



M. Lefranc, C. Letellier & L. Pastur
Éditeurs

Poincaré

Comptes-Rendus de la 11^{ème}
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 25-27 Mars 2008



Institut Henri Poincaré

Non-Linéaire Publications

RENCONTRES DU NON LINÉAIRE

Institut Henri Poincaré, PARIS

25–27 Mars 2008

Nous remercions vivement Michel Broué, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, pour son aide à l'organisation de ces *Rencontres* ainsi que le CNRS et la Délégation Générale à l'Armement pour leur soutien financier.

Le comité scientifique est composé de :

Béregère DUBRULLE	SPEC/CEA Saclay
Bastien FERNANDEZ	CPT — Marseille
Josselin GARNIER	LPMA — Paris 7
Jean-Christophe GÉMINARD	Lab. Physique — ENS Lyon
Christophe JOSSERAND	LMM — Paris 6
Patrice LE GAL	IRPHE — Marseille
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Thomas PODGORSKI	LSP — Grenoble
Marc RABAUD	FAST — Orsay
Stefania RESIDORI	INLN — Nice
Laurette TUCKERMAN	PMMH — ESPCI, Paris
Massimo VERGASSOLA	Institut Pasteur — Paris

Les *Rencontres annuelles du Non-linéaire* sont organisées par :

Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Christophe LETELLIER	CORIA — Rouen
Luc PASTUR	LIMSI — Orsay

Le Colloque *Auto-organisation de nanostructures* est organisé par :

Jean-Noël AQUA	LM2P Marseille
Thomas FRISCH	LM2P Marseille
Alberto VERGA	LM2P Marseille

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non Linéaire Publications
Bât. 510, Université de Paris-Sud, 91495 Orsay cedex

Toutes les informations concernant les *Rencontres* sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr

Table des matières

Propriétés non-linéaires des spirales de Taylor <i>N. Abcha, A. Ezersky, L. Nana, & M. Innocent</i>	1
Réduction des fluctuations de vitesse d'un écoulement turbulent de Gallium sous champ magnétique. <i>Michaël Berhanu, Basile Gallet, Nicolas Mordant, Stéphan Fauve</i>	7
Mécanisme de sélection de longueur d'onde dans la couronne d'Edgerton <i>P. Brunet, R.D. Deegan, J. Eggers</i>	13
Bifurcation de cycles hétéroclines robustes pour des systèmes invariants par symétrie sphérique avec interaction de modes de degrés $l = 3$ et 4 <i>Pascal Chossat, Philippe Beltrame</i>	19
Elasticité des nœuds <i>Nicolas Clauvelin, Basile Audoly, Sébastien Neukirch</i>	25
Dégazage intermittent à travers une colonne de fluide complexe <i>Thibaut Divoux, Valérie Vidal, Francisco Melo, Jean-Christophe Gémard</i>	31
Maîtrise des «vagues optiques extrêmes» <i>John M. Dudley, Goëry Genty, Benjamin. J. Eggleton</i>	37
Instabilités d'un film liquide visqueux en écoulement sur une fibre verticale <i>C. Duprat, C. Ruyer-Quil, F. Giorgiutti-Dauphiné</i>	43
Etude physique numérique du fonctionnement de composants semiconducteurs distribués pour applications très hautes fréquences <i>Ali El Moussati, Christophe Dalle</i>	49
Détermination de partitions par algorithme génétique sur critère de nombre maximal de séquences réalisées <i>U. Santos Freitas, E. Roulin, C. Letellier</i>	55
Courbure du flot de systèmes dynamiques <i>Ginoux Jean-Marc, Rossetto Bruno</i>	61
Fiabilité des différentes déterminations des paramètres de plongement <i>R. Gilmore, I. M. Moroz, & C. Letellier</i>	67
Modulation d'un motif de spirales dûe à une instabilité thermo-centrifuge dans un système de Couette-Taylor <i>Raphaël Guillerm, Valérie Lepiller, Arnaud Prigent, Innocent Mutabazi</i>	73

Propriétés de propagation des structures localisées optiques <i>F. Haudin, U. Bortolozzo, S. Residori</i>	79
Solitons dissipatifs de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe à (3+1)D : balles de lumière et pulsations <i>Al. Kamagaté, Ph. Grellu & P.T. Dinda</i>	85
Tourbillons élastiques supercritiques observés dans l'écoulement de Couette-Taylor de solutions de polymères. <i>F. Kelai, O. Crumeyrolle, I. Mutabazi</i>	91
Diverses manifestations de l'effet Raman lors de la propagation d'impulsions femtosecondes dans une fibre microstructurée <i>B. Kibler, A. Guenot, C. Finot, G. Millot</i>	97
Instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession <i>Romain Lagrange, Patrice Meunier, Christophe Eloy, François Nadal</i>	103
Échelles de temps multiples dans les équations intégro-différentielles à retard en optoélectronique <i>L. Larger, M. Peil, M. Jacquot, Y. Chembo, T. Erneux</i>	109
Analyse topologique d'un nouvel attracteur chaotique toroidal <i>C. Letellier, R. Gilmore</i>	115
Identification de la valeur du retard d'un laser à cavité externe chaotique <i>Alexandre Locquet, Damien Rontani, Marc Sciamanna, David S. Citrin</i>	121
Démodulation complexe de signaux expérimentaux appliquée aux ondes internes <i>Matthieu Mercier, Nicolas Garnier, Thierry Dauxois</i>	125
Oscillations induites par une dynamique transcriptionnelle lente dans l'expression d'un gène réprimé par sa propre protéine <i>P.-E. Morant, Q. Thommen, F. Lemaire, C. Vandermoere, B. Parent, M. Lefranc</i>	131
Analyse déterministe de la compétition nonlinéaire de modes dans un écoulement en cavité <i>L.R. Pastur, F. Lusseyran, Th.M. Faure, C. Letellier</i>	137
Vers où croissent les dendrites en solidification dirigée d'un matériau cristallin ? <i>A. Pocheau, J. Deschamps, M. Georgelin</i>	143
Modèles POD pour la zone de paroi d'un canal turbulent <i>B. Podvin, L. Lorang</i>	149
Sur le déferlement des vagues <i>Y. Pomeau, M. Le Bars, P. Le Gal, T. Jamin, M. Le Berre, Ph. Guyenne, S. Grilli, B. Audoly</i> ...	155
Habituation à la ventilation non invasive diagnostiquée par diagrammes de récurrences et entropies de Shannon <i>H. Rabarimanantsoa, C. Letellier, L. Achour, A. Cuvelier, J.-F. Muir</i>	161
Vitesses ioniques et instabilité d'une colonne de plasma magnétisé <i>C. Rebont, N. Claire, Th. Pierre, F. Doveil, S. Jaeger, A. Ajendouz, A. Escarguel</i>	167

Magnétohydrodynamique (MHD) dans un disque képlérien : instabilité magnéto-rotationnelle et saturation non linéaire <i>A. Ribeiro, C. Nore, J. Léorat, J.-L. Guermond</i>	173
Matériaux granulaires durs : Représentation d'un matériau non-linéaire comme un graphe avec une dynamique linéaire <i>Nicolas Rivier</i>	179
Multiplicité extrême de motifs convectifs <i>Laurette S. Tuckerman, Katarzyna Borońska</i>	183
Classification des langues chaotiques d'un laser de fibre dopée erbium par analyse topologique <i>Javier Ueda, Juan Carlos Martín</i>	187
Index	193

Propriétés non-linéaires des spirales de Taylor

N. Abcha¹, A. Ezersky², L. Nana³, & M. Innocent¹

¹ LOMC, Université du Havre, 25, rue Philippe Lebon, 76058 Le Havre cedex

² UMR CNRS 6143 "M2C", Université de Caen, 14000 Caen Cedex

³ Department of Physics, Faculty of Science, University of Douala P.O. Box 24 157 Douala, Cameroon
nizar.abcha@univ-lehavre.fr

Résumé. A partir des mesures de vitesses obtenues par PIV, nous caractérisons, les propriétés non linéaires des spirales de Taylor (la dissymétrie entre l'écoulement entrant et sortant, l'anharmonicité et la brisure de symétrie miroir). Nous décrivons le comportement observé dans les zones des défauts de spirales avec une analyse fine autour de chaque défaut (profil d'amplitude, saut de phase, champs de vitesse ...).

Abstract. From the velocity measurements obtained by PIV, We study the flow structure and nonlinear properties of spiral vortices (flow dissymmetry, anharmonicity, breaking of the mirror symmetry). In addition, we describe the dynamics in the neighbourhood of the spiral defects.

1 Introduction

Le système de Couette-Taylor est composé de deux cylindres coaxiaux en rotation différentielle et est le siège de plusieurs modes d'instabilités [1]. Dans le cas où les cylindres tournent en contrarotation, l'écoulement de Couette circulaire subit une bifurcation de Hopf supercritique et transite vers un écoulement avec des structures tourbillonnaires, appelées spirales, qui s'enroulent en hélice autour du cylindre intérieur. Pour une vitesse de rotation Ω_o du cylindre extérieur fixe, ce régime d'écoulement spiralé évolue vers des régimes plus complexes lorsque la vitesse de rotation Ω_i du cylindre intérieur augmente. La caractérisation expérimentale du régime de spirale a été observée pour la première fois par Coles [2] et ensuite étudiée avec des techniques LDV et PIV par Schulz et Pfister [3]. Ces mesures ont montré que la fréquence de spirales diminue avec Ri pour Ro fixe, en accord avec les simulations numériques des équations de Navier-Stokes [4-6].

De récents travaux théoriques et expérimentaux ont montré que les spirales générées dans le système de Couette-Taylor en contrarotation possèdent une dispersion anormale [7], laquelle permet d'expliquer, dans le cadre de la théorie de Ginzburg-Landau, l'existence d'une source stable entre les deux spirales contrapropagatives [7].

Dans une première partie, nous caractériserons à l'aide des mesures de champs de vitesses instantanés dans le plans (r,z) , les propriétés non linéaires des spirales de Taylor telles que : la dissymétrie entre l'écoulement entrant et sortant $|\Delta_{in}|/|\Delta_{out}|$, l'anharmonicité des spirales et la brisure de symétrie miroir du SPI au niveau de l'écoulement sortant [4] en comparaison avec les vortex de Taylor.

Dans une seconde partie, nous étudions la dynamique des défauts spatio-temporels observées dans le motif d'ondes spiralés. Une étude numérique de l'équation complexe de Ginzburg-Landau avec les conditions aux limites homogènes a permis de retrouver les solutions avec défauts périodiques observés dans les expériences. Le comportement spatio-temporel de l'amplitude et de la phase autour de ces défauts est analysé.

2 Résultats

Le dispositif expérimental comporte un cylindre intérieur de rayon $a = 4$ cm, un cylindre extérieur de rayon $b = 5$ cm, et de hauteur $L = 45.9$ cm. Le rapport des rayons est $\eta = a/b = 0,8$ et le rapport d'aspect $\Gamma = L/d = 45,9$, où $d = b - a$ est la taille de l'entrefer. Le cylindre extérieur est isolé thermiquement

de l'extérieur par un bain rectangulaire en plexiglass rempli d'eau. La géométrie rectangulaire du bain favorise les observations optiques. Les vitesses de rotation Ω_o et Ω_i du cylindre extérieur et intérieur permettent de définir les nombres de Reynolds associés, respectivement $R_o = \Omega_o ad/\nu$ et $R_i = \Omega_i ad/\nu$, où est la viscosité de l'eau. Le fluide entre les deux cylindres est constitué d'eau (déméralisée)ensemencée, pour la PIV, par des particules sphériques creuses de verre de diamètre moyen de 8 à 11 μm avec une concentration en masse inférieure à 10^{-4} . Le système PIV est constitué d'un laser Quantel Nd :YAG. Les paires d'images sont collectées par une caméra CCD de 1034x779 pixels. Les intercorrélations entre images d'une même paire sont calculées avec le logiciel Corélia-V2IP avec une fenêtre d'interrogation de 32x32 pixels, afin d'obtenir les champs de vitesse dans le plan (r,z). A partir des champs de vitesse nous pouvons extraire les profils $v_r(z)$ de vitesse radiale dans la direction axiale à différentes position radiale. De même les profils $v_r(r)$, $v_z(z)$, $v_z(r)$ sont extraits à différentes positions. L'extraction de ces profils pour chaque champs de vitesse au cours du temps permet de former les profils spatio-temporels $v_r(z, t)$, $v_r(r, t)$, $v_z(z, t)$, $v_z(r, t)$ [8]. Nous avons utilisée aussi la visualisation par addition d'une suspension de 2à l'eau déminéralisée. La lumière réfléchiée par les paillettes est collectée le long d'un axe parallèle à l'axe du système par une caméra CCD linéaire. Chaque ligne I(z) collectée à un temps donné est assemblée aux autres lignes acquises au cours du temps afin de former un diagramme spatio-temporel I(z,t).

3 Dispositif xpérimental

3.1 Structure des vortex

Les champs de vitesse de l'écoulement dans un plan (r,z), pour le régime de spirale à $R_i = 214$ et $R_o = -251$, ainsi pour le régime de TVF à $R_i = 125$ et $R_o = 0$, sont illustrés sur la figure 1. A partir de ces champs nous avons pu sortir les constatations remarquables suivantes, [4,5] : (i) contrairement au régime de TVF, la structure tourbillonnaire de SPI, n'occupe qu'un tiers de l'espace annulaire : la zone instable au voisinage du cylindre intérieur. (ii) une dissymétrie de taille de deux tourbillons d'une même paire : le tourbillon négatif est 1,375 fois plus grand que le tourbillon positif. (iii) cette différence de taille implique une diminution de longueur d'onde $\lambda = 1,7d$ pour le SPI par rapport à $\lambda = 2d$ pour le TVF.

3.2 Anharmonicité

Sur la Fig. 2a, nous montrons les profils axiaux de la vitesse radial $v_r(z)$ au milieu de l'espace annulaire pour $R_i = 214$ et $R_o = \{-251, -235, -226\}$ et sur la Fig. 2b pour le régime de TVF à $R_i = 125$. Typiquement comme les TVF, les SPI sont caractérisées par une anharmonicité des profils des vitesses (Fig. 2a) : où Δ_{in} : la zone d'écoulement entrant et Δ_{out} : zone d'écoulement sortant. Le degré d'anharmonicité augmente quand R_o devient plus négatif. Cette croissance d'anharmonicité se développe principalement en aplatisant (augmentation) les profils d'ondes en avant (derrière) des crêtes ($R_o = -251$). Pour le TVF, l'anharmonicité vient d'un élargissement (rétrécissement) de la gamme axiale $\Delta_{in}(\Delta_{out})$ de l'écoulement radial entrant où $v_r < 0(v_r > 0)$ et la diminution (augmentation) correspondante de la vitesse entrante (sortante). Nous montrons dans le tableau récapitulatif ci-dessous que Δ_{in}/Δ_{out} augmente pour le SPI même s'il reste inférieur à celui des TVF [4].

La variation de l'anharmonicité des profils des vortex peut être vue avec les résultats d'une analyse de Fourier. À cet effet, nous calculons le rapport \hat{v}_2/\hat{v}_1 entre le deuxième et le premier mode de profil de vitesse axiale de Fourier, en fonction de Ro pour R_i fixe. Nous montrons dans le tableau récapitulatif ci-dessous (Tab. 1), que le rapport d'amplitude moyennée de deuxième mode par rapport au premier mode, $\langle |A_2/A_1| \rangle$ pour $R_i = 214$ et $R_o = \{-251, -235, -226\}$, augmente quand Ree devient de plus en plus négatif. D'après l'étude numérique de Ch. Hoffmann et al. (2004) [4], pour le régime de SPI ce rapport reste au dessous de 1. Cette propriété reflète le fait qu'à des R_o suffisamment négatifs les vortex de Taylor sont efficacement plus petits de taille que la largeur d'espace annulaire.

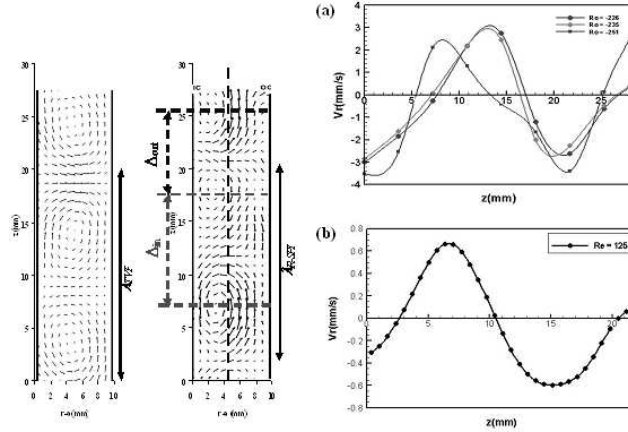


Fig.1. a : Champ de vitesse (r,z) , pour le SPI à $R_i = 214$ et $R_o = -251$, pour le TVF à $R_i = 125$ et $R_o = 0$
Fig.2 $V_r(z)$ à $r = a + 0.5d$ pour $R_i = 214$ et $R_o = \{-251, -235, -226\}$ pour le SPI et à $R_i = 125$ pour le TVF.

3.3 Rupture de symétrie miroir du SPI

Le TVF sur la Fig. 3a, montre une symétrie-miroir axiale à $z = \lambda_{TVF}/2$, autour de la position de l'écoulement sortant (le maximum de la vitesse radiale). Afin de mesurer le degré de brisure de cette symétrie dans le régime de SPI, nous avons utilisé le paramètre d'asymétrie introduit par Ch. Hoffmann et al. [4] :

$$P = \frac{|\int_0^{\lambda/2} v_r(z') dz' - \int_{-\lambda/2}^0 v_r(-z') dz'|}{|\int_0^{\lambda/2} v_r(z') dz' + \int_{-\lambda/2}^0 v_r(-z') dz'|} \quad (1)$$

évalué au milieu de l'espace annulaire, en localisant à z' le maximum de la vitesse radiale sortante (Fig. 3b). De cette façon nous avons calculé, dans le tableau récapitulatif les valeurs de P pour $R_i = 214$ et $R_o = \{-251, -235, -226\}$. Nous trouvons donc que, quand R_o décroît le paramètre d'asymétrie augmente. Ainsi, pour des grand R_o négatif, les spirales montrent une plus grande rupture de symétrie-miroir.

Flow	R_o	Δ_m	Δ_{out}	Δ_m / Δ_{out}	P	$\langle A_2 \rangle / \langle A_1 \rangle$
	-226	10	9.2	1.09	0.43	0.10
	-235	10.4	9.3	1.12	0.49	0.37
	-251	10.6	8.7	1.22	0.52	0.40
TVF	$R_i = 125$	10	7.7	1.29	0.08	
	$R_i = 105$	10.6	7.7	1.09	0.04	

Tab.1 : Paramètres de dissymétrie de l'écoulement

3.4 Comportements spatio-temporels au voisinage d'un défaut spatio-temporel

Pour $R_i > 343$ et $R_o = -622$, la source entre les deux spirales devient très faible et disparaît de l'écoulement, ce qui permet aux spirales d'interférer dans ce petit espace Fig.4a. Ce motif possède des zones d'interpénétrations où on a coexistence de deux ondes gauche et droite et zones sans interpénétration avec une seule onde, qui génèrent l'appariation des défauts ponctuels de phase dans le motif sous forme de dislocation ou collision entre deux spirales Fig.4. Pour étudier la dynamique de défaut dans le motif

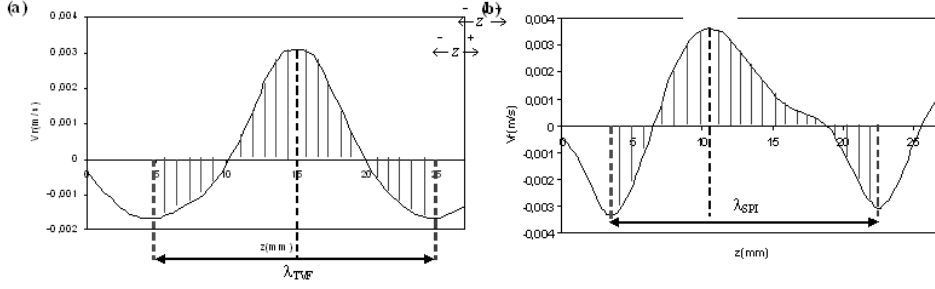


Fig.2. $v_r(z)$, à $R_i = 125$ et $R_o = 0$ pour le TVF et à $R_i = 214$ et $R_o = -226$ pour le SPI qui montre une symétrie-miroir par rapport à z pour le TVF et une dissymétrie pour le SPI.

des spirales, nous suivons l'évolution des propriétés spatio-temporelles comme la phase, l'amplitude, la fréquence et le nombre d'onde autour d'un défaut. Dans la Fig.4 nous présentons les deux premières grandeurs autour de deux défauts dans la région où la propagation de la spirale droite est plus dominante que la spirale gauche. Le champ d'amplitude de $A(x, t)$ et de la phase $\varphi(x, t)$ pour le défaut illustrés sur la Fig.4a. À proximité des défauts, la phase présente un saut de π , comme l'amplitude subit une dépression représentée par le spot noir dans le diagramme spatio-temporel. Pour extraire plus d'information sur la dynamique de défaut à partir des diagrammes spatio-temporels d'amplitude et de la phase, nous présentons dans la Fig.5a le profil spatial de l'amplitude à travers le défaut où elle atteint zéro au coeur de défaut [9,10]. Sur la Fig.5b un exemple de deux profils de la phase dans l'espace avant et après le coeur du défaut dans un intervalle du temps de 0.4s. Ce profil de la phase montre clairement le saut du π dans la Fig.4c

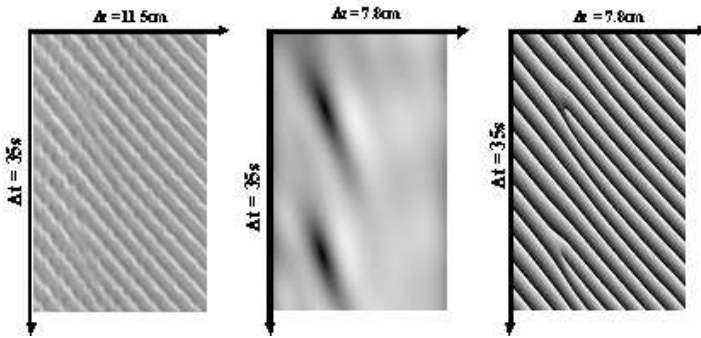


Fig.3. (a) spirale interpénétrant droite aux voisinages des défauts (b) amplitude, (c) phase

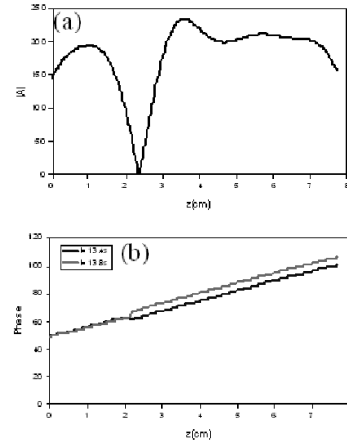


Fig.4. Profils spatiaux de l'amplitude à travers et de la phase avant et après le coeur du défaut

Nous avons mesuré le champs de vitesse au voisinage d'un défaut pour $R_i = 227$ à différents intervalles de temps. Les diagrammes spatio-temporels des composantes radiale et axiale dans le plan (z,t) , rapportés Fig.6a, présentent un défaut vers $t=42$ s. On note que la composante radiale s'annule pour $t=42$ s à $z=12$ mm. Ceci se confirme sur l'ensemble de l'entrefer sur le diagramme $v_r(r, t)$ et $v_z(r, t)$ pris à $z=12$ mm, rapporté Fig.6b. On remarque en effet des valeurs particulièrement faibles autour de $t=42$ s, entre deux structures tourbillonnaires présentant un écoulement radial rentrant. Ceci est mis en évidence par l'évolution de deux composantes de vitesses au cours de temps, où ils s'annulent à travers le défaut.

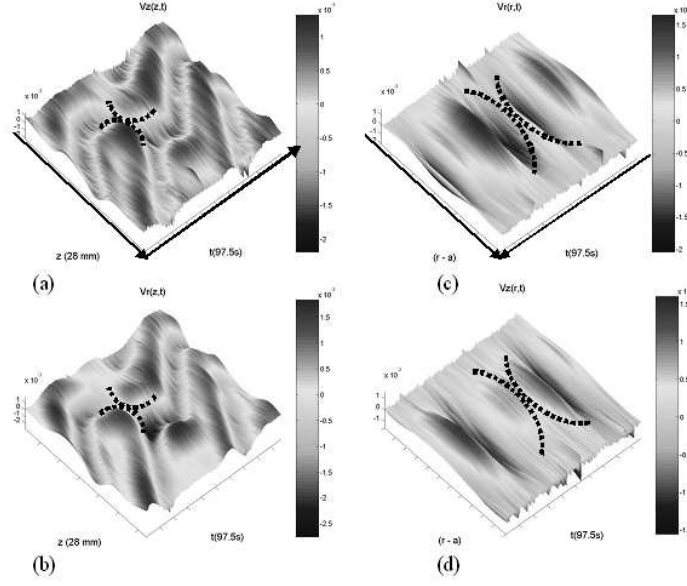


Fig.5. Diagrammes spatio-temporels au voisinage d'un défaut $R_i = 227$

Nous avons ensuite, concentré notre attention sur les comportements spatiotemporels de deux composantes de vitesses à travers le défaut. Pour cela nous avons tracé sur la Fig.7a l'évolution temporelle de la vitesse radiale et axiale, elles évoluent selon une loi parabolique avec une tangente horizontale au coeur de défaut : $v_r(t - t_d) \approx \alpha(t - t_d)^3 + \theta(t - t_d)^3$ et $v_z(t - t_d) \approx \beta(t - t_d)^3 + \theta(t - t_d)^3$ où $\{\alpha = 0.01; \beta = -0.07\}$. Les deux composantes des vitesses varient selon une fonction linéaire avec la distance à partir du défaut (Fig.7betFig.7c) : $v_r(z - z_d) \approx a(z - z_d) + \theta(z - z_d)^2$ et $v_z(z - z_d) \approx b(z - z_d) + \theta(z - z_d)^2$ où $\{a = -0.62; b = 0.21\}$.

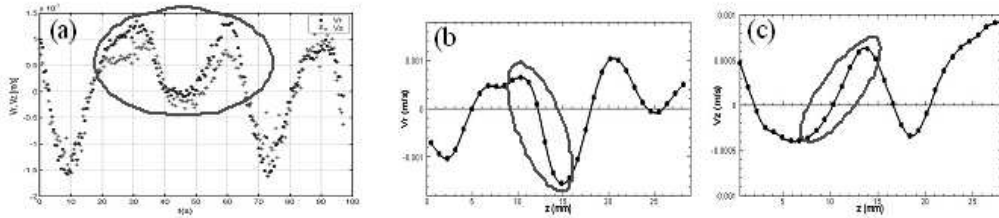


Fig.6. Evolution temporelle et spatiale de deux composantes de vitesses $v_r(t)$ et $v_z(t)$, $R_i = 201$

4 Discussion

La dynamique des ondes spiralées peut être régie par l'équation de Ginzburg-Landau complexe (CGL) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial z} = \varepsilon A + (1 + ic_1) \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - (1 + ic_1) |A|^2 A; \quad (2)$$

Nous avons intégré numériquement cette équation (2) en utilisant le schéma des différences finies sur l'espace et l'algorithme de Runge-Kutta du quatrième ordre dans le temps, avec les conditions aux limites homogènes ($A(0) = A(L) = 0$). Nous présentons sur la Fig.8a le diagramme spatio-temporel de la

partie réelle du signal $U(z,t)$. Au voisinage d'un défaut nous avons cherché une solution approchée de l'équation Ginzburg-Landau (2) sous la forme : $A(z, t) \cong (z + it)$ où $z=0, t=0$ correspondent à la position du défaut. Ensuite par démodulation complexe, nous avons construit le champ suivant :

$$U = A \exp i(\omega t - kz) + A^* \exp -i(\omega t - kz) = -2t \sin(\omega t - kz) + 2z \cos(\omega t - kz) \quad (3)$$

Nous présentons sur la Fig.8b le diagramme spatio-temporel de la partie réelle où du paramètre d'ordre A avec un défaut topologique. Tous d'abord pour étudier les comportements spatiotemporels observés à travers ce défaut, nous avons tracé sur la Fig.9 le profil spatial et temporel à $z=0, t=0$ correspondant à la position du défaut : à $z = 0$ $U(z = 0, t) = -2t \sin \omega t \approx -2\omega t^2 + \theta(t^3)$ et à $t=0$ $U(z, t = 0) = -2z \cos kz \approx -2z + \theta(z^3)$

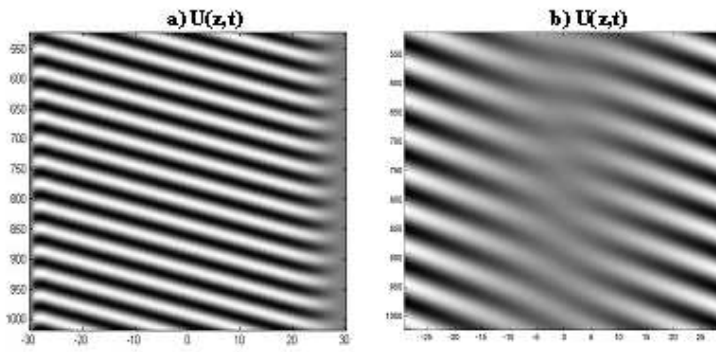


Fig.7. (a) Diagramme spatio-temporel $U(z, t)$; $c_1=0.5$; $c_3=-2$; $\varepsilon = 0.5$ et $V=-1$; (b) Diagramme spatio-temporel de la partie réelle $U(z, t)$, $w = 0.1$ et $k = 0.01$

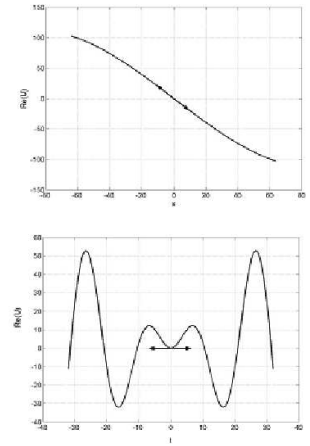


Fig.8. Profils spatial et temporel du champ réel $U(z,t)$ à travers le défaut à $z = 0, t = 0$

Le profil spatial du champ réel $U(z, t)$ montre que la partie réelle varie de façon linéaire à travers le défaut pour $t=0$ où elle s'annule à $z = 0$, contrairement au profil temporel qui varie selon une loi parabolique avec une tangente horizontale à $z=0$.

Références

1. C. D. ANDERECK AND **al.**, *J. Fluid Mech.*, **164**, 155-183 (1986).
2. D. COLES, *J. Fluid Mech.*, **197**, 385 (1988).
3. A. SCHULZ & G. PFISTER, *Lecture Notes in Physics*, (2000).
4. C. HOFFMANN AND **al.**, *Phys. Rev. E*, **64**, 056309 (2004).
5. C. HOFFMANN AND **al.**, *Phys. Rev. E*, **72**, 056311 (2005).
6. W. F. LANGFORD AND **al.**, *Phys. Fluids.*, **131**, 776 (1988).
7. A. EZERSKY AND **al.**, *Theor. Comput. Fluid. Dyna.*, **18**, 85-95 (2004).
8. N. ABCHA AND **al.**, *Exp. in Fluids*, DOI 10.1007/s00348-008-0465-9, (2008).
9. N. LATRACHE, *thèse de doctorat.*, Université du Havre (2005).
10. P. BOT & I. MUTABAZI, *Eur Phys.J. B*, **13**, 144-155 (2000).

Réduction des fluctuations de vitesse d'un écoulement turbulent de Gallium sous champ magnétique.

Michaël Berhanu, Basile Gallet, Nicolas Mordant, & Stéphan Fauve

Laboratoire de Physique statistique de l'Ecole Normale Supérieure, CNRS UMR 8550, 24 Rue Lhomond, 75231 PARIS Cedex 05, France
 mberhanu@lps.ens.fr

Résumé. Dans le but de comprendre la saturation de l'instabilité dynamo, nous étudions l'effet d'un champ magnétique appliqué sur un écoulement turbulent de Gallium liquide. La mesure du potentiel électrique aux bornes de deux électrodes donne un signal lié aux fluctuations locales de vitesse. On observe en augmentant le champ magnétique une réduction des fluctuations du champ de vitesse sur toute la gamme de fréquences mesurées.

Abstract. With the aim of understanding the saturation of the dynamo instability, we study the effect of a magnetic field applied to a turbulent flow of liquid Gallium. The measure of the electric potential between electrodes gives a signal related to the local velocity fluctuations. By increasing the magnetic field, we observe a reduction of the velocity fluctuations at all frequencies of the velocity spectrum.

1 Introduction

Les champs magnétiques naturels sont créés par l'instabilité dynamo, qui convertit une part de l'énergie cinétique d'un d'un fluide conducteur d'électricité en énergie électromagnétique. Récemment la collaboration VKS est parvenue à créer expérimentalement une dynamo turbulente avec du sodium liquide [1]. La rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement par la force de Laplace permet la saturation de cette instabilité. Néanmoins il reste à préciser et à comprendre les modalités de ce phénomène. En effet si de nombreuses expériences ont étudié l'influence de forts champs magnétiques [2], [4], [8] sur des écoulements de métaux liquides, les vitesses sont trop faibles pour que ces mesures soient pertinentes pour l'effet dynamo. C'est pourquoi, on propose d'étudier les fluctuations locales de vitesse d'un écoulement turbulent de gallium liquide, sous un champ magnétique extérieur imposé. Bien que notre expérience soit encore trop modeste pour observer une modification notable du champ magnétique imposé, il s'agit d'une première étape pour montrer le freinage magnétique et valider notre technique expérimentale, à savoir la mesure de la différence de potentiel entre deux électrodes séparées de quelques millimètres plongeant dans le métal. Dans le cadre des hypothèses de la magnétohydrodynamique et pour un écoulement incompressible, les équations qui décrivent le couplage entre le champ magnétique \vec{B} et le champ de vitesse \vec{v} sont l'équation dite de l'induction et l'équation de Navier-Stokes avec le terme supplémentaire dû à la force de Laplace.

Introduisons les nombres sans dimensions caractéristiques du phénomène. En plus du nombre de Reynolds hydrodynamique R_e , deux paramètres magnétohydrodynamiques apparaissent. Dans l'équation de l'induction le paramètre traduisant l'importance du terme d'induction par rapport au terme diffusif (correspondant à la dissipation par effet Joule), est le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu_0 \sigma L V$, avec L une longueur caractéristique et V une vitesse caractéristique. Le nombre $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ est appelé diffusivité magnétique. Le rapport entre la viscosité cinématique ν et la diffusivité magnétique est le nombre de Prandtl magnétique caractéristique du métal utilisé valant pour le gallium $1.5 \cdot 10^{-6}$. Le rapport entre les nombres de Reynolds hydrodynamique et magnétique est ainsi imposé.

Ensuite la comparaison de la force de Laplace $\vec{j} \wedge \vec{B}$ à l'accélération convective dans l'équation de Navier-Stokes, conduit au paramètre d'interaction N . Pour un champ magnétique induit l'ordre de grandeur de la densité de courant induite est $\vec{j}_{ind} \sim \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)$, où on note B_0 le champ magnétique imposé. Alors le paramètre dit d'interaction s'écrit :
$$N = \frac{\sigma L B_0^2}{\rho V}$$

2 Dispositif expérimental

On propose donc de mesurer une différence de potentiel dans un métal liquide en écoulement turbulent en fonction d'un champ magnétique appliqué. Nous utilisons comme métal du gallium qui fond à 29.8°C. Sa conductivité au point de fusion est alors de $3.86 \cdot 10^6 \Omega^{-1} m^{-1}$, sa viscosité cinématique de $3.11 \cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$ et sa densité de 6,09. Dans un bûcher de 12.5 cm de diamètre on place un litre de gallium liquide. Le champ magnétique est mesuré grâce à un gaussmètre FW Bell 7030. Deux bobines permettent de faire varier un champ appliqué vertical de zéro au kilogauss. Expérimentalement le champ magnétique induit reste toujours négligeable devant le champ magnétique appliqué. Une hélice décentrée d'environ 3 cm et à 3 cm du fond est mise en rotation dans le fluide. Le rayon de l'hélice est de 3.5 cm. On sélectionne un sens de rotation de l'hélice pour lequel elle éjecte le fluide vers le fond. Le décentrage de l'hélice permet d'avoir plus de fluctuations et d'éviter la rotation d'ensemble du liquide dans le bûcher. Les fréquences de rotation de l'hélice sont comprises entre 2 et 7 Hz, par conséquent le nombre de Reynolds évalué sur le rayon de l'hélice varie entre 50000 et 168000 (l'écoulement peut être considéré comme pleinement turbulent), tandis que le nombre de Reynolds magnétique varie entre 0.07 et 0.25. Les électrodes sont des fils de cuivre de longueur 5 mm isolées sauf à leur extrémités. Le paramètre d'interaction évalué au niveau de l'hélice s'écrit $N = \frac{\sigma V B_0^2}{\rho V^2 / L} = \frac{\sigma B_0^2}{2\pi f_{rot} \rho}$, avec f_{rot} la fréquence de rotation de l'hélice en Hertz.

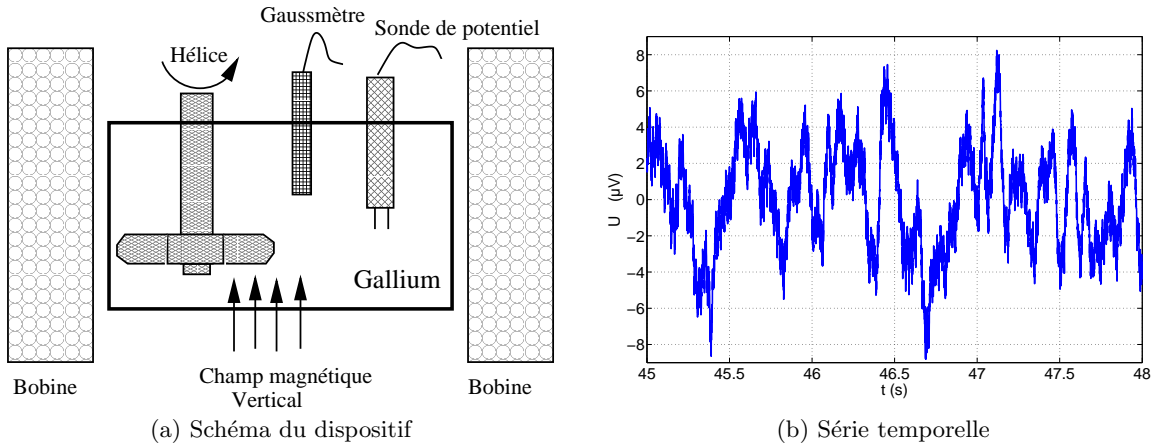


Fig.1. Schéma du dispositif expérimental et signal temporel mesuré avec la sonde de potentiel pour une fréquence de rotation de l'hélice de 3 Hz sous un champ magnétique de 622 G.

3 Pertinence de la mesure de potentiel pour accéder aux fluctuations de vitesses

Mesurer la vitesse locale au sein d'un métal liquide reste difficile et sujet à discussion. La mesure de la tension aux bornes de deux électrodes séparées de quelques millimètres plongeant dans un écoulement est une méthode utilisée depuis plus de 50 ans avec deux grands types de dispositif. Dans le premier cas on impose un fort champ magnétique à grande échelle pour un très petit nombre de Reynolds magnétique [7] [5]. Dans le second on utilise avec un dispositif nommé sonde Vives, où on utilise le champ localisé d'un petit aimant pour avoir accès à la vitesse locale [6]. Nous envisageons ici la première situation mais pour un Reynolds magnétique de l'ordre de l'unité et nous essayons d'estimer si cette mesure permet d'accéder aux fluctuations de vitesse. La loi d'Ohm dans un conducteur en mouvement s'écrit $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v} \wedge \vec{B}$.

