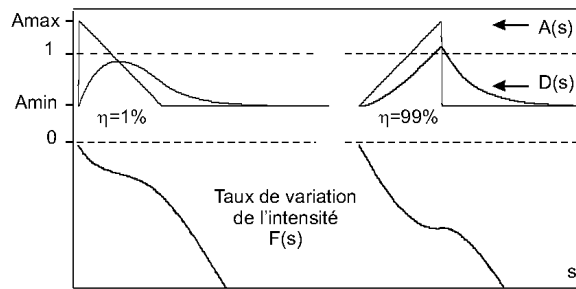
$$\frac{dD}{ds} = A(s) - D. \quad (3)$$

L'évolution de l'intensité, dans cette phase de démarrage, est de type exponentiel et s'écrit :

$$I(s) = I_0 e^{F(s)} \quad (4)$$

où  $F(s) = K \int_0^s (D(s') - 1) ds'$  définit le taux de variation de l'intensité.  $D(s)$  est obtenu par intégration de l'équation 3. L'intensité du laser ne peut croître que si  $F(s)$  devient supérieur à 0.

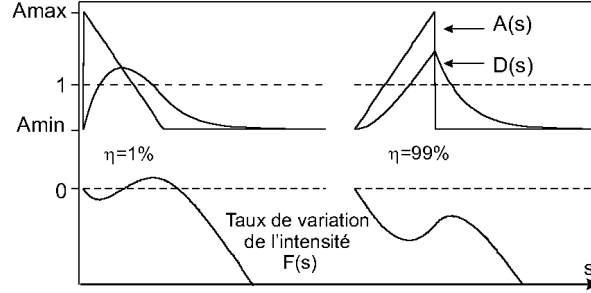
Les courbes de la figure 3, obtenues dans les conditions des expériences, montrent l'évolution de la différence de population  $D(s)$  et du taux de variation de l'intensité  $F(s)$  pour deux valeurs extrêmes du coefficient d'asymétrie  $\eta$  ( $\eta = 1\%$  et  $\eta = 99\%$ ). Les évolutions observées sont notablement différentes.



**Fig.3.** Exemple d'évolution de la différence de population  $D(s)$ , du taux de pompage  $A(s)$  et de taux de variation de l'intensité  $F(s)$  pour les deux asymétries extrêmes :  $\eta = 1\%$  et  $\eta = 99\%$ . Conditions :  $A_{min} = 0,68$ ,  $A_{max} = 1,2$  et  $S = 2,8$  ( $S = \gamma_{\parallel}T$ ).

Pour  $\eta = 1\%$ , on observe une croissance rapide de  $D(s)$  qui conduit à une valeur maximale inférieure à 1. Par contre, pour  $\eta = 99\%$  la croissance bien qu'initialement plus lente que dans le cas précédent, conduit à un maximum supérieur à 1. Dans le premier cas l'inversion de population est insuffisante pour

induire l'émission laser, dans le second l'émission devient possible. En fait le démarrage du laser ne peut se produire que si  $F(s)$  devient positif. Ce n'est pas le cas dans les conditions de la figure 3. Si on augmente suffisamment le taux de pompage maximum ( $A_{max} = 1,5$ ), le démarrage devient possible comme le montre la figure 4.  $F(s)$  devient  $> 0$ , mais *contrairement aux observations expérimentales* (voir la section 2), le laser démarre pour une asymétrie  $\eta = 1\%$  et reste éteint pour  $\eta = 99\%$ . On voit donc que les prédictions théoriques basées sur des modèles où le laser démarre à partir d'une condition initiale d'intensité non nulle sont sujettes à caution du fait de l'existence des fluctuations liées à l'émission spontanée. La façon



**Fig.4.** Exemple d'évolution de la différence de population  $D(s)$ , du taux de pompage  $A(s)$  et de taux de variation de l'intensité  $F(s)$  pour les deux asymétries extrêmes :  $\eta = 1\%$  et  $\eta = 99\%$ . Conditions :  $A_{min} = 0,68$ ,  $A_{max} = 1,5$  et  $S = 2,8$

la plus élémentaire de prendre en compte l'émission spontanée est d'imposer une valeur minimale  $I_{min}$  à l'intensité, ce qui physiquement correspond à un fond continu de rayonnement comme celui fourni par le corps noir qui entoure le laser. Le système d'équations reste alors soluble. Pendant la phase d'évolution où  $D(s) < 1$ , celui ci conduit à une décroissance de l'intensité, que l'émission spontanée maintient à la valeur  $I_{min}$ . Quand la différence de population  $D(s)$  devient supérieure à  $1$ , l'intensité  $I(s)$  peut croître à partir de  $I_{min}$  et prendre des valeurs extrêmement importantes, il est alors possible d'obtenir une forme analytique approchée de l'évolution dans le cadre d'une approximation différente, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### 3.2 Évolution en champ fort, démarrage du laser

Lorsque  $I$  devient suffisamment grand, l'émission stimulée est prépondérante par rapport aux processus de pompage et de relaxation des populations qui peuvent être négligés dans le terme source de l'équation d'évolution de  $D(s)$  ( $DI \gg A - D$ ). Le système (1) devient [6] :

$$\frac{dI}{ds} = KI(D - 1) \quad (5)$$

$$\frac{dD}{ds} = -DI. \quad (6)$$

L'évolution de l'intensité  $I$  est donnée par la forme implicite suivante :

$$I(s) = K \left[ D_{\uparrow} - D(s) + \ln \frac{D(s)}{D_{\uparrow}} \right].$$

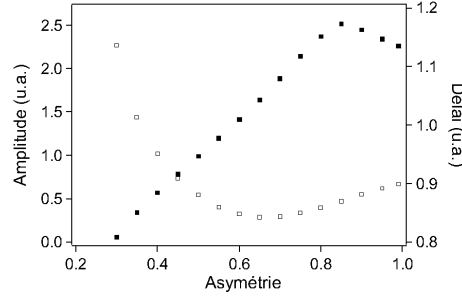
où  $D_{\uparrow}$  est la valeur de l'inversion de la population au moment où  $I$  commence à émerger ( $I \approx 0$ ). Le maximum d'intensité de l'impulsion est atteint pour  $D(s) = 1$  qui correspond à la condition  $\frac{dI(s)}{ds} = 0$  (voir équation 5). L'intensité maximale de l'impulsion s'exprime alors sous la forme :

$$I_{max} = K \left[ D_{\uparrow} - 1 - \ln D_{\uparrow} \right] \quad (7)$$

L'expression de  $I_{max}$  dépend de la différence de population  $D_{\uparrow}$  que l'on va définir par raccordement avec la solution en champ faible. Pour cela il faut préciser quel est le seuil  $I_{limite}$  d'émergence de l'émission laser. Dans la mesure où il n'existe pas de critère fixé par l'étude analytique du modèle, nous avons convenu d'utiliser la moyenne géométrique entre le minimum d'intensité  $I_{min}$  et l'ordre de grandeur  $K$  de son maximum, soit  $I_{limite} = \sqrt{KI_{min}}$ . Nous avons attribué à  $I_{min}$  une valeur compatible avec des résultats obtenus précédemment [5]. L'équation d'évolution de l'intensité en champ faible appliquée au point de raccordement conduit à :

$$\int_{s_1}^{s_{\uparrow}} (D(s) - 1) ds = \gamma \ln \frac{I_{limite}}{I_{min}} = -\frac{\gamma}{2} \ln(\gamma I_{min}),$$

où  $s_{\uparrow}$  est l'instant du seuil d'émergence de l'émission laser et  $s_1$  l'instant où la différence de population devient supérieure à 1. On peut alors déterminer la valeur de  $s_{\uparrow}$  ainsi que la valeur correspondante de la différence de population  $D_{\uparrow}$  dont on déduit l'intensité maximale émise et une mesure du délai de démarrage du laser. La figure 5 montre l'évolution de ces deux dernières grandeurs en fonction de l'asymétrie. Les courbes obtenues présentent qualitativement les mêmes caractéristiques que celles observées expérimentalement (cf. figure 2).



**Fig.5.** Évolution du délai (□) et de l'amplitude (■) en fonction de coefficient d'asymétrie (mêmes paramètres que pour la figure 1).

Pour rendre compte de la dispersion des valeurs observées pour les délais et les amplitudes maximales, nous avons donc été amenés à utiliser un modèle où l'émission spontanée est simulée par l'introduction de termes stochastiques.

#### 4 Analyse numérique

Dans les lasers pompés par diode laser, deux sources principales de fluctuations influencent la dynamique de l'émission. La première, l'émission spontanée, est d'origine quantique et sa principale contribution peut être décrite classiquement comme un bruit blanc. La seconde correspond aux fluctuations de la puissance de pompe qui sont essentiellement d'origine mécanique et thermique et peut être simulée par un bruit corrélé. Nous nous limiterons ici à la seule émission spontanée. La dynamique du laser sera alors décrite par le système d'équations :

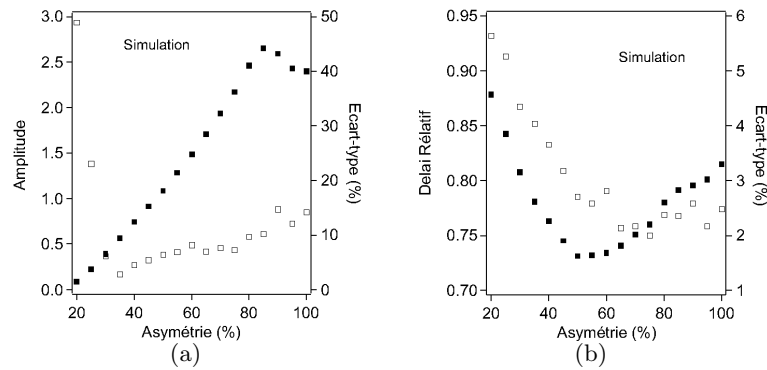
$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= E(t)(D(t) - 1) + \epsilon(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} &= \gamma \left[ A(t) - D(t)(E(t) \times E(t) + 1) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

où  $t$  est ici le temps en unité  $\kappa_c^{-1}$  ( $\kappa_c = \kappa/2$ ).  $\epsilon(t)$  est un bruit additif très faiblement corrélé de type Ornstein-Uhlenbeck et assimilable à un bruit blanc.  $\epsilon(t)$  est caractérisé par la fonction de corrélation

$\langle \epsilon(t)\epsilon(t') \rangle = \frac{Q}{\tau} e^{-|t-t'|/\tau}$ ) et satisfait à l'équation d'évolution :

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(\epsilon(t) - b(t))$$

où  $b(t)$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation égale à  $\langle b(t) \cdot b(t') \rangle = 2Q\delta(t-t')$ . La durée de corrélation  $\tau$  est exprimée en unité  $\kappa_c^{-1}$ . La méthode d'intégration utilisée dérive d'une méthode générale d'intégration des systèmes d'équations différentielles stochastiques proposée par Fox [7]. Il s'agit d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre deux en temps aussi bien pour les termes stochastiques que pour les termes certains. Elle s'applique à des bruits corrélés indépendants et a été retenue en vue de l'introduction d'un bruit de pompe dans le système d'équations. Moyennant un ajustement de la densité spectrale de puissance  $Q$ , l'ensemble des résultats des simulations représentés sur la figure 6 sont en très bon accord avec les expériences (voir la figure 2).



**Fig.6.** Simulations numériques avec  $Q_1 = 4,7 \times 10^{-9}$  et  $\tau_1 = 9 \times 10^{-2}$ , les autres paramètres sont ceux de la figure 1. (■) valeurs absolues, (□) écart-types.

## 5 Conclusion

Les résultats que nous venons de présenter constituent une approche nouvelle de la dynamique de démarrage des lasers de classe  $B$ . Ils montrent que l'action conjuguée des fluctuations quantiques de l'émission spontanée et d'une asymétrie de l'évolution temporelle du taux de pompage conditionne la dynamique du laser. En particulier, pour un apport donné d'énergie (proportionnel à l'aire du triangle de modulation du pompage), il est possible d'optimiser l'intensité des impulsions émises en ajustant le paramètre d'asymétrie.

## Références

1. R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, M. SANDS, *The Feynman Lectures in Physics*, Addison-Wesley, Reading, (1966).
2. L. P. FAUCHEUX, A. LIBCHABER, *J. Chem. Soc. Faraday Trans.*, **91**, 3163, (1995).
3. E. LUNDH, M. WALLIN, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 110603, (2005).
4. C. E. PEDA, B. SÉGARD, P. GLORIEUX, *Opt. Lett.*, **31**, 2347, (2006).
5. C. E. PEDA, B. SÉGARD, P. GLORIEUX, *Opt. Commun.*, **261**, 141, (2006).
6. B. SÉGARD, P. GLORIEUX, T. ERNEUX, *Appl. Phys. B*, **81**, 989, (2005).
7. R. F. FOX, *Phys. Rev. A*, **43**, 2649, (1991).

# Grandes déviations et chaoticité : étude à l'aide d'une dynamique biaisée

Julien Tailleur & Jorge Kurchan

Laboratoire PMMH — UMR 7636 (ESPCI,CNRS,P6,P7), 10, rue Vauquelin 75005 Paris  
 Julien.Tailleur@espci.fr

**Résumé.** La physique des systèmes dynamiques non-linéaires s'explique souvent par l'existence de trajectoires rares, qui jouent paradoxalement un rôle prépondérant. Par exemple, la présence de résonances détermine la stabilité des systèmes planétaires et l'existence de solutions localisées, tels les solitons, permet un transport rapide d'énergie dans des systèmes aussi divers que les condensats de Bose-Einstein ou certaines bio-molécules. Or, malgré les nombreux progrès réalisés au cours des dix dernières années, les méthodes permettant de localiser de tels objets restent confinées aux systèmes à peu de degrés de liberté, et leur application dans les domaines de la physique statistique, la chimie ou même l'astronomie reste difficile. Nous présentons ici une méthode introduite récemment qui permet de localiser des trajectoires ayant une chaoticité atypique dans des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

En guise d'exemple de "haute" dimensionnalité, nous appliquons notre méthode à la chaîne Fermi-Pasta-Ulam d'oscillateurs non-linéaires, où elle détecte la présence de modes de respiration chaotiques ou de solitons, lorsque l'on cherche respectivement des solutions chaotiques ou intégrables.

**Abstract.** In non-linear dynamical systems, atypical trajectories often play an important role. For instance, resonances and separatrices determine the fate of planetary systems, and localised objects like solitons and breathers provide mechanisms of energy transport in systems such as Bose-Einstein condensates and biological molecules. Unfortunately, most of the numerical methods to locate these 'rare' trajectories are confined to low-dimensional or toy models, while the realms of statistical physics, chemical reactions, or astronomy are still hard to reach. Here we implement an efficient method that allows one to work in higher dimensions by selecting trajectories with unusual chaoticity. As an example, we study the Fermi-Pasta-Ulam nonlinear chain in equilibrium and show that the algorithm rapidly singles out the soliton solutions when searching for trajectories with low level of chaoticity, and chaotic-breathers in the opposite situation.

## 1 Introduction

Les systèmes dynamiques complexes sont typiquement chaotiques : deux trajectoires initialement proches s'écartent exponentiellement vite, à un taux  $\lambda_{orb}$ . Ainsi, un déplacement initial  $\delta x_0$  croît au court du temps comme  $|\delta x(t)| \sim |\delta x(0)| \exp(\lambda_{orb} t)$ . Pour un système suffisamment chaotique, dans la limite des temps longs, toutes les conditions initiales mènent au même exposant  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{orb}(t)$ . Toutefois, une description aussi uniforme échoue à saisir qualitativement la dynamique de nombreux systèmes, qui peuvent présenter en fonction de leurs conditions initiales des trajectoires de chaoticité atypique sur de très grandes échelles de temps.

Un cas d'école est donné par les systèmes planétaires [1,2,3] : de toutes les combinaisons de masses et de conditions initiales compatibles avec les observations actuelles, seules quelques unes débouchent sur une stabilité comparable à celle du système solaire.