On nomme l la distance entre électrodes et la mesure de la différence de potentiel notée U entre ces électrodes donne l'intégrale du champ électrique sur cette distance.

$$U = \int_0^l \left(\frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v} \wedge \vec{B} \right) d\vec{l}$$

Si on désire avoir accès à la vitesse locale du fluide au cours du temps, il est donc nécessaire de connaître le champ magnétique au point de mesure et aussi à priori que la densité de courant soit négligeable. Essayons d'évaluer la contribution des différents termes dans l'expression du champ électrique : $\vec{E} = \eta \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) - \vec{v} \wedge \vec{B}$. Le rapport de $\vec{v} \wedge \vec{B}$ sur $\eta \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})$ est égal au nombre de Reynolds magnétique. A titre de remarque si on envisage de grandes valeurs de ce nombre avec un champ magnétique imposé de l'extérieur ou bien même un champ engendré par un effet dynamo, on attend : $\vec{E} \sim -\vec{v} \wedge \vec{B}$. Une mesure locale du champ magnétique et de la différence de potentiel devrait permettre d'accéder à la vitesse. Mais si on revient au cas correspondant à notre expérience, où les nombres de Reynolds magnétiques sont inférieurs à l'unité, la situation est plus complexe, car en général la densité de courant est elle même produite par un phénomène d'induction. Prenons le cas d'un champ imposé B_0 important, homogène et constant. En décomposant le champ sous la forme $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}_{\text{induit}}$ avec $b_{\text{induit}} \sim R_m B_0$ et en sachant que le champ imposé est irrotationnel, on a $\frac{j}{\sigma} \sim \frac{R_m B_0}{L \mu_0} = v B_0$. Donc la densité de courant est à priori du même ordre de grandeur que dans le terme $\vec{v} \wedge \vec{B} \sim \vec{v} \wedge \vec{B}_0$. Il s'avère délicat, d'accéder ainsi aux valeurs absolues du champ de vitesse, dans une expérience d'induction. L'introduction du potentiel ϕ du champ électrique et du potentiel vecteur \vec{A} simplifie l'interprétation des mesures. En effet en prenant la divergence de la loi d'Ohm, sachant qu'en régime permanent $\text{div}(\vec{j}) = 0$ et en choisissant $\text{div}(\vec{A}) = 0$ (jauge de Coulomb), on obtient :

$$\Delta \phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} = \vec{\omega} \cdot \vec{B}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{b}_{\text{induit}} - \mu_0 \vec{v} \cdot \vec{j}$$

Les potentiels ϕ et \vec{A} sont définits par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, ρ_e est la densité de charge et $\vec{\omega}$ le vecteur vorticité de l'écoulement. Evaluons l'ordre de grandeur des différents termes du membre de droite : $\vec{\omega} \cdot \vec{B}_0 \sim \frac{B_0 V}{l_K}$, $\vec{\omega} \cdot \vec{b}_{\text{induit}} \sim \frac{bV}{l_K}$ et $\mu_0 \vec{v} \cdot \vec{j} \sim \frac{bV}{l_\sigma}$, avec $l_K \sim L Re^{-3/4}$, l'échelle de Kolmogorov (échelle de dissipation du champ de vitesse par viscosité) et $l_\sigma \sim L Rm^{-3/4}$, l'échelle de dissipation ohmique des courants induits, la longueur L étant l'échelle intégrale de l'écoulement. Pour les paramètres de notre expériences, les deux derniers termes sont négligeables et on obtient : $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\omega} \cdot \vec{B}_0$. La mesure du potentiel pourrait fournir en quelque sorte une mesure de la composante de vorticité parallèle au champ appliqué [5]. A l'instar des mesures de pression, une mesure directe de ϕ serait non locale, à cause de l'expression avec un Laplacien. Mais en mesurant la différence du potentiel entre les électrodes, on accède au gradient de ϕ pour les échelles plus grandes que la distance entre électrodes l , donc on obtient alors un signal ayant pour ordre de grandeur $v B_0$. On a ainsi accès à la dynamique des fluctuations de vitesses, mais sans pouvoir calibrer notre sonde. Pour les fluctuations plus petites que l , on mesure la différence entre deux valeurs du potentiel ϕ décorréllées. On peut essayer de prévoir le comportement du potentiel et de son gradient dans l'espace de Fourier de nombre d'onde k : $k^4 |\phi^2| \sim B_0^2 |\omega^2|$ et $|\frac{\partial \phi^2}{\partial x}| \sim k^2 |\phi^2|$. Or le spectre spatial de la vorticité est supposé suivre une loi de puissance en $k^{1/3}$, pour un écoulement turbulent en faisant appel à la théorie de Kolmogorov 1941. Par l'hypothèse de Taylor, on fait correspondre les spectres temporels aux spectres spatiaux pour les fréquences suffisamment élevées devant l'inverse du temps de corrélation de l'écoulement, du fait du balayage ("sweeping") des hétérogénéités du champ par la vitesse de l'écoulement. Ainsi le spectre de puissance de la tension mesurée, doit, à partir de la fréquence de rotation de l'hélice, présenter une loi de puissance en $f^{-5/3}$, jusqu'à une fréquence de coupure de l'ordre de $f_c \sim \frac{V}{2\pi l}$, au delà de laquelle, une loi de puissance en $f^{-11/3}$ devrait être observée.

4 Résultats

Lorsqu'on applique un champ magnétique vertical au dessus de 50 Gauss, un signal de tension de quelques microvolts sort du bruit, augmentant avec le champ appliqué et la fréquence de rotation de l'hélice. Ses fluctuations sont analogues à celles qui seraient observées avec un fil chaud pour un signal de vitesse turbulent. On évalue l'amplitude des fluctuations de la tension U par l'écart type du signal enregistré. La reproductibilité des mesures permet d'évaluer l'incertitude sur l'écart type à cinq pour cent. Lorsqu'on augmente progressivement le champ magnétique appliqué, l'amplitude de U croît d'abord linéairement avec B , puis on observe un écart négatif à la droite que nous attribuons à l'effet de la force de Laplace sur l'écoulement 2.

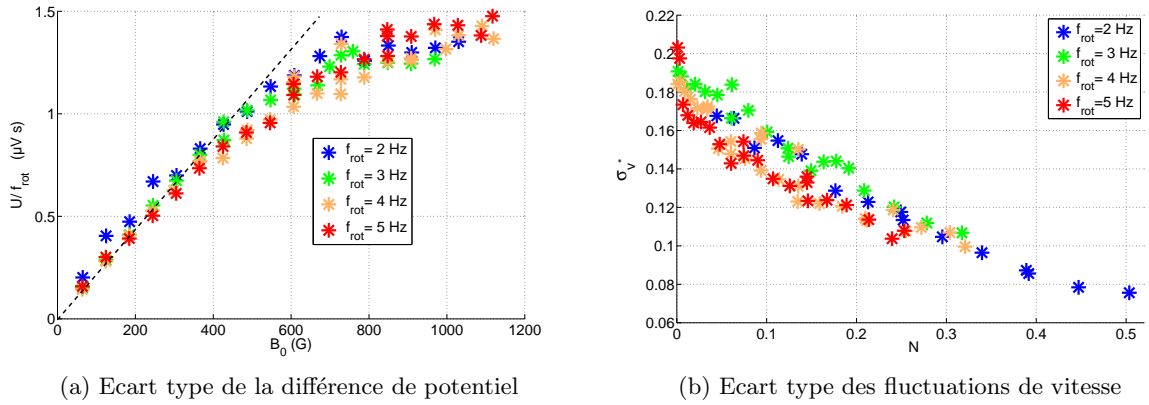


Fig.2. Evolution de l'écart type de la différence de potentiel divisé par la fréquence de rotation de l'hélice en fonction du champ magnétique appliqué et écart type des fluctuations de vitesse adimensionnées par la vitesse de l'hélice, en fonction du paramètre d'interaction.

En divisant l'amplitude de la différence de potentiel entre électrodes, par la norme du champ magnétique (constante au cours d'une mesure donnée) et par la largeur de la sonde, on obtient un signal représentant les fluctuations de vitesse au niveau de la sonde. Le nombre sans dimension pertinent lors de la variation du champ magnétique est le paramètre d'interaction N . On représente alors σ_{v^*} l'écart type des fluctuations de vitesse adimensionné par la vitesse des pâles de l'hélice en fonction de N 2. La vitesse adimensionnée semble suivre une décroissance linéaire avec le paramètre d'interaction.

Les courbes obtenues ressemblent aux mesures de potentiel à grande échelle de Steenbeck et al. [3], pour lesquelles on relève le potentiel produit par effet alpha aux extrémités du dispositif dédié dans du sodium dans ce cas. Le potentiel décroît en valeur moyenne avec le champ appliqué, et suit approximativement une loi en $1/N$. Ces mesures s'interprètent par un phénomène de coincement ("quenching") de l'effet α , correspondant à un freinage de l'écoulement, qui sature les effets d'induction et donne un argument pour une modélisation de l'effet α , où la force électromotrice moyenne est supposée s'écrire $\langle \vec{v} \wedge \vec{B} \rangle = \alpha B_0$. Ce mécanisme est invoqué pour la saturation des modèles de dynamo avec effet alpha. Nos mesures sont en accord avec ces observations et les complètent dans le sens qu'on retrouve l'effet de quenching en mesurant les fluctuations turbulentes du champ de vitesse.

Le spectre temporel du signal de vitesse obtenu par une mesure de différence de potentiel est typique d'un signal de vitesse turbulente. Le comportement qualitatif des spectres est en bon accord avec les conclusions de la deuxième partie. On représente sur la figure 3, le spectre de la vitesse obtenue à partir de la mesure de la différence de potentiel entre les deux électrodes pour une fréquence de rotation de 7 Hz. On observe une zone plate à basse fréquence, puis à partir de la fréquence de rotation de l'hélice une zone plus raide proche de la loi de puissance en $-5/3$. Cette zone est mieux visible pour de hautes fréquences de rotation de l'hélice et dépend sensiblement de la position et de l'orientation de la sonde.

A partir d'une fréquence de coupure de l'ordre de 40 Hz, on observe une loi de puissance plus raide avec un exposant proche de $-11/3$. Au delà de 100 Hz, le signal tombe en dessous du niveau de bruit. Cette mesure est cohérente avec une interprétation hydrodynamique de nos mesures de potentiel. Pour les mesures avec des vitesses d'entraînement plus faibles, la zone avec la loi de puissance en $f^{-5/3}$, est moins visible, sans doute, car la taille typique des fluctuations dans la zone inertielle est inférieure à l . De même le comportement quantitatif des spectres dépend sensiblement de la position et de l'orientation de la sonde, du fait de l'inhomogénéité de l'écoulement moyen.

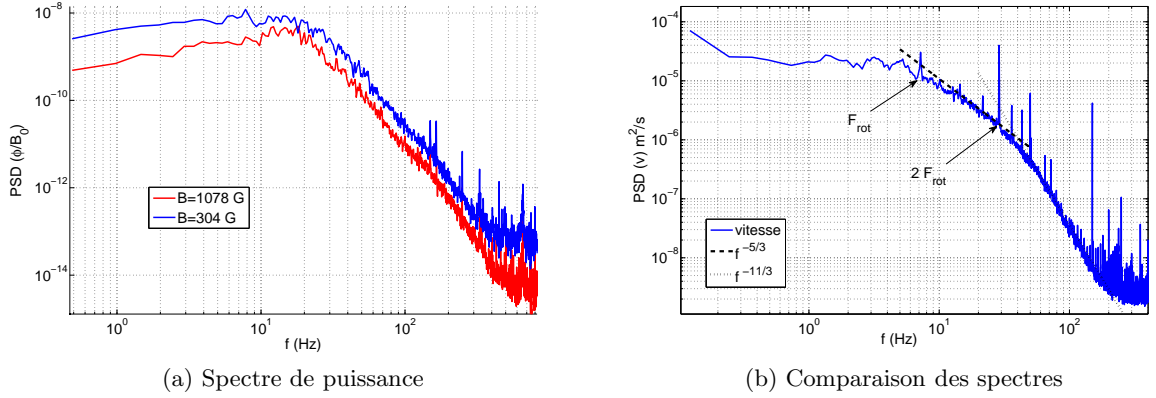


Fig.3. Spectre de puissance de la différence de potentiel pour une fréquence de rotation de l'hélice de 7 Hz sous un champ magnétique de 737 G. Une comparaison des spectres de puissance de la vitesse pour une fréquence de rotation de 5 Hz pour deux champs magnétiques imposés est également donnée.

Il est important de tester l'influence du champ magnétique sur le spectre de puissance de vitesse ainsi obtenu, car une échelle privilégiée dans le freinage du champ de vitesse pourrait exister. Dans ce cas on devrait observer une modification des pentes des spectres lorsqu'on augmente le champ magnétique. Dans nos mesures, l'augmentation du champ magnétique n'affecte pas le comportement qualitatif des spectres. Sur la figure 3, on compare deux spectres temporels pour deux valeurs du champ magnétique appliqué et une même fréquence de rotation. On constate que le niveau global d'énergie se translate verticalement, quand le champ B_0 augmente. Ce résultat important semble montrer que le freinage magnétique se fait de manière globale et homogène sur la taille de l'écoulement. En particulier, il n'y a pas de diminution préférentielle des hautes fréquences, correspondant aux petites échelles de l'écoulement. Les mesures n'ont jamais pu laisser supposer une transition des pentes des spectres de la loi en $k^{-5/3}$, valable pour la turbulence homogène isotrope à la loi en k^{-3} , propre à la turbulence bidimensionnelle, observée pour la turbulence magnétohydrodynamique pour de grandes valeurs du paramètre d'interaction [2] [4].

5 Discussion

Plusieurs auteurs [4] [2] [8] ont étudié l'influence d'un champ magnétique sur un écoulement à la fois expérimentalement et numériquement. Le cas de figure envisagé est alors de montrer pour la turbulence en déclin un amortissement plus rapide du champ de vitesse, avec une bidimensionnalisation de l'écoulement perpendiculairement au champ appliqué pour de grandes valeurs de N . Qu'en est il si un terme de forçage apporte continuellement de l'énergie à l'écoulement? Le forçage continu dans un volume fermé permet d'attendre un temps de retournement des structures turbulentes, inférieur au temps de déclin du champ de vitesse via la force de Laplace. En effet en prenant le paramètre d'interaction inférieur mais proche de un, l'injection d'énergie $\epsilon_0 \sim \frac{\rho V^3}{L}$ demeure grande devant la puissance de la force de Laplace qui s'identifie à la dissipation par effet Joule $\vec{j} \cdot \vec{E} \sim \sigma V^2 B_0^2$. La dissipation de l'énergie cinétique se fait donc essentiellement via la cascade turbulente. La densité de courant s'écrit $\vec{j} \sim \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}_0)$, donc la

force de Laplace s'écrit $-\sigma B_0^2 \vec{v}_\perp$, où \vec{v}_\perp est le champ de vitesse perpendiculaire au champ appliqué. On peut donc construire un temps de freinage $\tau_m = \frac{\rho}{\sigma B_0^2}$, qui doit être comparé au temps de retournement qu'on définit comme le temps au bout duquel le champ de vitesse est décorrélé, soit $\tau_h \sim \frac{L}{V}$. Encore une fois, le fait que N soit plus petit que l'unité, montre que le champ magnétique n'a pas le temps de structurer l'écoulement et de le rendre anisotrope. Par conséquent dans la gamme de paramètres de notre expérience et sans doute aussi pour la saturation de l'effet dynamo, appliquer un champ magnétique sur un écoulement turbulent, apporte un terme de freinage supplémentaire, sans pour autant changer la phénoménologie de l'écoulement. Dans le cas contraire on aurait attendu un changement de pente du spectre de vitesse en fonction du champ appliqué. La dissipation totale de l'écoulement augmente avec le champ magnétique en raison de la dissipation Joule, donc la part disponible pour la cascade turbulente est réduite, mais sans changer pour autant sa dynamique et briser son invariance à travers les échelles spatiales. En introduisant un facteur f dépendant du paramètre d'interaction, de valeur inférieure à 1, par les arguments usuels de la théorie de Kolmogorov 1941, le spectre de vitesse prend alors la forme $|\hat{v}| \sim (V^3 L^{-1} f(N))^{2/3} k^{-5/3}$. Par conséquent lorsqu'on augmente le champ magnétique, le spectre de vitesse conserve son allure, mais son amplitude diminue en étant multiplié par $f(N)^{2/3}$.

6 Conclusion

Ainsi à travers la mesure d'une différence de potentiel, nous avons observé l'influence de la force de Laplace sur un écoulement turbulent de gallium, avec une réduction nette des fluctuations turbulentes. Pour la gamme du paramètre d'interaction correspondant à nos mesures, les spectres relevés, montrent que la dynamique de la turbulence, n'est pas modifiée par la présence du champ magnétique. Des mesures complémentaires sont prévues dans un dispositif plus élaboré et mieux contrôlé, permettant de travailler pour de plus grandes vitesses et avec des champs magnétiques imposés plus importants. Nous espérons que ce travail constituera une première étape dans la compréhension de la saturation des dynamos turbulentes.

Remerciements : Nous remercions chaleureusement Sébastien Aumaître pour nous avoir initié aux mesures de potentiel et avoir partagé sa bibliographie, François Pétrélis pour de nombreuses discussions dans l'interprétation des mesures, Claudio Falcon pour son aide technique et scientifique dans ce projet ainsi que les membres de la collaboration VKS.

Références

1. M. MONCHAUX, M. BERHANU, M. BOURGOIN, M. MOULIN, P. ODIER, J.F. PINTON, R. VOLK, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, C. GASQUET, L. MARIÉ, F. RAVELET , Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium *Physical Reviews Letter* , **8** (1), (2007).
2. J. SOMMERIA AND R. MOREAU , Why, how, and when, MHD turbulence becomes two-dimensional. *Journal of Fluid Mechanics* , **118** , (1982).
3. M. STEENBECK, I. M. KIRKO, A. GAILITIS, A.P. KLYAVINYA, F. KRAUSE, I.Y. LAUMANIS AND O.A. LIELAUSIS , Experimental discovery of the electromotive force along the external magnetic field induced by a flow of liquid metal (α - effect) *Soviet Physics - DOKLADY* , **13** (5), (1968).
4. A. ALEMANY, R. MOREAU, P. L. SULEM, AND U. FRISCH , Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD turbulence *Journal de Mécanique* , **18** (2), (1979).
5. A. TSINOBER, E. KIT AND M. TEITEL , On the relevance of the potential-difference method for turbulence measurements *Journal of Fluid Mechanics* , **165** , (1987)
6. A. CRAMER, K. VARSHNEY, TH. GUNDRUM AND G. GERBETH , Experimental study on the sensitivity and accuracy of electric potential local flow measurements *Flow Measurement and Instrumentation* , **17** , (2006).
7. A. KOLIN , Electromagnetic Velometry. I. A. Method for the determination of Fluid Velocity Distribution in Space and Time *Journal of applied physics* , (15), (1944).
8. B. KNAEPEN AND R. MOREAU , Magnetohydrodynamic Turbulence at Low Magnetic Reynolds Number, *Annual Review of Fluid Mech.* , **40** (25), (2008).

Mécanisme de sélection de longueur d'onde dans la couronne d'Edgerton

P. Brunet¹, R.D. Deegan², & J. Eggers³

¹ Laboratoire de Mécanique de Lille - CNRS UMR 8107, Bd Paul Langevin 59655 Villeneuve d'Ascq, France

² Department of Physics and Center for the Study of Complex Systems, Randall Laboratory, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, USA

³ Department of Mathematics - University of Bristol, University Walk BS81TW Bristol, United Kingdom

philippe.brunet@univ-lille1.fr

Résumé. Nous étudions expérimentalement et théoriquement l'impact d'une goutte sur un film mince du même liquide. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la formation du pattern régulier de doigts et gouttelettes à la périphérie de la nappe annulaire se développant après l'impact. Ce pattern est dénommé *couronne d'Edgerton* d'après le nom du photographe qui l'a popularisé. Nous donnons une vue détaillée de la séquence d'évènements observés, lorsque les deux paramètres de contrôle pertinents varient. La couronne d'Edgerton est observée uniquement dans un étroit domaine de l'espace des paramètres. En dehors de ce domaine, la structure observée est soit différente qualitativement, soit possède une certaine irrégularité.

Abstract. We carry out an experimental and theoretical study on drop impacts on a thin layer of the same liquid. Our study is focused on the pattern of fingers and subsequent secondary droplets, at the periphery of the annular liquid sheet generated by the impact. This pattern has been denoted *Edgerton's crown* after the photograph's name who popularized it in the 1960's. We give an overview of the sequence of events occurring for different regimes, varying the two dimensionless control parameters Re and We . The regular Edgerton's crown is only observed inside a narrow domain in the parameters space. Out of this domain, the observed structure is either qualitatively different, either shows irregularities.

1 Introduction

Remarquée par Léonard de Vinci dès le XV^e siècle et fréquemment utilisée de nos jours dans les publicités pour des boissons, la formation d'une couronne de liquide à la suite de l'impact d'une goutte sur un film du même liquide est un exemple typique de la formation d'un motif à la suite d'une instabilité hydrodynamique. La couronne à proprement parler consiste en un ensemble plus ou moins ordonné de doigts liquides, naissant à la bordure d'une nappe annulaire quelques millisecondes après l'impact (voir Fig.1). Worthington [1] fut le premier à étudier scientifiquement le phénomène et à consigné un impressionnant catalogue de phénomènes, révélant une grande variété de figures de splashes lorsqu'on décrit l'espace des paramètres (vitesse à l'impact, taille de goutte, épaisseur du film, propriétés du liquide ...). Au milieu du XX^e siècle, le photographe Edgerton a popularisé ces structures régulières et y a donné son nom [2]. En dépit de nombreuses études sur l'impact de gouttes, il n'existe toujours pas de vue consensuelle sur les mécanismes de formation de la couronne [3].

Alors qu'une bonne partie des études de splashes de gouttes se sont focalisées sur les impacts à grande vitesse, en raison de leur pertinence dans les applications de sprays et d'atomisation, il a été remarqué assez récemment [4,5] que la formation d'une couronne régulière nécessitait des conditions expérimentales assez spécifiques. En bref, la goutte doit impacter avec suffisamment d'inertie pour permettre le développement d'une nappe annulaire, formée par la collision de deux lames liquides [6], mais l'impact doit être suffisamment modéré afin que la violence de l'impact n'engendre pas des perturbations initiales causes d'irrégularités (comme dans l'étude de Yarin et Weiss [7]). Dans certains cas, on observe une lame liquide horizontale, dénommée "ejecta sheet" par Thoroddsen qui fut le premier à l'observer expérimentalement [8] : la collision de cette lame avec le bain, ou bien son atomisation en fines gouttelettes conduit à des perturbations significatives aux premiers instants après l'impact. L'apparition de

cette lame a été prévue théoriquement [9,10], et il convient de la distinguer de la nappe annulaire prévue par Peregrine [6] : l’ ”ejecta sheet” apparaît aux instants courts (inférieur au temps caractéristique inertio-capillaire $\tau = (\rho R^3/\gamma)^{1/2}$). Souvent, les deux nappes ont été confondues dans la littérature, et même si quelquefois elles fusionnent et interagissent, leur origine physique est différente. De plus, sous l’effet des forces capillaires en bout de nappe prévues par Taylor et Culick [11,12], la nappe se borde d’un bourrelet de liquide prenant la forme d’un cylindre torique dont le rayon croît avec le temps. Enfin, la couronne d’Edgerton naît à partir de la nappe de Peregrine et non pas à partir de l’ejecta sheet.

La plupart des mécanismes proposés dans la littérature proposent la croissance de doigts à partir de perturbations initiales finies [3,7], proposant un mécanisme non-linéaire. Les études numériques de Fullana et Zaleski [13] et Gueyffier et Zaleski [14] suggèrent qu’un taux de croissance significatif pour les doigts de la couronne nécessitent des perturbations initiales finies. Mais ce scénario n’explique pas la régularité dans l’espace et la forme des doigts (telles qu’illustrées sur la figure 1) : cette régularité suggère plutôt un mécanisme d’instabilité linéaire. L’instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau [15] a été proposée [16], mais aussi la combinaison entre décélération et courbure du centre de masse du bourrelet [17].

Le point clef de cette étude est d’arriver à produire des conditions initiales non bruitées, à partir desquelles une instabilité linéaire peut éventuellement naître. Nous montrons ici que dans ces conditions, le bourrelet lisse bordant la nappe est linéairement instable et se déstabilise en formant une structure régulière (Fig. 1). La forme des perturbations, le temps caractéristique et la longueur d’onde sélectionnée est compatible avec l’instabilité de Rayleigh-Plateau [15]. Les paramètres pertinents sans dimension du problème sont le nombre de Weber $We = \rho V_0^2 d/\gamma$, le nombre de Reynolds $Re = V_0 d/\nu$, et la hauteur de liquide adimensionnée $h^* = h/d$. On rajoute quelquefois un 4^e nombre, le nombre d’Ohnesorge $Oh = (\nu^2 \rho/\gamma D)^{1/2}$, qui lorsqu’il est de l’ordre de grandeur de l’unité peut modifier la forme du bourrelet [18].

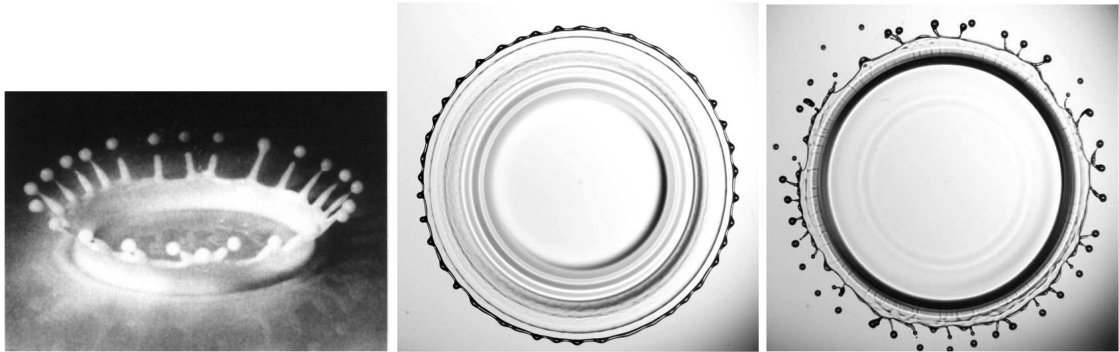


Fig.1. *Gauche* Motif de doigts entourant la nappe liquide d’une goutte impactant une couche du même liquide, ici du lait (couronne d’Edgerton). *Centre* Aux temps courts, déformation régulière du bourrelet. *Droite* Aux temps plus longs, évolution nonlinéaire et éjection de gouttelettes secondaires

2 Description de l’expérience

Les gouttes sont lâchées d’une seringue, d’une hauteur H fixée au dessus du film liquide. L’intervalle de temps entre 2 gouttes est supérieur à 10 secondes, pour laisser le temps au film liquide de se relaxer et redevenir horizontal. Pour la plupart des expériences, on travaille avec un diamètre d’aiguille suffisamment fin (inférieur au millimètre) : ainsi le diamètre de la goutte est sélectionné de façon reproductible égal à la longueur capillaire $d = (\gamma/\rho g)^{1/2}$. Le bain liquide est dans un cadre rectangulaire de 12×13 avec un fond en verre sur lequel sur lequel une lame de 10 cm, de verre optique $\lambda/10$ est posée. L’épaisseur de liquide, mesurée par contact avec une aiguille montée sur une vis micrométrique pourvue d’un vernier, est fixée au début d’une séquence à $300 \mu\text{m}$. Le niveau est gardé constant au cours d’une expérience, en drainant

le bain de liquide en périphérie au même débit apporté par la chute de gouttes. Les images sont acquises par le bas au travers de la plaque de verre, par un appareil photo haute résolution Canon 20D et un flash ultra-rapide 600 ns (Palfash 501, Pulse Photonics Ltd.), déclenché par le passage de la goutte coupant de faisceau d'une photodiode éclairant un opto-trigger, avec une précision de $5 \mu\text{s}$. La sortie de l'opto-trigger arrive sur un générateur de délai, qui alimente le flash. En variant la valeur du délai, on recrée l'évolution de l'impact par la composition d'images successives figées. La vitesse de la goutte à l'impact, ainsi que l'évolution du rayon de la nappe annulaire, sont mesurés à l'aide d'une caméra rapide. Le liquide utilisé est soit de l'huile silicone de viscosité $\nu=5.2 \text{ cSt}$, de densité $\rho=0.92 \text{ g/cm}^3$ et de tension de surface $\gamma=21 \text{ dyn/cm}$, soit de l'isopropanol ($\nu=2.5 \text{ cSt}$, $\rho=0.804$ et $\gamma=25 \text{ dyn/cm}$). Après un traitement d'image approprié, on extrait les bords interne et externe du bourrelet au temps t après impact. On accède ainsi à la déformation de l'interface par rapport au cercle de rayon médian. Un programme Matlab permet de re-échantillonner et d'effectuer une transformée en ondelette du signal. Les avantages de notre expériences par rapport à l'utilisation d'une caméra rapide, sont l'obtention d'images haute résolution (3504×2336 pixels) et le temps d'exposition court (600 ns). De plus, l'acquisition par dessous donne un bourrelet entièrement visible et contenu dans le plan focal. L'inconvénient est que chaque image provient d'un impact différent.

3 Résultats et discussion

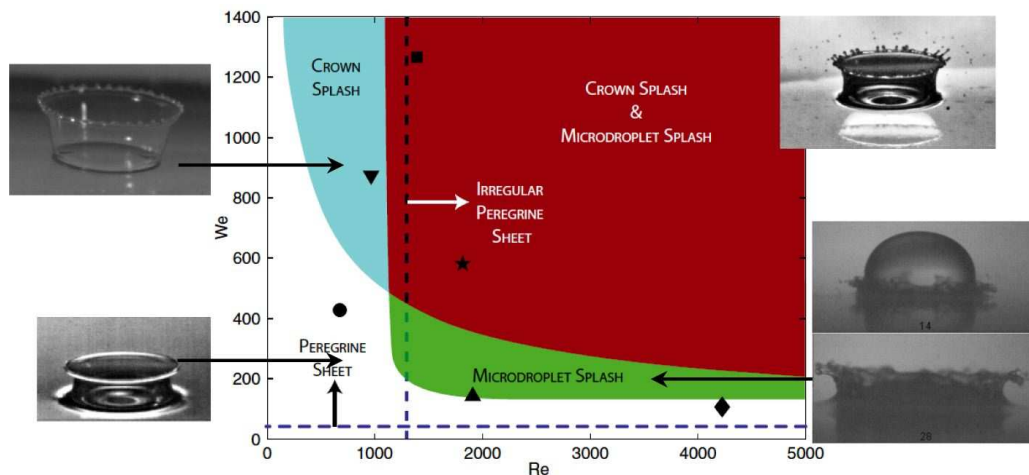


Fig.2. Diagramme d'existence des différents régimes.

Nous avons déterminé l'espace des paramètres sans dimension Re et We , dans lequel la couronne d'Edgerton apparaît de façon régulière. Pour cela, nous avons varié la hauteur de chute (et donc la vitesse à l'impact V_0), utilisé des liquides de propriétés différentes (notamment des mélanges eau/glycérol) et changé le diamètre de l'injecteur afin d'avoir des tailles de gouttes supérieures. Ceci fait, il est apparu que la hauteur h^* n'avait que peu d'influence sur les frontières des différents régimes dans la gamme $0.05 \leq h^* \leq 0.5$. Les résultats apparaissent sur la figure 2 : les domaines colorés traduisent la formation de gouttelettes secondaires (splashes) par divers mécanismes. On retrouve la frontière $We Re^{1/2} = K$, avec K le paramètre de Sommerfeld [9] pour la production de gouttes. Ces gouttes peuvent être émises au bout des doigts de la couronne (comme sur la figure 1 (*Crown Splash*)) ou bien dans les premiers instants après impact (*microdroplet splash*) à des Re plus hauts. Cependant, nous trouvons une limite assez précise quant à la régularité de la couronne. La ligne verticale en pointillés délimite la frontière entre la production d'une structure régulière et d'une structure irrégulière de doigts, et nous avons pu

constater que *la formation d'une couronne régulière va de pair avec la présence d'un bord de nappe non perturbé aux premiers instants*, ce qui est la conclusion principale de cette étude qualitative préliminaire. Finalement, la zone bleu-ciel délimite seulement l'entrée vers un régime où les doigts réguliers vont avoir le temps de se scinder en gouttelettes au cours du processus de décélération du bord de nappe : la formation des doigts elle-même semble régie par le même mécanisme que celle opérant dans la zone blanche à plus faible Reynolds, où aucun splash ne se produit. Pour une description visuelle plus détaillée des différents domaines, le lecteur pourra se référer à un article de revue récent [5].

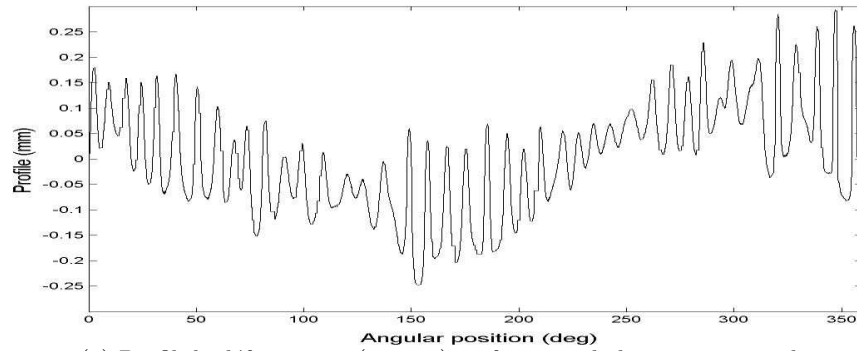
Ayant délimité le domaine pour lequel la couronne ordonnée apparaît, nous avons mené une étude quantitative plus précise : à partir d'images haute-résolution comme celles de la figure 1-*centre*, nous avons systématiquement extrait le profil de déformation. Reconstitué après un traitement d'image, on obtient l'amplitude de la déformation en fonction de la position angulaire. La figure 3-a en donne un exemple typique. La régularité de la longueur d'onde (distance entre deux maxima) apparaît clairement. Cependant, l'amplitude n'est pas homogène, ce qui était aussi visible sur la figure 1-*centre*.

Une analyse minutieuse des profils suggère que tout se passe comme si des doigts croissent à différentes positions angulaires, à partir du bourrelet non perturbé. Dans les premiers instants de la formation du bourrelet, celui-ci se structure donc progressivement à des endroits distincts, jusqu'à ce que ces structurations s'étendent et se rejoignent. Comme ces déformations ne naissent pas systématiquement aux mêmes instants, cela explique des différences d'amplitudes locales. D'autre part aux temps courts, ces différentes structures locales ne sont pas forcément en correspondance de phase : cela se traduit par un spectre de puissance dans l'espace de Fourier comportant plusieurs pics (la somme de deux morceaux de cosinus de même longueur d'onde mais décalés en phase donne aussi une TF avec 2 pics). C'est la raison pour laquelle on utilise une transformée en ondelettes (TO), dont le résultat est donné figure 3-b. Sur le graphe 3D, les pics clairs correspondent à un profil fortement corrélé à une fonction ondelette d'une certaine longueur d'onde (scale). Cette tendance est décrite le long de la coordonnée spatiale. En sommant les valeurs prises par la TO le long de la coordonnée spatiale, on obtient la contribution moyenne de chacune des échelles et on extrait ainsi l'échelle dominante, correspondant à une longueur d'onde préférentielle (figure 3-c). Chaque tracé montre qu'il existe une longueur d'onde préférentielle sur les déformations du bord de nappe, ce qui confirme l'impression visuelle. A partir de ces tracés, on extrait la longueur d'onde dominante $\lambda_m(t)$, et l'amplitude correspondante (en sommant l'aire au dessous du pic), qui correspond à une moyenne spatiale de l'amplitude des déformations.

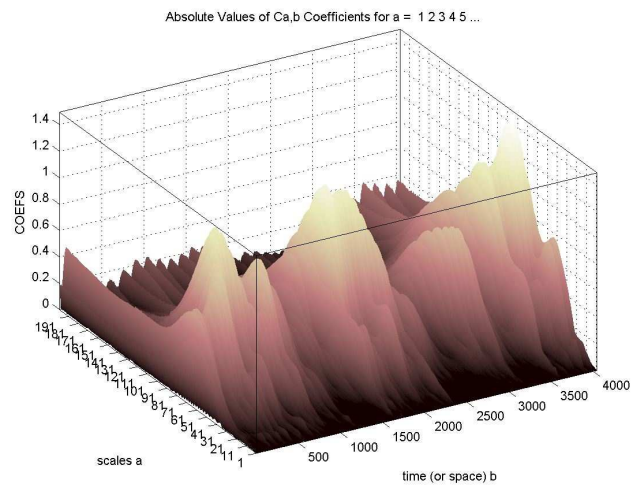
Quelques résultats sont présentés sur les figures 4, pour 2 vitesses à l'impact V_0 en deçà ($V_0 = 3.16$ m/s) et au delà ($V_0 = 3.86$ m/s) de la limite du splash (zones non-colorée et zone bleu-ciel sur la figure 2). La figure 4-a montre la signature du caractère linéaire de l'instabilité : non seulement les perturbations initiales sont indiscernables du bruit, mais en plus l'amplitude moyenne de déformation correspondant à la longueur d'onde dominante croît avec le temps avec une allure plutôt exponentielle. La figure 4-b montre que la longueur d'onde angulaire dominante reste à peu près constante au cours du temps : cela veut dire qu'il y a à peu près le même nombre de doigts au cours du temps. La longueur d'onde (distance moyenne entre 2 doigts) elle, augmente légèrement car le rayon de la nappe annulaire augmente avec le temps, en $\sim (t - t_0)^{1/2}$ [7].

Enfin, si on trace le rapport entre longueur d'onde moyenne $\lambda_m(t)$ et rayon du bourrelet $r_r(t)$ (mesuré directement sur les images), on trouve une évolution assez bruitée, mais finalement proche de la valeur $2\pi\sqrt{2}$ (figure 4-c). Cette valeur correspond à la longueur d'onde de croissance maximale de l'instabilité linéaire de Rayleigh-Plateau [15].

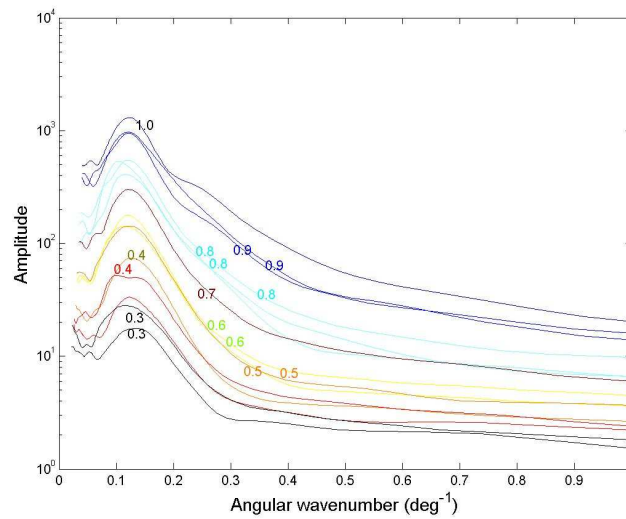
Finalement, il apparaît clairement que la régularité de la couronne d'Edgerton peut s'expliquer par une instabilité sur le bord de la nappe. Que la formation de doigts puisse apparaître sur une nappe non initialement perturbée, et qu'à ce moment là la structure possède une régularité et une longueur d'onde préférentielle, sont des indices forts pour une instabilité linéaire. La croissance exponentielle conforte ces indices, mais elle n'était pas forcément attendue étant donné que la nappe annulaire et le rayon du bourrelet évoluent significativement avec le temps, au moins tant que $t \leq \tau = (\rho R^3 / \gamma)^{1/2}$, entraînant une évolution temporelle du taux de croissance et de la longueur d'onde préférentielle. L'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau semble être un mécanisme tout à fait plausible. La forme des perturbations (pincements variqueux) est aussi attendue dans ce cas.



(a) Profil de déformation (en mm) en fonction de la position angulaire



(b) Transformée en ondelette



(c) Somme de la transformée en ondelette le long de la coordonnée spatiale

Fig.3. (a) Extraction du profil de déformation (en mm) en fonction de la position angulaire. (b) Transformée en ondelette correspondante. (c) Somme de la transformée en ondelette le long de la coordonnée spatiale, pour plusieurs temps après impact t (valeur indiquée près de chaque tracé).

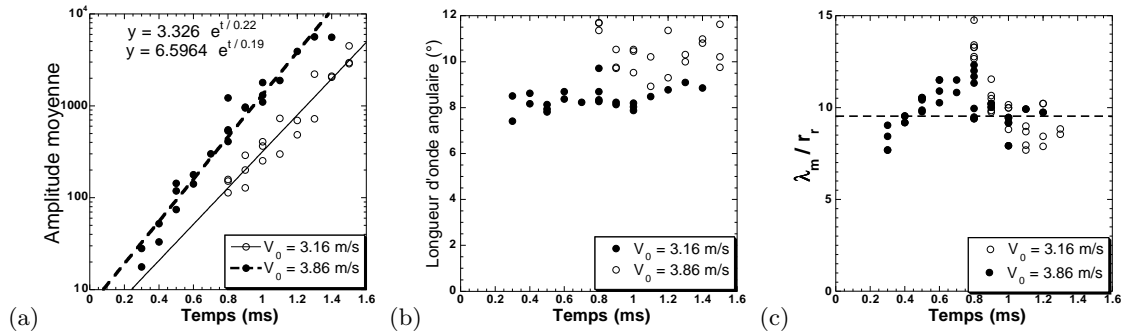


Fig. 4. (a) Amplitude moyenne (unités arbitraires) pour 2 vitesses d'impact, en fonction du temps (graphe Semi-log). (b) Longueur d'onde angulaire moyenne en fonction du temps. (c) Rapport entre la longueur d'onde et le diamètre du bourrelet. En pointillés, la valeur $2\pi\sqrt{2}$ prévue par la théorie de Rayleigh.