Pour décrire quantitativement des fluctuations d'exposants de Lyapunov, et donc de chaoticité, il est naturel de faire appel aux outils de la physique statistique. Deux manières de réaliser l'échantillonnage des trajectoires ont été proposées par le passé. Tout d'abord, on peut regarder des trajectoires de durée finie, et moyennner sur les conditions initiales [4]. Alternativement, on peut perturber le système dynamique étudié par un petit bruit aléatoire et moyennner sur les réalisations du bruit [5]. Nous suivrons ici cette deuxième approche.

## 2 Formalisme thermodynamique

Considérons  $\rho(\lambda, t)$  la distribution de probabilité d'observer une trajectoire de durée  $t$  présentant un exposant de Lyapunov  $\lambda$ . Aux temps longs, celle-ci prend la forme d'une fonction de grandes déviations

$$\rho(\lambda, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{tf(\lambda)}. \quad (1)$$

Notons ici l'analogie avec la physique statistique classique d'un système de  $N$  particules, où la distribution de probabilité  $\rho(e)$  de la densité d'énergie se met sous la forme  $\rho(e) \sim \exp[Ns(e)]$ ,  $s(e)$  étant la densité d'entropie.  $f(\lambda)$  joue ainsi le rôle d'une entropie "dynamique". Si la limite thermodynamique est obtenue en physique statistique en envoyant le nombre de composants élémentaires d'un système à l'infini, c'est ici la durée  $t$  des trajectoires qui joue le rôle du grand paramètre [6].

La difficulté du calcul de l'entropie amène habituellement à introduire l'ensemble canonique, dont les fonctions thermodynamiques sont souvent plus simples à calculer. On peut de même introduire une fonction de partition dynamique

$$Z(\beta, t) = \langle e^{\beta\lambda t} \rangle \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{t\psi(\beta)} \quad (2)$$

la moyenne étant réalisée par rapport au bruit.  $\psi(\beta)$  joue alors le rôle d'une énergie libre dynamique. Changer d'ensemble revient à peser par  $\exp(\beta\lambda t)$  les trajectoires ayant un exposant de Lyapunov  $\lambda$ .  $\beta$  joue un rôle analogue à [l'inverse de] la température en physique statistique : fixer un  $\beta$  positif équivaut, dans la limite des temps longs, à sélectionner des trajectoires présentant une valeur de  $\lambda$  fixé, supérieure à la valeur typique, alors qu'un  $\beta$  négatif favorise au contraire des trajectoires plus régulières. En effet,

$$Z(\beta, t) = \int d\lambda \rho(\lambda, t) e^{\beta\lambda t} = \int d\lambda e^{t[f(\lambda) + \beta\lambda]} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{t[f(\lambda^*) + \beta\lambda^*]}, \quad (3)$$

où  $\lambda^*$  satisfait  $f'(\lambda^*) = -\beta$  et correspond à l'exposant typique des trajectoires dominant la mesure pour une "température"  $\beta$ . L'intérêt d'un tel ensemble est que l'on va ici présenter une méthode récemment introduite [7] qui permet de réaliser des simulations à  $\beta$  fixée et donc de sélectionner des trajectoires de chaotité atypique.

## 3 Principe de l'algorithme

On désire réaliser un échantillonnage de l'espace des trajectoires en pesant chacune d'elles par un facteur  $\exp(\beta\lambda t)$ , où  $\beta$  est un paramètre arbitraire fixé. On utilise pour cela une dynamique de population de type "Diffusion Monte Carlo". Considérons par exemple un système dynamique à  $N$  degrés de liberté, défini par un Hamiltonien  $H(q, p)$ , où  $q$  et  $p$  sont les coordonnées généralisées de l'espace des phases. On fait évoluer un ensemble de  $\mathcal{N}$  marcheurs suivant la procédure suivante. Leur position évolue selon :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \sqrt{\epsilon}\eta_i \quad (4)$$

que l'on peut écrire plus généralement

$$\dot{x}_i = -\Omega_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \sqrt{\epsilon} d_i \eta_i \quad \mathbf{x} = (q_1 \cdots q_N, p_1 \cdots p_N) \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0_N & -1_N \\ 1_N & 0_N \end{pmatrix} \quad d_i = 1_{i \in [N+1 \cdots 2N]} \quad (5)$$

Les  $\eta_i$  correspondent à  $N$  bruits blancs gaussiens  $\eta_i$ , de variance 1, dont l'intensité est fixé par le petit paramètre  $\epsilon$ . Pour évaluer l'exposant de Lyapunov de chaque marcheur, on calcule en parallèle l'évolution linéarisée

$$\dot{u}_i = -A_{ij} u_j \quad A_{ij} = -\Omega_{ik} \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_j} \quad (6)$$

$\lambda$  est alors donné par

$$\lambda = -\frac{1}{t} \int_0^t \frac{u_i A_{ij} u_j}{|u|^2} dt \quad (7)$$



Ainsi,  $\exp(\beta\lambda t)$  peut s'écrire comme un produit le long des trajectoires

$$\exp \beta\lambda t = \exp \left( - \int_0^t dt \beta \frac{u_i A_{ij} u_j}{|u|^2} \right) = \prod_{k=1}^{t/dt} \left( 1 - \beta dt \frac{u_i A_{ij} u_j}{|u|^2} \Big|_{t=kd} \right) \quad (8)$$

À chaque pas de temps  $dt$ , on calcule pour chaque marcheur le facteur

$$W = 1 - \beta dt \frac{u_i A_{ij} u_j}{|u|^2} \quad (9)$$

qui est simplement donné par l'éirement instantané du vecteur tangent  $u$  élevé à la puissance  $\beta$ . Pour "peser" les trajectoires, on remplace alors chaque marcheur par

- $[W]$  marcheurs avec probabilité  $1 - (W - [W])$
- $[W] + 1$  marcheurs avec probabilité  $W - [W]$

Puis on renormalise la population par un facteur  $\mathcal{K}(t)$  pour la garder constante. Aux temps long, l'échantillon de marcheurs converge vers la "mesure d'équilibre canonique" (dans l'espace des trajectoires) fixée par la "température"  $\beta$ . Notons qu'à partir des facteurs de renormalisation, on peut calculer l'énergie libre dynamique :

$$\psi(\beta) = \frac{1}{t} \log[\mathcal{K}(0)\mathcal{K}(dt)\dots\mathcal{K}(t)]. \quad (10)$$

## 4 Quelques exemples

### 4.1 Convergence vers les séparatrices

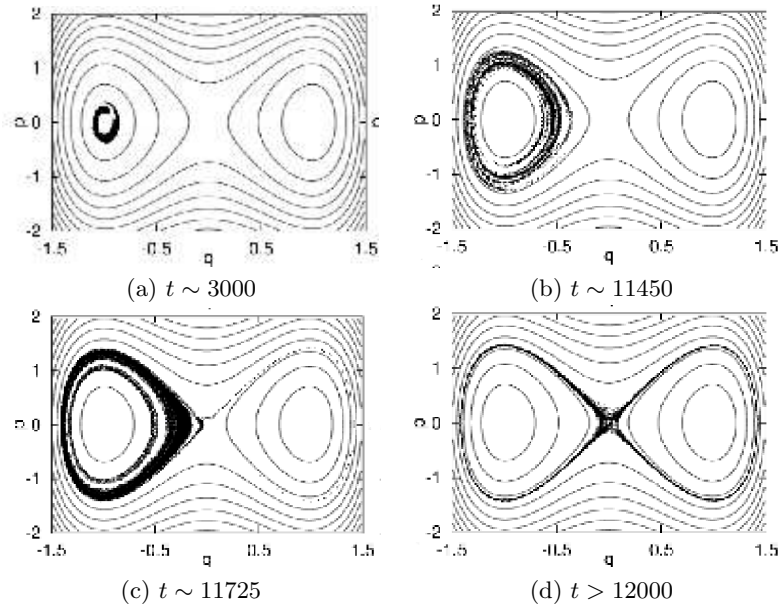
Les séparatrices sont les frontières de l'espace des phases entre des régimes dynamiques distincts. En tant que berceau du chaos, elles jouent un rôle fondamental dans l'analyse des systèmes dynamiques. Si l'on simule un système intégrable à une "température"  $\beta = 1$ , les marcheurs convergent vers les séparatrices et les peuplent uniformément. Pour voir cela sur un exemple simple, considérons un double puits de potentiel défini par  $H(q, p) = p^2/2 + q^4 - 2q^2$ . Les particules peuvent soit osciller dans l'un des deux puits, soit passer de l'un à l'autre. La séparatrice est la courbe émanant du point fixe instable qui sépare ces deux régimes. On voit sur la figure 1 qu'en appliquant la dynamique biaisée avec  $\beta = 1$ , les marcheurs diffusent lentement en énergie sous l'action du bruit, jusqu'à ce qu'ils convergent sur la séparatrice.

### 4.2 Transition vers le chaos

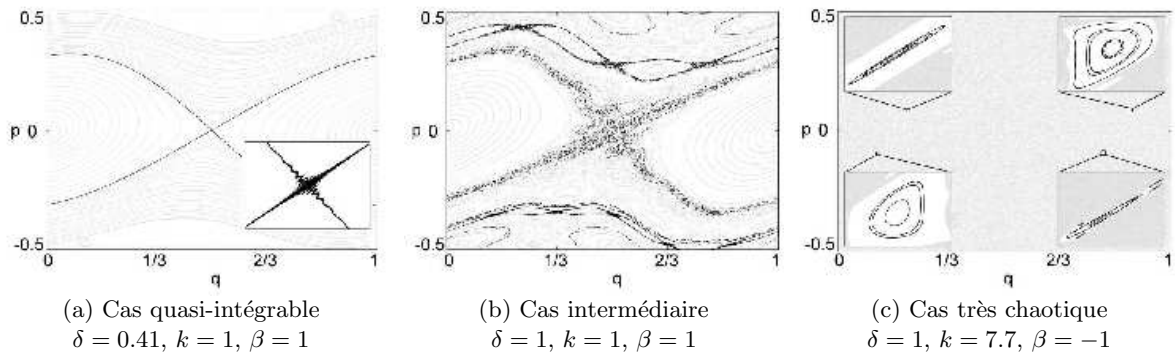
Considérons maintenant le cas d'une transition vers le chaos pour un système modèle : l'*application standard*

$$p_{n+1} = p_n - \frac{k\delta}{2\pi} \sin(2\pi q_n) \quad q_{n+1} = q_n + \delta p_{n+1} \quad (11)$$

Cette application représente l'évolution d'un rotor libre, soumis à des pulses d'une force d'orientation fixée.  $k$  paramétrise l'intensité de la force, et  $\delta$  la période entre deux pulses. Dans la limite  $\delta \rightarrow 0$ , le système se réduit à un pendule pesant. Pour  $\delta > 0$ , le système est chaotique, d'autant plus que  $k$  et  $\delta$  sont grands. En appliquant la dynamique biaisée pour  $\beta = 1$  proche de l'intégrabilité, les marcheurs se concentrent sur la séparatrice (Fig. 2a). Quand le chaos est plus important, de nombreuses structures secondaires apparaissent. Autour de l'île principale, une couche stochastique est désormais la structure la plus chaotique. Néanmoins, si l'on démarre d'une île intégrable secondaire, les marcheurs convergent dans un premier temps vers la couche stochastique la plus proche où ils restent pour un temps d'autant plus grand que le bruit est faible (Fig. 2b). Les structures stochastiques secondaires jouent donc le rôle d'états métastables pour la dynamique biaisée. En présence de fort chaos, on favorise les orbites régulières en choisissant  $\beta = -1$ , révélant ainsi les dernières îles intégrables (Fig. 2c).



**Fig.1. Convergence vers la séparatrice.** Les lignes de niveau en gris clair correspondent aux valeurs du Hamiltonien. Partant de l'un des puits (a), les marcheurs (points noirs) diffusent dans l'espace des phases (b) jusqu'à ce qu'ils atteignent la séparatrice (c), qu'ils colonisent (d). La simulation fut réalisée avec 2000 marcheurs, pour  $\epsilon = 10^{-5}$  et  $\beta = 1$ .



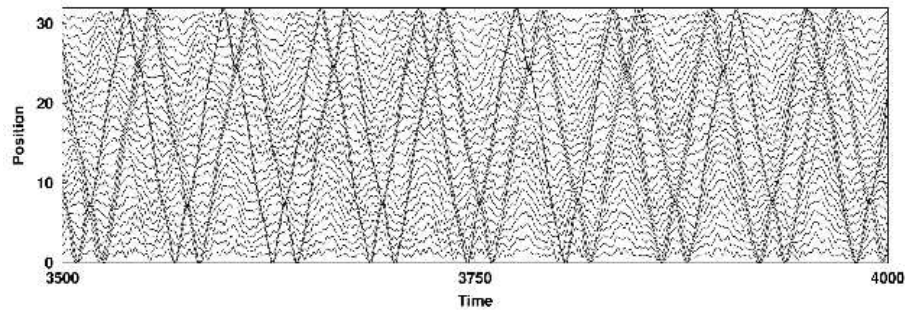
**Fig.2. L'application standard.** Les trajectoires de l'application standard sont représentées en gris clair. En noir, 1000 marcheurs sont représentés après 10 000 pas de temps, pour  $\epsilon = 10^{-16}$ . Dans le cas quasi-intégrable (a), l'application est très légèrement chaotique, et les marcheurs convergent pour  $\beta = 1$  vers la variété instable émanant du point fixe instable. L'encart est agrandi 75 fois. Dans un cas intermédiaire (b), des structures secondaires sont également observées : plusieurs couches stochastiques sont révélées, en partant de différentes îles intégrables avec  $\beta = 1$ . Les quatre dernières îles intégrables (c) observées dans un cas très chaotique [8]. Les encarts sont agrandis entre 25 et 150 fois (respectivement en bas à droite et en haut) et sont centrés sur : (0.207; 0.09), (0.883; 0.09), (0.116; -0.09) et (0.8; -0.09).

### 4.3 Chaîne d'oscillateurs anharmoniques

Si les systèmes de basse dimensionnalité offrent l'avantage d'une visualisation directe de l'espace des phases, l'étude de systèmes réalistes requiert un plus grand nombre de degrés de liberté. En guise d'exemple, nous étudions ici la chaîne d'oscillateurs non-linéaires introduite par Fermi, Pasta et Ulam

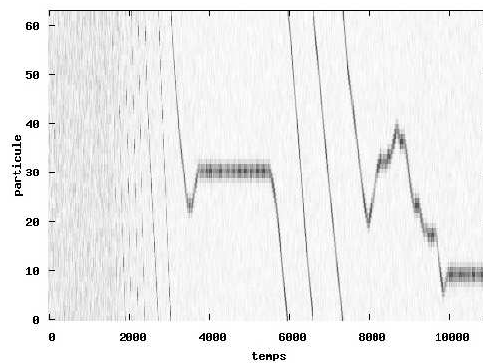
(FPU) et définie par l'Hamiltonien

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} (q_i - q_{i+1})^2 + \frac{1}{40} (q_i - q_{i+1})^4 \right). \quad (12)$$



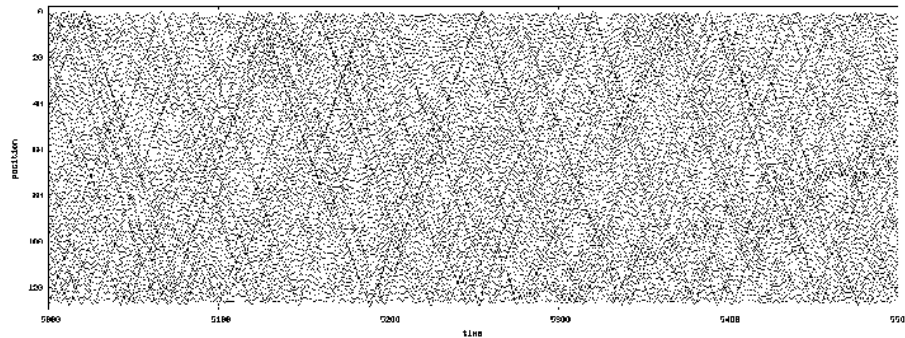
**Fig.3. À la recherche de solitons.** Simulation pour un  $\beta$  fortement négatif d'une chaîne FPU ( $N=32$ ) de densité d'énergie  $E = 1$  avec conditions aux bords fixes, partant d'une configuration d'équilibre. La position de chaque particule au cours du temps est représentée par une ligne. Plusieurs chocs, se réfléchissant sur les bords, sont clairement visibles. L'exposant de Lyapunov est la moitié de la valeur typique. (Par soucis de clarté, la position moyenne de chaque particule a été décalée).