Les résultats reportés ici ont utilisé de l'isopropanol de viscosité $\nu=2.5$ cSt, et la tendance à la régularité est encore accentuée en utilisant de l'huile silicone $\nu=5.2$ cSt. Les résultats de cette étude, en même temps qu'une comparaison plus quantitative avec la théorie de Rayleigh-Plateau tenant compte des variations temporelles du système, sont présentées dans un futur article.

Références

1. A. M. WORTHINGTON, *A study of splashes* (London : Longmans) (1908).
2. H. E. EDGERTON, *Stopping time : The photographs of Harold Edgerton* (New York : Abrams) (1977).
3. A. L. YARIN, Drop impact dynamics : Splashing, spreading, receding, bouncing ..., *Annual Reviews in Fluid Mechanics*, **38** 159 (2006).
4. R. L. VANDER WAL, G. M. BERGER & S. D. MOZES, Droplets splashing upon films of the same fluid of various depths, *Experiments in Fluids*, **40** 33 (2006).
5. R.D. DEEGAN, P. BRUNET & J. EGGERS, Complexity of Splashing, *Nonlinearity*, **21**, C1-C11 (2008).
6. D. H. PEREGRINE, *Journal of Fluid Mechanics*, **106** 59 (1981).
7. A. L. YARIN & D. A. WEISS, Impact of drops on solid surfaces : self-similar capillary waves, and splashing as a new type of kinematic discontinuity, *Journal of Fluid Mechanics*, **283** 141 (1995).
8. S. T. THORODDSEN, The ejecta sheet generated by the impact of a drop, *Journal of Fluid Mechanics*, **451** 373 (2002).
9. C. JOSSERAND & S. ZALESKI, Droplet splashing on a thin liquid film, *Physics of Fluids*, **15** 1650 (2003).
10. S. D. HOWISON, J. R. OCKENDON, J. M. OLIVIER, R. PURVIS & F.T. SMITH, Droplet impact on a thin fluid layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **542** 1 (2005).
11. G.I. TAYLOR, The dynamics of thin sheets of fluid iii : Disintegration of fluid sheets, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **253**, 313 (1959).
12. F. E. C. CULICK, Comments on a ruptured soap film, *Journal of Applied Physics*, **31**, 1128 (1960).
13. J. M. FULLANA & S. ZALESKI, Stability of a growing end rim in a liquid sheet of uniform thickness, *Physics of Fluids*, **11**, 952 (1999).
14. D. GUEYFFIER & S. ZALESKI, Formation de digitations lors de l'impact d'une goutte sur un film liquide, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, **326**, 839 (1998).
15. LORD RAYLEIGH, *The theory of sound*, (Macmillan, London, (1894).
16. M. RIEBER & A. FROHN, A numerical study on the mechanism of splashing, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **20**, 455 (1999).
17. I. V. ROISMAN, K. HORVAT & C. TROPEA, Spray impact : Rim transverse instability initiating fingering and splash, and description of a secondary spray, *Physics of Fluids*, **18**, 102104 (2006).
18. G. SUNDERHAUF, H. RASZILLIER & F. DURST, The retraction of the edge of a plane liquid sheet, *Physics of Fluids*, **14**, 198 (2002).

Bifurcation de cycles hétéroclines robustes pour des systèmes invariants par symétrie sphérique avec interaction de modes de degrés $l = 3$ et 4

Pascal Chossat¹ & Philippe Beltrame²

¹ Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, CNRS et UNSA, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02

² Max Planck Institut, Dresde, Allemagne

pascal.chossat@unice.fr

Résumé. L'apparition d'un régime convectif dans une coque sphérique est un problème qui a récemment connu un nouvel intérêt du fait du lancement d'une expérience de convection avec symétrie (presque) sphérique dans la station spatiale internationale (projet GeoFlow). Dans cette expérience le champ de gravité est remplacé par un champ de force central de type électrophorétique. Les contraintes techniques imposent un rapport d'aspect (rapport des rayons des sphères bornant le domaine) voisin de 0.5. Dans le cas le plus petit degré des premiers modes sphériques instables que l'on peut espérer est $l = 3$. D'où l'intérêt d'étudier l'interaction des modes $l, l + 1$ avec $l = 3$, qui peut générer des comportements dynamiques et spatiaux non triviaux tels que des cycles hétéroclines robustes, c'est à dire d'ensembles d'orbites hétéroclines connectant des états stationnaires (ou autres) de façon cyclique et robuste par petites perturbations respectant les symétries du problème. La bifurcation de cycles hétéroclines robustes entre états axisymétriques a été très étudiée notamment dans le cas de l'interaction $l = 1, 2$ [1,2,3]. Cependant ce cas ne peut pas se produire dans l'interaction $l = 3, 4$. Des simulations sur les équations approchant la variété centrale dans ce cas ont montré la présence probable de cycles hétéroclines robustes attractifs connectant des états stationnaires présentant des symétries tétraédrales et cubiques. Une étude détaillée de ce système a montré qu'en effet de tels objets existent pour des ensembles ouverts de valeurs des paramètres. Je présenterai les résultats disponibles et discuterai leur pertinence pour l'expérience GeoFlow et pour la convection classique de Rayleigh-Bénard dans un domaine sphérique.

Abstract. The onset of convection in a spherical shell has recently given rise to some new interest due to the launch of a convection experiment in spherical geometry in the International Space Station (GeoFlow project). In this experiment the gravity field is replaced by a central electrophoretic force field. Technical constraints impose an aspect ratio (inner to outer boundaries radius ratio) close to 0.5. The lowest possible degree of the first unstable spherical modes in this case is $l = 3$. It is therefore interesting to study the $l, l + 1$ mode interaction with $l = 3$, in order to look for non trivial dynamics near onset, in particular robust heteroclinic cycles (sets of heteroclinic orbits connecting several types of equilibria in a cyclic way and which are robust under small perturbations respecting the symmetries of the problem).

1 Introduction

Il est bien connu que les problèmes d'évolution invariants par une action linéaire du groupe $O(3)$ peuvent posséder des *cycles hétéroclines robustes* (qu'on désignera par *CHR*), c'est-à-dire des ensembles invariants composés de points d'équilibre P_1, \dots, P_k tels que la variété instable de P_j est incluse dans la variété stable de $P_{j+1} \pmod k$ d'une façon structurellement stable [5]. En fait cette définition est trop restrictive : pour réaliser un ensemble invariant à la fois structurellement et dynamiquement stable il est souvent nécessaire de considérer des objets formés d'une réunion de cycles, mais par abus de langage on les nommera toujours CHR (généralisés). On démontre l'existence de ces objets par les méthodes locales de bifurcation, sous certaines conditions : 1) la bifurcation de codimension 2 (à deux paramètres) associe des représentations irréductibles de $O(3)$ de degrés l et $l + 1$; 2) les coefficients des termes quadratiques dans les équations réduites à la variété centrale satisfont certaines relations qu'on précisera plus tard. Ces relations sont par exemple (et génériquement) satisfaites dans le cas de la convection de Bénard dans une coque sphérique en auto-gravitation [6]. Dans le cas où $l = 1$, il a été montré [3] que de tels CHR

apparaissent effectivement par bifurcation et connectent des états stationnaires axisymétriques. De plus ces objets peuvent être dynamiquement stables, ce qui permet de les mettre en évidence sur des simulations numériques. D'un point de vue physique, ils sont alors associés à des dynamiques intermittentes entre états metastables.

Un nouvel intérêt s'est récemment manifesté pour le cas où $l = 3$ (interaction de modes de degrés 3 et 4), en relation avec une expérience de l'Agence Spatiale Européenne destinée à être montée dans la Station Spatiale Internationale. Cette expérience, nommée GeoFlow, consiste à réaliser des écoulements convectifs dans une coque sphérique soumise à un gradient de température et à une force diélectrophorétique centraux [8]. Pour des raisons techniques le rapport d'aspect (rapport du rayon intérieur par le rayon extérieur des sphères bornant le domaine fluide) ne peut être inférieur à une valeur proche de 0.5, ce qui entraîne que les premiers modes sphériques instables sont ceux de la représentation irréductible de degré $l = 3$ ou 4. Des simulations numériques dans l'approximation de la variété centrale près du seuil de convection lorsque les modes $l = 3$ et 4 sont proches simultanément de l'instabilité, ont montré un comportement qui suggère la présence d'un CHR attractant impliquant des états stationnaires à symétrie cubique (avec des modes "purs" $l = 4$) et tétraédrale (mariant des modes avec $l = 3$ et 4). Cependant, des simulations directes indiquent qu'en fait cette dynamique se stabilise après quelques temps sur un état à symétrie cubique. On interprète cette contradiction de la façon suivante. Les équations pour les modes "purs" avec $l = 4$ sur la variété centrale possèdent un terme quadratique, donc une bifurcation de type transcritique d'états stationnaires avec symétrie cubique (fait bien connu, [4]). Le coefficient du terme quadratique est suffisamment petit pour permettre à la branche bifurquée sous-critique de présenter un point de retournement. Les solutions "cubiques" deviennent stables au-delà du point de retournement par rapport aux perturbations de modes $l = 4$. Les équations pour les modes $l = 3$ génèrent alors des connexions hétéroclines qui réalisent le CHR observé. Toutefois il est probable que ce retournement de la branche bifurquée se produit au-delà du domaine de validité de l'approximation de la variété centrale, ce qui expliquerait que le comportement intermittent n'est observé, dans les simulations directes, que dans un régime transitoire. Il est connu que ce coefficient quadratique est effectivement proche de 0 dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard, c'est-à-dire lorsque la force centrale de rappel est la gravité [6,11]. Par contre dans le cas de l'expérience GeoFlow, cette force, de nature diélectrophorétique, varie suivant une loi en r^{-5} (au lieu de r^{-3} pour la gravité), et ceci entraîne que le coefficient quadratique n'est généralement pas très proche de 0 (sauf peut être pour des valeurs particulières du nombre de Prandtl).

On présente dans cette communication des résultats sur cette question qui feront l'objet d'un article détaillé (prépublication [7]). On a montré que des CHR (dans un sens généralisé) connectant des états stationnaires à symétrie axisymétrique et cubique entre eux peuvent effectivement bifurquer dans le cas de l'interaction de modes de degrés $l = 3$ et 4. Ces CHR sont observables numériquement (simulations sur la variété centrale), mais en général seuls les états à symétrie cubique sont effectivement approchés par la dynamique. La stabilité asymptotique de ces ensembles invariants fait l'objet d'une étude en cours.

2 Bifurcations avec symétrie sphérique et interaction de modes $l = 3, 4$

2.1 Géométrie de l'interaction $l = 3, 4$ et équations sur la variété centrale

La première étape dans la résolution d'un problème de bifurcation invariant par une action linéaire d'un groupe G compact consiste, une fois identifiée l'action du groupe de symétrie sur l'espace V des modes propres critiques, à déterminer les types d'isotropie de cette représentation et les sous-espaces de points fixes correspondants. Rappelons que le *sous-groupe d'isotropie* d'un point $v \in V$ est $G_v = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$. Les points d'une même G -orbite ont des sous-groupes d'isotropie conjugués, ce qui permet de définir le *type d'isotropie* associé à cette orbite. Pour une représentation de dimension finie d'un groupe compact, il y a un nombre fini de types d'isotropie qui de plus sont partiellement ordonnés par inclusion des sous-groupes d'isotropie. On peut donc construire un *treillis* des types d'isotropie. De plus à chaque sous-groupe d'isotropie (plus généralement à chaque sous-groupe fermé) H de G on associe le *sous-espace de points fixés par H* : $Fix(H) = \{v \in V \mid H \cdot v = v\}$. L'intérêt de cette notion est que ces sous-espaces sont *invariants* par les dynamiques G -équivalentes. Il s'ensuit que l'on peut restreindre la dynamique

à des sous-espaces de points présentant une isotropie donnée (voir [5] pour plus d'informations sur ces concepts et leurs applications aux problèmes de bifurcation).

Dans le cas où $G = O(3)$ et $V = V_3 \oplus V_4$, somme (directe) des représentations irréductibles naturelles de $O(3)$ de degrés resp. 3 et 4, chaque V_l est représenté par la base des fonctions harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta)e^{mi\phi}$, $-l \leq m \leq +l$ (P_l^m sont les polynômes de Legendre associés), de sorte que tout élément $v \in V$ s'écrit

$$v = \sum_{-3}^3 x_j Y_3^j + \sum_{-4}^4 y_k Y_4^k$$

où $x_{-j} = (-1)^j \bar{x}_j$ et $y_{-k} = (-1)^k \bar{y}_k$. L'action de la réflexion antipodale S sur les Y_l^m est triviale lorsque l est paire et agit comme $-Id$ lorsque l est impair. Dans la suite on notera \mathbb{Z}_2^c le groupe engendré par S .

Le diagramme de la figure 1 montre les principaux types d'isotropie pour l'action considérée ci-dessus. Il a été obtenu à partir des informations contenues dans [4]. Seuls les types d'isotropie ayant des sous-espaces de points fixes de dimension inférieure ou égale à 3 sont indiqués (voir le diagramme complet dans [7]). Chaque nombre entre parenthèses indique la dimension pour les sous-groupes d'isotropie de la ligne correspondante. Les notations utilisées sont celles de [4] (voir dans [5] en appendice une table de correspondance avec la notation de Schinfiel). Par exemple \mathbb{O} désigne le groupe octaédral et \mathbb{O}^- est un sous-groupe de $O(3)$ non inclus dans $SO(3)$ mais isomorphe à \mathbb{O} . Les points d'isotropie \mathbb{O}^- ont une symétrie tétraédrale : $\mathbb{O}^- = \mathbb{T} \cup \kappa\mathbb{T}$ où κ est une réflexion/plan. Dans la base ci-dessus, les espaces

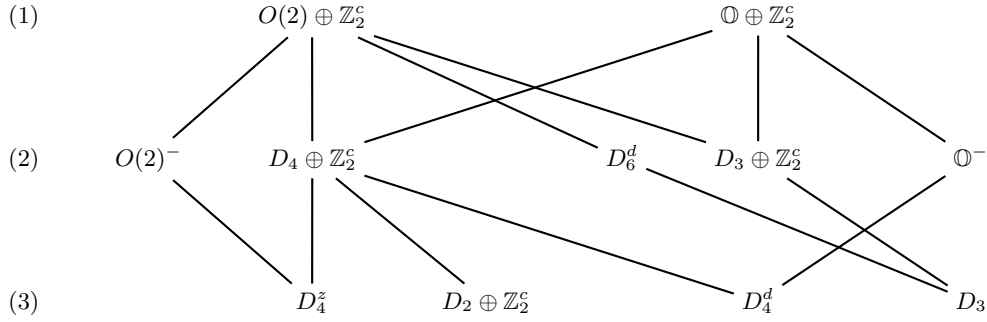


Fig.1. Principaux types d'isotropie.

de points fixes associés à des représentants de ces sous-groupes d'isotropie sont indiqués ci-dessous (les coordonnées non indiquées sont égales à 0 et on pose d'une façon générale $z = z_r + iz_i \in \mathbb{C}$) : Ecrivons

Isotropy H	$Fix(H)$	Isotropy H	$Fix(H)$
$O(2) \oplus \mathbb{Z}_2^c$	y_0	$D_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$	(y_0, y_{2r}, y_{4r})
$\mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^c$	$y_{4r} = \pm \eta y_0$	D_4^d	(x_{2i}, y_0, y_{4r})
$O(2)^-$	(x_0, y_0)	D_3	(x_{3i}, y_0, y_{3r})
$D_4 \oplus \mathbb{Z}_2^c$	(y_0, y_{4r})	D_4^z	(x_0, y_0, y_{4r})
D_6^d	(x_{3r}, y_0)		
$D_3 \oplus \mathbb{Z}_2^c$	(y_0, y_{3r})		
\mathbb{O}^-	$(x_{2i}, y_{4r} = \sqrt{\frac{5}{14}} y_0)$		

Tab.1. Sous-espaces de points fixes pour des représentants des types d'isotropie tels que $\dim Fix(H) \leq 3$.

à présent les équations sur la variété centrale jusqu'aux termes cubiques. Un changement de variables permet d'introduire deux paramètres libres μ_1 et μ_2 qui, dans le contexte de Rayleigh-Bénard, sont des

combinaisons linéaires de la déviation du nombre de Rayleigh à sa valeur critique et du rapport d'aspect à sa valeur critique. Les modes $l = 3$ deviennent instables quand $\mu_1 > 0$ et les modes $l = 4$ deviennent instables quand $\mu_2 > 0$:

$$\dot{x}_j = \mu_1 x_j + \beta Q_j^{(1)}(x_{-3}, \dots, x_3, y_{-4}, \dots, y_4) + \gamma_1 \|X\|^2 x_j + \gamma_2 C_j^{(1)}(x_{-3}, \dots, x_3) \quad (1)$$

$$\dot{y}_k = \mu_2 y_k + b Q_k^{(2)}(x_{-3}, \dots, x_3) + c Q_k^{(3)}(y_{-4}, \dots, y_4) + d_1 \|Y\|^2 y_k + d_2 C_k^{(2)}(y_{-4}, \dots, y_4) \quad (2)$$

où les Q désignent des termes quadratiques et les C des termes cubiques. Ces termes sont explicités par ailleurs [7]. Dans le contexte de la convection de Rayleigh-Bénard dans l'approximation de Boussinesq, les coefficients satisfont des relations qui, compte-tenu de la normalisation adoptée dans l'expression de ces termes, sont indiquées dans les hypothèses suivantes [2] :

Hypothèses (H) :

- (i) $b \sim -2\beta$. On peut toujours supposer que $\beta = -1$ après un changement d'échelle adapté.
- (ii) $\gamma_1 + 20\gamma_2 < 0$,
- (iii) $d_1 + d_2 < 0$, $j = 1, \dots, 4$,
- (iv) $c \sim 0$ sera considéré comme un paramètre ($c = 0$ lorsque les conditions aux bords sont identiques sur la sphère interne et sur la sphère externe). Dans la suite on se restreindra au cas $c \geq 0$.

2.2 Branches d'équilibres primaires

Comme on peut le voir sur le diagramme des types d'isotropie, il existe deux types dont les sous-espaces de points fixes sont de dimension 1, par conséquent pour lesquels le "lemme de bifurcation équivariante" [10] s'applique : $O(2) \oplus \mathbb{Z}_2^2$ et $\mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^2$. Par conséquent deux branches de solutions axisymétriques et à symétrie cubique bifurquent génériquement à partir de la solution triviale. On les note respectivement α (axisymétrique) et β (cubique). Les solutions correspondantes sont des modes $l = 4$ purs comme le montre la table ci-dessus (la présence du groupe \mathbb{Z}_2^2 indique que les modes $l = 3$ est interdite). Ces branches sont déterminées par les relations suivantes :

$$0 = \mu_2 + 9cy_0 + (d_1 + d_2)y_0^2 \quad (\text{solutions } \alpha) \quad (3)$$

$$0 = \mu_2 + 14cy_0 + \left(\frac{12}{7}d_1 - \frac{16}{49}d_2\right)y_0^2 \quad \text{et} \quad y_{4r} = \sqrt{\frac{5}{14}}y_0 \quad (\text{solutions } \beta) \quad (4)$$

Elles sont *transcritiques* lorsque le coefficient quadratique $c \neq 0$, mais un point de retournement d'autant plus proche du point de bifurcation que c est proche de 0 existe. Lorsque $\mu_2 > \mu'_2 > 0$ (où μ'_2 est une valeur qui s'annule quand $c = 0$) il y a donc deux paires de solutions α_{\pm} et β_{\pm} , mais ces paires ne s'échangent pas par symétrie.

La stabilité de ces solutions dépend bien sûr des valeurs propres de la matrice jacobienne du système (1)-(2) calculé en ces points. La partie principale de ces valeurs propres est indiquée dans [7].

3 La bifurcation de cycles hétéroclines robustes

On ne considère ici que des cycles connectant des solutions de types α et/ou β . Des cycles faisant intervenir des solutions bifurquées d'isotropie plus faible peuvent aussi exister comme on le montre dans [7]. La situation décrite dans cette communication est cependant "basique" dans le sens où les autres cas sont obtenus à partir de celui-ci par bifurcation secondaire d'autres types d'états bifurqués (équilibres ou cycles limites). La stratégie consiste à rechercher des orbites hétéroclines entre points d'équilibre réalisant des connexions structurellement stables (par perturbations $O(3)$ équivariantes), par exemple de type "col-puit", dans des sous-espaces de points fixes $Fix(H)$. L'existence d'un ensemble cyclique de connexions de ce type réalise un CHR. Dans la suite on notera $\mathcal{O}\alpha$, $\mathcal{O}\beta$, les $O(3)$ orbites de α et β .

3.1 Connexions hétéroclines robustes dans le sous-espace invariant des modes $l = 4$

Le sous-espace $Fix(\mathbb{Z}_2^c) = \{x_j = 0, j = -3, \dots, 3\}$ contient les modes avec $l = 4$ "purs". Lorsque le coefficient quadratique c est non nul, les seules solutions qui bifurquent dans cet espace sont celles de type α et β . Lorsque c est un paramètre voisin de 0, l'étude du déploiement de la singularité de codimension 2 (paramètres μ_2 et c) permet de décrire le branchement secondaire ou tertiaire de solutions d'équilibre d'isotropie $D_m \oplus \mathbb{Z}_2^c$ avec $m = 2, 3, 4$ [9]. Cependant lorsque le coefficient d_2 est suffisamment petit (en valeur absolue), ces solutions secondaires n'existent pas et les solutions β_+ (c'est-à-dire pour lesquelles $y_0 > 0$ dans (3)) sont stables dans ce sous-espace (stabilité au sens orbital puisque les solutions β forment des $O(3)$ -orbites de dimension 3). On peut alors montrer, sous les hypothèses (H), que dans $Fix(\mathbb{Z}_2^c)$, toutes les trajectoires instables des équilibres de type β_- , α_- et α_+ sont des orbites hétéroclines robustes dont un sous-ensemble ouvert et dense se connecte sur les équilibres de type β_+ dans $Fix(\mathbb{Z}_2^c)$, et le reste se connecte sur des équilibres de types α_{\pm} . Plus précisément on peut symboliser ces connexions et leurs types d'isotropie comme suit :

$\mathcal{O}\beta_- \rightarrow \mathcal{O}\alpha_- : D_4 \oplus \mathbb{Z}_2^c$, $\mathcal{O}\beta_- \rightarrow \mathcal{O}\alpha_+ : D_3 \oplus \mathbb{Z}_2^c$, $\mathcal{O}\beta_- \rightarrow \mathcal{O}\beta_+ : \mathbb{Z}_2^c$, $\mathcal{O}\alpha_- \rightarrow \mathcal{O}\beta_+ : D_2 \oplus \mathbb{Z}_2^c$ et $\mathcal{O}\alpha_+ \rightarrow \mathcal{O}\beta_+ : D_4 \oplus \mathbb{Z}_2^c$.

3.2 Connexions hétéroclines robustes faisant intervenir des modes $l = 3$

On peut montrer l'existence de connexions de type "col-puit" : $\beta_+ \rightarrow \beta_-$, dans le plan $Fix(\mathbb{O}^-)$, sous les hypothèses (H) et lorsque μ_1 est suffisamment proche de 0. On peut montrer en outre qu'il existe un intervalle ouvert dans le demi-axe $\mu_1 < 0$, tel que lorsque μ_1 appartient à cet intervalle, ces connexions existent, mais aussi une variété de dimension 4 de connexions robustes : $\alpha_+ \rightarrow \mathcal{O}\beta_+$ dans l'espace de dimension 5 $Fix(\mathbb{Z}_4^-)$. Toutes les autres directions propres des équilibres de type α_{\pm} et β_{\pm} le long des modes $l = 3$ sont stables. La figure ci-dessous (où $\tilde{\beta}_+$ est une copie par une rotation d'angle $\pi/4$ de β_+), montre ces connexions dans le sous-espace de dimension 3 $Fix(D_4^d) \subset Fix(\mathbb{Z}_4^-)$.

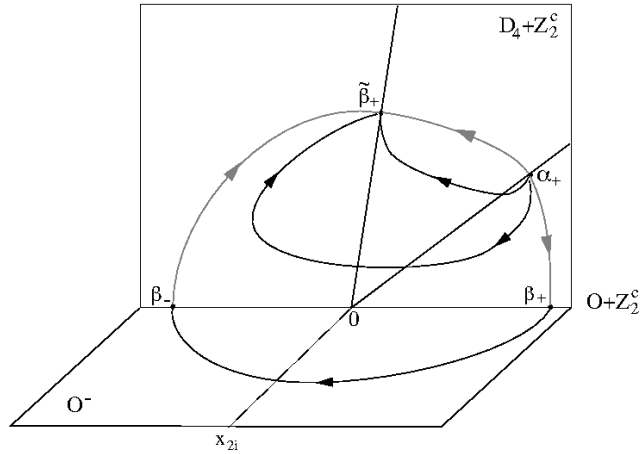
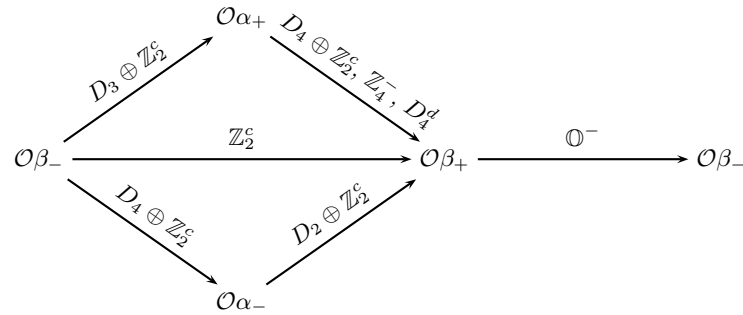


Fig.2. Connexions hétéroclines dans $Fix(D_4^d) = Fix(\mathbb{O}^-) + Fix(\mathbb{O} \oplus \mathbb{Z}_2^c)$

3.3 Le cycle hétérocline robuste

En rassemblant les résultats des deux paragraphes précédents, on obtient, pour un ensemble ouvert de valeurs de paramètres du problème, un CHR qu'on peut schématiser comme ci-dessous (où sont indiqués les types d'isotropie des connexions).



D'autres configurations sont possibles, voir [7] pour les détails. Les simulations numériques sur le système (1)-(2) confirment l'existence de ce CHR dont les conditions de stabilité (asymptotique) restent à étudier.

Références

1. D. ARMBRUSTER & P. CHOSSAT, Heteroclinic orbits in a spherically invariant system, *Physica D*, **50** 155-176, (1991).
2. P. CHOSSAT & F. GUYARD, Heteroclinic cycles in bifurcation problems with $O(3)$ symmetry, *Journal of Nonlinear Science*, **6** 201-238, (1996).
3. P. CHOSSAT, F. GUYARD & R. LAUTERBACH, Generalized heteroclinic cycles in spherically invariant systems and their perturbations, *Journal of Nonlinear Science*, **9**, 479-524 (1999).
4. P. CHOSSAT, R. LAUTERBACH & I. MELBOURNE, Steady-State bifurcation with $O(3)$ -symmetry, *Archive for Rational Mechanics Anal.*, **113**, 313-376, (1990).
5. P. CHOSSAT & R. LAUTERBACH, Equivariant bifurcation theory and its applications, *Advanced Series in Nonlinear Dynamics* **15**, World Scientific, Singapur (2000).
6. P. CHOSSAT, The bifurcation of heteroclinic cycles in systems of hydrodynamical type, *Journal on Continuous, Discrete and Impulsive System A*, **8** (4) 575-590, (2001).
7. P. CHOSSAT & P. BELTRAME, Bifurcation of robust heteroclinic cycles in spherically invariant systems with $l = 3, 4$ mode interaction, *Preprint*.
8. C. EGBERS, W. BEYER, A. BONHAGE, R. HOLLERBACH & P. BELTRAME, The geoflow-experiment on ISS (part I) : Experimental preparation and design of laboratory testing hardware, *Advances in Space Research*, **32** (2), 171-180, (2003).
9. C. GEIGER, G. DANGELMAYR, J.D. RODRIGUEZ & W. GUTTINGER, Symmetry breaking bifurcations in spherical Benard convection. I : Results from singularity theory, *Fields Institute Communications* (American Mathematical Society), **5**, 225-237, (1993).
10. M. GOLUBITSKY, I. STEWART & D. SCHAEFFER, Singularities and groups in bifurcation theory II, *Applied Mathematics in Science*, **69**, Springer Verlag (1988).
11. J.D. RODRIGUEZ, C. GEIGER, G. DANGELMAYR & W. GUTTINGER, Symmetry breaking bifurcations in spherical Benard convection. II : Numerical results, *Fields Institute Communications* (American Mathematical Society), **5**, 239-253, (1996).

Elasticité des nœuds

Nicolas Clauvelin¹, Basile Audoly², & Sébastien Neukirch²

¹ UPMC Univ Paris 06 & CNRS, UMR 7190, Institut Jean le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France

² CNRS & UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France
ncpub@lmm.jussieu.fr

Résumé. Nous présentons ici un modèle permettant de calculer la réponse mécanique et l'équilibre élastique d'une tige nouée dans le cas d'un nœud de trèfle ouvert. Dans la limite de faibles force de tension appliquées les équations de Kirchhoff en présence de contact de la tige avec elle même sont résolues par une méthode de développement asymptotique. Les prédictions sur la géométrie du nœud sont confrontées à des mesures expérimentales.

Abstract. We study the mechanical response of elastic rods bent into open knots, with focusing on the case of trefoil topology. The limit of a small applied tensile force is studied both analytically and experimentally : the Kirchhoff equations with self-contact are solved by means of matched asymptotic expansions ; predictions on the geometrical properties are compared to experiments.

1 Introduction

Les nœuds tiennent une place importante dans le domaine de la navigation, et les marins connaissent depuis longtemps un phénomène qui leur est associé : un nœud sur une corde diminue sa résistance à la traction [1]. Ce problème de mécanique n'a pas encore reçu à ce jour d'explication théorique complète, et plus généralement les propriétés mécaniques et élastiques des nœuds sont encore mal comprises. Longtemps considéré comme un sujet mathématique, avec notamment le problème des nœuds idéaux [2], les nœuds sont aujourd'hui au coeur de plusieurs faits scientifiques, particulièrement dans le domaine des filaments biologiques et des polymères. Il était ainsi connu qu'au-delà d'une certaine longueur un polymère peut adopter une conformation nouée de manière spontanée [3]. Plus récemment des expérimentateurs ont réussi dans le cadre d'expérience à molécule unique à nouer une molécule d'ADN [4], tandis que d'autres ont noué des filaments micrométriques de silice dans le but d'étudier la propagation d'un signal lumineux [5]. En complément de ces succès expérimentaux une récente étude approfondie de la géométrie des protéines a permis d'en recenser 273 ayant une configuration nouée, sans toutefois pouvoir clairement préciser la fonction biologique des nœuds [6,7].

Bien que mal compris le processus de nouage d'un filament a été le sujet de nombreux travaux. Ainsi le cas des polymères a été étudiées au moyen d'approches basées sur des calculs de dynamique moléculaire ou de type *ab-initio* [8]. Les outils de la physique statistique ont aussi été utilisés, principalement dans le cadre de simulations de type Monte-Carlo pour expliquer la localisation d'un nœud sur un filament soumis à l'agitation thermique [9]. Des modèles géométriques ont également été proposés pour expliquer les propriétés des nœuds [10].

Nous présentons ici un modèle permettant de calculer la configuration d'équilibre d'un nœud en nous basant sur la théorie des tiges élastiques. Cette présentation sera illustrée à travers l'étude d'un nœud simple (*i.e.* nœud de trèfle), mais le modèle peut s'appliquer de manière générale à tout type de nœud, et permet d'en calculer la réponse mécanique ainsi que la forme précise. Dans une première partie nous introduirons les hypothèses et les équations du modèle, pour ensuite dans une seconde partie présenter un schéma de résolution. Enfin nous confronterons les prédictions de notre modèle à des mesures expérimentales afin de vérifier la validité de nos résultats.

2 Modèle

On considère une tige élastique isotrope de longueur infinie, de section circulaire de rayon h , nouée en nœud de trèfle ouvert comme sur la Fig.1. La rigidité de courbure de la tige est définie par EI , avec E le coefficient de Poisson et $I = \pi h^4/4$ le moment d'inertie. Les extrémités de la tige sont soumises à des forces de tension de module T , celles-ci étant alignées selon l'axe z , qui est définie par la direction des parties terminales de la tige à l'infini.

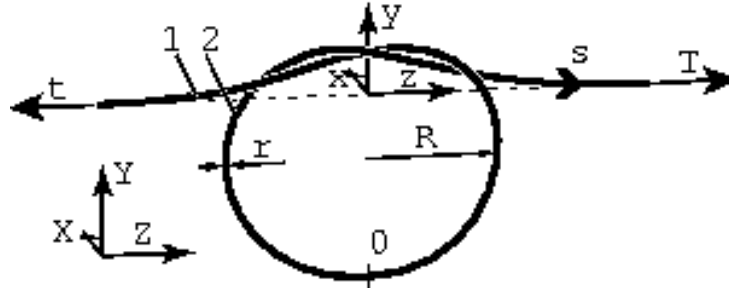


Fig.1. Géométrie du nœud de trèfle ouvert sous tension

L'équilibre élastique de la tige, composée d'un matériau élastique supposé linéaire, est obtenu en résolvant les équations de Kirchhoff, qui s'écrivent pour une tige à section circulaire [11] :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t} \quad \mathbf{t}' = \frac{\mathbf{M}}{EI} \times \mathbf{t} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{N} \times \mathbf{t} \quad \mathbf{N}' = -\mathbf{p} \quad (2)$$

avec s l'abscisse curviligne le long de la tige, $\mathbf{t}(s)$ la tangente à la ligne centrale repérée par $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{M}(s)$ le moment interne, $\mathbf{N}(s)$ la force interne, et $\mathbf{p}(s)$ la pression de contact (qui est une force par unité de longueur), les dérivées étant prises par rapport à l'abscisse curviligne.

La principale difficulté du problème réside dans la prise en compte de la contrainte d'impénétrabilité qui s'écrit :

$$|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_2)| \geq 2h \quad (3)$$

Cette contrainte est valable pour tout couple (s_1, s_2) tel que la quantité $|s_1 - s_2|/h$ soit suffisamment grande pour exclure de la vérification les *plus proches voisins*, ou plus précisément pour ne pas prendre en compte le caractère continu de la tige. Le contact de la tige sur elle-même reste localisé dans la zone en tresse, schématisée sur la Fig. 1, si l'on considère des valeurs de h suffisamment petites [13]. Nous séparerons donc dans la suite de l'exposé le nœud en deux domaines : un domaine intérieur qui correspond à la tresse, et un domaine extérieur qui regroupe la boucle et les parties terminales. L'intérêt du problème est en grande partie dans la caractérisation du contact dans la tresse, qui requiert la connaissance de la fonction $\mathbf{p}(s)$ d'une part, mais aussi de la topologie du contact d'autre part. Or ces deux données sont dépendantes l'une de l'autre, et de plus la topologie du contact (étendu, ponctuel, d'un seul tenant ou non) n'est pas connue à l'avance [12].

Il est utile de remarquer à ce stade qu'à partir des Eq. (1,2) on montre aisément que la quantité $\mathbf{M} \cdot \mathbf{t}$, qui correspond au moment de torsion, est constante le long de la tige. Les extrémités étant libres de toute rotation selon l'axe z le moment de torsion est nul dans toute la tige, et cela implique que la torsion matérielle est elle aussi nulle.

Ce modèle s'applique bien entendu à des tiges *fin*es, c'est à dire pour des valeurs de h petites, ce qui permet de s'assurer que le contact reste localisé. De même on considérera uniquement de faibles forces de tension aux extrémités, ce qui revient à considérer des nœuds *lâches*, c'est-à-dire tels que la longueur de tige dans la boucle soit grande devant h . Ces limitations se formulent plus aisément si l'on procède à l'adimensionnement des équations en utilisant comme longueur caractéristique le rayon de la boucle

(définie précisément comme la longueur prise dans la boucle divisée par 2π) notée R . En utilisant alors la relation (3) on obtient la condition $h/R \ll 1$, et on introduit donc comme quantité $\epsilon = (h/R)^{1/2}$ qui va jouer le rôle de petit paramètre du problème. Ainsi les limites de validité du modèle conduisent simplement à considérer des nœuds tels que $\epsilon \ll 1$.

3 Solution

La résolution du problème va utiliser un raisonnement de couche limite, légitimé par le fait que le domaine intérieur est d'ordre ϵ (pour $\epsilon = 0$ la tresse se réduit à un point), tandis que le domaine extérieur subsiste à l'ordre zéro en ϵ . Nous allons donc calculer dans un premier temps les solutions du domaine extérieur selon une méthode perturbative, et ensuite nous calculerons la solution du domaine intérieur. Il faudra alors procéder au raccordement de ces différentes solutions pour obtenir la solution générale des équations de Kirchhoff dans le cas du nœud de trèfle.

3.1 Domaine extérieur

Dans un premier temps considérons le cas d'une tige d'épaisseur nulle, c'est à dire $\epsilon = 0$. Dans ce cas la tresse se ramène à un point singulier, la boucle à un cercle et les parties terminales à des demi-droites. On a alors une solution de tige circulaire pour la boucle : $\mathbf{t} = \sin(s/R)\mathbf{e}_y - \cos(s/R)\mathbf{e}_z$, $\mathbf{M} = (EI/R)\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Tandis que pour les parties terminales on a une solution de tige droite définie par : $\mathbf{t} = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, et $\mathbf{N} = \mathbf{T}$. On notera que la solution de boucle pour $\epsilon = 0$ fait apparaître la longueur R ce qui montre donc que cette quantité est d'ordre zéro en ϵ . De plus il est aisé de montrer qu'en minimisant l'énergie totale, définie comme la somme de l'énergie de déformation élastique et du travail des forces de tension, on obtient comme relation[4] :

$$R^2 = \frac{EI}{2T} \quad (4)$$

On va maintenant perturber la solution obtenue pour $\epsilon = 0$ à l'ordre 1 en ϵ . Pour les parties terminales la linéarisation des Eq. (1,2) autour de la solution de tige droite amène à considérer des corrections pour la ligne centrale de la forme $\exp(-|z|\sqrt{T/EI})$, comme illustrée sur la Fig. 2. Dans le cas de la boucle nous ne détaillerons pas la forme des corrections obtenues. Toutefois il est intéressant de noter que celle-ci reste contenue dans un plan, lequel s'obtient par une rotation d'ordre ϵ du plan (x, z) autour de l'axe y . La solution ainsi obtenue présente une ouverture au sommet de la boucle afin de pouvoir se raccorder à la solution du domaine intérieur (Fig. 2).

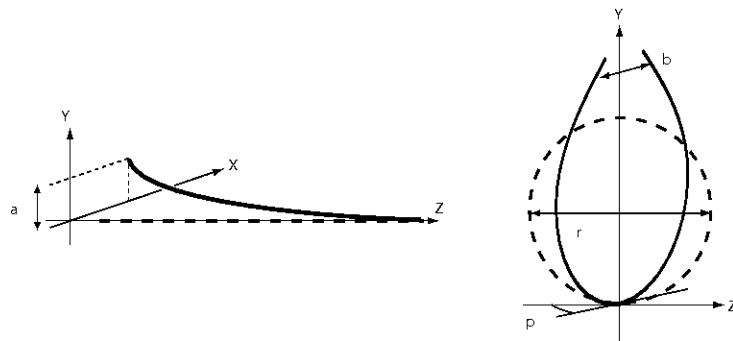


Fig.2. Géométrie simplifiée des parties terminales et de la boucle avec la perturbation d'ordre ϵ . y_0 est la correction selon l'axe y pour les parties terminales, l_0 est l'ouverture de la boucle qui permet de tenir compte de l'extension de la tresse, et θ_0 est l'angle du plan contenant la boucle par rapport au plan (x, z) .

Les solutions du domaine extérieur sont donc exprimées en fonction de paramètres d'ordre 1 en ϵ , et c'est lors du raccordement avec le domaine intérieur que nous pourrions déterminer ces paramètres.