Cette chaîne est connue pour avoir des excitations localisées de type soliton, ainsi que des "modes de respiration chaotiques" [9,10]. Le bruit que nous utilisons ici pour perturber la chaîne conserve l'énergie, et nous réalisons donc une version microcanonique de notre dynamique biaisée. Pour une densité d'énergie  $E=1$ , correspondant à la région de transition entre faible et fort chaos, les résultats sont montrés sur les figures 3 et 4.



**Fig.4. Révéler un mode de respiration chaotique.** Simulation pour un  $\beta$  fortement positif d'une chaîne FPU ( $N=64$ ) à énergie fixée ( $E = 1$ ) avec conditions aux bords périodiques, obtenue en partant d'une configuration d'équilibre. La configuration évolue vers un mode de respiration chaotique, caractérisé par un exposant de Lyapunov trois fois supérieur à la moyenne. L'échelle de gris représente l'énergie de chaque site.

Si l'on biaise la mesure en faveur de configurations intégrables, le système évolue vers des trajectoires solitoniques (Fig. 3). Au contraire lorsque l'on favorise des trajectoires très chaotiques, on génère des modes de respiration chaotiques (Fig. 4). Ces trajectoires sont à comparer avec une simulation non-biaisée ( $\beta = 0$ ) présentée sur la figure 5.



**Fig.5. Dynamique non-biaisée.** Simulation pour  $\beta = 0$  d'une chaîne FPU ( $N=64$ ) à énergie fixée ( $E = 1$ ) avec conditions aux bords fixes.

## 5 Conclusion

Notons finalement que si cette dynamique biaisée permet de chercher des trajectoires atypiques, la question du rôle que jouent ces trajectoires dans la réelle mesure d'équilibre ( $\beta = 0$ ) reste à priori entière. Toutefois, en mesurant le taux de clonage instantané lors d'une simulation, on peut extraire l'énergie libre dynamique  $\psi(\beta)$  (ou pression topologique) qui permet d'interpréter l'hétérogénéité dynamique d'un système en terme de transition de phase [11]. Ainsi, l'existence d'îlots intégrables pour la standard Map se traduit par une transition de phase du premier ordre, à  $\beta = 0$ .

## Références

1. J. LASKAR, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System, *Nature*, **338**, 237-238 (1989).
2. N. MURRAY & M. HOLMAN, The role of chaotic resonances in the Solar System, *Nature*, **410**, 773-779 (2001).
3. N. MURRAY & M. HOLMAN, The origin of chaos in the outer solar system, *Science*, **283**, 1877-1881 (1999).
4. P. GRASSBERGER, R. BADI & A. POLITI, Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors, *J. Stat. Phys* **51**, **135**, 135-178 (1988).
5. R. BENZI, G. PALADIN, G. PARISI & A. VULPIANI, Characterisation of intermittency in chaotic systems, *J. Phys. A*, **18**, 2157-2165 (1985).
6. C. BECK & F. SCHLÖGL, *Thermodynamics of chaotic systems*, Cambridge University Press, (1993).
7. J. TAILLEUX & J. KURCHAN, Probing rare physical trajectories with Lyapunov weighted dynamics, *Nature Physics*, à paraître.
8. J. H. E. CARTWRIGHT, M. O. MAGNASCO, O. PIRO & I. TUVAL, An apparently unrelated method to do this can be found in : Bailout Embeddings and Neutrally Buoyant Particles in Three-Dimensional Flows, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 264501 (2002).
9. T. CRETEGNY, T. DAUXOIS, S. RUFFO & A. TORCINI, Localization and equipartition of energy in the beta-FPU chain : Chaotic breathers, *Physica D*, **121**, 109-126 (1998).
10. A. TROMBETTONI & A. SMERZI, Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 2353-2356 (2001).
11. J. TAILLEUX & J. KURCHAN, *En préparation*.

# Influence de l'injection optique dans les processus de synchronisation entre lasers : similarité et bistabilité

Olivier Vaudel & Pascal Besnard

FOTON-ENSSAT

6 rue de Kerampont, BP 80 518, 22305 Lannion Cedex

pascal.besnard@enssat.fr

**Résumé.** Nous présentons dans cet article une étude sur la synchronisation en utilisant uniquement l'injection optique entre lasers à semi-conducteurs DFB. Le cas d'une injection par un signal continu est tout d'abord décrit pour aborder ensuite l'étude d'une injection par un signal variant temporellement, grâce à l'emploi d'une cascade de deux injections optiques. Ces résultats sont représentés sous forme de cartographies permettant de localiser, dans un plan "désaccord - puissance injectée", les différents régimes de fonctionnement du laser injecté, pour les deux sens de variation possibles du désaccord. Nous montrons que les phénomènes de synchronisation mis en jeu sont par essence bistables parce qu'ils se basent sur un processus d'injection optique.

**Abstract.** In this paper, we present a study on synchronization between lasers using firstly restrictively a unique optical injection, and secondly a cascade of two successive optical injections (from *master* to *receiver* through *transmitter*). This simple scheme enables a close comparison between the case of optical injection by a continuous wave and the case of optical injection by a non-continuous signal. Results are presented thanks to mapping of laser dynamics in the chart "detuning - injected power" for an increasing and a decreasing detuning. We show that the process of synchronization is inherently bistable as it is by nature an optical injection.

## 1 Introduction

La synchronisation d'oscillateurs est un phénomène qui suscite la curiosité comme en témoigne l'observation au VII<sup>ème</sup> siècle par HUYGENS de deux pendules mécaniques accrochés à un même mur [1]. À partir du XX<sup>ème</sup> siècle, les études de synchronisation se sont poursuivies avec des oscillateurs électriques et micro-ondes. Ce type d'expériences apparaît ensuite très vite en optique après la première réalisation expérimentale d'un laser par MAIMAN [2].

À partir de 1990, PECORA et CARROLL [3] proposent de synchroniser deux oscillateurs chaotiques afin de réaliser des transmissions sécurisées. L'idée est de masquer un message à transmettre dans un signal de bruit chaotique. Ce chaos est généré de façon déterministe par le premier oscillateur. En réception, le second oscillateur doit alors être synchronisé avec le premier afin de retrouver le message transmis. Cette idée a été appliquée par différentes équipes [4,5,6,7], ce qui a permis de réaliser des transmissions optiques sécurisées.

Cependant, tous les systèmes utilisés nécessitent, d'une part, une source optique chaotique et, d'autre part, de réussir à synchroniser les deux sources lasers. L'émission chaotique est généralement obtenue grâce à une contre-réaction optique [8], c'est-à-dire à la ré-injection d'une partie du champ émis dans la cavité laser et ce après un temps  $\tau_{ext}$  de parcours hors de la cavité. L'étape de synchronisation est, quant à elle, réalisée grâce à une injection optique, c'est-à-dire à l'injection du champ optique dans la cavité du laser récepteur.

Nous avons récemment proposé d'étudier la synchronisation plus simplement [9]. Il s'agit en fait de cascader deux injections optiques. La première, d'un laser *maître* dans un laser *transmetteur*, va permettre d'obtenir une émission chaotique en sortie du laser injecté mais présentant un chaos de dimension plus faible que dans le cas d'une contre-réaction optique, ce qui permet une étude plus simple du système. La seconde, du laser *transmetteur* dans un laser *récepteur*, va nous servir à synchroniser les émissions de ces deux lasers.

Notons, de plus, que cette configuration nous permet d'effectuer une comparaison directe du fonctionnement d'un laser injecté par un signal continu ou variant temporellement (comme le chaos). L'intérêt est de construire un outil simple permettant l'étude expérimentale et théorique de la synchronisation.

Dans cet article, nous réalisons une injection simple puis double et présentons ainsi les différents résultats obtenus dans le cadre de l'injection optique d'un signal continu puis d'un signal variant temporellement. Nous mettons alors en évidence le caractère bistable intrinsèque du processus de synchronisation.

## 2 Injection optique par un signal continu

Une injection optique consiste en un couplage unidirectionnel de deux lasers, appelés *maître* et *esclave*, comme cela est présenté sur la Fig. 1.

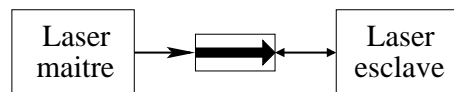


Fig.1. Principe d'une injection optique.

L'unidirectionnalité est assurée grâce à un isolateur de plus de 70 dB d'isolation. Le point de fonctionnement de l'injection est fixé par plusieurs paramètres :

- la puissance injectée,  $P_{inj}$ , du maître dans la cavité du laser esclave,
- le désaccord,  $\Delta\nu$ , égal à la différence de fréquences entre les deux lasers indépendants

$$(\Delta\nu = \nu_{maître} - \nu_{esclave}),$$

- le taux de pompage du laser esclave  $r = \frac{I}{I_{seuil}}$ .

L'injection optique engendre différents régimes de fonctionnement pour le laser esclave. L'accrochage total est un régime où le laser injecté adopte la fréquence et la largeur de raie du laser maître. Le laser peut également se trouver dans des régimes de mélange d'ondes simple, double ou quadruple, dont les transitions correspondent à des doublages de période dans le système, ou encore dans un fonctionnement chaotique. La localisation de ces différents modes de fonctionnement peut-être reportée dans un plan "désaccord - puissance injectée" afin d'apporter une vue synthétique. Nous obtenons ainsi des cartographies du laser injecté pour différents taux de pompage  $r$  du laser esclave [10].

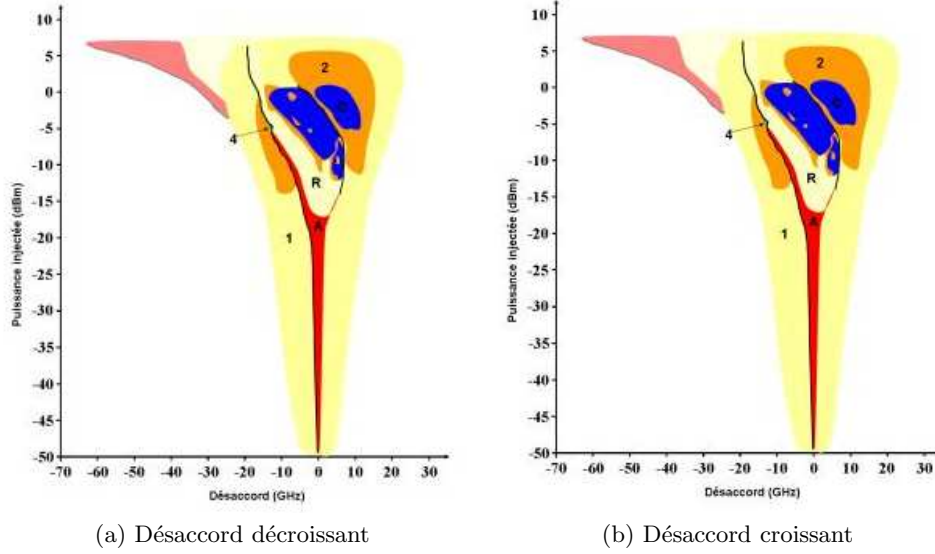
### 2.1 Étude expérimentale

Nous utilisons comme laser maître une source commerciale à cavité externe et accordable en longueur d'onde. Elle est constituée de deux éléments : un laser à semi-conducteurs dont une des faces a été recouverte d'une couche anti-reflet et un miroir de Bragg monté sur un support mobile en rotation. Cette rotation permet de sélectionner la longueur d'onde réfléchie dans la cavité et ainsi de fixer celle émise par la source. Cette accordabilité nous permet de faire varier le désaccord  $\Delta\nu$ .

Le laser esclave, quant à lui, est un laser monomode à semi-conducteurs massifs et à contre-réaction répartie (DFB), à double hétérojonction et à ruban enterré. Il est contrôlé en courant et en température (22°C).

La Fig. 2 présente les cartographies expérimentales du laser esclave pompé à quatre fois son courant de seuil. Sur cette figure, "A" représente la zone d'accrochage total, "1", "2", "4" les zones de mélange d'onde respectivement simple, double et quadruple, "R" la zone de relaxation et finalement "C" la zone de chaos. Ces différents régimes sont plus détaillés dans les références [10] et [11].

Les figures 2(a) et 2(b) sont obtenues respectivement pour des désaccords décroissants et croissants, c'est-à-dire respectivement quand la fréquence du laser maître diminue ou augmente. La comparaison de ces deux cartes fait alors clairement apparaître la nature bistable du laser injecté, c'est-à-dire le fait que le fonctionnement du laser injecté est dépendant du sens de variation du désaccord.



**Fig.2.** Cartographies expérimentales du laser esclave polarisé à quatre fois son courant de seuil.

## 2.2 Étude numérique

Nous avons ensuite simulé numériquement le fonctionnement du laser injecté. Nous utilisons pour cela un système d'équations différentielles couplées, basé sur le modèle de LANG et KOBAYASHI [12], décrivant les évolutions du champ électrique complexe  $E$  et de la densité de porteurs  $N$  :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \Gamma_C G \frac{c}{n} \frac{N - N_t}{1 + \varepsilon_c I} - \frac{1}{\tau_p} \right] E + \frac{i\alpha_H}{2} \left[ \Gamma_C G \frac{c}{n} (N - N_t) - \frac{1}{\tau_p} \right] E + F_E(t) + \kappa E_{inj} \quad (1)$$

$$\frac{dN}{dt} = J - \frac{N}{\tau_e} - G \frac{c}{n} \frac{N - N_t}{1 + \varepsilon_c I} I + F_N(t) \quad (2)$$

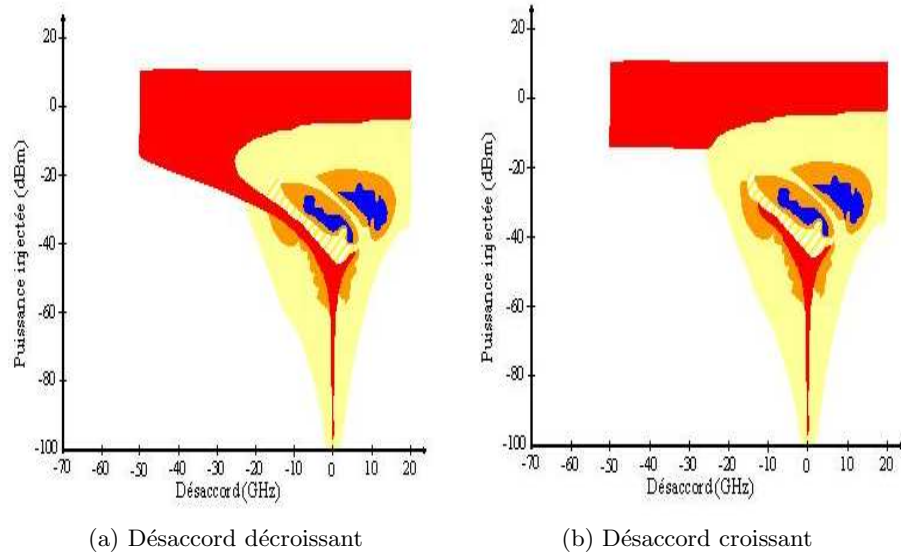
Dans ces équations,  $\Gamma_C$  représente le facteur de confinement du champ,  $G$  le gain,  $n$  l'indice optique,  $N_t$  la densité de porteurs à la transparence,  $\varepsilon_c$  le facteur de compression du gain,  $I$  l'intensité optique,  $\tau_p$  le temps de vie des photons,  $\alpha_H$  le facteur de couplage phase-amplitude,  $\kappa$  le taux de couplage dans la cavité laser,  $E_{inj}$  le champ injecté du laser maître,  $J$  la densité de courant électrique et  $\tau_e$  le temps de vie des porteurs. De plus amples détails sur ces équations sont disponibles dans la référence [11].