3.2 Domaine intérieur

Il est facile de montrer que les solutions du domaine intérieur sont au minimum d'ordre 1 en ϵ . En effet le raccordement entre la boucle et la tresse implique la continuité de la pente de la ligne centrale (par rapport à l'axe z), or dans la tresse la pente est proportionnelle à h/l , où l est l'extension de la tresse sur l'axe z , tandis que en sortie de boucle elle est proportionnelle à l/R . On obtient donc comme loi d'échelle $l \sim \sqrt{hR}$ ou encore $l \sim \epsilon R$, ce qui montre que l'extension de la tresse est une quantité d'ordre 1. De plus les déplacements transverses dans la tresse seront proportionnels à h , c'est à dire à $\epsilon^2 R$, ce qui montre donc que la solution du domaine intérieur est d'ordre 2 en ϵ pour ses composantes x et y . Ainsi pour des valeurs de h raisonnables on peut négliger les non-linéarités géométriques dans la tresse, et dès lors les Eq. (1,2) s'écrivent pour le brin "a", en notant $\mathbf{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$:

$$EI x_a'''' = p_a^x, \quad EI y_a'''' = p_a^y, \quad z_a' = 1 \quad (5)$$

où, en considérant le contact sans friction, $p_a^x = |\mathbf{p}|(x_b - x_a)/(2h)$ et $p_a^y = |\mathbf{p}|(y_b - y_a)/(2h)$. Les équations pour le brin "b" sont identiques avec : $p_b^x = -p_a^x$ et $p_b^y = -p_a^y$.

La linéarité des Eq. (5) permet de séparer le problème pour le domaine intérieur en un problème *moyen* et un problème *différence* en introduisant les nouvelles variables : $\langle \mathbf{r}(s) \rangle = (\mathbf{r}_a(s) + \mathbf{r}_b(s))/2$ pour la solution moyenne, et $\tilde{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_b(s) - \mathbf{r}_a(s))/2$ pour la solution différence.

Les équations du problème moyen s'écrivent simplement à partir des Eq. (5) en remarquant que les forces de contact s'annulent entre elles, et il vient : $EI \langle x \rangle'''' = 0$ et $EI \langle y \rangle'''' = 0$. La condition de raccord pour la solution moyenne est simplement exprimée par la continuité du moment qui impose $\langle x \rangle'' = 1/(2R)$ du côté de la boucle et du côté des parties terminales. La solution est alors triviale puisqu'il s'agit d'un arc de cercle de rayon $2R$ à un mouvement rigide près (translation et rotation) pour pouvoir raccorder les deux domaines.

Le problème différence contient l'information sur le contact entre les deux brins de la tresse. Les équations sont alors dans ce cas : $EI \tilde{x}'''' = |\mathbf{p}|\tilde{x}/h$ et $EI \tilde{y}'''' = |\mathbf{p}|\tilde{y}/h$. L'adimensionnement de ces équations conduit à définir de nouvelles variables (en accord avec les lois d'échelle précédemment obtenues) :

$$u = \frac{x_b - x_a}{2h}, \quad v = \frac{y_b - y_a}{2h}, \quad w = \frac{z}{\sqrt{2hR}} \quad (6)$$

En notant que dans la tresse $s = z$ on remarque que le problème est alors plan, puisqu'il s'agit de déterminer les fonctions $u(w)$ et $v(w)$. La condition d'impenétrabilité, Eq. (3), se réécrit alors sous la forme :

$$u^2(w) + v^2(w) \geq 1, \quad \forall w \quad (7)$$

Au final le problème différence se ramène à la recherche d'une solution s'enroulant autour d'un cylindre fixe de rayon 1, sous l'action d'un moment \mathbf{Q} appliqué aux deux extrémités afin de tenir compte du raccordement avec la boucle comme indiqué sur la Fig. 3(a). On ajoute également comme contrainte que la solution doit faire un nombre de tours fixés, n^* , autour du cylindre, avec $n^* = 1.5$ dans le cas du nœud de trèfle (on pourrait rechercher un nœud avec $n^* = 2.5$ par exemple, ce qui donnerait une géométrie de type 5₁).

Les équations de Kirchhoff pouvant être obtenues à l'aide du principe variationnel, on choisit de résoudre le problème différence par minimisation contrainte – pour garantir l'impenétrabilité – de l'énergie en cherchant $u(w)$ et $v(w)$ comme des fonctions minimisantes l'énergie élastique définie par :

$$E = \int_{-W}^{+W} \frac{u'^2(w) + v'^2(w)}{2} dw + v'(W) + v'(-W) \quad (8)$$

où W est une longueur prise suffisamment grande au-delà du dernier point de contact afin de garantir l'indépendance du résultat par rapport à cette variable. Il est intéressant de noter que aucun paramètre n'intervient dans la formulation du problème différence, et que donc la solution sera *universelle*.

Le premier résultat est le lieu de contact, indiqué sur la Fig. 3, qui présente une zone étendue au centre de la tresse et un point de contact isolé en sortie de tresse. On remarquera également la présence d'un

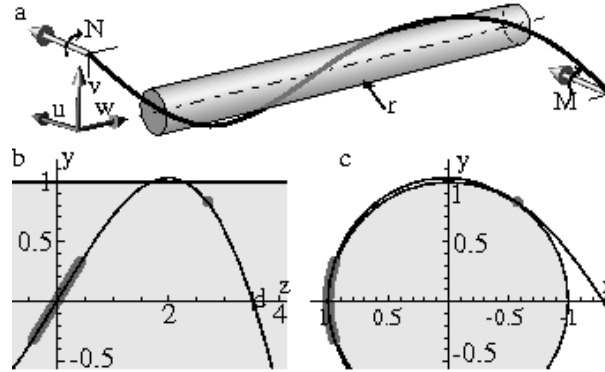


Fig.3. Problème différence pour la tresse. (a) Géométrie de la tige différence enroulée autour du cylindre. (b) Solution projetée dans le plan (v, w) et (c) dans le plan (u, v) perpendiculaire à l'axe du cylindre. Les zones grises épaissies correspondent aux zones de contact. On notera que seulement une demi-solution est représentée compte-tenu du fait que l'on cherche des solutions symétriques.

décollement entre le point isolé et la fin de la zone de contact étendue, lequel a une amplitude maximale égale à $0.043 h$. En prenant comme définition pour la longueur de tresse la longueur entre les deux points isolés de contact on a naturellement en unités adimensionnées $l = 2w_c$, ce qui donne en unités physiques :

$$l = 2w_c \sqrt{2hR} \quad (9)$$

avec $w_c = 3.506$.

Le raccord de la solution pour le domaine intérieur avec celles de la boucle et des parties terminales permet de relier l'ensemble des corrections d'ordre ϵ introduites aux résultats numériques provenant de la tresse. On a ainsi pour l'angle du plan contenant la boucle au premier ordre en ϵ la relation : $\theta_0 = 1.24 \sqrt{h/R}$. De la même manière on peut déterminer l'ensemble des paramètres grâce aux résultats du domaine intérieur.

4 Discussion

La solution générale que l'on vient d'obtenir décrit l'équilibre élastique d'un filament de rayon h noué à la manière d'un nœud de trèfle ouvert, et soumis à une tension T en chacune de ses extrémités. Cette solution est construite en utilisant un développement perturbatif à l'ordre 1 selon ϵ dans le cadre d'une théorie de couche limite. En conséquence, toute mesure expérimentale doit être effectuée de manière à satisfaire au mieux la condition $\epsilon \ll 1$ ainsi que le postulat d'un contact sans friction dans la zone de tresse. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser des câbles de Nitinol (alliage à mémoire de forme superélastique), afin de mesurer pour différentes valeurs du rayon de la tige h et de la tension imposée T la longueur de tresse l . La comparaison entre notre prédiction théorique, Eq. (9), indépendante de tout paramètre ajustable, et ces mesures est présentée en Fig. 4. L'accord entre le modèle et l'expérience est très satisfaisant.

La méthode exposée dans cet article est générale et peut être appliquée à d'autres topologies de nœud, comme par exemple un nœud ouvert de type 5_1 . A ce sujet on pourra se reporter à la Fig. 4 de [14] qui présente les résultats relatifs à la longueur de tresse pour un nœud de type 5_1 . De même la Fig. 5 de [14] illustre une extension du modèle au cas d'un contact avec de la friction.

Le modèle ici présenté constitue un premier pas pour comprendre la mécanique des nœuds, et les limitations qu'il présente ne permettent pas par exemple d'expliquer le nouage d'un filament lorsque le nœud devient serré ($\epsilon \lesssim 1$). Dans ce type de situation de nombreuses questions sont encore débattues à l'heure actuelle, comme par exemple le profil de courbure dans le nœud mais aussi l'état des contraintes dans la tige (directement lié à la résistance en traction du nœud). Toutefois en restant dans le cadre de la limite $\epsilon \ll 1$ d'autres phénomènes restent encore à expliquer comme la réponse d'un filament noué à un

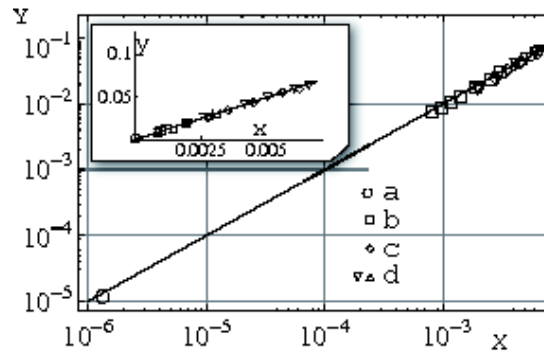


Fig.4. Longueur de la tresse en fonction de la longueur \sqrt{hR} en coordonnées log-log. L'insert représente les mêmes données en coordonnées usuelles. Tous les points ont été obtenus à partir de câbles de Nitinol, excepté le point isolé dans le coin inférieur gauche tiré de [5] La droite représente la prédiction théorique, Eq. 9, qui est une fonction *universelle*.

moment de torsion imposé à ses extrémités, situation qui donne vraisemblablement lieu à des instabilités de forme.

Références

1. A. STASIAK, A. DOBAY, J. DUBOCHET, G. DIETLER, H. E. GAUB, H. CLAUSEN-SCHAUMANN, M. BEYER, M. RIEF & M. GRANDBOIS, Knotted fishing line, covalent bonds, and breaking points, *Science*, **286** (5437), 11a, (1999).
2. A. STASIAK, V. KATRITCH & L. H. KAUFFMAN (eds.), *Ideal knots*, World Scientific, Singapore, (1998).
3. D. W. SUMNERS & S G WHITTINGTON, Knots in self-avoiding walks, *Journal of Physics A*, **21** (7), 1689–1694 (1988).
4. Y. ARAI, R. YASUDA, K.-I. AKASHI, Y. HARADA, H. MIYATA, K. KINOSITA & H. ITOH, Tying a molecular knot with optical tweezers, *Nature*, **399** (6735), 446–448, (1999).
5. L. TONG, R. R. GATTASS, J. B. ASHCOM, S. HE, J. LOU, M. SHEN, I. MAXWELL & E. MAZUR, Subwavelength-diameter silica wires for low-loss optical wave guiding, *Nature*, **426** (6968), 816–819 (2003).
6. M. L. MANSFIELD, Are there knots in proteins?, *Nature Structural & Molecular Biology*, **1**, 213–214, (1994).
7. P. VIRNAU, L. A. MIRNY & M. KARDAR, Intricate knots in proteins : Function and evolution, *PLoS Computational Biology*, **2** (9), 1074–1079 (2006).
8. A. M. SAITTA, PAUL D. SOPER, E. WASSERMAN & MICHAEL L. KLEIN, Influence of a knot on the strength of a polymer strand, *Nature*, **399** (6731), 46–48, (1999).
9. O. FARAGO, Y. KANTOR & M. KARDAR, Pulling knotted polymers, *Europhysics Letters*, **60** (1), 53–59 (2002).
10. P. PIERANSKI, S. PRZYBYL & A. STASIAK, Tight open knots, *The European Physical Journal E*, **6** (2), 123–128 (2001).
11. L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *Theory of Elasticity (course of theoretical physics)*, 2nd ed., Pergamon Press, 1981.
12. H. VON DER MOSEL, Elastic knots in euclidean 3-space, *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, **16** (2), 137–166 (1999).
13. R. GALLOTTI & O. PIERRE-LOUIS, Stiff knots, *Physical Review E*, **75** (3), 031801 (2007).
14. B. AUDOLY, N. CLAUVELIN & S. NEUKIRCH, Elastic knots, *Physical Review Letters*, **99** (16), 164301 (2007).

Dégazage intermittent à travers une colonne de fluide complexe.

Thibaut Divoux¹, Valérie Vidal¹, Francisco Melo² & Jean-Christophe Gémard¹

¹ Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

² Laboratorio de Física No Lineal and Center for Advanced Interdisciplinary Research in Materials (CIMAT), Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile (USACH), Avenida Ecuador, 3493, Santiago, Chile
thibaut.divoux@ens-lyon.fr

Résumé. Nous proposons ici une synthèse de plusieurs résultats expérimentaux ayant trait au passage d'un gaz à travers une couche de fluide non-newtonien ainsi qu'aux propriétés acoustiques de l'explosion des bulles à la surface libre. Alors que de l'air est injecté à débit constant à la base d'une colonne de fluide, on observe une alternance spontanée entre deux régimes : soit les bulles émises au bas de la colonne remontent et explosent à la surface quasi-indépendamment les unes des autres, soit elles coalescent pour former un canal traversant le système de part en part, ce qui conduit à une émission quasi-continue de gaz. Nous présentons une étude de l'intermittence entre ces deux régimes et, par ailleurs, une étude acoustique de l'explosion d'une bulle unique. Nous détaillons dans quelle mesure les résultats de cette étude, dans laquelle les propriétés non-newtoniennes du fluide jouent un rôle fondamental, pourraient s'avérer pertinents pour expliquer des phénomènes volcaniques encore mal compris.

Abstract. We summarize an experimental study on air bubbles rising up through a column of a non-newtonian fluid and bursting on top of it. Air is injected at the bottom of a hair-gel column at a controlled flow-rate. For a given flow-rate, the system naturally switches between two states. Either the bubbles are emitted at the bottom of the column and reach the gel surface quite independently from one another, or the bubbles emitted collapse to create a winding "flue" connecting the bottom air-entrance to the gel surface. We report, on the one hand, an experimental study of the intermittency between both regimes and, on the other hand, an acoustic characterization of the sound produced by the bursting of a single bubble. The non-newtonian properties of the fluid are crucial to observe both cyclic changes in the system activity and sonic bubbles. We emphasize how those results could be used to understand puzzling phenomena associated with volcanoes natural-activity.

1 Introduction

L'étude de l'écoulement d'un fluide newtonien à travers un fluide complexe est une problématique extrêmement riche tant sur le plan fondamental [1,2] que sur celui de ses applications en physique comme en géophysique. Concernant les études physiques, les cas d'émission d'air ou d'eau à travers une couche d'un matériau granulaire immergé ont été étudiés en détail [3,4]. On retiendra notamment de [3], la mise en évidence de plusieurs régimes d'échappement du gaz à travers la couche de matériau granulaire immergé suivant le débit d'injection d'air dans le milieu. À petit débit, le gaz injecté traverse la couche sous forme de bulles indépendantes qui fragilisent localement l'empilement de grains. À grand débit, on observe qu'un canal relie la buse émettrice de gaz au sommet de la couche de grains immergés, le gaz s'échappant alors continuellement du système. Dans une gamme de débits intermédiaires, on observe une alternance spontanée du système entre ces deux régimes limites : le canal se forme par la coalescence de bulles successives tandis qu'une fois formé, soumis au poids du matériau, il se déforme lentement et finit par s'effondrer.

Des régimes similaires d'alternance sont observés lors du dégazage des volcans de type Strombolien [5]. Dans ce cas, l'air joue le rôle de fluide newtonien et la lave de fluide complexe : par décompression, la remontée de la lave dans le conduit volcanique provoque la nucléation de bulles à partir du gaz dissous dans le magma en profondeur ; ces dernières viennent exploser en surface [6]. L'alternance entre différents régimes d'explosion observés sur le terrain reste encore incomprise [5]. S'il a été montré que la géométrie du conduit est importante [7,8], en particulier pour expliquer les alternances que présentent les éruptions de

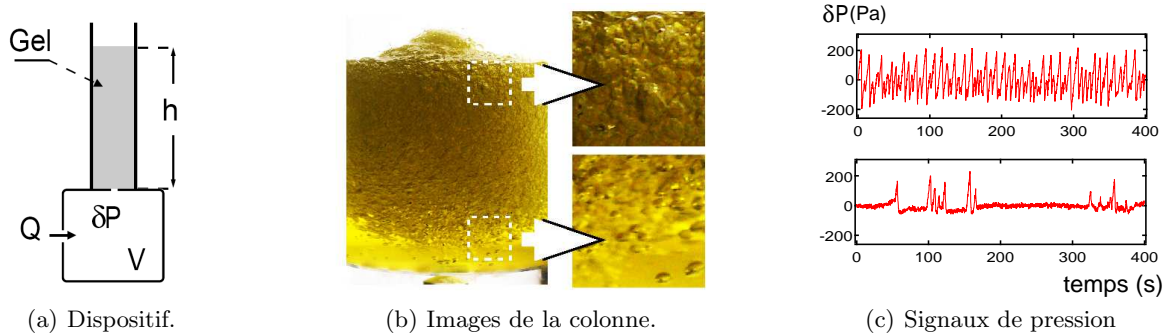


Fig.1. Situation expérimentale. (a) et (b) Un mélange de gel coiffant et d'eau remplit une colonne verticale. La base de la colonne est connectée à une chambre sèche dans laquelle on injecte de l'air à débit massique constant Q . L'expérience consiste à enregistrer les variations de la pression δP dans la chambre au cours du temps. (c) Pour une géométrie donnée, le comportement typique du signal de pression dépend du débit gazeux imposé. En haut, à petit débit, on observe des montées et descentes de la pression caractéristiques d'un régime dans lequel les bulles sont émises régulièrement l'une après l'autre. En bas, à plus grand débit, on observe de longues périodes pendant lesquelles la pression est presque constante et égale la pression extérieure. Ceci est la marque de l'ouverture, dans le fluide, d'un canal stable qui relie la buse d'émission du gaz à la surface libre.

type basaltique [9], le caractère non-newtonien de la lave est pressenti comme fondamental pour expliquer les intermittences de l'activité strombolienne [6]. Cependant, le phénomène n'a été à ce jour que très peu étudié à l'échelle du laboratoire.

Nous présentons donc ici une étude expérimentale de l'échappement d'air au travers d'une colonne de fluide complexe, qui pour fixer les idées, pourrait s'apparenter à la colonne de magma qui remplit un conduit volcanique. Nous allons voir que sous cet aspect, cette étude présente plusieurs points communs avec les observations que fait un géophysicien sur le terrain. Cet article, écrit par des physiciens, a pour vocation d'être une synthèse de résultats d'expériences de laboratoire dont le détail a été, ou est en cours de publication [10,11,12,13]. Nous renvoyons à ces quatre références pour plus de détails. Cet article vise aussi à mettre en exergue les similitudes entre le système étudié et les observations de terrain avec pour lien sous-jacent, le caractère non-newtonien des fluides mis en jeu. Nous espérons ainsi sensibiliser plus largement la communauté géophysicienne à ces résultats.

2 Intermittence entre deux régimes : bulles isolées, canal ouvert

Le principe de l'expérience est le suivant (Fig. 1) : une colonne de fluide est connectée par sa base à une chambre sèche dans laquelle on injecte un gaz à débit massique constant (Fig. 1a). On étudie alors l'évolution de la surpression δP dans la chambre inférieure au cours du temps.

Dans nos expériences, la colonne de fluide a un diamètre typique que l'ordre de 10 cm pour une hauteur variable h allant jusqu'à 13 cm. Le volume V de la chambre peut être choisi dans la gamme 50 à 800 mL. Le fluide utilisé consiste en un mélange de gel coiffant (*Auchan*) et d'eau qui présente de "bonnes" propriétés rhéologiques. D'une part cette solution possède un seuil d'écoulement : une bulle d'air en deçà d'une certaine taille reste bloquée ; l'éclatement à la surface libre d'une bulle de taille supérieure au seuil laisse généralement derrière lui une petite bulle de taille inférieure au seuil. Ainsi, l'ascension et l'éclatement répétés de bulles à la surface conduit à la formation d'un gradient vertical de bulles piégées dans la colonne de gel, stable dans le temps (Fig. 1b). D'autre part, la solution est rhéofluidifiante, ce qui concrètement se traduit par le fait que le passage d'une bulle favorise la montée de la bulle suivante. Ceci permet, par la coalescence de bulles successives, la formation d'un canal sinueux [14] qui traverse la colonne de gel de la buse d'émission du gaz à la surface libre.

On constate qu'à débit gazeux imposé, le système atteint un régime permanent dans lequel il oscille spontanément entre deux états : soit les bulles qui se forment à la base remontent la colonne de gel indépendamment l'une après l'autre [régime *émission de bulles* (Fig. 1c, en haut)] ; soit celles-ci coalescent pour former un canal [régime *canal ouvert* (Fig. 1c, en bas, $\delta P = 0$)]. Le système a généralement tendance à favoriser les bulles à faible débit, tandis que le canal ouvert est présent sur des temps très longs à fort débit comme le montre le graphe de la figure 2a où l'on a représenté, en fonction du débit massique imposé, le pourcentage de temps passé dans le régime *bulles*.

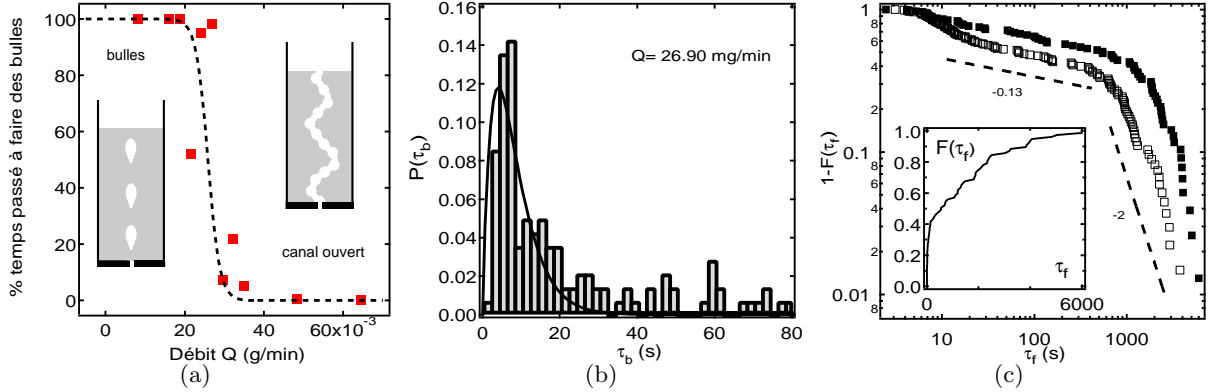


Fig.2. (a) Pourcentage du temps passé à faire des bulles en fonction du débit. Chaque point correspond à un signal de pression enregistré sur 80000 s. (b) Distribution de probabilité $P(\tau_b)$ du temps passé à faire des bulles : $Q = 26.9$ mg/min, $V = 800$ mL, $h = 7$ cm. (c) $F(\tau_f)$: probabilité cumulée du temps passé dans le régime canal ouvert \square : $Q = 26.9$ mg/min ; \blacksquare : 67.25 mg/min ($V = 800$ mL, $h = 7$ cm) ; l'insert correspond à la probabilité cumulée pour \square .

Avant de présenter une caractérisation de l'intermittence observée, nous pouvons discuter qualitativement le phénomène. La formation du canal se fait à partir d'un chapelet de bulles successives qui remontent dans la colonne. Il est facile de comprendre que la formation du canal ne pourra se produire que si l'émission de bulles successives se fait à une fréquence suffisamment élevée pour que les bulles puissent interagir, c'est-à-dire, si le débit est suffisant pour que le système se *souviene*, lors de l'émission d'une bulle à la base, du passage de la bulle précédente. Le volume v d'une bulle, qui est essentiellement gouverné par la géométrie de la buse d'émission, varie peu d'une bulle à l'autre. On peut donc estimer que le temps entre deux bulles successives est de l'ordre de v/Q_v où Q_v est ici le débit volumique. Par ailleurs, le temps τ pendant lequel le fluide se souvient du passage de la bulle précédente est une constante qui ne dépend que de ses propriétés rhéologiques intrinsèques. Ainsi, on prévoit que la formation du canal ne pourra se produire que pour des débits suffisamment grands, tels que $Q_v > v/\tau$. Une fois le canal formé, il peut rester stable pendant un temps long. En effet, le fluide, qui n'est plus soumis à aucun cisaillement notable à part le frottement de l'air aux parois du canal, se comporte comme un matériau élastique sur lequel agit seulement son propre poids. Cependant, à temps long, sous l'effet de la contrainte, le canal flue et finit par se pincer. Alors, la pression dans la chambre remonte et provoque la formation d'une bulle qui relance le système dans le régime *bulles* jusqu'à la formation d'un nouveau canal. La durée de vie du canal, qui dépend donc du détail de sa géométrie, est mal définie, comme nous allons le voir par la suite.

Passons maintenant à une caractérisation plus précise de la dynamique du système à partir de l'analyse du signal de pression. Nous mesurons la surpression δP dans la chambre sèche. Les deux régimes précédemment décrits se traduisent, l'un par des pics de pression associés à l'émission des bulles, l'autre par une surpression quasi-nulle associée à la présence du canal (Fig. 1c). Nous sommes en présence d'un système soumis à une excitation constante qui oscille entre deux états, un état *bulles* et un état *canal ouvert*. Afin de caractériser la dynamique, il est naturel de réduire le signal de pression à la suite des

temps successifs passés dans chacun des deux états : $\{\tau_f^1, \tau_b^1, \tau_f^2, \tau_b^2, \dots, \tau_f^n, \tau_b^n\}$, où l'indice "f" caractérise le temps passé en canal ouvert et "b" le temps passé à faire des bulles. Considérons tout d'abord la probabilité $P(\tau_b)$ de voir le système rester dans l'état *bulles* pendant le temps τ_b (Fig. 2b). On observe que cette distribution de probabilité présente un pic bien défini pour un temps caractéristique τ_b^c qui nous permet, par exemple, d'estimer le nombre typique de bulles, $\tau_b^c Q_v/v$ émises par le système avant la formation du canal. Ce nombre est variable d'un train de bulles à l'autre mais nous pouvons cependant en définir une valeur typique. En revanche, comme on pouvait s'y attendre d'après la discussion qualitative du phénomène, le temps de vie d'un canal dépendant fortement du détail de sa géométrie, la distribution des temps $P(\tau_f)$ ne permet pas d'extraire un temps caractéristique. Afin de mieux caractériser ce régime, considérons la probabilité cumulée $F(\tau_f)$. Nous définissons cette dernière comme l'intégrale de la probabilité d'être dans le régime considéré, $F(\tau_f) \equiv \int_0^{\tau_f} P(\tau') d\tau'$ et rapportons $1 - F(\tau_f)$ (Fig. 2c). Cette courbe présente deux comportements en loi de puissance $1/\tau_f^\alpha$. D'une part, la coupure (forte pente, $\alpha \simeq 2$) obtenue pour les temps longs (typiquement $\tau_f \geq 1000$ s) est associée à une loi de probabilité de la forme $P(\tau_f) \propto 1/\tau_f^{1+\alpha}$ pour laquelle la valeur moyenne existe et est finie; comme le temps d'enregistrement d'un signal de pression est typiquement d'une journée soit 80000 s (très supérieur aux plus grands temps τ_f mesurés), nous sommes sûrs que le système atteint un régime permanent. D'autre part, la faible pente ($\alpha = 0.13 \pm 0.02$) obtenue aux temps courts (typiquement $\tau_f \leq 1000$ s) démontre que la distribution des durées de vie du canal est très large. De fait, à partir de la probabilité cumulée, on peut déduire que $P(\tau_f) \propto 1/\tau_f^{1+0.13}$ ce qui, non seulement, ne permet pas de déduire un temps caractéristique mais, en plus, montre que ces temps sont très largement distribués. Les temps courts passés en régime *canal ouvert* suivent ainsi une loi de Lévy [15], statistique que l'on rencontre souvent pour des systèmes oscillants spontanément entre deux états et soumis à une excitation constante, notamment à l'échelle nanoscopique [16,17]. Dans notre cas, l'interprétation d'une telle loi de probabilité n'est pas encore très claire; elle est probablement liée à la façon dont le canal se pince et s'effondre aux temps courts. L'évolution du canal reste difficile en visualisation directe du fait de la présence des bulles dans le système. Une cellule 2D est à l'étude et permettra de corrélérer l'évolution du canal à la distribution.

Une utilisation de ces résultats en géophysique pourrait être la suivante : un changement d'activité dans le dégazage observé en surface d'un volcan (changement de fréquence d'arrivée des bulles, de leur taille, etc.) ne traduit pas nécessairement un changement d'activité en profondeur et, notamment, du taux de nucléation de bulles. Nous avons vu qu'à débit constant, le caractère non-newtonien des propriétés rhéologiques du fluide suffisait, à lui seul, à générer une activité intermittente. La rhéologie complexe de la lave, à elle seule, pourrait donc être responsable des changements d'activité observés en surface.

3 Etudes acoustiques annexes

En régime d'émission de bulles, les bulles générées au bas de la colonne prennent une forme de larme allongée au cours de leur remontée [18], dont la pointe (*cusp* en anglais) présente des oscillations liées aux propriétés microscopiques du fluide [19,20]. Arrivées en surface, elles explosent en émettant un son caractéristique [11]. Une façon de caractériser l'explosion d'une bulle peut donc consister à l'écouter. Cette méthode est largement répandue en géophysique, où l'écoute au sens propre d'un volcan est une façon non intrusive de mesurer son activité [21]. À notre connaissance, les seules études de laboratoire concernant l'explosion de bulles à la surface d'un fluide complexe traitent des explosions multiples de bulles au sein d'une mousse [22,23,24]. Nous avons donc pris le parti de nous focaliser sur l'étude acoustique de l'explosion d'une bulle unique à la surface d'un fluide non-newtonien, cas plus proche de l'explosion de grosses bulles à la surface d'un lac de lave. L'expérience consiste donc à produire l'explosion d'une bulle isolée à la surface d'un fluide, similaire à celui utilisé pour l'étude de l'intermittence, et à enregistrer le son qui accompagne l'évènement. L'explosion de la bulle en surface est filmée à l'aide d'une caméra rapide (Fig. 3a) tandis que le son émis est enregistré à l'aide d'un microphone.

Nous observons que le signal acoustique présente une fréquence bien définie (Fig. 3b) qui est sélectionnée par la longueur L de la bulle au moment de l'explosion. En effet, du fait des propriétés viscoélastiques

du fluide, le corps de la bulle est non seulement de forme allongée (Fig. 3a), mais ne se déforme pas durant le temps caractéristique d'émission du son (typiquement quelques millisecondes). Il joue ainsi le rôle d'un résonateur excité par la rupture du film séparant l'intérieur de l'extérieur de la bulle. La longueur d'onde du signal émis vérifie $\lambda \simeq \lambda_0 + 2.8 L$ (Fig. 3c), présentant ainsi un comportement intermédiaire entre un cône résonnant ($\lambda = 2L$) et un tube résonnant ($\lambda = 4L$, pour une extrémité fermée). L'ordonnée à l'origine λ_0 , qui dépend essentiellement de la taille de la tête de la bulle, rend compte de la distance nécessaire à la conversion du mode résonnant présent à l'intérieur de la cavité, en un mode sphérique à l'extérieur (radiation) [11].

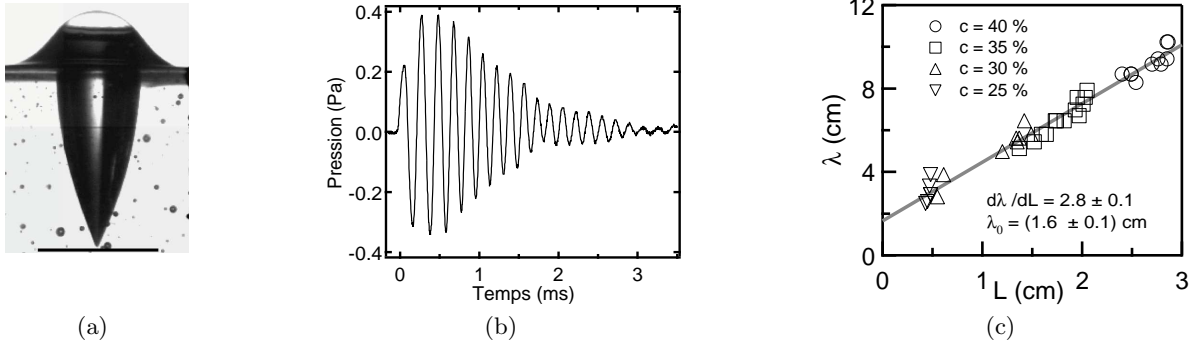


Fig.3. (a) Image d'une bulle avant explosion, le trait noir représente 1 cm. (b) Le signal acoustique associé à son explosion. (c) Longueur d'onde émise λ en fonction de la longueur L de la bulle.

L'étude énergétique démontre que l'amortissement est principalement gouverné par la radiation à l'extrémité ouverte de la bulle. En effet, nous avons montré dans [11] que la dissipation visqueuse et que les pertes associées aux réflexions multiples sur le fond conique de la bulle sont négligeables. Par ailleurs, le bilan énergétique nous enseigne que l'énergie restituée dans le signal acoustique n'est pas représentative de l'énergie initialement stockée dans la bulle avant explosion. En effet, la fraction de l'énergie relâchée sous forme acoustique dépend essentiellement du temps de rupture du film : une rupture lente ne sera que très peu sonore alors qu'une rupture rapide permet de retrouver une grande partie de l'énergie dans le signal acoustique.

Enfin, pour mieux comprendre les signaux acoustiques enregistrés lors de l'explosion de bulles, nous avons réalisé des expériences dans lesquelles nous pouvions contrôler à la fois la géométrie de la cavité résonnante et le temps de rupture du film. Ainsi, nous avons étudié le signal acoustique associé à la rupture d'une bulle de savon qui ferme initialement une cavité cylindrique [10]. Ce travail nous a permis de comprendre comment un tel évènement pouvait conduire sur le terrain à la localisation en profondeur d'une source virtuelle pour les signaux sismiques [13].

Revue dans le contexte géophysique, cette étude nous enseigne que, lors de l'explosion d'une bulle en surface de la lave, l'énergie acoustique associée ne donne aucune information fiable quant à l'énergie totale libérée lors de cette explosion si on n'est pas capable d'estimer le temps de rupture du film constituant la tête de la bulle, ce qui est généralement le cas sur le terrain.

4 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une synthèse de résultats expérimentaux ainsi que leurs conséquences dans le domaine de la géophysique. Le dégazage au travers d'une couche d'un fluide à seuil et rhéofluidifiant peut présenter une intermittence naturelle entre deux régimes d'émission. L'explosion de bulles à la surface d'un tel fluide s'accompagne d'un son dont le contenu en fréquence est contrôlé par la taille de cette bulle. Ces deux résultats dépendent directement des propriétés rhéologiques non-linéaires du fluide étudié.

Références

1. M.C. SOSTARECZ & A. BELMONTE, Dynamics inside Polymer Drops : from Dimple to Rayleigh Instability to Torus, *Physics of Fluids*, **15**, S5 (2003).
2. M.C. SOSTARECZ & A. BELMONTE, Motion and shape of a viscoelastic drop falling through a viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, **497**, 235-252 (2003).
3. L. GOSTIAUX, H. GAYVALLET & J.-C. GÉMINARD, Dynamics of a gas bubble rising through a thin immersed layer of granular material : an experimental study, *Granular Matter*, **4**, 39-44 (2002).
4. F. ZOUESHTIAGH & A. MERLEN, Effects of a vertically flowing water jet underneath a granular bed, *Physical Review E*, **75**, 056313 (2007).
5. M. RIPEPE, A.J.L. HARRIS, & R. CARNIEL, Thermal, seismic and infrasonic evidences of variable degassing rates at Stromboli volcano, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **118**, 285-297 (2002).
6. H.M. GONNERMANN & M. MANGA, The Fluid Mechanics Inside a Volcano, *The Annual Review of Fluid Mechanics*, **39**, 321-356 (2007).
7. C. JAUPART & S. VERGNOLLE, Laboratory models of Hawaiian and Strombolian eruptions, *Nature*, **331**, 58-60 (1988).
8. C. JAUPART & S. VERGNOLLE, The generation and collapse of a foam layer at the roof of a basaltic magma chamber, *Journal of Fluid Mechanics*, **203**, 347-380 (1989).
9. E.A. PARFITT, A discussion of the mechanisms of explosive basaltic eruptions, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **134**, 77-107 (2004).
10. V. VIDAL, J.-C. GÉMINARD, T. DIVOUX & F. MELO, Acoustic signal associated with the bursting of a soap film which initially closes an overpressurized cavity : Experiment and theory, *European Journal of Physics B*, **54**, 321-339 (2006).
11. T. DIVOUX, V. VIDAL, J.-C. GÉMINARD & F. MELO, Acoustic emission associated with the bursting of a gas bubble at the free surface of a non-newtonian fluid, *soumis à Physical Review E* (2008).
12. T. DIVOUX AND J.-C. GÉMINARD, Intermittent outgassing through a non-newtonian fluid (en préparation).
13. V. VIDAL, T. DIVOUX, D. LEGRAND, M. RIPEPE, J.-C. GÉMINARD & F. MELO, Interpreting laboratory acoustics to reveal the location of volcanic seismic source, *à soumettre à Geophysical Research Letters* (2008).
14. I.L. KLIAKHANDLER, Continuous chain of bubbles in concentrated polymeric solutions, *Physics of Fluids*, **14**, 3375-3379 (2002).
15. E. BERTIN & F. BARDOU, From glasses to laser cooling : dynamics with broad distributions of sojourn times, ArXiv : cond-mat/0503150v1 [cond-mat.stat-mech] (7 Mar 2005).
16. R.M. DICKSON, A.B. CUBITT, R.Y. TSIEN & W.E. MOERNER, On/off blinking and switching behaviour of single molecules of green fluorescent protein, *Nature*, **388**, 355-358 (1997).
17. X. BROKMANN, J.-P. HERMIER, G. MESSIN, P. DESBIOLLES, J.-P. BOUCHAUD & M. DAHAN, Statistical Aging and Nonergodicity in the Fluorescence of Single Nanocrystals, *Physical Review Letters*, **90**, 120601 (2003).
18. R. BIRD, R. ARMSTRONG & O. HASSAGER, *Dynamics of Polymeric Liquids* Wiley, New York (2000).
19. A. BELMONTE, Self-oscillations of a cusped bubble rising through a micellar solution, *Rheologica Acta*, **39**, 554-559 (2000).
20. N.Z. HANDZY & A. BELMONTE, Oscillatory Rise of Bubbles in Wormlike Micellar Fluids with Different Microstructures, *Physical Review Letters*, **92**, 124501 (2004).
21. J.B. JOHNSON, R.C. ASTER, M.C. RUIZ, S.D. MALONE, P.J. MCCHESENEY, J.M. LEES & P.R. KYLE, Interpretation and utility of infrasonic records from erupting volcanoes, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **121**, 15-63 (2003).
22. W. MÜLLER & J.M. DI MEGLIO, Avalanches in draining foams, *Condensed Matter*, **11**, L209-L215 (1999).
23. N. VANDEWALLE, J.F. LENTZ, S. DORBOLO & F. BRISBOIS, Avalanches of Popping Bubbles in Collapsing Foams, *Physical Review Letters*, **86**, 179-182 (2001).
24. J. DING, F.W. TSAUR, A. LIPS & A. AKAY, Acoustical observation of bubble oscillations induced by bubble popping, *Physical Review E*, **75**, 041601 (2007).

Maîtrise des «vagues optiques extrêmes»

John M. Dudley¹, Goëry Genty², & Benjamin. J. Eggleton³

¹ Institut FEMTO-ST, UMR 6174 CNRS-Université de Franche-Comté, 25030 Besançon, France

² Tampere University of Technology, Institute of Physics, Optics Laboratory, FIN-33101 Tampere, Finland

³ Centre for Ultra-high-Bandwidth Devices & Optical Systems (CUDOS), School of Physics, University of Sydney, NSW 2006, Australia

john.dudley@univ-fcomte.fr

Résumé. Nous étudions les dynamiques d'évolution d'événements optiques de type scélécrats, statistiquement rares et se manifestant par l'apparition de soliton qui ont subi un décalage substantiel vers les grandes longueurs d'onde lors de la génération d'un supercontinuum dans une fibre à cristaux photoniques [D. R. Solli *et al. Nature*, **450**, 1054-1058 (2007)]. Pour cela, on utilise un modèle numérique basé sur l'équation de Schrödinger non linéaire et qui permet d'identifier des moyens pour contrôler l'apparition des vagues extrêmes. En particulier, on montre que l'application d'une modulation de faible intensité sur l'enveloppe de l'impulsion d'entrée de la fibre permet d'accroître d'un facteur dix le nombre de vagues extrêmes apparaissant lors de la génération du supercontinuum.

Abstract. We present a numerical study of the evolution dynamics of "optical rogue waves", statistically-rare extreme red-shifted soliton pulses arising from supercontinuum generation in photonic crystal fiber [D. R. Solli *et al. Nature*, **450**, 1054-1058 (2007)]. Our specific aim is to use nonlinear Schrödinger equation simulations to identify ways in which the rogue wave dynamics can be actively controlled, and we demonstrate that rogue wave generation can be enhanced by an order of magnitude through a small modulation across the input pulse envelope.