Une fois ces équations intégrées, nous pouvons distinguer les régimes de fonctionnement du laser esclave grâce à une analyse spectrale de la puissance émise par le laser. Nous pouvons alors tracer les cartographies numériques du laser injecté. Ces cartes sont présentées sur la Fig. 3.

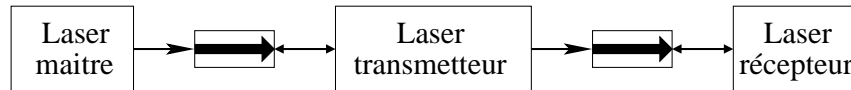
De nouveau, la Fig. 3(a) est obtenue pour un désaccord décroissant et la Fig. 3(b) pour un désaccord croissant. Nous pouvons remarquer un bon accord avec les cartographies expérimentales : nous sommes en effet en mesure de retrouver les zones d'accrochage, de mélanges d'ondes, de relaxation et de chaos, et ce pour des échelles de paramètres similaires. Nous pouvons également remarquer que la bistabilité observée expérimentalement est numériquement reproduite, ce qui, à notre connaissance, n'a jamais été reporté par d'autres équipes dans la littérature.

## 3 Injection par un signal non continu

Afin d'étudier le fonctionnement d'un laser optiquement injecté par un signal non continu, nous utilisons une cascade de deux injections optiques dont le principe est présenté sur la Fig. 4.



**Fig.3.** Cartographies numériques du laser esclave polarisé à quatre fois son courant de seuil. (Le code couleur utilisé est le même que sur la Fig. 2.)



**Fig.4.** Principe de la cascade de deux injections optiques.

La première injection, entre un laser dit *maître* et un second dit *transmetteur*, va nous permettre d’obtenir en sortie du laser injecté une puissance variant temporellement. Nous fixons pour cela un point d’injection permettant de nous situer dans une zone de mélange d’onde, de relaxation ou de chaos sur les cartographies des Fig. 2 et 3.

La seconde injection optique, entre le *transmetteur* et le *récepteur*, va nous permettre d’étudier la synchronisation entre ces deux lasers.

Dans la suite, nous ne présenterons que des résultats numériques de synchronisation. Pour cela, nous utilisons deux systèmes d’équations différentielles couplées, similaires aux équations (1) et (2). Le premier permet de décrire le comportement du laser transmetteur et le second celui du laser récepteur.

Nous comparons alors les variations des puissances optiques “transmetteur” et “récepteur” émises temporellement en calculant l’indice d’inter-corrélation  $I_C$  associé [13].

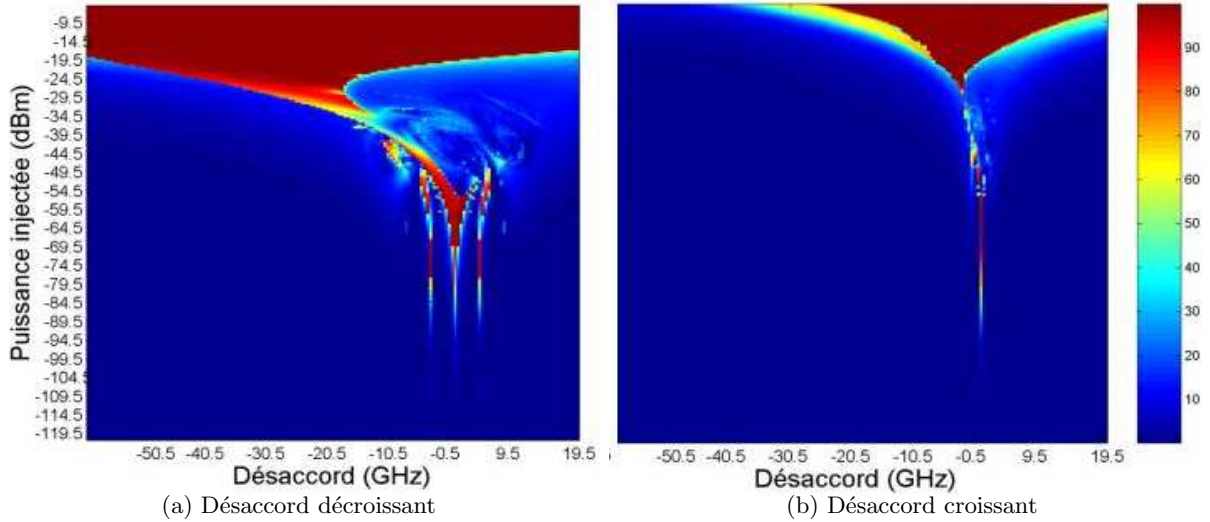
### 3.1 Synchronisation du régime de relaxation

Nous fixons, pour cette étude, le point de fonctionnement de la première injection optique de manière à nous situer, sur la Fig. 3, dans la zone de relaxation du laser transmetteur. Nous injectons alors le signal obtenu dans la cavité du laser récepteur et cartographions cette seconde injection dans le plan “désaccord - puissance injectée” via les valeurs de l’indice d’inter-corrélation obtenues. Ces cartographies sont présentées sur la Fig. 5.

Nous pouvons tout d’abord remarquer qu’il est possible de réaliser la synchronisation du régime de relaxation du laser transmetteur (zones où  $I_C > 90\%$ ). Nous pouvons également remarquer la forte influence du sens de variation du désaccord entre les lasers transmetteur et récepteur en comparant les Fig. 5(a), obtenue pour un désaccord décroissant, et 5(b), obtenue pour un désaccord croissant.

Nous pouvons de plus remarquer, dans le cas des désaccords décroissants (Fig. 5(a)), qu’il existe une



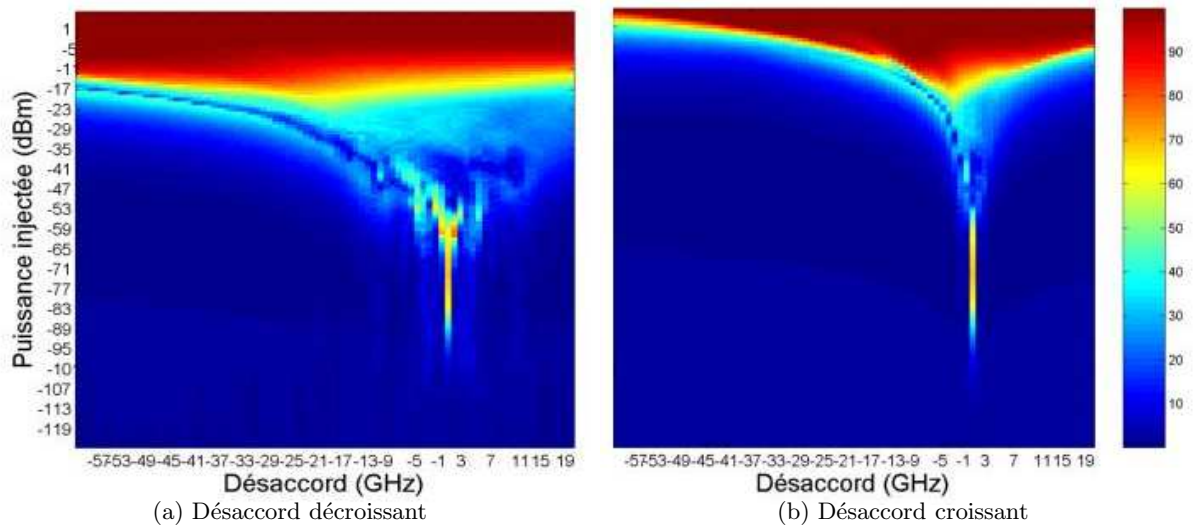


**Fig.5.** Cartographies numériques de la synchronisation du régime de relaxation. (Les valeurs de  $I_C$  sont indiquées en pourcentage par le code couleur situé sur la droite de la figure.)

zone de forte synchronisation et dont la forme fait penser à celle de la zone d'accrochage total lors d'une injection par un signal continu. Cette zone n'est, par contre, pas visible dans le cas des désaccords croissants (Fig. 5(b)).