1 Introduction

Suite aux expériences réalisées par Ranka *et al.* en 2000 [1] la génération de spectres optiques à bande ultralarge dans les fibres à cristaux photoniques a fait l'objet d'intenses recherches [2]. La teneur en bruit de ces spectres "supercontinuum" a fait l'objet d'une attention particulière. Bien qu'initialement orientées vers la détermination de critères relatifs à la génération de supercontinuum stable par des impulsions femtosecondes, les recherches se sont progressivement étendues à toute la plage des différents régimes, des impulsions picosecondes jusqu'à l'émission continue. Ces études poussées ont alors permis d'établir et d'analyser les différents mécanismes impliqués dans le transfert du bruit initial des impulsions aux supercontinua.

Dans ce contexte, une avancée hautement significative vient d'être rapportée par Solli *et al.* qui sont parvenus à quantifier précisément les fluctuations statistiques d'un supercontinuum généré par des impulsions picosecondes [3]. Même si des études antérieures avaient déjà fait état des variations de la position spectrale des solitons Raman dans des spectres supercontinua, Solli *et al.* ont utilisés une nouvelle technique expérimentale afin de montrer que certaines de ces variations peuvent se traduire par un nombre restreint d'événements que l'on peut qualifier de *scélécrats* par analogie avec le vocabulaire utilisé en hydrodynamique [4]. En effet, ces événements rares sont associés à des solitons possédant une très grande amplitude. De plus, les expériences décrites par Solli *et al.* ayant été réalisées dans un contexte où l'instabilité de modulation joue un rôle crucial pour le développement du supercontinuum, il a été possible d'établir une correspondance entre ces solitons optiques extrêmes et les vagues scélécrates rencontrées en hydrodynamique et dont l'origine est également liée à l'instabilité de modulation [5,6].

Bien qu'une analyse plus poussée serait nécessaire pour établir un lien certain entre les vagues extrêmes du domaine de l'optique et celles du domaine hydrodynamique, notre objectif ici est de prolonger l'étude faite par Solli *et al.* afin d'examiner en détail des possibilités technologiques photoniques qui permettraient de "maîtriser" les "solitons extrêmes" observés dans leurs expériences. Plus précisément, par le biais de simulations numériques basées sur la résolution de l'équation non linéaire de Schrödinger, nous

études les dynamiques d'évolution de ces solitons extrêmes et démontrons qu'il est effectivement possible en pratique et par des techniques photoniques courantes de favoriser leur génération.

2 Simulations

Nos simulations numériques sont basées sur la résolution de l'équation généralisée de Schrödinger, souvent appliquée à la modélisation de la génération de supercontinuum en fibre optique [2]. On peut logiquement penser que la dynamique des vagues scélérates optiques se manifeste dès lors que la génération du supercontinuum est initiée par l'instabilité de modulation. C'est pourquoi nous nous plaçons ici dans le cadre de la propagation d'impulsions picoseconde avec des conditions initiales semblables aux études numériques antérieures et qui sont favorables au développement de l'instabilité de modulation. Plus spécifiquement, nous simulons la propagation d'impulsions à 1060nm de type gaussien et de durée 5 ps dans une fibre à cristaux photoniques d'une longueur de 20 m. Le minimum de dispersion de la fibre se situe à 1055 nm. Les autres paramètres considérés dans notre modèle numérique sont identiques à ceux de la référence [3]. Nous incluons le bruit de fond quantique dans les simulations en utilisant un modèle "un photon par mode" ainsi que le bruit thermique induit par la diffusion Raman spontanée [7].

Les caractéristiques typiques de l'apparition de solitons extrêmes sont illustrées sur la figure 1 où sont superposés les spectres d'un ensemble de 1000 simulations avec des distributions de bruits originales différentes (courbes grises) ainsi que la moyenne de ces spectres (courbe noire). Un zoom centré sur les composantes des spectres aux grandes longueurs d'onde permet de clairement visualiser le petit nombre d'événements scélérats associés à un décalage très prononcé des spectres vers les grandes longueurs d'onde. Ces événements extrêmes peuvent être isolés aisément en utilisant la technique développée dans la référence [?]. Spécifiquement, pour chaque supercontinuum de l'ensemble, un filtre sélectionne les composantes spectrales situées au-dessus d'une longueur d'ondes particulière et ces dernières sont ensuite converties en une série d'impulsions temporelles ultra-courtes par transformation de Fourier. La puissance crête de ces impulsions varie selon la position du filtre relativement à la structure spectrale du supercontinuum. La distribution de fréquence de la puissance crête de ces impulsions permet de capturer la présence des vagues scélérates, statistiquement rares, et matérialisée par une puissance crête maximale et un décalage substantiel de leurs spectres vers les grandes longueurs d'onde.

La figure 1c montre l'histogramme calculé à partir des données obtenues par un filtre placé à 1210 nm. La distribution de fréquence penche manifestement vers les impulsions de faible puissance crête et seule une simulation sur les 1000 de l'ensemble fait apparaître un soliton extrême de puissance crête supérieure à 1 kW.

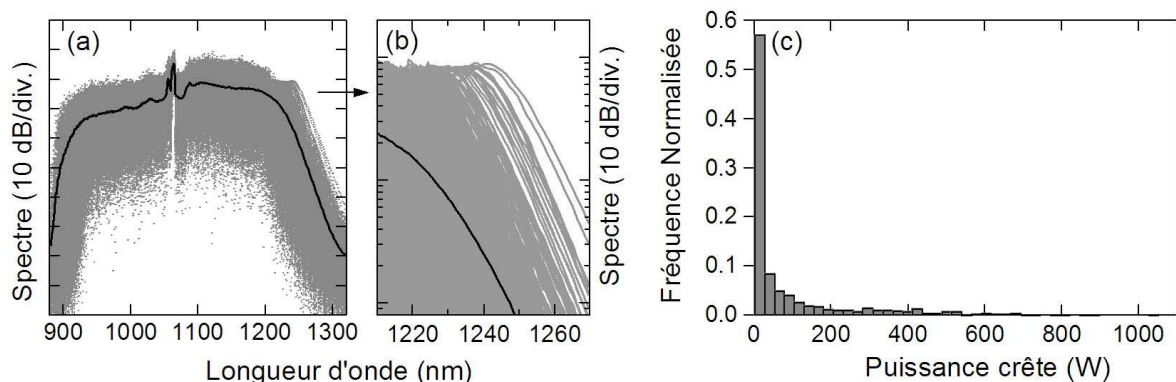
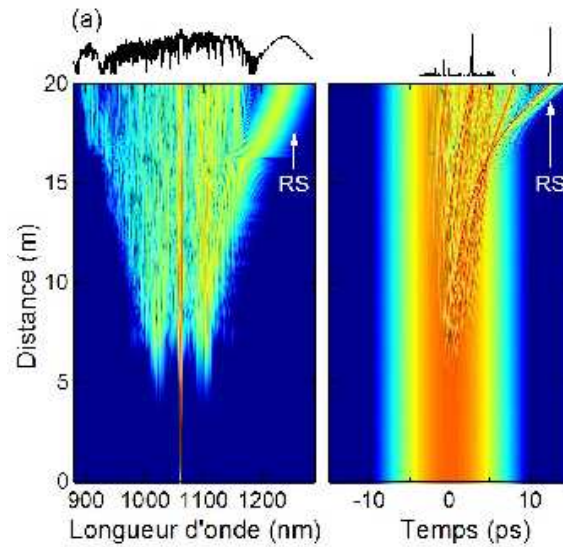
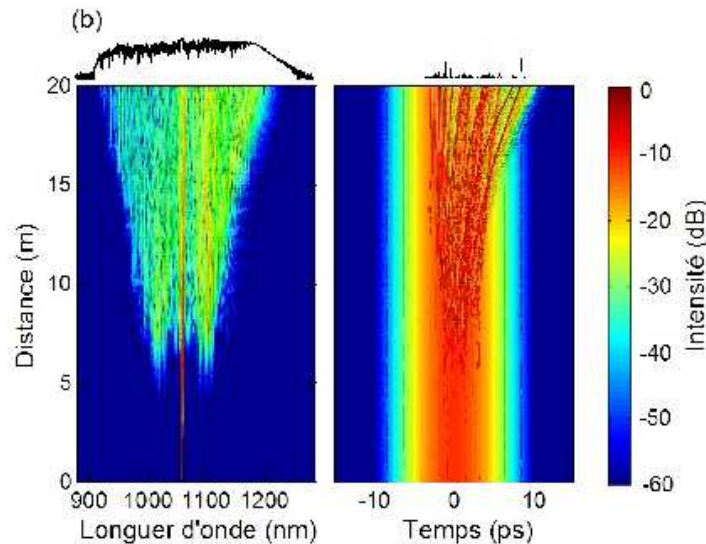


Fig.1. Résultats montrant un ensemble de 1000 spectres (en gris). La moyenne de ces spectres apparaît en noir. (b) Zoom centré sur la partie correspondant aux longueurs d'onde supérieures à 1210 nm. (c) Histogramme de la distribution de fréquence de la puissance de crête.



(a) Cas statistiquement rare avec génération d'un soliton extrême (« rogue soliton » — RS)



(b) Cas proche de la distribution médiane

Fig.2. Graphiques montrant l'évolution spectrale et temporelle.

D'autres éléments clés de la dynamique des solitons extrêmes sont présentés sur la figure 2 où est comparée l'évolution spectrale et temporelle de deux impulsions correspondant à deux réalisations particulières de l'ensemble. Spécifiquement, la figure 2a illustre l'évolution d'un événement de type scélérat avec l'apparition d'un soliton de puissance crête 900 W et une longueur d'onde centrale à 1240 nm alors que la figure 2b illustre un cas où le spectre en sortie de la fibre est principalement confiné aux longueurs d'ondes en dessous de 1210 nm. Sur cette figure, on peut observer la façon dont l'instabilité de modulation se développe à partir du bruit initial et conduit à des variations importantes des trajectoires spectrales et temporelles après une distance de l'ordre de 10 m. C'est précisément durant cette phase initiale lors de laquelle se développe l'instabilité de modulation que l'enveloppe de l'impulsion se scinde en multiples solitons. On voit aussi qu'un événement scélérat est apparemment associé à l'éjection d'un des solitons

en lesquels l'enveloppe principale s'est scindée. Ce soliton se propage à une vitesse différente des autres solitons, subissant ainsi un décalage Raman beaucoup plus important et se détachant clairement des autres composantes du supercontinuum à la fois dans les domaines temporel et spectral.

3 Maîtrise de la dynamique des vagues extrêmes

Dans ce paragraphe, nous examinons comment la dynamique sous-jacente à l'apparition de solitons extrêmes peut être maîtrisée. En particulier, le rôle central joué par l'instabilité de modulation dans le développement du supercontinuum suggère qu'une modification des conditions initiales devrait influencer l'apparition de vagues scélérates. En effet, il a déjà été prouvé à l'aide d'un modèle numérique qu'il existe une corrélation entre l'amplitude d'un soliton extrême et un jet de bruit localisé sur la partie avant de l'impulsion. L'idée ici est de considérer une approche pratique du contrôle des vagues extrêmes en adaptant des techniques qui ont prouvées leur efficacité dans l'étude des phénomènes liés à l'instabilité de modulation induite à des fréquences de l'ordre du THz. La méthode choisie consiste à générer un supercontinuum par un système à double-pompage dont le battement en fréquence induit une modulation à basse amplitude sur toute l'enveloppe temporelle de l'impulsion initiale. Une telle technique peut être aisément mise en oeuvre en pratique en injectant simultanément avec l'impulsion originale une réplique de cette dernière décalée en fréquence au moyen d'une technique classique de conversion de longueur d'onde.

Les résultats numériques de la figure 3 illustrent les effets d'une telle architecture de pompage. Nous choisissons de moduler la pompe principale qui consiste en une impulsion de type gaussien par un signal d'intensité faible (4% de l'intensité de pompe principale) et décalée en fréquence de 5.8 THz. Les résultats obtenus d'un ensemble de 1000 simulations démontrent comment la faible modulation imposée à l'origine permet de stimuler une augmentation substantielle du nombre de vagues extrêmes observées comparé au cas d'une architecture à une seule pompe sans modulation initiale.

Spécifiquement, la figure 3 montre un élargissement du spectre moyen et un nombre de solitons extrêmes accru. Ceci est d'ailleurs confirmé par un examen comparatif des figures 1 et 3 qui montre que l'histogramme généré par un ensemble de 1000 simulations en présence d'une modulation initiale est incliné de manière très significative vers la génération d'événements à large puissance crête. Une analyse quantitative de l'histogramme de la figure 3 montre en particulier une augmentation d'un facteur 10 dans le nombre de vagues extrêmes filtrées au dessus de 1210 nm et possédant une puissance crête supérieure à 1 kW.

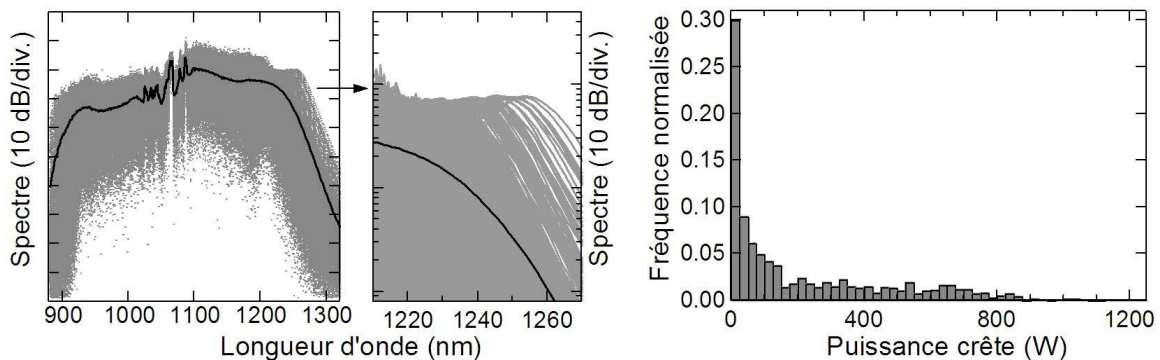


Fig.3. Résultats d'un ensemble de 100 simulations (en gris) avec modulation initiale de 5.8 THz de la pompe principale. La moyenne de ces spectres apparaît en noir. La figure montre également un zoom centré sur la partie correspondant aux longueurs d'onde supérieure à 1210 nm et une histogramme de la distribution de fréquence de la puissance crête.

4 Conclusions

L'étude proposée ici trouve son origine dans la récente observation expérimentale de d'événements scélérats optiques, statistiquement rares et se manifestant par l'apparition de solitons aux grandes longueurs d'onde du spectre d'un supercontinu. Nos simulations numériques ont notamment permis d'éclairer les caractéristiques distinctives de ce type d'événement et nous avons également montré qu'une modulation de faible intensité de fréquence 5.8 THz appliquée sur l'impulsion d'entrée induit un accroissement de la fréquence d'apparition des soliton extrêmes.

Références

1. J. K. RANKA, R. S. WINDELER & A. J. STENTZ, Visible Continuum Generation in Air-Silica Microstructure Optical Fibers with Anomalous Dispersion at 800 nm, *Optics Letters*, **25**(1), 25–27 (2000).
2. J. M. DUDLEY, G. GENTY & S. COEN, Supercontinuum Generation in Photonic Crystal Fiber, *Reviews in Modern Physics*, **78**, 1135–1184 (2006).
3. D. R. SOLLI, C. ROPERS, P. KOONATH & B. JALALI, Optical rogue waves, *Nature*, **450**, 1054–1058.
4. M. HOPKIN, Sea snapshots will map frequency of freak waves, *Nature*, **430**, 492 (2004).
5. A. I. DYACHENKO & V. E. ZAKHAROV, Modulation instability of Stokes wave implies a freak wave, *JETP Letters*, **81**, 255–259 (2005).
6. M. ONORATO, A. R. OSBORNE, AND M. SERIO, Modulational instability in crossing sea states : A possible mechanism for the formation of freak waves, *Physical Review Letters*, **96**, 014,503 (2006).
7. K. L. CORWIN, N. R. NEWBURY, J. M. DUDLEY, S. COEN, S. A. DIDDAMS, K. WEBER & R. S. WINDELER, Fundamental Noise Limitations to Supercontinuum Generation in Microstructure Fiber, *Physical Review Letters*, **90** (11), 113, 904/1–4 (2003).

Instabilités d'un film liquide visqueux en écoulement sur une fibre verticale

C. Duprat, C. Ruyer-Quil, & F. Giorgiutti-Dauphiné

Laboratoire FAST, Orsay
duprat@fast.u-psud.fr

Résumé. Nous présentons une étude expérimentale et théorique concernant l'écoulement d'un film liquide sur une fibre verticale. Une transition entre une instabilité absolue et une instabilité convective a été mise en évidence. Dans le cas où le régime est convectif, nous étudions la réponse spatiale du système à des perturbations périodiques générées à l'entrée de la fibre. Les ondes obtenues sont caractérisées en fonction de leur fréquence. Un modèle théorique qui prend en compte les différents mécanismes physiques à savoir la tension de surface, la dissipation visqueuse et l'inertie, permet de retrouver les propriétés des ondes : forme, vitesse.

Abstract. A viscous film flowing down a vertical fibre is analysed both experimentally and theoretically. A transition between an absolute and a convective instability has been evidenced. In convective regimes, we study the system spatial response to a periodic perturbation generated at the inlet. The resulting waves are characterised depending on their frequency. A theoretical model taking surface tension, inertia and viscous dissipation in account compares well to the experimental results.

1 Introduction

L'enrobage des fibres optiques est un exemple d'application des écoulements de films liquides sur un cylindre vertical. Ce système met en jeu deux mécanismes d'instabilité, l'un capillaire dû à la courbure de la fibre (instabilité de Rayleigh-Plateau), l'autre hydrodynamique (instabilité initialement décrite par Kapitza [1]). Quéré [2] a notamment étudié l'influence de l'écoulement sur l'instabilité de Rayleigh-Plateau pour des épaisseurs faibles devant le rayon de la fibre ($h/R \ll 1$). Nous présentons une étude expérimentale complétant le travail de Quéré lorsque l'épaisseur du film est de l'ordre du rayon de la fibre ($h \sim R$) et quand les deux mécanismes d'instabilité interviennent, et ce pour une large gamme de rayons de fibre et de viscosité.

2 Montage expérimental et présentation des différents régimes

De l'huile silicone Rhodorsil s'écoule sur une fibre de nylon maintenue verticale à l'aide d'un poids (Fig.1 **A**). Trois huiles, de densité $\rho=965 \text{ kg.m}^{-3}$, de tension de surface $\gamma=21 \text{ mN.m}^{-1}$ et de viscosités différentes ($\nu=50,100 \text{ et } 500 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}$) notées dans la suite V50, V100 et V500 ont été utilisées. Le débit est contrôlé à l'aide d'une vanne composée de deux cônes. Cette pièce assure l'axisymétrie et permet de réduire le bruit à l'entrée. La fibre est ainsi enduite d'un film uniforme avec des fluctuations d'épaisseur de l'ordre de $10^{-3}\%$. On observe différents régimes en fonction du rayon de la fibre ($0.175 \text{ mm} \leq R \leq 1.5 \text{ mm}$) et du débit ($0.5R < h < 3R$) représentés sur la figure 1 **B**. Pour des fibres de petits rayons (images (1) et (2)), on observe des gouttes légèrement déformées par la gravité et séparées par un film très mince. En augmentant le rayon et l'épaisseur ((3) et (4)), les structures sont allongées, possèdent un front raide et évoluent sur un film épais.

Trois nombres sans dimension caractérisent l'écoulement, le nombre de Reynolds et de Weber qui comparent inertie, viscosité et tension de surface, et le rapport de forme h_N/R

$$Re = \frac{u_N h_N}{\nu} = \frac{Q}{\nu}, \quad We = \frac{\gamma}{\rho g h_N^2}, \quad \alpha_N = \frac{h_N}{R}$$

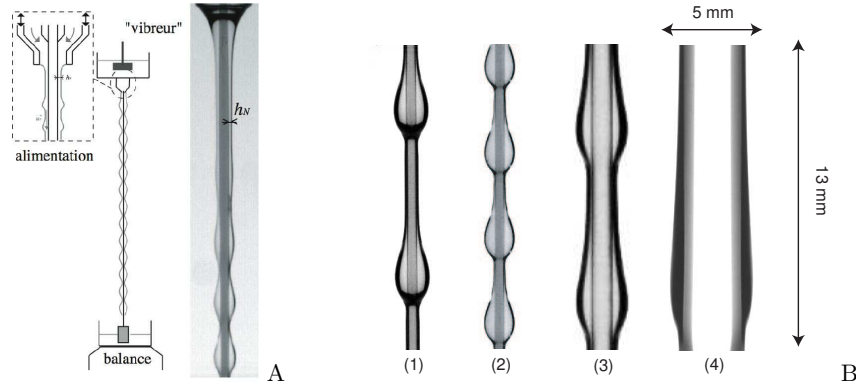


Fig.1. de gauche à droite : **A** : Montage expérimental et photo de l'écoulement à la sortie de la vanne ; **B** : photos de l'écoulement pour (1) : $R=0.2$ mm, $h_N=0.49$ mm, V100 (2) : $R=0.2$ mm, $h_N=0.45$ mm, V50 (3) : $R=0.475$ mm, $h_N=0.8$ mm, V50 (4) : $R=1.5$ mm, $h_N=1$ mm, V50.

à partir de la vitesse moyenne $u_N = Q/h_N$ et de l'épaisseur h_N de la solution d'épaisseur uniforme dite de Nusselt. Les régimes visqueux, à faibles épaisseurs, sont caractérisés par des nombres de Reynolds $Re \sim 10^{-3}$ ($\nu = 500 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $h_N \sim 0.1$ mm) et les régimes inertiels, à grandes épaisseurs, par $Re \sim 10$ ($\nu = 50 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $h_N \sim 1$ mm). La tension de surface domine aux faibles épaisseurs ($We > 10$). A rayon et viscosité fixés, en augmentant h_N , ce qui revient à augmenter Re et diminuer We , on passe donc de régimes dans lesquels l'instabilité est principalement due aux effets capillaires à des régimes où les effets inertiels apparaissent (Fig.2). À faible épaisseur (régime **A**), les effets capillaires dominent et on observe alors un train d'onde régulier, avec une fréquence et une longueur d'onde bien définies, qui est stable sur toute la longueur de la fibre. De tels régimes sont qualifiés de *modes globaux*. Pour des épaisseurs plus élevées (régime **B**), le train d'onde apparaît toujours à même distance de l'alimentation (hauteur d'apparition) et reste très régulier. En revanche, il se déstabilise en aval. Aux fortes épaisseurs (régime **C**), le train d'onde est assez irrégulier et sa longueur d'apparition fluctue au cours du temps. Le système est alors très sensible au bruit extérieur. Pour des fibres de grands rayons ($R > 0.32$ mm), la courbure est faible et les effets capillaires jouent peu : l'instabilité est principalement pilotée par les effets inertiels. Les régimes **A** et **B** ne sont jamais observés : le système se comporte toujours comme un amplificateur de bruit (régime **C**).

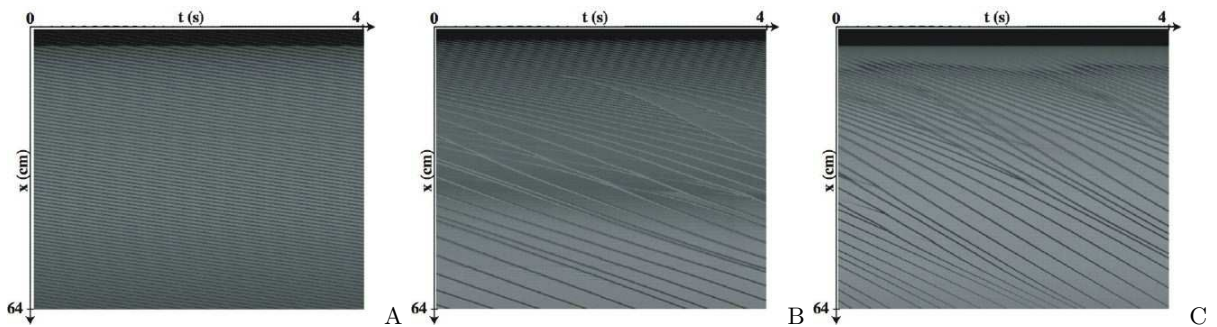


Fig.2. Diagrammes spatiotemporels obtenus avec une caméra linéaire pour $R=0.2$ mm, V100 et **A** : $h_N=0.51$ mm, **B** : $h_N=0.58$ mm, **C** : $h_N=0.74$ mm. Les lignes correspondent aux trajectoires des ondes.

3 Transition Absolu/Convectif

Nous avons retenu deux critères afin de caractériser les différents régimes : la fréquence du train d'onde primaire et la hauteur d'apparition des ondes (figure 3A). À faible débit, la hauteur d'apparition

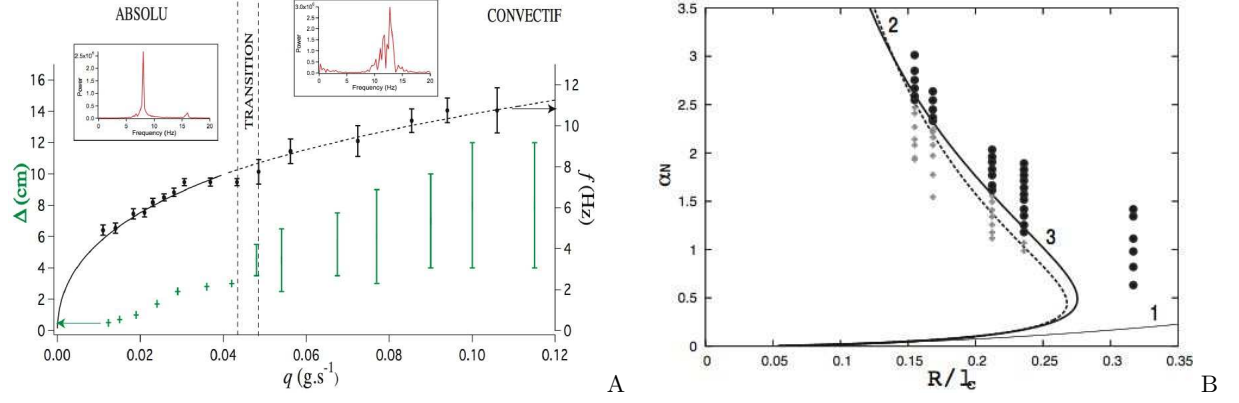


Fig.3. A : Fréquence et hauteur d'apparition des ondes primaires ($R = 0.32$ mm et $\nu = 50$ m²s⁻¹). Des exemples de spectres en fréquence sont placés en encart. Les barres représentent les fluctuations autour d'une valeur moyenne. B : Lieu de la transition entre instabilités convective et absolue en fonction du rapport de forme α_N et R/l_c ($\nu = 50$ m²s⁻¹) correspondants aux relations (3) (pointillés, 2), (3) (fin 1) et Navier-Stokes (plein 3).

est constante et la fréquence bien définie (régimes A et B). Le système se comporte comme un oscillateur auto-entretenu avec une fréquence propre bien définie, les perturbations croissent plus vite qu'elles ne sont advectées par l'écoulement et envahissent tout le domaine : on parle d'instabilité *absolue*. À partir d'un débit critique, la hauteur d'apparition fluctue avec le temps et le train d'onde est irrégulier (régime C). Le système se comporte comme un amplificateur de bruit, les perturbations sont advectées avant de croître : on parle d'instabilité *convective*. On peut comprendre la transition entre instabilités convective et absolue en comparant le temps de croissance de l'onde la plus amplifiée linéairement, τ_m , et le temps que met l'écoulement pour déplacer cette onde de sa propre longueur, τ . Lorsque $h_N \ll R$, $\tau \sim \tau_m$ conduit à la condition

$$\alpha_N = a \left(\frac{R}{l_c} \right)^2 \quad (1)$$

obtenue par Quéré [2] à partir de la relation de dispersion dérivée par Frenkel [3], où l_c est la longueur capillaire ($l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$) et a est une constante numérique déterminée expérimentalement ($a = 1.4 \pm 0.1$). Le calcul exact donne $a = 1.507$ [4]. Ainsi, si l'épaisseur est inférieure à l'épaisseur critique aR^3/l_c^2 , $\tau < \tau_m$, les ondes sont advectées plus vite qu'elles ne croissent et les gouttes disparaissent. En partant des équations d'évolution pour l'épaisseur formulées dans [5,6], il est possible d'étendre ce raisonnement au cas $h_N = O(R)$. Le nombre d'onde correspondant au maximum du taux de croissance est alors $k_m = 1/\sqrt{2}(R + h_N)$, soit une longueur d'onde $\lambda = 2\pi\sqrt{2}(R + h_N)$. Le rapport des temps τ_m/τ est alors égal à :

$$\frac{\tau_m}{\tau} = \frac{4(R + h_N)^5}{u_N h_N l_c^2 R} \frac{u_i}{\sqrt{2}(R + h_N)} \quad (2)$$

où u_i est la vitesse du fluide à l'interface. D'où la condition suivante pour $\tau \sim \tau_m$

$$\frac{\alpha_N}{(u_i/u_N)(1 + \alpha_N)^4} = b \left(\frac{R}{l_c} \right)^2 \quad (3)$$

où le rapport u_i/u_N n'est fonction que de α_N et b est une constante numérique ($b \simeq 1.23$). Notons que la relation (3) se réduit à (1) dans la limite $\alpha_N \ll 1$. On peut alors déterminer pour chaque rayon l'épaisseur

critique au delà de laquelle le temps d'advection est inférieur au temps de croissance de l'instabilité, c'est-à-dire les ondes sont advectées plus vite qu'elles ne croissent et l'instabilité est convective. En deçà, l'instabilité est absolue. Dans le plan $(\alpha_N, R/l_c)$, les courbes correspondant aux équations (1) et (3) se comparent favorablement à la transition entre modes globaux (croix) et régimes irréguliers (ronds) observée dans l'expérience et au résultat de l'étude de stabilité à partir des équations de Navier-Stokes axisymétriques (figure 3B) [4]. La limite $\alpha_N \rightarrow 0$ de films minces devant le rayon de la fibre correspond au cas d'un film tombant le long d'un plan vertical pour lequel l'instabilité est toujours convective. A l'autre extrême, pour des films épais, i.e α_N grand, l'effet déstabilisant de la courbure azimutale $1/R+h_N$, moteur de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, diminue. L'advection des ondes l'emporte alors sur l'instabilité et on est encore en régime convectif. Il existe donc une gamme de valeurs de α_N pour lesquelles le mécanisme d'instabilité de Rayleigh-Plateau domine sur l'advection de ondes, l'instabilité étant alors absolue. Pour des fibres de grands rayons ($R > 0.28l_c$), le mécanisme de Rayleigh-Plateau est affaibli et l'instabilité est toujours convective.

4 Ondes non linéaires : réponse à un forçage

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'étude des ondes non linéaires (figure 1 B). On se place alors dans les régimes convectifs (amplificateur de bruit) qui répondent à un forçage. On étudie la réponse du système à un bruit blanc (bruit ambiant) ou à une perturbation périodique obtenue en variant la hauteur de liquide du réservoir supérieur à l'aide d'un vibreur. Nous avons mesuré le taux de croissance spatial, la fréquence la plus amplifiée spatialement f_M (fréquence sélectionnée par le système en présence d'un bruit blanc) et f_c la fréquence de coupure à partir de laquelle le forçage n'affecte plus la dynamique (Fig.4C et D). On force alors avec une fréquence $0 < f_{for} < f_c$. Différentes réponses sont observées. Sur la figure 4, on représente la réponse du système à l'aide d'un diagramme spatiotemporel, de l'évolution temporelle de l'épaisseur à différentes distances (à 8 cm (a), 18 cm (b) et 30 cm (c) de l'alimentation) et des spectres en fréquence correspondants. Lorsque l'on force à une fréquence proche de f_M (Fig.4A), le système répond directement à la fréquence imposée. Le signal en haut de la fibre est quasiment sinusoïdal. Lorsque les ondes se propagent le long de la fibre, leur amplitude augmente, leur front se raidit et leur contenu en fréquence s'élargit. Lorsque l'on force à $f_{for} \sim f_M/2$ (Fig.4B), le système répond à $2f_{for}$ avec un signal quasi sinusoïdal. Les ondes se raidissent et on observe, à une distance fixe de l'alimentation, un appariement conduisant à un train d'onde périodique à la fréquence imposée f_{for} . Notons que la réponse est uniquement spatiale (les signaux sont périodiques en temps). Le système répond en sélectionnant toujours l'harmonique la plus amplifiée et on obtient finalement des ondes stationnaires non linéaires périodiques qui se propagent à vitesse constante sans se déformer (figure 5A).

A basses fréquences, les ondes sont solitaires, sont de grande amplitude et ont un front très raide. Les oscillations capillaires entre les ondes sont amorties par la viscosité. A hautes fréquences, les ondes sont assez proches pour interagir : leurs fronts et leurs queues sont plus étirées, leur amplitude et donc leur vitesse plus faible. La variation de la vitesse avec la fréquence est représentée sur la figure 5B. Un modèle a été formulé dans le cadre de la théorie de la lubrification (évolution lente en temps et en espace des modulations du film)[7]. La cohérence de l'écoulement suivant l'épaisseur est supposé suffisante pour que la distribution de vitesse soit en tout point proche de la solution de Nusselt. On obtient alors, après intégration des équations du mouvement suivant l'épaisseur du film un système d'équations d'évolution couplées pour h et le débit local q . Ce modèle prend en compte l'inertie, le frottement visqueux avec la fibre, la tension de surface et aussi la diffusion de la quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement (dissipation visqueuse). Les solutions du modèle sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux (profils et vitesse des gouttes). En traçant les lignes de courant dans le référentiel de l'onde (Fig.5C), on observe deux types de structures différentes.

Dans un cas, il n'y a pas de transport de matière ((1) et (2)a), dans l'autre cas, généralement pour de petits rayons et des faibles épaisseurs, on observe des structures symétriques comportant une zone de recirculation entre deux points de stagnation : on peut faire l'analogie avec un anneau liquide glissant en mouillage total sur un film mince quasi-statique ((3) et (2)b). On appelle ces structures "gouttes", en opposition aux ondes.

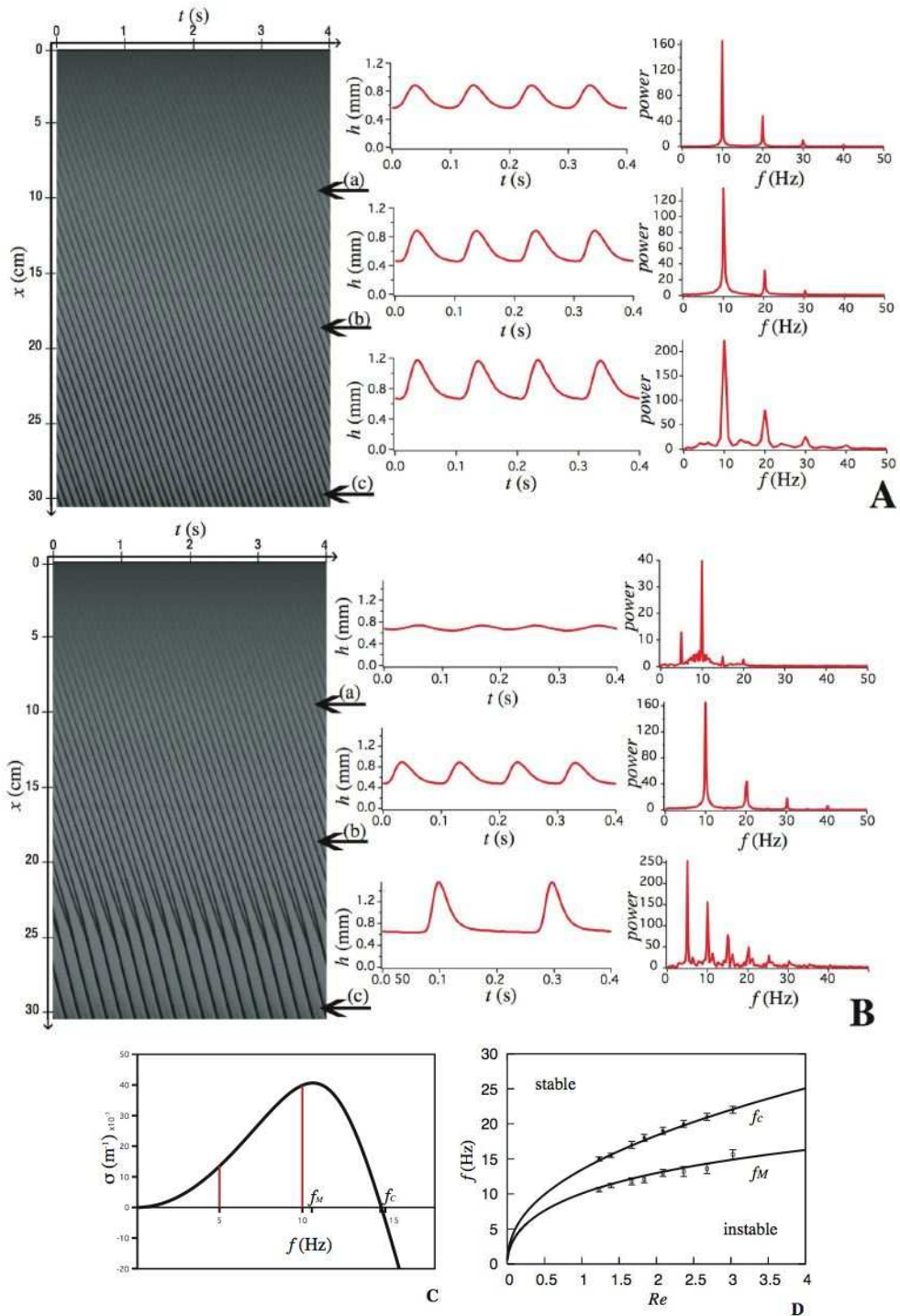


Fig.4. Réponse à un forçage $R=1.5\text{ mm}$, $h_N=0.87\text{ mm}$, $f=10\text{ Hz}$ (A) et $f=5\text{ Hz}$ (B) et taux de croissance (C). Fréquence maximale et fréquence de coupure en fonction du nombre de Reynolds pour $R=0.475\text{ mm}$, V50 (D).

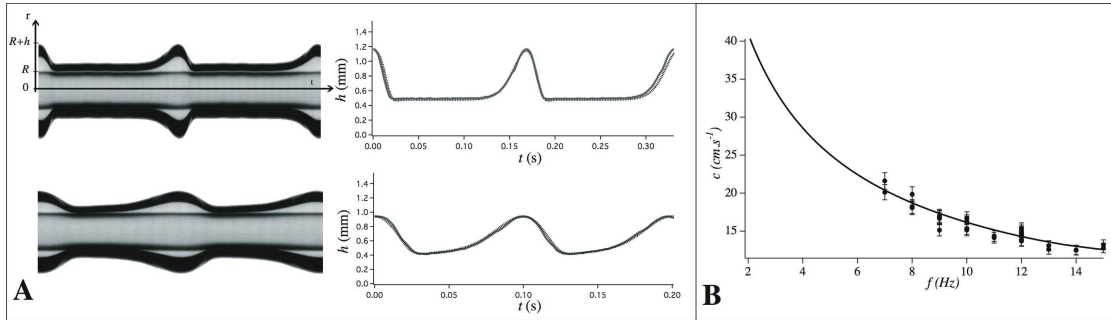


Fig.5. Résultats obtenus pour $R = 0.475\text{mm}$, $h_N = 0.56\text{mm}$ **A** : Ondes stationnaires obtenues pour, de haut en bas : $f_{for} = 6\text{Hz}$ et $f_{for} = 10\text{Hz}$. Photos de l'écoulement et comparaison des profils expérimentaux (ligne pleine) et solutions du modèle (ligne pointillée). **B** : Vitesse en fonction de la fréquence

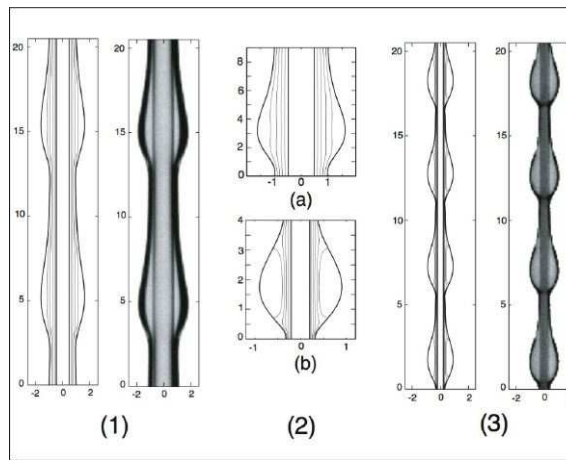


Fig.6. Profils et lignes de courants pour (1) $R = 0.475\text{mm}$, $h_N = 0.55\text{mm}$ (détail (2a)) et (3) $R = 0.2\text{mm}$, $h_N = 0.45\text{mm}$ (détail (2b)).

5 Conclusion

Nous avons caractérisé expérimentalement les différents régimes d'écoulement en faisant varier le débit, le rayon de la fibre et la viscosité. En particulier, l'étude de l'instabilité primaire a mis en évidence une transition entre une instabilité convective et une instabilité absolue. L'étude des instabilités secondaires qui désorganisent l'écoulement (transition entre les modes globaux stables et instables) est la suite logique de ce travail. Dans un deuxième temps, on cherchera à comprendre la sélection entre structures en forme de goutte et ondes sans transport de masse.

Références

1. P.L. KAPITZA, in *Collected papers of P. L. Kapitza*, Pergamon (1948)
2. D. QUÉRÉ, *Europhysics Letters*, **13**, 721 (1990).
3. A.L. FRENKEL, *Europhysics Letters*, **18**, 583 (1992).
4. C. DUPRAT, C. RUYER-QUIL, S. KALLIADASIS & F. GIORGIUTTI-DAUPHINÉ, *Phys. Review Letters*, **98**, 244502 (2007).
5. I.L. KLIAKHANDLER, S.H. DAVIS & S.G. BANKOFF, *Journal of Fluid Mechanics*, **429**, 381 (2001).
6. R.V. CRASTER & O.K. MATAR, *Journal of Fluid Mechanics*, **553**, 85 (2006).
7. C. RUYER-QUIL, P. TREVELEYAN, F. GIORGIUTTI-DAUPHINÉ, C. DUPRAT & S. KALLIADASIS, *Journal of Fluid Mechanics*, soumis.

Etude physique numérique du fonctionnement de composants semiconducteurs distribués pour applications très hautes fréquences

Ali El Moussati¹ & Christophe Dalle²

¹ Laboratoire d'Electronique et Télécommunications, ENSA Oujda, Maroc

² IEMN-DHS, UMR 8520, Groupe Silphyde, Cité Scientifique, Avenue Poincaré
BP 60069, 59652 Villeneuve d'Ascq Cédex

christophe.dalle@iemn.univ-lille1.fr

Résumé. Un modèle physique numérique électromagnétique temporel bidimensionnel pour la simulation du fonctionnement de composants semiconducteurs distribués haute-fréquences est décrit. Il est basé sur une résolution cohérente des équations de Maxwell et des équations constituant le modèle macroscopique de transport de type dérive-diffusion. Son potentiel est illustré à l'aide de résultats portant sur le fonctionnement en régime d'amplification et d'oscillations continues d'une diode à avalanche et temps de transit distribuée microonde.

Abstract. A time-domain two-dimensional electromagnetic physical modelling of non linear distributed semiconductor devices is presented. It is based on a self-consistent solution of both Maxwell's equations and a macroscopic transport model based on the drift-diffusion approximation. The microwave travelling-wave IMPATT (IMPact Avalanche and Transit Time) diode or Distributed IMPATT diode (DIMPATT) is the non linear test structure chosen to validate the model. RF simulations under amplification and CW oscillation operating mode have been performed in order to illustrate the potential of the new modelling.

La modélisation physique numérique quasi-électrostatique (ou électrique) est utilisée de façon intensive dans l'étude des composants semiconducteurs haute-fréquences. Cette approche simplifiée ne répond plus systématiquement aux impératifs résultant de l'évolution actuelle de la technologie des composants et circuits électroniques. En effet, des phénomènes physiques liés au transport des charges libres mais aussi les effets électromagnétiques (EM) doivent être pris en compte dans la conception des circuits haute-fréquences et de forte intégration comme les MMICs ou les structures distribuées [1]. L'approche physique électromagnétique est la plus appropriée pour répondre à ces nouvelles exigences mais représente un effort important en terme de développement de modèle et coût d'exploitation [2]. Dans ce contexte, nous avons développé un modèle physique numérique temporel EM basé sur une résolution cohérente des équations de Maxwell et des équations de conservation constituant le modèle macroscopique stationnaire de transport des charges libres de type dérive-diffusion. Ce modèle est décrit dans ces grandes lignes. Son potentiel est illustré par des résultats provenant de l'étude physique du fonctionnement non linéaire d'une diode à avalanche et temps de transit distribuée (DIMPATT en terminologie anglo-saxonne) en régime d'amplification et d'oscillations continues aux fréquences microondes. Le fonctionnement de ce composant, dont la structure est proche de celle d'une ligne de transmission, est basé sur la propagation et l'amplification d'une onde EM dans un milieu actif présentant une conductivité dynamique négative [3].

1 Modélisation électromagnétique dans le domaine temporel

La structure géométrique d'une diode DIMPATT ressemble à celle d'une diode IMPATT méssa classique à double zone de transit étirée suivant par exemple une direction Z (Fig. 1). La séquence des couches épitaxiées suivant la direction X est P+PNN+. Les couches P+ et N+ fortement dopées forment les collecteurs ohmiques alors que la zone NP centrale constitue la zone active.

Les plans (Y, Z) extrêmes sont considérés comme des conducteurs parfaits. Deux directions de l'espace se distinguent en rapport avec les phénomènes physiques régissant le comportement dynamique de la structure. En effet, les phénomènes de transport des charges se produisent principalement suivant la direction X alors que l'onde électromagnétique se propage suivant la direction Z . La dimension du composant suivant la direction Y est considérée comme suffisamment importante pour considérer les grandeurs physiques comme uniformes dans cette direction et de plus négliger les effets au niveau des plans (X, Z) extrêmes. Suivant toutes ces hypothèses, l'espace modélisé se limite à un plan (X, Z) . Ainsi, d'un point de vue électromagnétique, la diode DIMPATT est similaire à un guide d'onde actif multicouche à plans parallèles.

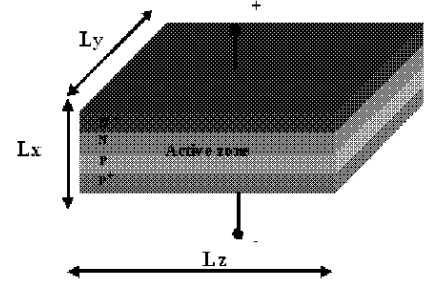


Fig.1. Structure de la diode DIMPATT.

1.1 Formulation analytique du modèle électromagnétique

La modélisation électromagnétique d'un composant semiconducteur dans le domaine temporel repose sur les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J}_c + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Un modèle de transport des charges libres doit être associé pour calculer la densité de courant de conduction. Ce modèle est ici un modèle macroscopique stationnaire de type dérive-diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= -\text{div}\mathbf{J}_n + G - U \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_n (J_{nx}, J_{nz}) \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= +\text{div}\mathbf{J}_p + G - U \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_p (J_{px}, J_{pz}) \\ \mathbf{J}_c (J_{cx}, J_{cz}) &\quad \text{avec} \quad J_{cx} = J_{nx} + J_{px} \quad \text{et} \quad J_{cz} = J_{nz} + J_{pz} \\ J_{nx} &= +n\mu_n (E_x - v_{nz}B_y) + \mu_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad J_{nz} = +n\mu_n (E_z + v_{nx}B_y) + \mu_n \frac{\partial n}{\partial z} \\ J_{px} &= +p\mu_p (E_x - v_{pz}B_y) - \mu_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad J_{pz} = +p\mu_p (E_z + v_{px}B_y) - \mu_p \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

Dans le but de tenir compte à la fois de l'influence des charges électriques statiques, résultant du profil de dopage de la diode, et des ses conditions de polarisation continue, on distingue les composantes statique et dynamique du champ électrique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{DC} + \mathbf{E}_{RF}$$

Ainsi, les équations de Maxwell effectivement résolues sont :

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E}_{RF} &= -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{car} \quad \text{rot}\mathbf{E}_{DC} = 0 \\ \text{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J}_c + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}_{RF}}{\partial t} \end{aligned}$$

En régime de polarisation continu, le transport des charges est purement unidimensionnel suivant la direction X . En conséquence, un simple modèle statique unidimensionnel (1D) suffit pour déterminer les valeurs initiales de toutes les grandeurs physiques à l'instant $t=0$. Cette solution 1D est dupliquée suivant l'axe Z pour obtenir la solution initiale 2D complète.

1.2 Formulation numérique du modèle électromagnétique

La formulation numérique du modèle repose sur la méthode des différences-finies et plus spécialement sur des schémas numériques explicites. Cette formulation est en effet naturellement adaptée au calcul sur

machine à architecture parallèle. La discrétisation spatio-temporelle des équations de Maxwell repose sur la méthode classique proposée par Yee [4]. Les équations de continuité dans le modèle de transport sont discrétisées suivant le schéma explicite du deuxième ordre de Nessyahu-Tadmor [5].

Trois types de conditions aux limites sont considérées :

- L'hypothèse de conducteurs métalliques parfaits aux limites des zones P+ et N+ permet d'imposer des composantes de champ électrique tangentielle nulles aux plans (Y, Z) extrémaux.
- Un générateur de tension idéal permet d'imposer la composante de champ électrique dans le plan d'entrée (X, Y).
- Des conditions aux limites absorbantes (ABC) de type Higdon sont imposées dans le plan (X, Y) de sortie.

La figure 2 présente l'organigramme du modèle.

La méthode de décomposition de domaine a été utilisée pour adapter de façon optimale l'exploitation du modèle sur un ordinateur à architecture parallèle [6]. Cette méthode revient à diviser la structure simulée en portions de taille égale et à affecter les calculs correspondants sur un des processeurs de la machine. La difficulté principale provient de la gestion des conditions aux limites entre les différentes portions. Cette méthode a été implémentée à l'aide de la bibliothèque MPI (Message Passing Interface) [7]. Le modèle est écrit en fortran 90 et exploité sur une machine IBM RS600/SP/375 MHz [8]. Avec 16 nœuds disponibles partageant une mémoire commune, le facteur d'accélération atteint une valeur de l'ordre de 10 par rapport à une machine monoprocesseur. Les temps d'exploitation sont de l'ordre de 12 à 48 heures.

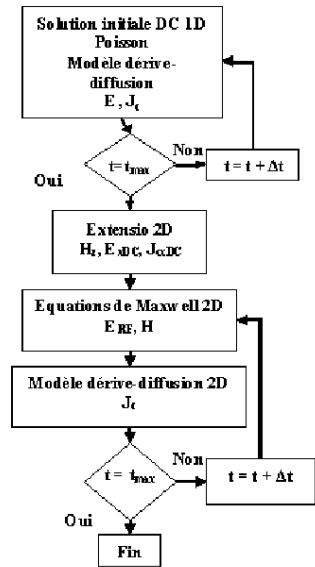


Fig.2. Organigramme du modèle

2 Résultats

La structure de test est une diode DIMPAT millimétrique au silicium à double zone de transit à profil de dopage uniforme. L'épaisseur et le niveau de dopage des zones épitaxiées suivant la direction X sont respectivement : P+ : $0.25\mu\text{m}/2.2 \times 10^{24}\text{m}^{-3}$, P : $0.25\mu\text{m}/2. \times 10^{23}\text{m}^{-3}$, N : $0.25\mu\text{m}/2. \times 10^{23}\text{m}^{-3}$ et N+ : $0.25\mu\text{m}/2.2 \times 10^{24}\text{m}^{-3}$. La valeur de l'incrément spatial dans la direction X est typiquement 10^{-8} m et de 10^{-7} m dans la direction de propagation Z. La valeur de l'incrément temporel et au pire de $8 \cdot 10^{-17}$ s pour les équations de Maxwell et de $4 \cdot 10^{-15}$ s pour les équations de continuité. A 100 GHz, une période simulée dure 10^{-11} s.

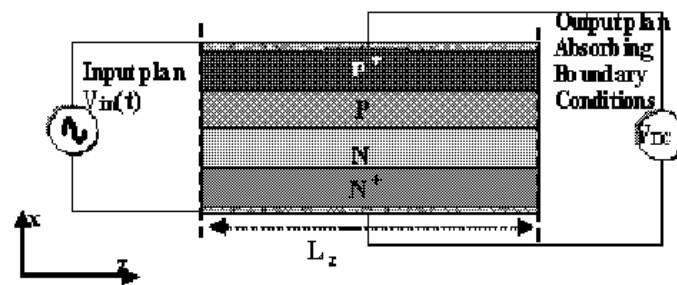


Fig.3. Structure de diode DIMPAT simulée

La structure simulée typique est représentée Fig. 3. Un générateur de tension sinusoïdal est connecté dans le plan (X, Y) d'entrée. Les conditions aux limites absorbantes appliquées dans le plan (X, Y) de sortie reviennent à considérer le guide actif comme connecté en toutes circonstances à son impédance

caractéristique. Autrement dit, le modèle permet l'étude de la propagation d'une onde EM progressive dans un milieu semiconducteur actif fortement non linéaire que ce soit en régime d'amplification ou en régime d'oscillations. La distribution spatio-temporelle du champ EM permet de calculer le gain entre l'entrée et la sortie du dispositif par l'intermédiaire de l'analyse de Fourier de la puissance obtenue par le théorème de Poynting. Les résultats présentés ici concernent un fonctionnement en régime d'amplification et en régime d'oscillations à la température de 500 K.

2.1 Régime d'amplification

Les caractéristiques géométriques et technologiques de la zone active NP de la diode DIMPATT ainsi que ses conditions de polarisation continue et radiofréquence déterminent une bande de fréquence à l'intérieur de laquelle la conductance transversale dynamique (direction X) de la diode est négative et est ainsi capable d'augmenter l'intensité du champ EM s'y propageant longitudinalement (direction Z). A titre d'exemple, la figure 4 montre l'évolution fréquentielle du gain entrée/sortie de la diode définie précédemment pour trois valeurs de densité de courant de polarisation continue J_0 . La longueur de la diode est ici de 200 μm dans la direction de propagation Z . Le niveau du signal d'entrée est ici de 0,2 V. D'un point de vue général, les résultats montrent que la diode présente un gain positif sur une large bande de fréquence atteignant facilement plusieurs dizaines de GHz et même une centaine de GHz pour la valeur de densité de courant de polarisation continue la plus élevée. Cependant, ce gain n'est pas uniforme. Il présente une valeur maximale dont l'acuité augmente avec J_0 . Cette valeur peut être associée à une fréquence de résonance de façon comparable à ce qui est fait pour la diode IMPATT de structure méssa classique. Pour les fréquences de fonctionnement au-delà de cette fréquence de résonance, le gain en puissance du composant décroît lentement alors qu'aux fréquences de fonctionnement inférieures, il décroît beaucoup plus abruptement. En effet, dans ce cas, les conditions de transit des électrons et des trous ne permettent pas à la structure de présenter une résistance négative transversale et la diode n'est pas capable d'amplifier. L'onde EM se propage à travers un milieu semiconducteur globalement à pertes. Ces résultats sont qualitativement cohérents avec des résultats publiés précédemment [9]. Ils montrent que le modèle physique permet ici une bonne définition du gain de la structure et une bonne description des phénomènes de pertes.

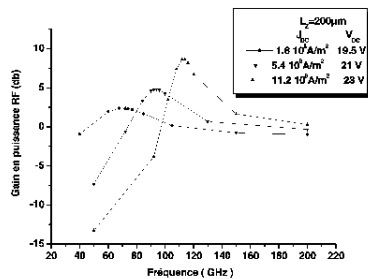


Fig.4. Gain en fonction de la fréquence.

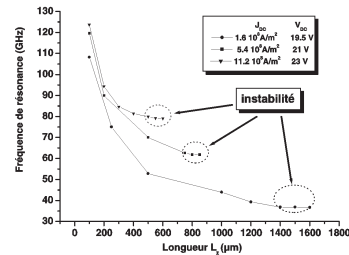


Fig.5. Fréquence de résonance en fonction de la longueur L_z du composant.

La figure 5 présente l'évolution de la fréquence de résonance en fonction de la longueur dans la direction Z de la structure pour trois valeurs de densité de courant de polarisation continue. Pour une valeur de densité J_0 , la fréquence de résonance ressemble à une exponentielle décroissante de la longueur L_z . Cependant, lorsque la diode atteint une certaine dimension, son comportement dynamique devient instable. Cet effet parasite se produit pour des longueurs de composant de plus en plus faibles au fur et à mesure que la densité de courant de polarisation continue augmente. Cette évolution résulte de l'augmentation de la conductance dynamique négative avec le densité de courant J_0 . Pour une longueur L_z donnée de composant, on retrouve bien que la fréquence de résonance augmente avec J_0 .

En régime d'oscillations, le plan d'entrée (X, Y) est considéré comme court-circuité et les conditions aux limites absorbantes sont maintenues dans le plan de sortie. En général, les oscillations démarrent à partir des fluctuations liées au bruit ou à cause du régime transitoire résultant de la mise en régime de polarisation continue du composant. Dans notre cas, la simulation démarre dans les conditions d'un régime de polarisation continue établi et il nous faut donc introduire une légère perturbation en début de simulation dans le plan d'entrée pour provoquer, le cas échéant, le démarrage d'une oscillation. Ainsi, pour des conditions de polarisation fixées, la longueur du composant dans la direction de propagation Z a été variée et différents modes de fonctionnement ont été observés. La figure 7 montre l'évolution temporelle de la tension radiofréquence dans le plan (Y, Z) de sortie du composant pour une tension de polarisation continue $V_{dc} = 20.5$ V et une densité de courant de polarisation continue $J_0 = 4.8 \cdot 10^8$ A.m⁻². Pour une longueur de composant de $200 \mu\text{m}$, la perturbation initiale entraîne une légère réaction mais l'onde EM en résultant se propage sur une trop courte distance et demeure d'une trop faible amplitude pour compenser les pertes ohmiques dans la structure et en fin compte l'oscillation naissante s'amortit. Une longueur de composant de l'ordre de $500 \mu\text{m}$ apparaît comme la longueur minimale pour que l'oscillation puisse rester entretenue.

2.2 Régime continu d'oscillations

Malgré l'intensité importante du champ EM atteinte durant la phase transitoire, le niveau de tension hyperfréquence en régime établi demeure faible car l'onde EM amplifiée peine à compenser les pertes radio-fréquences de la structure. Pour des longueurs de composant plus importantes comme $L_z = 750, 800$ et $850 \mu\text{m}$, l'amplitude du niveau hyperfréquence de sortie est plus importante. Le composant présente un niveau de tension hyperfréquence de sortie significatif en régime continu d'oscillations de l'ordre de 5 V. Le taux de modulation radio-fréquence sature à un niveau de l'ordre de 25%. Ces résultats sont cohérents avec ceux issus de travaux précédents [10]. A ce propos, la figure 7 présente le spectre de la tension de sortie pour une longueur de composant de $800 \mu\text{m}$. Ce résultat montre que le signal généré est à peu près monochromatique. La fréquence fondamentale d'oscillation est ici de l'ordre de 62 GHz. On observe simplement l'existence d'une faible composante de tension à l'harmonique 2 résultant du comportement naturellement non-linéaire du composant. La figure 7 nous montre enfin que pour des longueurs de structure supérieure à $1000 \mu\text{m}$, le comportement dynamique du composant tend à devenir instable et un fonctionnement paramétrique est observé.

La figure 8 est maintenant une comparaison entre les évolutions de la tension hyperfréquence de sortie de la structure en fonction de sa longueur pour deux points de polarisation continue différents. D'un point de vue général, les résultats montrent que le régime de fonctionnement radiofréquence demeure similaire dans les deux cas. Cependant, les plages de longueur de composant permettant l'obtention d'un régime d'oscillations continu sont différentes; de l'ordre de $500\text{-}950 \mu\text{m}$ pour $V_{dc} = 20,5$ V et de l'ordre de $1200\text{-}1800 \mu\text{m}$ pour $V_{dc} = 19,5$ V. En effet, le niveau de résistance négative transversal est plus faible pour le niveau de polarisation continue le plus bas. En conséquence, l'onde EM a besoin de se propager et de s'amplifier sur une distance plus importante pour compenser les pertes radiofréquences et atteindre un niveau suffisant permettant l'obtention d'un régime d'oscillations stable. Notons que dans les deux régimes de polarisation, une longueur de composant trop importante fini par entraîner un régime de fonctionnement instable. La figure 8 nous montre enfin que pour des longueurs de structure supérieure à $1000 \mu\text{m}$, le comportement dynamique du composant tend à devenir instable et un fonctionnement paramétrique est observé.

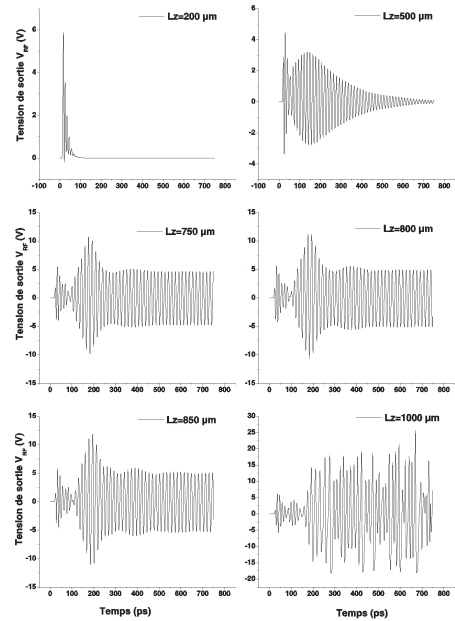


Fig.6. Tension de sortie en fonction de la longueur L_z du composant.

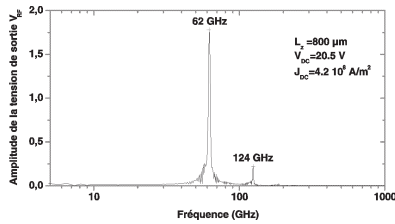


Fig. 7. Spectre fréquentiel de la tension de sortie.

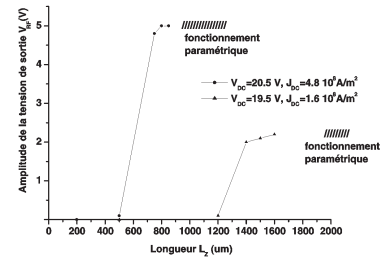


Fig. 8. Tension de sortie en fonction de la longueur du composant

3 Conclusion

Une modélisation physique numérique temporelle électromagnétique est présentée dans cet article. Elle est basée sur la résolution cohérente dans deux dimensions de l'espace des équations de Maxwell et d'un modèle de transport macroscopique de type dérive-diffusion. Il est appliqué à un composant semi-conducteur fortement non linéaire à savoir la diode DIMPATTT dont le principe de fonctionnement est basé sur la propagation et l'amplification d'une onde EM dans un milieu semiconducteur actif présentant une conductivité dynamique négative dans la direction transversale à la direction de propagation de l'onde. Les capacités actuelles du modèle sont illustrées par des résultats concernant le mode de fonctionnement de la structure en régime d'amplification et d'oscillations continues. Notre but est dans un avenir proche le couplage d'un modèle de transport des charges de type énergie-moment permettant l'étude de structures fonctionnant au THz. De plus, la possibilité d'inclure dans la simulation les connexions au composant ainsi que des éléments de circuit externes sera nécessaire pour augmenter le caractère prédictif du modèle [11].

Références

1. K. C. GUPTA, Emerging trends in Millimeter-Wave CAD, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **46** (6), 747 (1998)
2. R. O. GRONDIN, S. M. EL-GHAZALY & S. GOODNICK, A review of global modeling of charge transport in semiconductors and full-wave electromagnetics, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **47** (6), 817 (1999)
3. M. FRANZ & J. B. BEYER, The travelling-wave IMPATT mode, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **26**, 861 (1978)
4. K. S. YEE, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **14** (3), 302 (1966)
5. H. NESSYAHU & E. TADMOR, Non-Oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws, *J. Comp. Phys.*, **87**, 408 (1990)
6. A. TOSSELI & O. WIDLUND, Domain decomposition method — Algorithms and Theory, *Springer series in Computational Mathematics*, **34** (2004)
7. W. GROPP, E. LUSK & A. SKJELUM, Using MPI : portable parallel programming with Message-Passing-Interface, *Cambridge, Massachussets MIT Press* (2004).
8. A. EL MOUSSATI, *Nouveaux algorithmes pour la modélisation physique macroscopique électronique et électromagnétique des circuits microondes à l'état solide* Thèse d'Université, Lille, Décembre 2004
9. Y. FUKUOKA & T. ITOH, Field analysis of a millimeter-wave GaAs double-drift IMPATT diode in the travelling-wave mode, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **33**, 216 (1985)
10. R. K. MAINS & G. I. HADDAD, Travelling-wave IMPATT amplifiers and oscillators, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **34** (9), 965 (1986)
11. M. FRANZ & J. B. BEYER, The travelling-wave IMPATT diode : Part II- The effective wave impedance and equivalent transmission line, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **28** (3), 215 (1980)

Détermination de partitions par algorithme génétique sur critère de nombre maximal de séquences réalisées

U. Santos Freitas, E. Roulin, & C. Letellier

CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex
 Ubiratan.Freitaas@coria.fr

Résumé. L'identification d'une partition approchée à partir de données expérimentales n'est pas toujours une tâche aisée et seules quelques techniques ont été proposées pour répondre à une telle question. Le critère du maximum de séquences réalisées a été récemment introduit mais son implémentation restait délicate lorsque le nombre de symboles était supérieur à trois ou que la dynamique n'était pas suffisamment développée. Un algorithme d'évolution est ici proposé pour améliorer la fiabilité de cette technique. Sa précision est indiquée sur une dynamique de type Rössler corrompue par du bruit.

Abstract. Identifying an approximated partition from experimental data is not always a trivial task and only a few techniques were proposed to address this problem. The maximum number of realized sequences criterion was recently introduced but its implementation has remained difficult when the number of symbols was greater than three or the dynamics was not sufficiently developed. An evolutionary algorithm is here proposed to improve the reliability of this technique. Its accuracy is tested on a noise corrupted Rössler system.

1 Introduction

Lorsqu'une analyse par dynamique symbolique est entreprise, se pose souvent le difficile problème du choix de la partition de l'ensemble invariant. Lorsque la dynamique est déterministe et peu bruitée, la partition génératrice peut être déterminée sur des critères topologiques [1,2]. Toutefois, lorsque la dynamique est suffisamment bruitée ou résulte de la superposition d'une composante déterministe à une composante stochastique, ces techniques ne permettent plus la détermination d'une partition sans ambiguïté. Différentes techniques peuvent alors être employées. L'une d'entre elles, très simple à mettre en œuvre consiste à choisir une partition de telle manière à assurer l'équipartition des symboles [3]. L'inconvénient d'une telle partition est qu'elle diffère souvent de la partition topologique [4]. Aussi, il a été récemment proposé de choisir une partition de manière à ce que le nombre de séquences d'une longueur donnée soit maximum [5]. Le problème est qu'un tel critère implique de résoudre un problème de recherche de minima non trivial. De manière à optimiser la recherche de la meilleure partition, un algorithme génétique a donc été développé. Des partitions jusqu'à 5 symboles ont été obtenues avec des temps raisonnables de calculs. La fiabilité du code est démontrée sur des dynamiques multimodales bruitées (système de Rössler). Le critère choisi — nombre maximum de séquences réalisées — n'est jamais pris en défaut et une statistique sur une dizaine de recherches permet d'identifier avec un bon indice de confiance la partition optimale.

2 Critère du nombre maximum de séquences

La partition génératrice se définit lorsque l'entropie topologique atteint son maximum, au moins lorsque la dynamique symbolique est complète. Ainsi l'entropie d'une chaîne de symboles produite avec une partition statistique ou tout autre type de partition imparfaitement localisée ne peut être plus grande que l'entropie topologique d'un système dynamique [6]. L'entropie topologique peut être approchée par la relation

$$h_T(\Sigma_q(\mathbf{p})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\log(w_n)}{n} \quad (1)$$

où w_n est le nombre de séquence de longueur n avec des symboles choisis sur l'ensemble des q symboles $\Sigma_q(\mathbf{p})$. Evidemment l'entropie topologique est bornée par q^n . L'approximation est obtenue en considérant cette limite comme décrivant le taux de croissance exponentielle avec n des séquences réalisées de longueur n , et ainsi de suite pour une liste finie de séquences. Une droite de régression est estimée pour traduire la dépendance de w_n en fonction de n sur une échelle logarithmique, et la pente est prise comme approximation de l'entropie topologique.

Puisque nous nous intéressons à l'étude de dynamiques corrompues par du bruit, il n'est peut être pas si fiable d'utiliser une telle estimation, en partie parce que le nombre de données est nécessairement limité. Aussi, il devrait être efficace de compter les séquences réalisées pour une longueur donnée n , $N_q(\mathbf{p})$. La partition est alors choisie de telle manière que le nombre relative de séquences $\tilde{N}_q(\mathbf{p}) = \frac{N_q(\mathbf{p})}{q^n}$ soit maximum.

Trouver une partition utilisant ce critère revient à trouver un vecteur \mathbf{p} de points critiques qui rendent $\tilde{N}_q(\mathbf{p})$ maximum. En d'autres termes, le taux $\tilde{N}_q(\mathbf{p})$ est une fonction **d'objectif** dont le maximum doit être trouvé. Cette fonction dépend des données, est nonlinéaire et possède plusieurs maxima. De plus, elle implique seulement un nombre fini de valeurs, conduisant à l'existence de plateaux. En fait, son gradient est partout nul sauf en un nombre fini de points où la fonction n'est pas continue. En résumé, c'est un problème assez difficile d'optimisation du gradient basée sur une procédure de recherche de minima. En conséquence, une recherche exhaustive n'est pas toujours réalisable. La dimension de l'espace de recherche est $q - 1$, ce qui rend une technique de recherche brute le plus souvent inefficace et au temps de calcul prohibitif pour $q > 3$.

Dans une première étude utilisant le critère de nombre maximum de séquences réalisées [5], il a été montré que plus est développée la dynamique, plus proche de la partition topologique est la partition approchée. Ces résultats sont en fait dépendant de la longueur des séquences symboliques considérées. Il sera montré ici qu'avec un algorithme génétique — plus rapide d'une méthode brute — il est possible de réduire significativement une telle dépendance. Puisqu'il a été montré que le critère du nombre maximum de séquences réalisées fournit toujours de meilleurs résultats qu'une partition statistique, cette amélioration conduit à des partitions qui peuvent être utilisées avec un taux de confiance bien supérieur à ce qui était obtenu auparavant.

3 Stratégie évolutionniste

Dans ce travail, une stratégie évolutionniste est utilisée pour la recherche de la partition fournissant le taux maximum de séquences réalisées $\tilde{N}_q(\mathbf{p})$. Une telle méthode a été choisie en raison de son implémentation simple et de sa capacité à gérer de multiples maxima locaux et des plateaux présents au sein de la fonction d'objectif. Une stratégie évolutionniste est une variante d'un algorithme évolutionniste. Elle copie les processus d'évolution naturelle [7].

L'algorithme est basé sur une population $P(t)$, de ν individus. Chacune d'eux représentent une solution possible du problème, c'est-à-dire une partition particulière. Un individu est représenté par un vecteur $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{q-1}$ contenant les points correspondant aux partitions tentées classées selon l'ordre numérique ascendant. Premièrement, une population initial de ν individus est créée, avec des points critiques choisis selon une répartition aléatoire uniforme sur l'intervalle visité. Ensuite, tous les individus sont évalués. Cette évaluation correspond au calcul du taux $\tilde{N}_q(\mathbf{p})$ pour les points particuliers de la partition estimée et des données utilisées. Les individus les « meilleurs » et les plus « mauvais » sont repérés. Le programme entre alors dans sa boucle principale. Le critère d'arrêt est une limite sur le nombre de fonctions d'évaluation, c'est-à-dire sur le nombre de fois que le taux $\tilde{N}_q(\mathbf{p})$ est calculé. A chaque passage, le programme tente de créer de nouveaux individus au moins meilleurs que d'autres membres de la population. Une fois qu'un tel individu est obtenu, il remplace l'individu le plus mauvais de la population, et la boucle continue.

Un nouvel individu est créé selon deux procédures : la « reproduction sexuelle » et la « mutation » , dont les noms reflètent leurs contreparties biologiques. La « reproduction » se fait par le choix aléatoire de deux individus de la population, les « parents ». Le nouvel individu est créé en copiant les points critiques aléatoirement à partir de ceux des « parents ». A la fin du processus, le nouvel individu aura, en moyenne,

la moitié des points venant de l'un de ses « parents », et la moitié venant de l'autre. La « mutation » est implémentée en ajoutant une distribution aléatoire uniforme de moyenne nulle pour chaque point critique. En commençant avec les valeurs initiales, la diffusion de la distribution uniforme, ici appelée le taux de mutation, est augmenté ou diminué géométriquement selon la performance des individus précédemment créés. Un nouvel individu est inclus dans la population seulement s'il est meilleur qu'un autre membre de la population. A chaque fois qu'un nouvel individu est inclus dans la population sans qu'un autre ne soit tenté sans succès auparavant, le taux de mutation est divisé par ϵ , un nombre plus petit que 1. Par ailleurs, chaque fois qu'un nouvel individu est pire que le pire membre de la population, et que l'individu précédemment tenté n'était pas suffisamment bon pour entrer dans la population, le taux de mutation est multiplié par ϵ . Cette procédure augmente le taux de mutation lorsqu'il n'est pas facile de trouver un meilleur individu, de manière à explorer au mieux l'espace des paramètres. Au contraire, s'il est trop difficile de trouver un nouvel individu, cela signifie que l'intervalle de recherche est trop large, et que le taux de mutation doit être réduit.

4 Résultats numériques

Les tests numériques sont réalisés sur le système de Rössler

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{2}$$

où (a, b, c) sont les paramètres. Le système (2) est intégré avec $(a, b, c) = (0.44, 2, 4)$, un pas de temps de 0,02 et un bruit multiplicatif Gaussien¹ avec une déviation standard de 0.003. L'attracteur est reconstruit à partir de la variable y et ses dérivées successives. Une section de Poincaré a été calculée en utilisant les minima locaux Y_k de la variable y . Une application de premier retour est alors calculée en utilisant la séquence de ces minima $\{Y_k\}$ (Fig. 1). Un total de 6179 points a été utilisé. L'application présente clairement trois branches monotones, deux croissantes et une décroissante. Elle nécessite donc deux points critiques les séparant et, par conséquent, trois symboles pour coder la trajectoire. Ce cas est particulièrement intéressant puisque la troisième branche n'est pas fréquemment visitée. Le second point critique n'est donc pas si facile à identifier à l'aide d'un critère statistique.

Trois cas sont étudiés. Tout d'abord, des partitions à trois symboles sont recherchées. Ensuite, des partitions à respectivement deux et quatre symboles sont tentées. Dans chaque cas, les taux $\tilde{N}_q(\mathbf{p})$ sont calculés utilisant des séquences symboliques de longueur 4, 6 et 8, conduisant ainsi à neuf exemples différents. Pour caractériser le comportement statistique de chaque application, chacun de ces exemples a été lancé 500 fois de manière indépendante. Pour chaque exemple, la moyenne et la déviation standard des points critiques trouvés ainsi que le taux $\tilde{N}_q(\mathbf{p})$ sont calculés et reportés Tab. 1. Il est important de noter que la dimension de l'espace de recherche varie de un à trois, rendant une recherche exhaustive impossible. Dans tous les cas, la stratégie évolutionniste a été appliquée à des populations de taille $\lambda = 100$. Le paramètre ϵ contrôlant le taux de mutation a été posé égal à 0,87, et la limite sur le nombre d'évaluations de fonction est fixée à 20000.

Les histogrammes des exemples étudiés sont représentés avec l'application de premier retour (Fig. 1). Chaque exemple est désigné par une lettre correspondant à la première colonne du tableau 1. Les histogrammes regroupent tous les points critiques calculés pour chaque exemple. Les exemples (a) et (c) présentent une distribution pratiquement uniforme des points critiques. Dans l'exemple (d), bien qu'impliquant le nombre correct de symboles, il n'a pas été possible d'identifier la bonne partition. Par contre, les partitions sont correctement estimées dans les cas (e) et (f); toutefois, l'histogramme (f) présente une déviation standard inférieure à celle obtenue dans le cas (e). En fait, ceci n'est pas tout à fait exact car dans le cas (f), il y a deux recherches qui ne convergent pas vers le maximum de la fonction

¹ Le bruit est ajouté à chaque point de la trajectoire avant que le point suivant ne soit calculé, de manière à ce que le bruit perturbe la trajectoire.

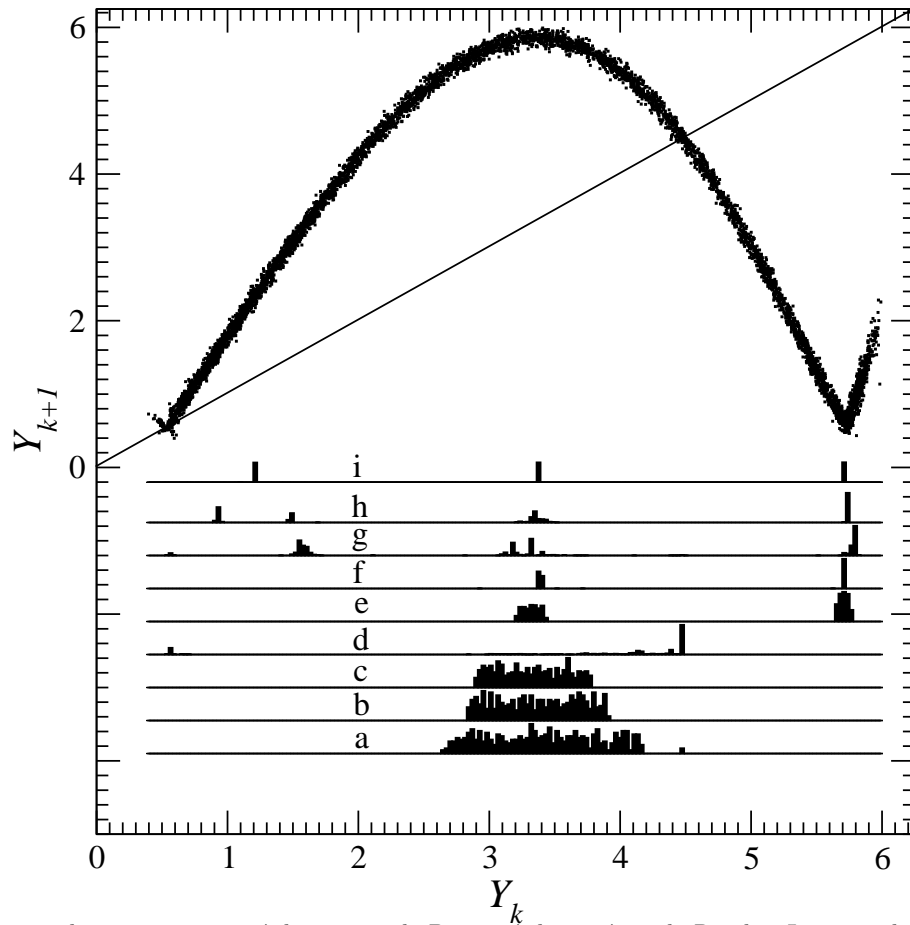


Fig.1. Application de premier retour à la section de Poincaré du système de Rössler. Le signe des points Y_k est inversé afin de montrer l'application dans le sens usuel. Les paramètres sont $a = 0.44$, $b = 2$ et $c = 4$. Les histogrammes des points estimés pour chaque exemple sont reportés. Les lettres correspondent à la première colonne du tableau 1.

objectif, et de ce fait, la déviation standard de cet exemple est plus grande que celle du cas (e). Lorsque ces points sont retirés, une déviation standard plus petite est obtenue, ce qui est en meilleur accord avec les histogrammes. Les exemples de (g) à (i) correspondent à des partitions à quatre symboles, soit un symbole de plus que la partition exacte. Néanmoins, les points critiques obtenus ont des déviations standard plus petites, au moins ceux qui correspondent à la partition topologique.

La recherche avec deux symboles est également intéressante puisqu'elle implique un nombre de symboles inférieur à celui effectivement requis pour une description correcte de la dynamique. Il apparaît de manière évidente qu'augmenter la longueur des séquences symboliques aide à réduire la dispersion entre les différents lancés. Comme cela est représenté Fig. 1 (cas (a), (b) et (c)), les intervalles sur lesquels la partition est trouvée est réduit comme la longueur n des séquences est augmentées. Mais elle demeure tout de même grande, y compris dans le cas avec huit symboles (cas (c)). Au contraire, lorsque $q = 3$, c'est-à-dire avec le nombre correct de symboles, la déviations standard entre les différents essais décroît significativement, au moins lorsque des séquences de plus de quatre symboles sont considérés (cas (e) et (f) de la Fig. 1). De plus, retirant les deux partitions qui sont de manière très évidente très différentes des 498 autres, des déviations standards réduite d'un facteur dix (ligne « 8* » du Tab. 1. Lorsque $q = 4$, c'est-à-dire avec un nombre de symboles plus grand que le nombre exact, trois points critiques sont trouvés avec une petite déviation standard lorsque des séquences d'au moins huit symboles sont considérées (cas (i), Fig. 1). Parmi eux, deux points critiques correspondent aux points réels et un est évidemment fallacieux.