### 3.2 Synchronisation du régime de chaos

Nous fixons maintenant le point de fonctionnement de la première injection optique dans une zone de chaos, sur la Fig. 3, du laser transmetteur. Nous réalisons ensuite, comme au paragraphe précédent, les cartographies des valeurs de l'indice d'inter-corrélation  $I_C$  dans le plan "désaccord - puissance injectée". Les résultats obtenus sont présentés sur la Fig. 6.



**Fig.6.** Cartographies numériques de la synchronisation du régime de chaos. (Les valeurs de  $I_C$  sont indiquées en pourcentage par le code couleur situé sur la droite de la figure.)

Nous montrons ici qu'il est numériquement possible de synchroniser le chaos du laser récepteur sur celui émis par le laser transmetteur ( $I_C > 90\%$ ).

Ce résultat met en évidence le caractère bistable du phénomène de synchronisation à la vue des figures 6(a) et 6(b), obtenues respectivement pour les désaccords décroissants et croissants.

Notons, de plus, comme dans le cas de la synchronisation du régime de relaxation, que la Fig. 6(a) présente une zone d'inter-corrélation élevée et présentant une forme similaire à celle d'une zone d'accrochage lors d'une injection par un signal continu.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté les modes de fonctionnement d'un laser soumis à l'injection optique d'un signal continu et les avons cartographiés dans un plan "désaccord - puissance injectée", pour les deux sens possibles de variation du désaccord. Cela nous a permis de mettre en évidence, tant expérimentalement que numériquement, le caractère bistable du fonctionnement d'un laser injecté.

Nous avons ensuite étudié la synchronisation d'un laser optiquement injecté par un signal variant temporellement (relaxation ou chaos) obtenu grâce à une première injection optique. Nous avons de nouveau pu mettre en évidence le caractère bistable du processus de synchronisation ainsi que la présence d'une zone d'inter-corrélation élevée et présentant une forme similaire à la zone d'accrochage total d'un laser injecté par un signal continu.

Que le signal injecté soit continu ou non, nous avons donc montré le caractère bistable intrinsèque du phénomène de synchronisation entre deux lasers unidirectionnellement couplés. Nous avons également pu mettre en évidence une similitude entre le processus de synchronisation et d'injection.

## Références

1. C. HUYGENS, *Oeuvres complètes de Christian Huygens*, Société hollandaise de sciences Martinus Nijhoff, La Haye (1893).
2. T. H. MAIMAN, Stimulated optical radiation in Ruby, *Nature*, **187**, 493-494 (1960).
3. L. M. PECORA AND T. L. CARROLL, Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Letters*, **81**(16), 3457-3550 (1998).
4. G. D. VANWIGGEREN AND R. ROY, Communication with chaotic lasers, *Science*, **279**(5354), 1198-1200 (1998).
5. J. P. GOEDGEBUER, L. LARGER AND H. PORTE, Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode, *Phys. Rev. Letters*, **80**(10), 2249-2252 (1998).
6. A. MURAKAMI AND J. OHTSUBO, Synchronization of feedback-induced chaos in semiconductor lasers by optical injection, *Phys. Rev. A*, **65**(3), 33826 (2002).
7. A. UCHIDA, Y. LIU AND P. DAVIS, Characteristics of chaos masking in synchronized semiconductor lasers, *IEEE J. of Quant. Elect.*, **39**(8), 963-970 (2003).
8. J. MØRK, B. TROMBORG AND J. MARK, Chaos in semiconductor lasers with optical feedback : Theory and experiment, *IEEE J. of Quant. Elect.*, **28**(1), 93-108 (1992).
9. C. GUIGNARD, S. BLIN AND P. BESNARD, *New Scheme for the Synchronization of Low Dimensional Chaos*, Munich CLEO-EQEC, EC1M (2003).
10. S. BLIN, C. GUIGNARD, P. BESNARD, R. GABET, G. STÉPHAN, AND M. BONDIOU, Phase and Spectral Properties of Optically Injected Semiconductor Lasers, *Comptes Rendus de la Physique*, **4** (6), 687-699 (2003).
11. O. VAUDEL, *Étude de synchronisation de chaos par simple injection optique*, Thèse de doctorat de l'université de Rennes 1, Lannion (2007).
12. R. LANG, Injection locking properties of a semi-conductor laser, *IEEE J. of Quant. Elect.*, **18**(6), 976-983 (1982).
13. P. HOEL, *Introduction to Mathematical Statistics*, New York (1971).

# Index

- Aguirre Luis A., 117  
Artyom Petrosyan, 61  
Aumâtre Sébastien, 1  
Aziz-Alaoui M. A., 25, 31
- Bachelard Romain, 7  
Barviau Benoit, 13  
Bendoula Ryad, 85  
Berhanu Michaël, 19  
Besnard Pascal, 179  
Bodea Simona, 161  
Bouget François-Yves, 131  
Bourgoin Mickaël, 155  
Busse Friedrich, 95
- Camara Baba Issa, 25  
Chandre Cristel, 7  
Chavanis Pierre-Henri, 127  
Chembo Yanne, 85  
Chiffaudel Arnaud, 127  
Colet Pere, 85  
Corellou Florence, 131  
Corson Nathalie, 31  
Crumeyrolle Olivier, 67
- Daviaud François, 127  
Dubrulle Bérangère, 127
- Erneux Thomas, 85
- Fanelli Duccio, 7  
Fatome Julien, 13  
Faure Thierry, 143  
Fauve Stephan, 19  
Finot Christophe, 13
- Georgelin Marc, 101, 161  
Gilmore Robert, 37, 117  
Ginoux Jean-Marc, 49  
Glorieux Pierre, 167  
Gollub Jerry, 1  
Grapinet Mélanie, 55  
Gu尔蒙 Jean-Luc, 79  
Guillerm Raphaël, 111
- Homblé Fabrice, 101
- Jaeger Marc, 101  
Jauslin Hans Rudolf, 73  
Jop Pierre, 61
- Kelai Faycal, 67  
Kurchan Jorge, 173
- Léorat Jacques, 79  
Lagrange Silvère, 73  
Laguerre Raphael, 79  
Larger Laurent, 55, 85  
Le Bars Michael, 89  
Le Berre Martine, 149  
Le Dizès Stéphane, 89  
Le Gal Patrice, 89  
Lebranchu Yannick, 95  
Lefranc Marc, 131  
Lejri Delphine, 105  
Lemaire François, 131  
Leoncini Xavier, 7  
Leonetti Marc, 101  
Lepiller Valérie, 111  
Letellier Christophe, 117  
Lusseyran François, 143
- Malasoma Jean-Marc, 105  
Manneville Paul, 123  
Marquié Patrick, 137  
McElwaine Jim, 1  
Milot Guy, 13  
Monchaux Romain, 127  
Morant Pierre-Emmanuel, 131  
Mordant Nicolas, 19  
Morfu Saverio, 137  
Mutabazi Innocent, 67, 111
- Nofiele Brice, 137  
Nore Caroline, 79
- Parent Benjamin, 131  
Pastur Luc, 143  
Pethieu Romain, 143  
Picozzi Antonio, 73  
Pierre-Ambroise Lacourt, 55  
Pinton Jean-François, 155  
Pitois Stéphane, 73

Plaut Emmanuel, 95

Plihon Nicolas, 155

Pocheau Alain, 161

Pomeau Yves, 149

Preda Cristina-Elena, 167

Prigent Arnaud, 111

Puls Conor, 1

Ribeiro Adolfo, 79

Rossetto Bruno, 49

Rubiola Enrico, 85

Ségard Bernard, 167

Schwartz Christian, 131

Sergio Ciliberto, 61

Simatev Radostin, 95

Tailleur Julien, 173

Tavernier Hervé, 85

Thommen Quentin, 131

Vandermoere Constant, 131

Vaudel Olivier, 179

Vladimir Udaltsov, 55

Volk Romain, 155