Tab.1. Estimation de la localisation des points critiques utilisant un nombre q de symboles et des séquences de longueur n . Cas du système de Rössler. Valeurs des paramètres : $a = 0.44$, $b = 2$, et $c = 4$.

q	n	C_1	C_2	C_3	$\tilde{N}_q(\mathbf{p})$	
a	2	4	3.42 ± 0.43		1.00 ± 0.00	
b	2	6	3.37 ± 0.31		1.00 ± 0.00	
c	2	8	3.32 ± 0.26		1.00 ± 0.00	
d	3	4	3.42 ± 1.41	4.18 ± 0.69		0.57 ± 0.02
e	3	6	3.32 ± 0.06	5.71 ± 0.03		0.26 ± 0.00
f	3	8	3.39 ± 0.02	5.71 ± 0.09		0.14 ± 0.002
f	3	8*	3.39 ± 0.001	5.71 ± 0.00		0.14 ± 0.00
g	4	4	3.26 ± 0.22	5.76 ± 0.19	1.52 ± 0.29	0.32 ± 0.005
h	4	6	3.36 ± 0.05	5.74 ± 0.006	1.15 ± 0.27	0.09 ± 0.000
i	4	8	3.37 ± 0.003	5.72 ± 0.001	1.21 ± 0.01	0.025 ± 0.000

Il doit être noté que lorsqu'il n'y a pas assez de symboles, il est impossible d'obtenir des partitions avec de petites déviations standard, même lorsque le nombre de symboles est augmenté. En conséquence, le nombre correct de symboles peut être estimé comme le nombre offrant des partitions avec des déviations standard significativement plus petites.

De manière à tester la méthode proposée dans le cas d'un plus grand nombre de symboles, un autre intégration du système de Rössler a été réalisée pour les paramètres $(a, b, c) = (0.53, 2, 4)$. La section de Poincaré a été reconstruite à partir de la variable x . Un ensemble de 5127 points a été retenu pour l'application de l'algorithme de recherche. L'application de premier retour est maintenant constituée de cinq branches monotones (Fig. 2). Deux essais sont tentés avec respectivement cinq et sept symboles. Dans tous les cas, les séquences de dix symboles sont recherchées. Cinquante essais différents sont lancés. Les histogrammes correspondant aux partitions obtenues sont représentés Fig. 2. Lorsque cinq symboles sont utilisés (cas (a)), presque tous les essais conduisent à une mauvaise estimation du dernier point critique (entre la dernière branche décroissante et la dernière branche croissante). Ce n'est qu'avec sept symboles que ce dernier point critique est correctement identifié. Evidemment, il y a des points fallacieux dans ce dernier cas. Mais si nous ne retenons que les points critiques les plus souvent identifiés, la partition topologique est très correctement approchée par cette recherche.

Le résultat avec cinq symboles mérite quelques études complémentaires. L'histogramme des taux $\tilde{N}_q(\mathbf{p})$ obtenus (Fig. 3) montre que la plupart des essais ne conduisent pas au taux maximum possible. Si les essais sont restreints à ceux qui conduisent à des taux supérieurs à 0.0005228, l'histogramme qui en résulte (cas (c), Fig. 3) indique que le problème d'optimisation non linéaire est plus délicat à résoudre avec cinq symboles qu'avec sept. Ceci résulte du fait que la cinquième branche n'est pas souvent visitée comparée aux quatre autres. A l'opposé, puisque le premier point critique est associé à un pic dans la probabilité de réalisations, un point critique fallacieux apparaît souvent en son voisinage. Augmenter le nombre de symboles contribue à réduire la perte de visibilité des branches faiblement visitées. Puisque des points fallacieux sont obtenus sur l'intervalle invariant et que ceux-ci dépendent de l'essai, ces identifications erronées ne sont pas associées à une haute probabilité et, par conséquent, sont facilement distinguées des points critiques réels. Ainsi, en augmenter le nombre de symboles peut aider à améliorer la procédure d'identification. Mais le critère utilisé, c'est-à-dire un nombre maximal de séquences réalisées, est ici prouvé être correct dans le sens où plus grand est ce nombre, plus précise est la partition obtenue (relativement à la partition topologique).

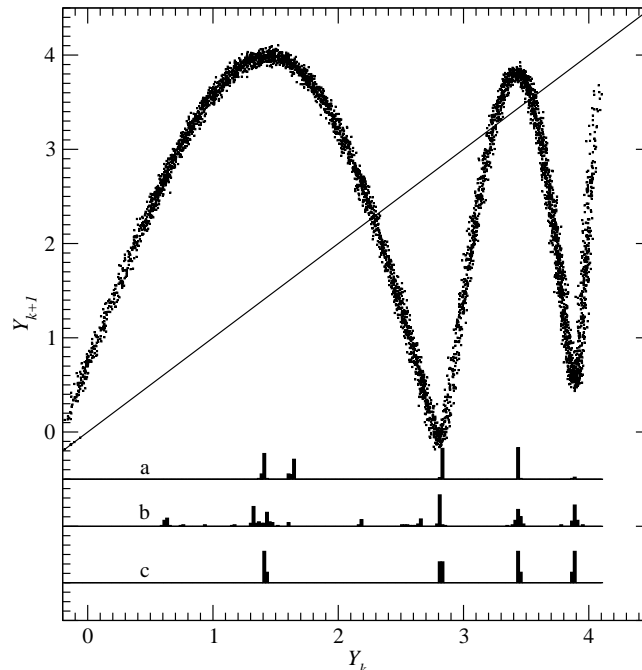


Fig.2. Application de premier retour et histogrammes des points critiques estimés pour un problème à cinq symboles. Valeurs des paramètres : $a = 0.53$, $b = 2$ et $c = 4$. Les essais avec respectivement (a) 5 et (b) 7 symboles sont reportés. L'histogramme (c) présente les cinq symboles du cas (b) les plus souvent identifiés.

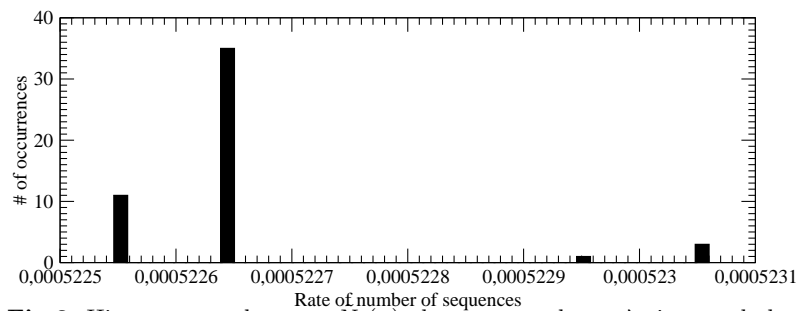


Fig.3. Histogramme des taux $N_q(p)$ obtenus pour le cas à cinq symboles.

Références

1. J. PLUMECOQ & M. LEFRANC, From template analysis to generating partitions I : Periodic orbits, knots and symbolic encodings, *Physica D*, **144**, 231-258, 2000.
2. J. PLUMECOQ & M. LEFRANC, From template analysis to generating partitions II : Characterization of the symbolic encodings, *Physica D*, **144**, 259-278, 2000.
3. X.Z. TANG, E.R. TRACY, A.D. BOOZER, A. DE BRAUW & R. BROWN. Symbol sequence statistics in noisy chaotic signal reconstruction, *Physical Review E*, **51** (5), 3871-3889, 1995.
4. J. GODELLE & C. LETELLIER. Symbolic sequence analysis of liquid jet, *Physical Review E*, **62**, 2001.
5. C. LETELLIER, Symbolic sequence analysis using approximated partition, *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**, 32-41, 2008.
6. E. M. BOLLT, T. STANFORD, Y.-C. LAI & K. ZYCZKOWSKI. What symbolic dynamics do we get with a misplaced partition? On the validity of threshold crossings analysis of chaotic time series, *Physica D*, **154**, 259-286, 2001.
7. T. BÄCK, U. HAMMEL & H.-P. SCHWEFEL, *IEEE Transaction on Evolutionary Computation*, **1**, 3 (1997).

Courbure du Flot de Systèmes Dynamiques

Ginoux Jean-Marc & Rossetto Bruno

Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon, Université du Sud, B.P. 20132, 83957, La Garde Cedex, France
ginoux@univ-tln.fr

Résumé. En considérant les courbes trajectoires, intégrales de systèmes dynamiques de dimension n , dans le cadre d'application de la Géométrie Différentielle comme des courbes d'un espace n -Euclidien, la *variété de courbure du flot* est définie comme le lieu des points où la courbure des courbes trajectoires s'annule.

Il est tout d'abord établi dans cet article que la courbure du flot, c'est-à-dire la courbure des courbes trajectoires de tout système dynamique lent-rapide de dimension n fournit directement l'équation analytique de la variété lente invariante par le flot de ce système selon la théorie de Darboux. Il est alors démontré que la variété obtenue par cette *méthode de courbure du flot* qui ne fait appel ni aux vecteurs propres ni à des développements asymptotiques mais implique seulement les dérivées successives du champ de vecteurs vitesse, coïncide avec celle de Fenichel. Ainsi, il est établi que cette méthode qui généralise l'*Approximation du Système Linéaire Tangent* et englobe la *Théorie Géométrique des Perturbations Singulières* permet une détermination simple et directe de l'équation analytique de la variété lente invariante de systèmes dynamiques lent-rapides de dimensions élevées.

Il est ensuite démontré que la courbure du flot de systèmes dynamiques autonomes de dimension n permet également de déterminer les *variétés linéaires* (droites, plans ou hyperplans) invariantes par le flot de ces systèmes. Il est alors établi que toute *variété linéaire* invariante est en facteur dans la *variété de courbure du flot*.

Abstract. Considering trajectory curves, integral of n -dimensional dynamical systems, within the framework of Differential Geometry as curves in Euclidean n -space, the *flow curvature manifold* is defined as the location of the points where the curvature of trajectory curves vanishes.

It is first established in this article that the curvature of the flow, c'est-à-dire the curvature of the trajectory curves of any n -dimensional slow-fast dynamical system directly provides its slow manifold analytical equation invariant with respect to the flow of the dynamical system according to Darboux theory. Thus, it is stated that the manifold obtained with this *flow curvature method*, which uses neither eigenvectors nor asymptotic expansions but only involves time derivatives of the velocity vector field, coincides with those of Fenichel. Thus, it is shown that this method which generalizes the *Tangent Linear System Approximation* and encompasses the so-called *Geometric Singular Perturbation Theory* enables a simple and direct determination of the slow invariant manifold analytical equation of high-dimensional slow-fast dynamical systems.

Then, it is shown that curvature of the flow of any n -dimensional dynamical system also enables to determine *linear manifolds* such as straight lines, planes or hyperplanes. It is thus established that every *linear invariant manifold* is a factor of the *flow curvature manifold*.

1 Système d'équations différentielles

On considère un système d'équations différentielles défini sur un compact E de \mathbb{R} par :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathfrak{S}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

Le vecteur $\mathfrak{S}(\mathbf{X}) = {}^t[f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]$ défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composantes f_i indépendantes du temps, supposées continues, de classe C^∞ sur E et à valeurs dans \mathbb{R} , vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipshitz [4]. Ce système autonome admet une *courbe trajectoire* $\mathbf{X} = {}^t[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tangente à \mathfrak{S} en tout point (sauf aux points fixes).

2 Variété de courbure du flot

La *variété de courbure nulle* est définie comme le lieu des points où la *courbure du flot*, c'est-à-dire la courbure de la *courbe trajectoire* $\mathbf{X}(t)$ intégrale du système défini par (1) s'annule :

$$\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \wedge \dots \wedge \overset{(n)}{\mathbf{X}} \right) = \det \left(\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \dots, \overset{(n)}{\mathbf{X}} \right) = 0 \quad (2)$$

où $\overset{(n)}{\mathbf{X}}$ représente la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$.

Démonstration. Cf. Ginoux *et al.* [9].

3 Théorème d'invariance de Darboux

Soit ϕ une fonction de classe C^1 définie sur un compact E inclus dans \mathbb{R} et $\mathbf{X}(t)$ la *courbe trajectoire* intégrale du système défini par (1). La dérivée de Lie est définie par :

$$L_{\mathbf{X}}\phi = \mathbf{V} \cdot \nabla\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{d\phi}{dt} \quad (3)$$

Une *variété* définie par $\phi(\mathbf{X}) = 0$ où ϕ est une fonction de classe C^1 dans un ouvert U et dite *invariante* s'il existe une fonction C^1 notée $k(\mathbf{X})$ et appelée cofacteur qui satisfasse pour tout $\mathbf{X} \in U$:

$$L_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) = k(\mathbf{X})\phi(\mathbf{X}) \quad (4)$$

Démonstration. Cf. Gaston Darboux [5].

4 Variété lente de systèmes dynamiques

Proposition 1.

Le lieu des points où la courbure du flot, c'est-à-dire la courbure des courbes trajectoires de tout système dynamique lent-rapide de dimension n s'annule fournit directement l'équation analytique de la variété lente de dimension $(n-1)$ associée à ce système.

Démonstration. Considérant que le système dynamique défini par (1) est lent-rapide, c'est-à-dire qu'il possède un ou plusieurs petit paramètre ε en facteur dans son champ de vecteurs vitesse, en écrivant la *variété de courbure du flot* (2) comme :

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \varepsilon) = 0 \quad (5)$$

et en injectant dans cette équation (5) un développement en perturbations singulières du type : $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{X}_0(\mathbf{z}) + \varepsilon\mathbf{X}_1(\mathbf{z}) + O(\varepsilon^2)$ on résout ordre après ordre pour $\mathbf{X}(\mathbf{z}, \varepsilon)$. Le développement en série de Taylor pour $\phi(\mathbf{X}(\mathbf{z}, \varepsilon), \mathbf{z}, \varepsilon)$ jusqu'à l'ordre correspondant en ε conduit aux mêmes coefficients que ceux fournis par la *Théorie Géométrique des Perturbations Singulières*.

L'ordre ε^0 par exemple conduit à :

$$\phi(\mathbf{X}_0(\mathbf{z}, \varepsilon), \mathbf{z}, 0) = 0$$

lequel définit également $\mathbf{X}_0(\mathbf{z})$ par application du *théorème des fonctions implicites*. Ainsi, la variété définie par la *méthode de la courbure du flot* coïncide avec celle fournie par *Théorie Géométrique des Perturbations Singulières*, c'est-à-dire avec la variété lente de Fénichel [7].

Corollaire 1.

La variété lente définie par la variété de courbure nulle est localement invariante au sens de Darboux..

Démonstration. La dérivée de Lie du produit intérieur (2) s'écrit :

$$L_{\vec{\nabla}}\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \wedge \dots \wedge \overset{(n+1)}{\mathbf{X}} \right) = \left[\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \dots, \overset{(n+1)}{\mathbf{X}} \right] \quad (6)$$

De plus, à partir de l'identité $\ddot{\mathbf{X}} = J\dot{\mathbf{X}}$ où J représente le Jacobien fonctionnel associé au système dynamique (1) de dimension n on peut établir que :

$$\overset{(n+1)}{\mathbf{X}} = J^n \dot{\mathbf{X}} \quad \text{si} \quad \frac{dJ}{dt} = 0 \quad (7)$$

où J^n représente la $n^{\text{ième}}$ puissance de J .

Par exemple, $\ddot{\mathbf{X}} = J\dot{\mathbf{X}} \Leftrightarrow \gamma = J\mathbf{V}$. Alors, il s'ensuit que,

$$\overset{(n+1)}{\mathbf{X}} = J J^{n-1} \dot{\mathbf{X}} = J \overset{(n)}{\mathbf{X}} \quad (8)$$

En remplaçant $\overset{(n+1)}{\mathbf{X}}$ dans l'expression (6) par l'Eq. (8) on a :

$$L_{\vec{\nabla}}\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \wedge \dots \wedge J \overset{(n)}{\mathbf{X}} \right) = \left[\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \dots, J \overset{(n)}{\mathbf{X}} \right] \quad (9)$$

puis,

$$L_{\vec{\nabla}}\phi(\mathbf{X}) = \text{Tr}[J] \dot{\mathbf{X}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \wedge \dots \wedge \overset{(n)}{\mathbf{X}} \right) = \text{Tr}[J] \phi(\mathbf{X}) = K(\mathbf{X}) \phi(\mathbf{X})$$

où $K(\mathbf{X}) = \text{Tr}[J]$ représente la trace du Jacobien fonctionnel. Ainsi, d'après le *théorème de Darboux* l'invariance de la *variété lente* associé au système dynamique (1) de dimension n est établie à condition que le Jacobien fonctionnel soit localement stationnaire (7).

5 Variétés linéaires invariantes

Proposition 2.

Toute variété linéaire invariante est en facteur dans la courbure.

Démonstration. Soit $\varphi(\mathbf{X}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$ un hyperplan de dimension n . Supposons que $\varphi(\mathbf{X})$ soit invariant. Alors on a d'après (4) :

$$L_{\vec{\nabla}}\varphi(\mathbf{X}) = k_1(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}) = a_1\dot{x}_1 + a_2\dot{x}_2 + \dots + a_n\dot{x}_n = \sum_{i=1}^n a_i \dot{x}_i \quad (10)$$

En dérivant (10) et en posant : $(k^2 + \dot{k})(\mathbf{X}) = k_2(\mathbf{X})$, on a :

$$L_{\vec{\nabla}}(L_{\vec{\nabla}}\varphi(\mathbf{X})) = (k^2 + \dot{k})(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}) = k_2(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n a_i \ddot{x}_i$$

En appliquant la formule de Leibniz on obtient la dérivée $n^{\text{ième}}$:

$$L_{\vec{V}}^n \varphi(\mathbf{X}) = \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p \frac{d^{(n-p-1)}}{dt^{(n-p-1)}} k(\mathbf{X}) \frac{d^p}{dt^p} \varphi(\mathbf{X}) = k_n(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n a_i \binom{(n)}{x_i} \quad (11)$$

La démonstration est alors basée sur les propriétés des déterminants suivantes :

- Toute combinaison linéaire de lignes (resp. de colonnes) laisse le déterminant inchangé (P₁).
- Tout facteur dans une ligne (resp. une colonne) est en facteur du déterminant (P₂).

En remplaçant la dernière colonne de la variété de courbure nulle (2) par une combinaison linéaire de toutes les autres, et en tenant compte des Eq. (10) & (11) et des propriétés (P₁) et (P₂) on a :

$$\phi(\mathbf{X}) = \det \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \sum_{i=1}^n a_i \dot{x}_i \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \cdots & \sum_{i=1}^n a_i \ddot{x}_i \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{(n)}{x_1} & \binom{(n)}{x_2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_i \binom{(n)}{x_i} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & k_1(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}) \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \cdots & k_2(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{(n)}{x_1} & \binom{(n)}{x_2} & \cdots & k_n(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}) \end{pmatrix} = \varphi(\mathbf{X}) \det \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & k_1(\mathbf{X}) \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \cdots & k_2(\mathbf{X}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{(n)}{x_1} & \binom{(n)}{x_2} & \cdots & k_n(\mathbf{X}) \end{pmatrix}$$

D'où l'on déduit que la variété linéaire invariante $\varphi(\mathbf{X})$ est bien en facteur dans la courbure.

Remarque.

Ce résultat peut être étendu à n variétés linéaires invariantes en facteur dans la *courbure*. Néanmoins, sa réciproque est fautive. En effet, toute variété en facteur dans la *courbure* n'est pas nécessairement invariante. Dans une publication antérieure Jaume Llibre [10] a établi un résultat similaire à l'aide d'une méthode basée sur l'utilisation des *variétés algébriques exactiques* découvertes par Mikhail Nikolaevich Lagutinskii au début du XX^{ième} siècle (Dobrovol'skii *et al.*, [6]) et re-découverte par V. I. Arnold [?], Jaume Llibre, Colin Christopher et Jorge Vitorio Pereira [2]. Ainsi, il est possible de démontrer que les *variétés linéaires invariantes* sont des *variétés algébriques exactiques*.

6 Conclusion

Dans un premier temps il a tout d'abord été établi que la *variété de courbure du flot* fournit directement l'équation analytique de la *variété lente* de tout système dynamique lent-rapide de dimension n . De plus, il a été démontré que la *variété lente* obtenue par la *méthode de la courbure du flot* est invariante au sens de Darboux et coïncide avec celle de Fénichel [7]. Ce résultat précédemment établi en dimension deux et trois [8] est ainsi généralisé à la dimension n . Il semble d'ailleurs possible de l'étendre au cas des systèmes dynamiques non-autonomes ou périodiques. Dans un second temps la *méthode de la courbure du flot* a permis de déterminer les *variétés linéaires invariantes* de systèmes dynamiques de dimension n . Il a donc été démontré que toute *variété linéaire invariante* (droite, plan ou hyperplan) est en facteur dans la *variété de courbure du flot*. De telles variétés peuvent alors être utilisées pour construire l'intégrale première du système dynamique considéré. Dans le cas de systèmes dynamiques n -dimensionnels composés de polynômes de degré m , il a été établi [10] que le nombre de *variétés linéaires invariantes* est au plus $3m - 1$. Par conséquent le nombre de *variétés linéaires invariantes* en facteur dans la *courbure* est au plus $3m - 1$.

Dans le cas de systèmes dynamiques tri-dimensionnels composés de polynômes homogènes de degré deux, Gaston Darboux [5] a établi que si ce système dynamique possède :

- une *variété linéaire invariante* p une intégrale première s'écrit : $\nu = Cp^3$
- deux *variétés linéaires invariantes* p et q une intégrale première s'écrit : $u^\alpha p^\beta q^\gamma = C$
- trois *variétés linéaires invariantes* p, q, r une intégrale première s'écrit : $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta = C$ où p, q, r et s sont des polynômes du premier degré, u un polynôme du second degré et ν un polynôme du troisième degré.

Ainsi, la connaissance du nombre de *variétés linéaires invariantes* permet de déduire l'intégrale première de systèmes dynamiques tri-dimensionnels composés de polynômes homogènes de degré deux. Il semble cependant possible d'étendre certains résultats de Gaston Darboux à des systèmes dynamiques polynomiaux non-homogènes de degré m .

La *méthode de la courbure du flot* peut également être utilisée pour étudier les bifurcations locales de co-dimension 1, les bifurcations de Hopf, la synchronisation de systèmes dynamiques, ou pour déterminer l'équation de la variété centrale.

7 Applications

Le circuit électronique de L. O. Chua [3] comprend une inductance L_1 , un résistor actif R , deux condensateurs C_1 et C_2 , et une résistance non-linéaire. Ce circuit peut être modélisé au moyen d'un système de trois équations différentielles couplées du premier ordre. Les variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ représentent les tensions des condensateurs C_1 et C_2 , et l'intensité du électrique dans l'inductance L_1 , respectivement. Ces équations dédimensionnées s'écrivent :

$$\vec{V} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\mathfrak{F}} \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_2 - F(x_1)) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

La fonction $F(x_1) = x_1 + k(x_1)$ décrit la réponse électrique de la résistance non-linéaire, c'est-à-dire sa caractéristique qui est définie soit par une fonction linéaire par morceaux :

$$k(x_1) = \begin{cases} bx_1 + a - b x_1 \geq 1 \\ ax_1 \quad |x_1| \leq 1 \\ bx_1 - a + b x_1 \leq -1 \end{cases} \quad (13)$$

pour laquelle les paramètres réels α and β déterminé pour les valeurs particulières des composants du circuit sont pour le modèle standard $\alpha = 1/9$, $\beta = 100/7$, $a = -8/7$ et $b = -5/7$, soit par une fonction impaire symétrique similaire à la précédente :

$$k(x_1) = a_1 x_1 + a_3 x_1^3 \quad (14)$$

pour laquelle les coefficients $a_1 = -0.25$ et $a_3 = 0.11$ ont été déterminés par une méthode de moindre carrés. Les fonctions f_i sont indéfiniment différentiable par rapport aux variables x_i et t , c'est-à-dire sont des fonctions C^∞ dans un compact E inclus dans \mathbb{R}^3 et à valeurs dans \mathbb{R} .

Dans le cas du modèle (pwl) la Proposition 2 de la *méthode de la courbure du flot* permet de retrouver directement les hyperplans invariants, c'est-à-dire les *variétés linéaires invariantes* de ce modèle qui sont en facteur dans la *variété de courbure du flot*. Les équations de ces *hyperplans* ($\Pi_{1,2}$) passant par chaque point fixe $I_{1,2} (\mp 3/2, 0, \pm 3/2)$ s'écrivent :

$$\Pi_{1,2}(\mathbf{X}) = 2.8759x_1 - 3.9421x_2 + x_3 \pm 2.8139 = 0$$

Dans le cas du modèle (cubic) la Proposition 1 de la *méthode de la courbure du flot* fournit directement l'équation analytique de la *variété lente* de ce modèle à partir de la *variété de courbure du flot*.

Remerciements

Les auteurs souhaitent exprimer leurs plus sincères remerciements pour leur aide et leur soutien à MM. Marc Lefranc et Christophe Letellier.

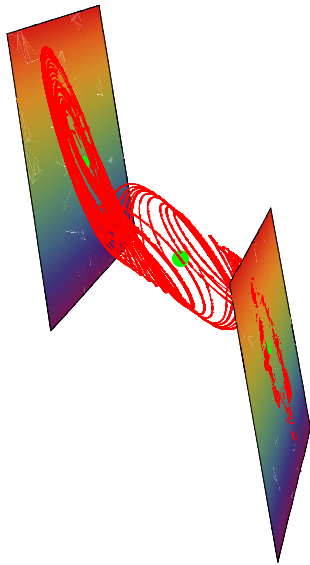


Fig.1. *Hyperplans invariants* du modèle (pwl) avec pour paramètres $\alpha = 1/9$, $\beta = 100/7$, $a = -8/7$ et $b = -5/7$.

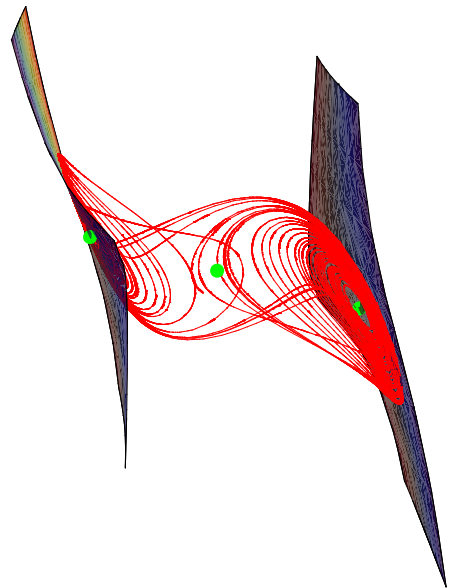


Fig.2. *Variété lente* du modèle (cubic) avec pour paramètres $\alpha = 1/9$, $\beta = 100/7$, $a_1 = -0.25$, et $a_3 = 0.11$.

Références

1. V. I. ARNOLD, *The Gelfand Mathematical Seminars*, (1993-95).
2. C. Christopher, J. Llibre & J. V. Pereira, *Pacific Journal of Mathematics*, **229** (1), 63-117 (2007).
3. L. O. CHUA, M. KOMURO & T. MATSUMOTO, *IEEE Transactions on Circuits & Systems*, CAS-33 (10), 1072-1118 (1986)
4. E. A. CODDINGTON & N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mac Graw Hill, New York (1955).
5. G. DARBOUX, *Bulletin Sci. Math. Série 2*, **2**, 60-96, 123-143, 151-200 (1878).
6. V. A. DOBROVOL'SKII, N. V. LOKOT' & J. M. STRELCYN, *Historia Mathematica*, **25** (20), 245-264 (1998).
7. N. FENICHEL, *Ind. Univ. Math. Journal*, **21**, 193-225 (1971).
8. J.-M. GINOUX & B. ROSSETTO, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, **4** (16), 887-910 (2006).
9. J.-M. GINOUX, B. ROSSETTO & L. O. CHUA, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, à paraître.
10. J. LLIBRE & J. C. MEDRADO, On the invariant hyperplanes for d-dimensional polynomial vector fields, *Preprint*.

Fiabilité des différentes déterminations des paramètres de plongement

R. Gilmore^{1,3}, I. M. Moroz², & C. Letellier¹

¹ CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

² Mathematical Institute, 24-29 St Giles', Oxford OX1 3LB, UK

³ Physics Department, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA

Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé. Il est possible de comparer les résultats des tests classiques — de nature géométrique — pour le plongement de données chaotiques avec des résultats d'un test — de nature topologique — récemment proposé. Les tests « classiques », qui dépendent de nombres réels (dimensions fractales, exposants de Lyapunov), moyennés sur un attracteur, sont comparés avec un test topologique qui dépend de nombres entiers. La comparaison peut seulement être réalisée pour des applications en trois dimensions (limite actuelle des outils topologiques). Nous trouvons que les tests classiques échouent à déterminer lorsqu'une reconstruction est un plongement ou non. Les raisons de cet échec, qui ne sont limitées à la dimension trois, sont discutées.

Abstract. It is possible to compare results for the classical tests for embeddings of chaotic data with the results of a newly proposed test. The classical tests, which depend on real numbers (fractal dimensions, Lyapunov exponents) averaged over an attractor, are compared with a topological test that depends on integers. The comparison can only be done for mappings into three dimensions. We find that the classical tests fail to predict when a mapping is an embedding and when it is not. We point out the reasons for this failure, which are not restricted to three dimensions.

1 Introduction

Un nouveau test pour la détermination des paramètres de plongement dans \mathbb{R}^n a récemment été proposé [1]. Ce test dépend des valeurs de certains indices topologiques, qui sont des entiers plutôt que des nombres réels. Aujourd'hui, ce test n'est valide que pour $n = 3$ puisqu'il repose sur la notion de nombre d'enlacement. Ce nouveau test topologique pour la vérification de la validité d'un plongement a été comparé avec des techniques plus traditionnelles, essentiellement basées sur des mesures géométriques (dimensions fractales, faux plus proches voisins) et des mesures dynamiques (exposants de Lyapunov, déterminisme) [1,2]. Il est montré que les tests classiques pour la qualité d'un plongement échouent à déterminer si une application est un plongement ou non. Il est expliqué pourquoi les tests classiques échouent. Les raisons de cet échec ne sont pas limitées aux trois dimensions. Aussi, à la lumière de nos résultats, et comme l'annonçait Ruelle [3] il y a une quinzaine d'années dans un article intitulé *la science et la fiction*, toute annonce, basée sur des calculs de dimension ou d'exposant de Lyapunov, qu'une reconstruction dans un espace de dimension donnée soit un plongement doit être regardée avec le plus grand scepticisme tant que des analyses plus approfondies ne sont pas entreprises. La mise en garde par Ruelle n'a pas été suffisamment entendue et nous apportons avec ce nouveau test topologique la confirmation claire de l'incapacité des estimations « classiques » à nous apprendre quoi que ce soit de fiable sur la dynamique.

2 Revue des tests de plongement

La première étape dans l'analyse de données chaotiques consiste en la recherche d'un plongement [4,5]. Un plongement se définit comme une application des données (\mathbb{R}) dans un espace reconstruit \mathbb{R}^D sans auto-intersection, ainsi chaque point de l'attracteur original a un unique futur de manière à préserver le

déterminisme [10]. Un plongement assure l'existence d'un difféomorphisme entre l'attracteur original et l'attracteur reconstruit. Si les données sont chaotiques, nous avons nécessairement $D \geq 3$ [11].

La reconstruction d'un espace \mathbb{R}^D à partir d'une série temporelle prend la forme

$$s(t) \rightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_D(t)),$$

où $x_i(t)$ sont fonctions des observables $s(t)$. Plusieurs techniques ont été proposées. Celle qui est la plus simple à mettre en œuvre consiste à utiliser des coordonnées décalées telles que $x_i(t) = m(t - (i - 1)\tau)$, où τ est le décalage temporel [4,5]. Une autre reconstruction également très utile a recours aux coordonnées dérivées telles que $x_i(t) = d^{(i-1)}m(t)/dt^{(i-1)}$. Enfin, il est toujours possible de combiner ces différentes coordonnées comme par exemple, $s(t) \rightarrow (s(t), ds(t)/dt, s(t - \tau))$, la décomposition en composantes principales, les transformées de Hilbert, etc. [6,7,8,9]. Lorsque la dimension de l'espace reconstruit \mathbb{R}^K est telle que $K > D$, l'application entre l'espace original \mathbb{R}^D et l'espace reconstruit est souvent une *projection*.

Une fois que la trajectoire a été reconstruite dans un espace de dimension D , il est nécessaire de déterminer si l'application est un *plongement*, c'est-à-dire si l'application évite les auto-intersections de la trajectoire : le théorème d'unicité — ou en le principe du déterminisme — est alors préservé. Plusieurs tests ont été développés pour vérifier cette condition. Ils partagent une propriété : ils sont implémentés comme une fonction d'un ou plusieurs paramètres qui sont variés comme la dimension, le décalage temporel, et une estimation statistique d'une quantité sur l'ensemble des données est réalisée. Une application est déclarée être un plongement lorsque la quantité dépasse un certain seuil. Les tests antérieurement proposés sont de deux types : géométriques ou dynamiques, chaque type ayant ses variantes.

Une fois qu'un plongement approprié a été déterminé, la structure de la trajectoire plongée dans l'espace reconstruit est analysée. Les procédures d'analyse sont de trois types : géométrique [12], dynamique [13], et topologique [15]. Les analyses géométriques dynamiques se focalisent respectivement sur le calcul de spectres de dimensions fractales et d'exposants de Lyapunov. Ces calculs sont effectués pour toutes valeurs de la dimension D . Ces résultats sont des nombres réels sans aucune théorie statistique fournissant une estimation fiable des erreurs [14], et aucune information sur les mécanismes producteurs de comportements chaotiques n'est donnée. Les analyses topologiques sont actuellement uniquement réalisées lorsque $D = 3$. Les résultats sont sur-déterminés et contiennent par conséquent leur propre critère de rejet [15,8], une propriété que ne possèdent pas les deux autres types d'analyse.

3 Un nouveau test topologique

L'idée de base et l'algorithme pour ce nouveau test est simple. Commençons par estimer la dimension de Lyapunov, d_L , à partir de l'observable $s(t)$ [16]. Si $d_L > 3$, nous nous arrêtons ! Sinon, nous suivons les trois étapes suivantes :

1. Recherche des orbites périodiques instables à partir des données $\{s(t)\}$, ce qui peut être réalisé à partir des diagrammes de proches retours avant que tout *plongement* soit tenté [8,9,17] ;
2. Choix d'une famille d'applications dépendant de certains paramètres et projettons ces orbites dans \mathbb{R}^3 ;
3. Calcul de la distance minimum entre chaque paire d'orbites sur l'intervalle des paramètres.

L'application ne peut être un plongement lorsque la distance minimale s'annule. Si une distance nulle est trouvée (Fig. 1), il est alors nécessaire de calculer le nombre d'enlacement [8,9] entre les deux orbites de part et d'autre du croisement apparent. Un croisement réel se traduit par une modification du nombre d'enlacement de ± 1 . Pour les valeurs des paramètres où le nombre d'enlacement change fréquemment, c'est-à-dire où plusieurs minima nuls apparaissent, nous pouvons rejeter l'hypothèse que l'application est un plongement. Lorsqu'il n'y a pas de minima nuls, les nombres d'enlacements restent inchangés et les applications peuvent être un plongement.

Nous pouvons présenter cet algorithme avec deux exemples. Le premier implique des données expérimentales issues d'un modèle dans \mathbb{R}^3 pour une expérience en mécanique des fluides. Le second implique la projection de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 d'un attracteur de basse dimension ($d_L \simeq 2.2$).

Les données issue du modèle « fluide » correspondent à une configuration de type Bénard-Marangoni [18] ont été analysées [19] et modélisées par une oscillateur de Takens-Bogdanov [20]. L'analyse d'une série temporelle produite par ce modèle implique une application mixte (différentielle-décalée) de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 qui est explicitement $x(t) \in \mathbb{R}^1 \rightarrow \left[x(t), \frac{dx(t)}{dt}, x(t - \tau) \right] \in \mathbb{R}^3$ [20]. Le paramètre de l'application est le décalage τ . Pour certaines valeurs du décalage, l'application est un plongement tandis que pour d'autres, ce n'est pas le cas [21]. Ceci est simplement remarqué en localisant l'orbite de période 1 et la représentant dans le plan $x-\dot{x}$. Cette projection est indépendante de τ (Fig. 1).

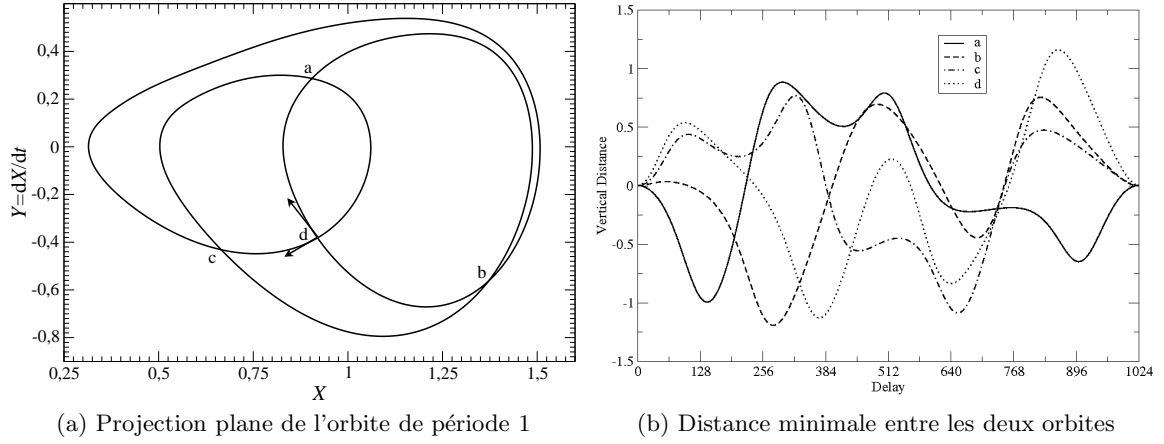


Fig.1. La projection de l'orbite de période 1 dans le plan $x-\dot{x}$ est indépendante du décalage τ dans l'espace mixte. Lorsque la distance entre les deux orbites est nulle, il y a une auto-intersection et l'application échoue à être un plongement dans une région autour du point d'intersection.

L'orbite de période 1 ressemble à une orbite de période 3 car elle coupe le plan $Y = \dot{X} = 0$ trois fois dans chaque direction avant de boucler sur elle-même. En fait, l'attracteur croise ce plan avec une accélération positive $\dot{Y} > 0$ dans trois régions disjointes et de manière cyclique : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Ainsi, une section de Poincaré appropriée consiste seulement un simple disque [21]. La période de l'orbite est le nombre d'intersections de cette orbite avec le disque unique.

L'orbite de période 1 est « à l'intérieur » de l'attracteur, c'est-à-dire qu'elle est entourée par un tube qui contient l'attracteur. Si l'orbite de période présente une auto-intersection pour $\tau = \tau_1$, le tube et l'attracteur qu'il contient, présente une auto-intersection pour un intervalle des valeurs de τ contenant τ_1 . L'application n'est alors pas un plongement sur cet intervalle. La distance entre les segments des deux orbites à chacun des quatre points d'intersection $a-d$ de la projection $x-\dot{x}$ est calculée en fonction de $\tau = T_1 \times (j/1024)$, où T_1 est la période de l'orbite. Lorsque la distance est nulle, l'orbite de période 1 présente une auto-intersection et l'application ne peut être un plongement. Des invariants topologiques ont été calculés pour les orbites périodiques de l'attracteur et leurs modifications d'un plongement à un autre. Dans chaque cas, la modification du nombre de torsion global [8,9] est $\Delta GT = \pm 2$. Ceci est consistant avec une modification du plongement causé par l'auto-intersection de l'attracteur (cf. [21], Fig. 9).

Un second exemple d'utilisation du test topologique pour l'obtention d'un plongement est réalisé sur les projections de l'attracteur chaotique solution du système dynamique de dimension 4 [22] :

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \sigma(-X + Y) - 7.1111\beta U \\
 \dot{Y} &= (R/\nu)X - Y - XZ \\
 \dot{Z} &= -\nu Z + XY \\
 \dot{U} &= -\lambda U + X
 \end{aligned} \tag{1}$$

La dynamique est étudiée pour $(R, \sigma, \nu, A) = (74.667, 10, 8/3, 3.2)$. Sur l'intervalle $0 \leq \beta < 7,9$, le système (1) a pour solution un attracteur chaotique avec une dimension de Lyapunov $d_L \simeq 2.2$ [22]. Une crise de frontière détruit l'attracteur pour $\beta \simeq 7,9$.

Les orbites périodiques sont extraites de la série temporelle par la méthode des proches retours. Un ensemble de ces orbites est suivie adiabatiquement alors que le paramètre β est varié sur l'intervalle $0 \leq \beta < 7,9$. La distance minimum et les nombres d'enlacement entre toutes paires d'orbites ont été déterminés en fonction de β pour deux projections de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 données par respectivement $(X, Y, Z, U) \rightarrow (X, Y, Z)$ et $(X, Y, Z, U) \rightarrow (X, Y, U)$. L'évolution de la distance minimum entre une paire donnée d'orbites sur l'intervalle $0.25 \leq \beta \leq 1.5$ est calculée. Dans l'espace des phases original $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U)$, cette distance ne s'annule jamais. Il en est de même lorsque les orbites sont projetées dans l'espace $\mathbb{R}^3(X, Y, U)$. Par contre, dans l'espace $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$, la distance s'annule à plusieurs reprises sur l'intervalle $0.6 \leq \beta \leq 5.4$ (Fig. 2). Ceci conduit à rejeter l'hypothèse que la projection $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U) \mapsto \mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ est un plongement sur cet intervalle. Nous ne pouvons rejeter cette hypothèse que la projection $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U) \mapsto \mathbb{R}^3(X, Y, U)$ est en plongement l'ensemble de l'intervalle $0 \leq \beta < 7,9$. Cette hypothèse ne peut pas non plus être rejetée pour la projection $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U) \mapsto \mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ hors de l'intervalle $0.6 \leq \beta \leq 5.4$.

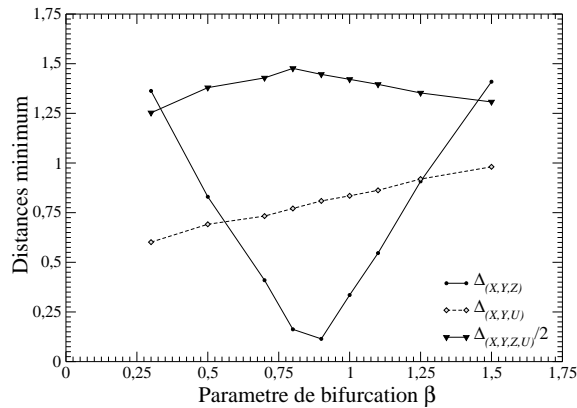


Fig.2. Distance minimum entre deux orbites de l'attracteur chaotique dans \mathbb{R}^4 en fonction de β et sous deux projections dans des espaces tri-dimensionnels. Sous l'application $\mathbb{R}^4(X, Y, Z, U) \mapsto \mathbb{R}^3(X, Y, Z)$, ces orbites présente une intersection : cette application ne peut être un plongement pour toutes valeurs de β . Valeurs des paramètres : $(R, \sigma, \nu, A) = (74.667, 10, 8/3, 3.2)$.

Par ailleurs, les tests classiques ne présentent aucune sensibilité à cette absence de plongement dans $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ sur l'intervalle $0.6 \leq \beta \leq 5.4$. Par exemple, une estimation de la dimension de plongement par technique des plus proches faux-voisins est réalisée respectivement dans les espaces $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ et $\mathbb{R}^3(X, Y, U)$ (Fig. 3). Dans les deux cas, aucune transition remarquable n'est remarquée aux valeurs « pathologique » de $\beta = 0.6$ et $\beta = 5.4$. Pourtant, cette technique des plus proches faux-voisins est souvent utilisée pour estimer la dimension de plongement. Cette étude comparative simple révèle donc qu'il faut, au mieux, considérer la dimension de plongement ainsi estimée comme une indication mais, en aucun cas, comme une identification de la dimension recherchée.

Des résultats semblables ont été obtenus à partir d'une estimation des exposants de Lyapunov et de la dimension de corrélation. Le plus grand exposant de Lyapunov a été estimé par la méthode de Sato *et al* [23] implémentée selon la procédure de Rosenstein *et al.* [24]. Le plus grand exposant de Lyapunov pour la projection $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ est montré Fig. 4. Selon un commentaire donné en conclusion par Rosenstein *et al.* [24], l'algorithme pour calculer les plus grands exposants de Lyapunov a été adapté pour une estimation simultanée de la dimension de corrélation D_2 qui est également représentée Fig. 4. Les calculs réalisés pour la projection $\mathbb{R}^3(X, Y, U)$ sont ceux de la Fig. 4.

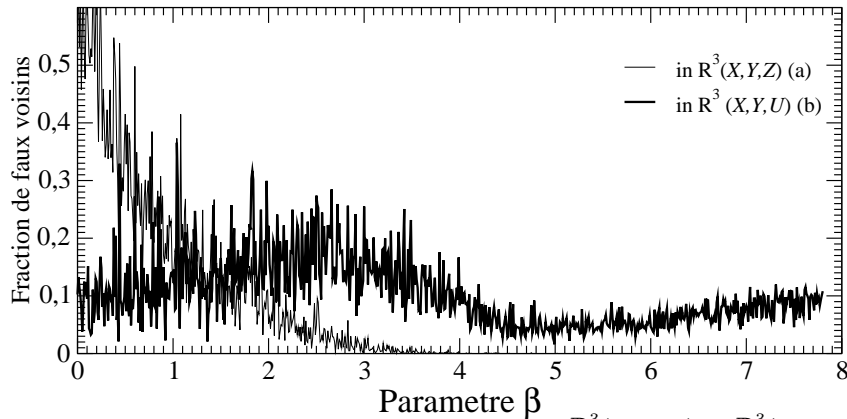


Fig.3. Test des plus proches faux voisins pour les deux projections $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ et $\mathbb{R}^3(X, Y, U)$. Le paramètre ϵ définissant les plus proches voisins est fixé à 0,01 fois le diamètre de l'attracteur. Valeurs des paramètres : $(R, \sigma, \nu, \Lambda) = (74.667, 10, 8/3, 3.2)$.

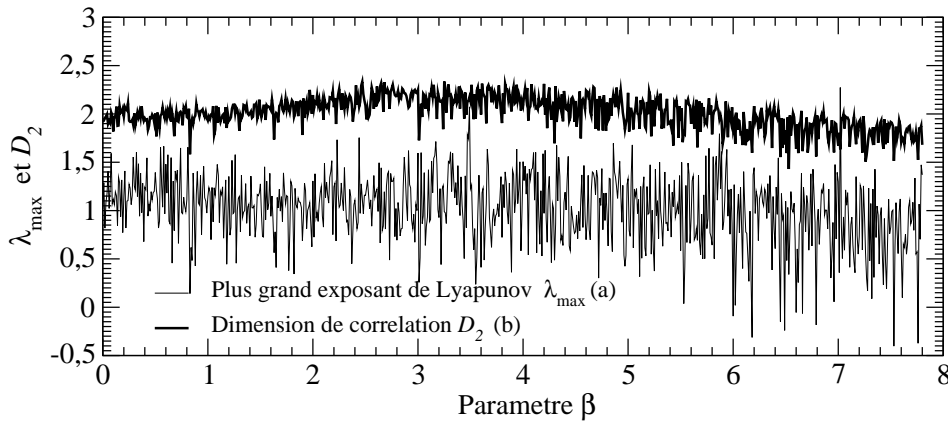


Fig.4. Estimation du plus grand exposant de Lyapunov (a) et de la dimension de corrélation (b) pour la projection $\mathbb{R}^3(X, Y, Z)$ en fonction de β . Valeurs des paramètres : $(R, \sigma, \nu, \Lambda) = (74.667, 10, 8/3, 3.2)$.

Les variances de ces courbes est intrinsèque et non causée par un changement de la valeur de β . Ces estimations diffèrent d'un ensemble de données à un autre pour des valeurs identiques de β . Si nous pouvons rejeter l'hypothèse que ces données sont distribuées normalement pour le plus grand exposant de Lyapunov, ceci n'est pas le cas pour l'estimation de la dimension de corrélation ($\chi^2/\text{d.o.f.} \simeq 0.75$). L'utilisation de la dimension de corrélation comme test de plongement nécessite d'introduire un seuil sur la variance qui devrait chuter au-dessous de 2.0. Sur la base d'une telle hypothèse *ad hoc*, des conclusions incorrectes devaient encore être tirées pour les deux projections.

4 Conclusion

Nous avons proposé un test topologique pour tester si une application réalise un plongement ou non. Ce test ne fonctionne malheureusement que pour des projections tri-dimensionnelles, comme la plupart des méthodes topologiques. Deux exemples montre que ce nouveau test se révèle très discriminant alors que les méthodes géométriques classiques — estimation du plus grand exposant de Lyapunov et de la dimension de corrélation — échoue dramatiquement à répondre à de telles questions.

Remerciements

Robert Gilmore remercie le CNRS — Département ST2I — pour sa position de chercheur invité au CORIA pour l'année 2006-2007.

Références

1. C. LETELLIER, I. M. MOROZ, & R. GILMORE, A new topological test for embeddings, (soumis).
2. C. LETELLIER, I. M. MOROZ, & R. GILMORE, A comparison of tests for embeddings, (soumis).
3. D. RUELLE, Deterministic chaos : the science and the fiction, *Proceedings of the Royal Society of London*, **427**, 241-248 (1990).
4. F. TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence, *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, 366-381, 1981.
5. N. H. PACKARD, J. P. CRUTCHFIELD, J. D. FARMER & R. S. SHAW, Geometry from a time series, *Physical Review Letters*, **45** (9), 712-716, 1980.
6. H. D. I. ABARBANEL, R. BROWN, J. J. SIDOROWICH & L. TSIMRING, *Reviews in Modern Physics*, **65**, 1331 (1993).
7. H. KANTZ & T. SCHREIBER, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge : Cambridge University Press, (1997).
8. R. GILMORE, Topological analysis of chaotic dynamical systems, *Reviews in Modern Physics*, **70**, 1455 (1998).
9. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The Topology of Chaos*, NY : John Wiley & Sons, (2002).
10. J. P. ECKMANN & D. RUELLE, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Reviews of Modern Physics*, **57**, 617-656, 1985.
11. E. OTT, *Reviews of Modern Physics*, **53**, 655-, 1981.
12. P. GRASSBERGER & I. PROCACCIA, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physics Letters D*, **148**, 63 (1983).
13. A. WOLF, J. B. SWIFT, H. L. SWINNEY & J. A. VASTANO, *Physica D*, **16**, 285 (1985).
14. P. GRASSBERGER & I. PROCACCIA, Characterization of strange attractors, *Physical Review Letters*, **50**, 346 (1983).
15. G. B. MINDLIN, H. G. SOLARI, M. A. NATIELLO, R. GILMORE & X. J. HOU. Topological Analysis of Chaotic Time Series Data from the Belousov-Zhabotinski reaction, *Journal of Nonlinear Sciences*, **1**, 147-173, 1991.
16. J. L. KAPLAN & J. A. YORKE, in *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, (J. H. O. Peitgen & H. O. Walther, eds), *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, (1979).
17. D. AUERBACH, P. CVITANOVIC, J.-P. ECKMANN, G. GUNARATNE & I. PROCACCIA, *Physical Review Letters*, **58**, 2387 (1987).
18. T. ONDARCUHU, G. B. MINDLIN, H. L. MANCINI & C. GARCIA-PEREZ, *Physical Review Letters*, **70**, 3892 (1993).
19. G. B. MINDLIN & H. G. SOLARI, *Physical Review E*, **52**, 1497 (1995).
20. M. HUERTA, D. KRMPOTIC, G. B. MINDLIN, H. L. MANCINI, D. MAZZA & C. GARCIA-PEREZ, *Physica D*, **96**, 200 (1996).
21. T. D. TSANKOV, A. NISHTALA & R. GILMORE, Embeddings of a strange attractor into \mathbb{R}^3 , *Physical Review E*, **69** 056215 (2004).
22. I. M. MOROZ, C. LETELLIER & R. GILMORE, When are projections also embeddings?, *Physical Review E*, **75**, 046201 (2007).
23. S. SATO, M. SANO & Y. SAWADA, Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems, *Progress in Theoretical Physics*, **77**, 117-134, (1987).
24. M. T. ROSENSTEIN, J. J. COLLINS & C. J. DE LUCA, A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica D*, **65**, 117-134, (1993).

Modulation d'un motif de spirales dûe à une instabilité thermo-centrifuge dans un système de Couette-Taylor

Raphaël Guillerm¹, Valérie Lepiller², Arnaud Prigent¹, & Innocent Mutabazi¹

¹ Laboratoire d'Ondes et Milieux Complexes (LOMC), FRE-3102 CNRS, Université du Havre, 53 rue de Prony, BP540, 76058 Le Havre cedex

² Adresse actuelle : Laboratoire Hydrodynamique et Mécanique Physique (HMP) de l'ESPCI, PMMH UMR-7636, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris cedex 5

raphael.guillerm@univ-lehavre.fr

Résumé. Cette étude expérimentale s'intéresse aux modulations du motif de spirales apparaissant dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température. De l'eau déminéralisée est confiné dans l'espace annulaire vertical de cinq millimètres situé entre un cylindre intérieur en rotation et un cylindre extérieur fixe. Le rapport d'aspect et le rapport des rayons sont fixes et valent 114 et 0,8 respectivement. Le nombre de Grashof Gr , lié au gradient de température est fixé et on augmente progressivement le nombre de Taylor Ta lié à la vitesse angulaire. L'écoulement de base, une cellule de convection, se déstabilise et bifurque vers un écoulement de vortex spiralés propagatifs. Différents comportements ont été observés selon les valeurs de Gr . Nous nous sommes intéressés aux modes d'instabilités apparaissant pour de grands écarts de température la spirale présentant alors une modulation de fréquence et le motif pouvant être décrit comme un ensemble de paquets de vortex propagatifs. Lorsqu'on augmente Ta , des dislocations apparaissent puis un nouveau mode d'instabilité intervient sous la forme d'une spirale ondulée. A mesure que le nombre de Taylor augmente, un motif de rouleaux axisymétriques ondulés se forme et coexiste d'abord avec la spirale ondulée. Pour de plus grandes valeurs de Ta , la spirale ondulée disparaît et laisse place au motif de rouleaux axisymétriques ondulés, les effets du gradient de température devenant négligeables devant les effets centrifuges.

Abstract. The influence of a high radial temperature gradient in a narrow gap and large aspect ratio Taylor-Couette system has been investigated experimentally. The geometrical parameters are fixed with aspect ratio and radius ratio respectively equal to 114 and 0,8. The aim of this work is to characterize the different flow patterns occurring in the system when a Grashof number Gr , related to the radial temperature gradient, is first imposed and a Taylor number Ta , related to the rotation of the inner cylinder, progressively increased. Above a critical value of Ta , a first instability occurs in the form of travelling helicoidal vortices. For high values of Gr , a low frequency modulation appears at the onset of the instability and dislocations occur when the angular velocity is further increased. We have characterized the spatiotemporal properties of the patterns that occur for high values of Gr .

1 Introduction

L'écoulement d'un liquide au sein d'un dispositif cylindrique tournant a été le sujet d'un certain nombre d'études expérimentales, théoriques et numériques ces dernières années [1,2,3]. Les configurations annulaires se rencontrent en effet dans diverses applications industrielles comme les échangeurs thermiques, les systèmes de refroidissement des machines tournantes ou des composants électroniques, les circuits d'isolation des centrales nucléaires ou encore les forages d'hydrocarbures dans les puits pétroliers. Ce type d'écoulement est également présent dans des modèles géophysiques et astrophysiques. Snyder *et al.* [4] furent les premiers à étudier expérimentalement l'influence d'un gradient radial de température sur la stabilité de l'écoulement au sein du système de Couette-Taylor, mettant en évidence la formation de vortex spiralés. Ball *et al.* [5] ont visualisé les différentes transitions de l'écoulement en fonction des paramètres de contrôle dans un système de faible rapport d'aspect. Ils ont ainsi observé des vortex similaires à ceux observés en convection naturelle lorsque de grands écarts de température sont imposés. Ces observations ont été confirmées par les travaux numériques de Kuo *et al.* [6], mettant en évidence la complexité des motifs apparaissant pour de forts gradients thermiques, une modulation du motif intervenant

alors. De notre point de vue, peu de données quantitatives sur les propriétés de l'écoulement en fonction des paramètres de contrôle ont été fournies dans le cadre de l'étude de forts gradients de température. Le dispositif expérimental est décrit dans la partie suivante. Une description qualitative puis quantitative des régimes observés est présenté dans la troisième partie avant de conclure.

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué de deux cylindres coaxiaux de longueur $H = 57$ cm : un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon $a = 2$ cm, un cylindre extérieur en verre transparent de rayon $b = 2,5$ cm et un cylindre d'isolation en verre transparent de rayon $c = 5$ cm. Le liquide utilisé, de l'eau déminéralisée, est confiné dans l'espace annulaire de taille $d = b - a = 0,5$ cm entre les deux premiers cylindres. La taille de l'entrefer est $d = 0,5$ cm.

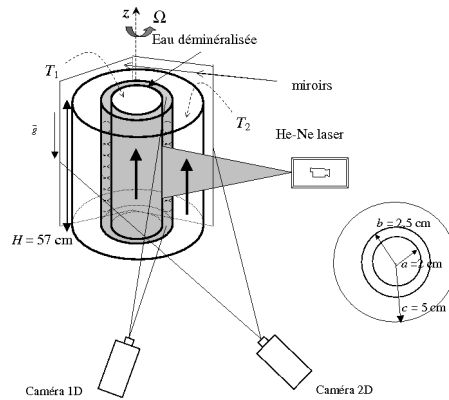


Fig.1. Dispositif expérimental

Le système est alors caractérisé par un rapport des rayons $\eta = a/b = 0,8$ et un rapport d'aspect $\Gamma = H/d = 114$. Le gradient radial de température est créé en maintenant les cylindres intérieur et extérieur à des températures différentes grâce à deux circulations d'eau provenant de deux bains thermostatés dont la température est fixée à T_1 pour le cylindre intérieur et T_2 pour le cylindre extérieur. Le gradient radial ainsi réalisé dans l'entrefer s'écrit $\delta T = \mu(T_1 - T_2)$ où le coefficient $\mu = 0,54$ dépend de la conductivité des cylindres et de l'eau, ainsi que de la convection qui intervient dans les deux circulations d'eau. Afin de visualiser l'écoulement, on ajoute 2 % de Kalliroscope AQ-1000 [7], une suspension de paillettes microscopiques anisotropes. Une nappe laser plane parallèle à l'axe des cylindres éclaire une section droite verticale de l'écoulement et une caméra CCD linéaire enregistre à intervalles de temps réguliers l'intensité lumineuse réfléchie par le Kalliroscope. Les lignes ainsi enregistrées forment un diagramme spatiotemporel. Nous étudions la déstabilisation par la force centrifuge de l'écoulement de base lorsque le cylindre intérieur est mis en rotation. Les paramètres de contrôle physiques du système sont le nombre de Grashof Gr relié au gradient radial de température, le nombre de Taylor Ta relié à la vitesse de rotation du cylindre intérieur et le nombre de Richardson σ qui compare les effets thermiques et centrifuges. Le nombre de Grashof s'écrit $Gr = g\alpha\delta T d^3/\nu^2$ où α est le coefficient d'expansion thermique, g l'accélération de la pesanteur et ν la viscosité cinématique. Le nombre de Taylor s'écrit $Ta = a\Omega d/\nu\sqrt{a/d}$ où Ω est la vitesse angulaire du cylindre intérieur. Le nombre de Richardson est une combinaison de Ta et Gr : $\sigma = Gr/Ta^2.d/a$. Celui-ci représente les effets thermo-centrifuges. Dans cette étude, nous étudions les différents régimes d'écoulement qui apparaissent dans le système lorsqu'un gradient radial de température est créé en chauffant le cylindre intérieur tandis que le cylindre extérieur est maintenu à la température $T_2 = 30^\circ\text{C}$. Dès que le gradient est établi dans l'entrefer, une cellule convective apparaît, les particules ayant un mouvement ascendant le long de la paroi chaude et descendant le long de la paroi froide. La vitesse angulaire est ensuite augmentée par pas réguliers afin d'étudier les différents états de motifs.

3 Résultats

3.1 Observations

La figure 2 présente le diagramme de bifurcation répertoriant les différents régimes d'écoulement en fonction des valeurs de Gr et Ta en suivant le protocole expérimental précédemment décrit.

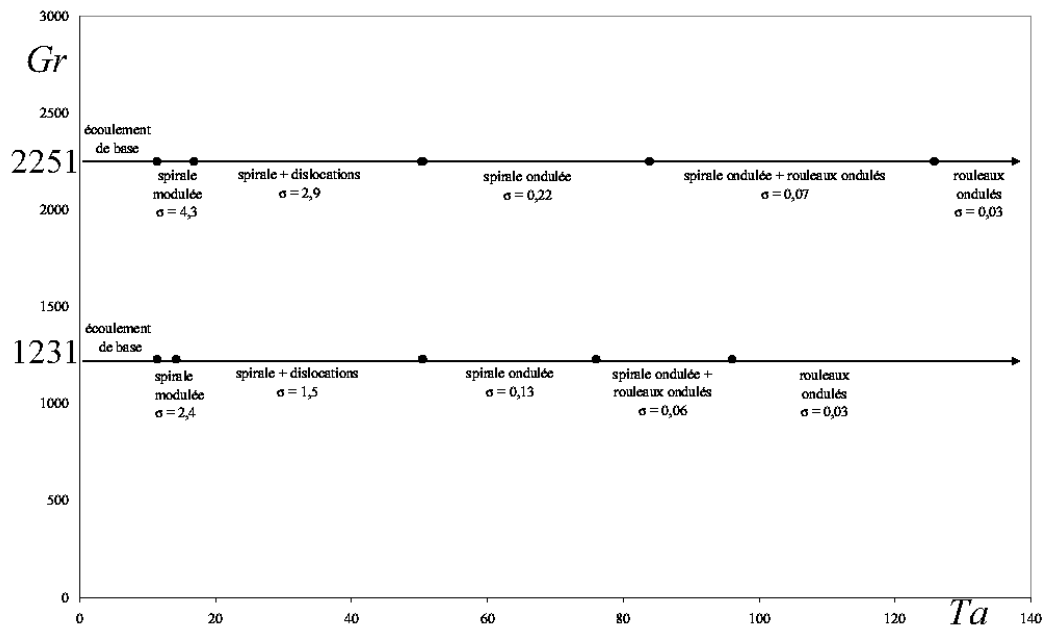


Fig.2. Diagramme de stabilité

Pour un faible écart de température, $Gr < 965$, la première instabilité apparaît sous la forme d'un motif spiralé près du bord inférieur du système avant de l'envahir progressivement lorsque Ta augmente. Pour de plus grandes valeurs de Ta , la spirale disparaît et laisse place au motif de rouleaux axisymétriques ondulés, les effets du gradient de température devenant négligeables devant les effets centrifuges [8].

Pour un grand écart de température, $Gr > 965$, le motif spiralé qui apparaît au seuil consiste en un groupe de vortex isolés s'enroulant autour du cylindre intérieur. Il est présent au centre du système et l'envahit presque totalement. L'inclinaison et l'écartement des vortex varient avec la hauteur. Ce motif se traduit par une modulation basse fréquence sur les diagrammes spatiotemporels qui incite à le décrire comme un ensemble de paquets de vortex propagatifs séparés par une zone laminaire. Pour $Gr = 1230$ (figure 3(a) et 3(b)), les paquets ont une taille plus importante dans le bas du système que dans le haut de celui-ci. Ils sont composés d'un plus grand nombre de vortex spiralés en bas alors qu'en haut, les vortex, moins nombreux, ont tendance à s'écarter les uns des autres, ce qui entraîne une variation de l'inclinaison du motif. Quand Gr augmente (figure 3(c) et 3(d)), la zone laminaire séparant chaque paquet augmente.

Pour un Gr donné, lorsque Ta augmente, des dislocations apparaissent et la zone laminaire entre chaque paquet diminue et finit par ne plus être mesurable. Ces dislocations vont devenir de plus en plus nombreuses (figure 4(a)). Le motif est alors assimilé à une spirale ondulée. Ce motif, perturbé par les dislocations, présente une inclinaison qui varie beaucoup sur toute la longueur du système. Comme pour $Gr < 965$, le motif de rouleaux axisymétriques ondulés apparaît pour de plus grandes valeurs de Ta (figure 4(b)).

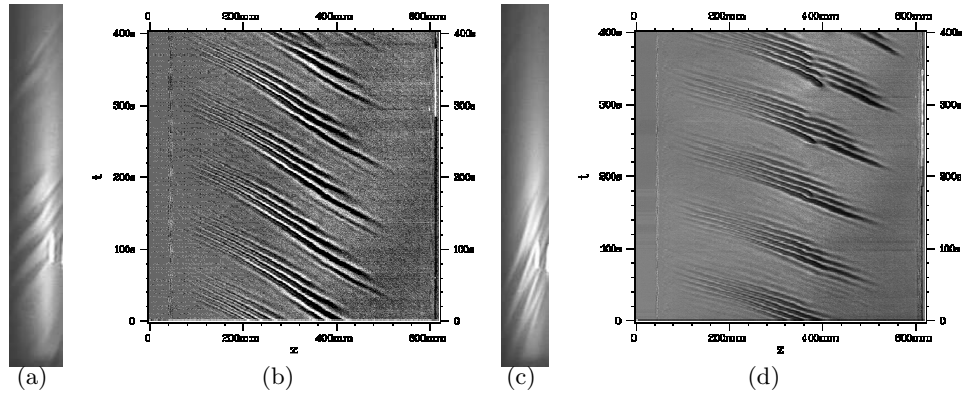


Fig.3. (a) Photographie du motif de spirale modulée au seuil pour $Gr = 1230$ et $Ta = 11.4$. (b) Diagramme spatiotemporel correspondant. (c) Photographie du motif de spirale modulée au seuil pour $Gr = 2251$ et $Ta = 11.4$. (d) Diagramme spatiotemporel correspondant.

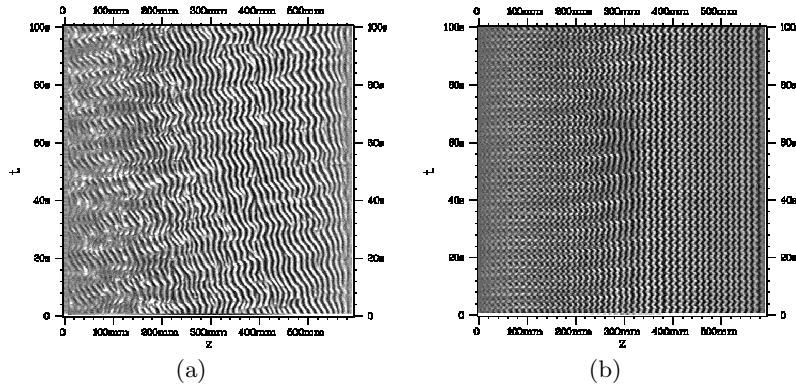


Fig.4. (a) Diagramme spatiotemporel de la spirale avec dislocations pour $Gr = 2251$ et $Ta = 44$. (b) Diagramme spatiotemporel des rouleaux ondulés pour $Gr = 2251$ et $Ta = 135$.

3.2 Propriétés spatiotemporelles des motifs

La figure 5(a) présente l'évolution du nombre d'onde moyen q en fonction de Ta pour différents Gr . q augmente avec Ta et diminue avec Gr .

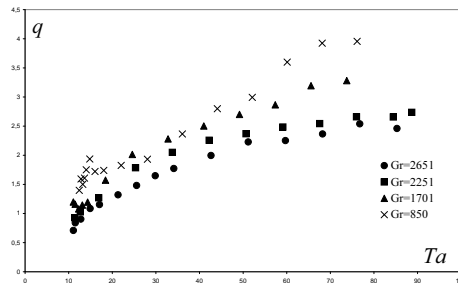


Fig.5. Evolution du nombre d'onde adimensionné moyen q en fonction de Ta pour différents Gr .

Les fréquences du motif sont relevées sur le spectre de fréquence temporel obtenu par démodulation complexe (figure 6(a)). La figure 6(b) montre l'évolution en fonction de Ta de la fréquence porteuse du motif f et de la fréquence de modulation f_{mod} , adimensionnées par le temps de diffusion visqueuse $\tau_\nu = d^2/\nu$. f augmente avec Gr tandis que f_{mod} augmente linéairement avec Ta .

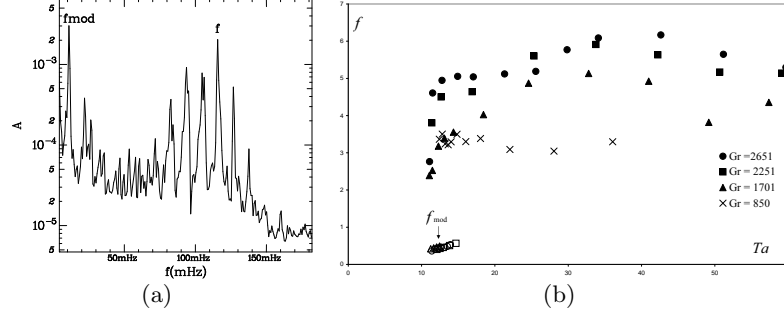


Fig.6. (a) Spectre de fréquence temporel du motif de spirale modulée au seuil pour $Gr = 2251$ et $Ta = 11.4$. (b) Evolution de la fréquence porteuse adimensionnée du motif f et de la fréquence de modulation f_{mod} en fonction de Ta pour différents Gr .

Pour étudier le motif de spirale modulée (figure 7(a)), le diagramme spatiotemporel du motif est binarisé (figure 7(b)). Les paquets apparaissent en blanc et la zone laminaire en noir. Le profil d'amplitude temporel du motif permet alors d'extraire la période d'un paquet de spirale T_{spi} ainsi que la période laminaire entre chaque paquet successif T_{lam} en différentes hauteurs du système. Un exemple est donné en figure 7(c) pour le motif au seuil à $Gr = 4257$ en $z = 250$ mm.

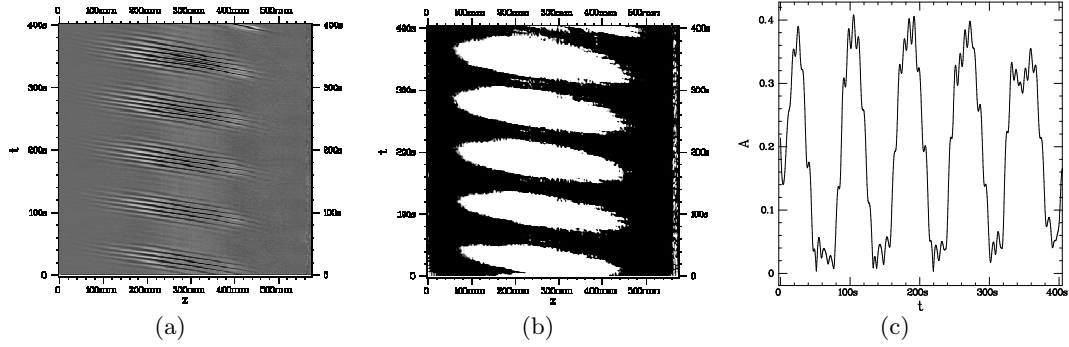


Fig.7. (a) Diagramme spatiotemporel du motif de spirale modulée au seuil pour $Gr = 4257$ et $Ta = 12$. (b) Image binarisée correspondante avec le motif en blanc et la zone laminaire en noir. (c) Profil d'amplitude du motif en $z = 250$ mm en fonction du temps.

Les figures 8(a) et 8(b) présentent la variation de T_{spi} et T_{lam} sur toute la longueur du système pour $Gr = 1230$ et $Gr = 4257$. Pour $Gr = 1230$, la zone laminaire est plus importante dans le haut du système que dans le bas de celui-ci. Il y a moins de vortex présents dans le haut du système. Quand on augmente Gr , il apparaît que la zone laminaire séparant chaque paquet augmente et devient équivalente en bas et en haut du système.

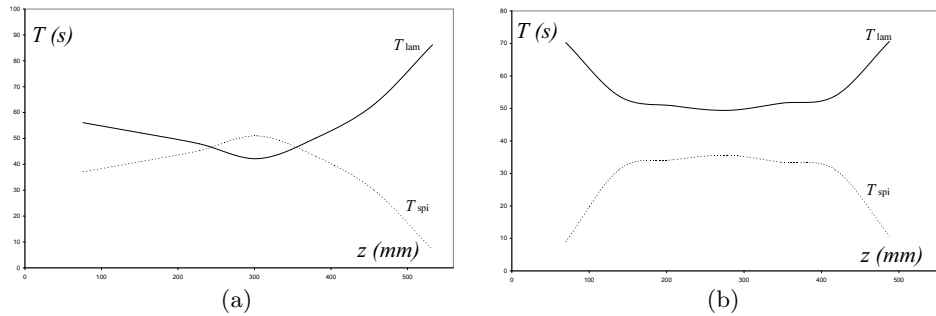


Fig.8. (a) Variation de T_{lam} et T_{spi} sur z pour $Gr = 1230$. (b) Variation de T_{lam} et T_{spi} sur z pour $Gr = 4257$

4 Conclusions et perspectives

Nous avons étudié l'effet d'un fort gradient radial de température sur la stabilité de l'écoulement de Couette circulaire. Le motif de spirale qui apparaît au seuil présente alors une modulation de fréquence. Ce motif peut être décrit comme un ensemble de paquets de vortex propagatifs séparés par une zone laminaire qui devient plus importante quand l'écart de température augmente. Lorsqu'on augmente Ta , la zone laminaire se réduit, des dislocations apparaissent puis un nouveau mode d'instabilité intervient sous la forme d'une spirale ondulée. Une technique de thermographie par cristaux liquides est actuellement mise en oeuvre afin de mesurer la température du liquide confiné dans l'entrefer [9,10,11].

Références

1. F. KREITH, Convection heat transfer in rotating systems, *In advances in heat transfer*, Academic Press, New York, **5**, 129-251 (1968).
2. P. D. WEIDMAN & M. E. ALI, On the stability of circular Couette flow with radial heating, *Journal of Fluid Mechanics*, **220** (53), (1990).
3. J. C. CHEN & J. Y. KUO, The linear stability of steady circular Couette flow with a small radial temperature gradient, *Physics of Fluids A*, **2**, 1585-1591 (1990).
4. H. A. SNYDER & S. K. F. KARLSSON, Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient, *Physics of Fluids*, **7** (10), 1696-1706 (1964).
5. K. S. BALL, B. FAROUK & V. C. DIXIT, An experimental study of heat transfer in a vertical annulus with a rotating inner cylinder, *Journal of Heat and Mass transfer*, **32**, 1517-1526 (1989).
6. D.C. KUO & K.S. BALL, Taylor-Couette flow with buoyancy : Onset of spiral flow, *Physics of Fluids*, **9** (10), 2872-2884 (1997).
7. P. MATISSE & M. GORMAN, Neutrally buoyant anisotropic particles for flow visualization, *Physics of Fluids*, **27**, 759-760 (1984).
8. V. LEPILLER, A. GOHARZADEH, A. PRIGENT & I. MUTABAZI, Weak temperature gradient effect on the stability of the circular Couette flow, *European Physics Journal B*, soumis.
9. K. WOZNIAK, G. WOZNIAK, D. RUBES & H.G. HEILAND, Konvektionsexperimente mit flüssigkristallen trachteilchen in einem engen vertikalen spalt, *Forsch Ingenieurwes*, **70**, 221-229 (2006).
10. N. AKINO, T. KUNUGI, M. UEDA & A. KUROSAWA, Liquid crystal thermometry based on automatic colour evaluation and applications to measure turbulent heat transfer, *Transport Phenomena in Turbulent Flows*, 807-827 (1989).
11. J.L. HAY & D.K. HOLLINGSWORTH, Calibration of micro-encapsulated liquid crystals using hue angle and a dimensionless temperature, *Experimental Thermal and Fluid Science*, **18**, 251-257 (1998).

Propriétés de propagation des structures localisées optiques

F. Haudin, U. Bortolozzo, & S. Residori

INLN, Université de Nice Sophia-Antipolis, CNRS, 1361 route des Lucioles 06560 Valbonne, France
 florence.haudin@inln.cnrs.fr

Résumé. Nous avons réalisé une étude des propriétés de propagation dans l'espace libre des structures localisées optiques. Notre motivation première a été de savoir comment évolue le champ électromagnétique de ces structures dans la direction z de propagation de la lumière. Nous nous sommes intéressés aux propriétés en champ proche mais aussi à la divergence en champ quasi lointain, pour une seule structure et pour des états liés. Une meilleure compréhension des comportements et des propriétés des structures localisées optiques devraient permettre de générer de nouveaux types de faisceaux. Dans un premier temps, nous avons isolé une seule structure localisée générée par l'expérience de la valve à cristaux liquides et regardé la forme du faisceau diffracté lors de sa propagation. Nous avons mis en évidence une focalisation de la structure dans un plan z donné puis celle-ci s'ouvre et présente un trou central. Les résultats obtenus en champ proche sont très différents de ceux pour une ouverture circulaire ou un faisceau gaussien. Nous avons confronté les résultats expérimentaux à ceux obtenus par intégration du système complet d'équations décrivant les effets des cristaux liquides et de la diffraction. Dans un second temps, l'étude d'états liés a mis en évidence que des structures indépendantes et parfaitement localisées dans le plan de focalisation, interfèrent en champ quasi-lointain.

Abstract. We performed a study on the propagation properties of optical localized structures in free space. Our first motivation was to know how the electromagnetic field of this structures evolves in the z -direction of light propagation. We have studied near-field properties as well as quasi far-field divergence for a single structure and for bound states. A better comprehension of the behavior and properties of optical localized structures could allow to generate new shaped beams. First, we isolated a single structure generated by the liquid crystal light valve experiment and studied the shape of the diffracted beam during its propagation. We found that the structure focalizes in a certain z -plane then it presents a central hole. Results in near-field are very different from these of a circular aperture or a Gaussian beam. We compared experimental results with those numerically obtained by integration of the complete system of equations describing both the effects of the liquid crystal and the diffraction. In a second time, the study of bound states highlights that structures that are independent and perfectly localized in the focalization plane interfere in the quasi far-field.

1 Introduction

L'apparition de structures localisées dans les systèmes hors d'équilibre est un phénomène très général présent dans différents domaines [1]. D'un point de vue phénoménologique, on peut voir les structures localisées comme des structures spatiales qui s'étendent sur une région limitée de l'espace et qui consistent en un nombre fini (et petit) des cellules élémentaires. Les exemples sont nombreux ; on peut citer les oscillons dans les milieux granulaires [2] ou dans les fluides que l'on fait vibrer verticalement [3], les motifs dans la végétation [4] et en chimie [5], les filaments de courant dans les plasmas [6], les solitons de cavité dans les lasers à semiconducteur [7], les structures localisées optiques dans les vapeurs atomiques [8] et dans les cristaux liquides [9,10].

D'un point de vue théorique, les structures localisées ont été décrites comme des connexions locales qui apparaissent dans la région d'agrafage lorsqu'il y a bistabilité entre un état stationnaire homogène et un état structuré spatialement [11]. Des modèles ont été développés dans ce cadre à partir d'une description unidimensionnelle du système dynamique réversible associé à une équation de type Swift-Hohenberg généralisée [12]. Les structures localisées ont ainsi été comprises comme les orbites homoclines ayant pour origine l'état stationnaire homogène et passant près de l'orbite périodique associée à l'état

structuré spatialement [13]. Une généralisation de cette idée a été donnée en [14] et une description de la même évolution dynamique en termes d'interaction des fronts a été récemment proposée [15].

En optique, les structures localisées peuvent être interprétées comme le résultat d'un équilibre entre les non-linéarités focalisantes du milieu et les effets de diffraction associée à la propagation de la lumière [16]. Les structures localisées optiques apparaissent ainsi comme des taches lumineuses localisées dans le plan transverse à la direction de propagation de la lumière, ces taches pouvant être éteintes ou allumées en appliquant une petite perturbation de signe adapté. Elles peuvent également former des états liés par l'intermédiaire d'oscillations présentes sur les ailes de leur profils d'intensité [10]. Récemment, un vif intérêt a été porté sur les structures localisées optiques, en vue de leur possible utilisation comme pixels élémentaires pouvant stocker l'information et l'écriture contrôlée sur une grille de phase adaptée a été démontrée expérimentalement [17].

Malgré de nombreuses observations expérimentales de structures localisées, aucune expression analytique n'est connue à ce jour pour leur profil. De plus, en optique le profil d'amplitude est complexe. Dans le cas particulier des structures localisées, la phase est proportionnelle à l'intensité et devient par conséquent une fonction des coordonnées spatiales. Une fois créées dans le milieu non linéaire, les structures localisées vont se propager mais jusqu'à présent aucune prédiction théorique sur leur évolution en propagation libre n'a été donnée. Nous nous sommes donc posé les questions suivantes : comment les structures vont-elles diffracter lors de leur propagation, comment vont-elles perdre leur caractère de structures de type solitons dissipatifs, quelles caractéristiques vont les distinguer d'autres faisceaux optiques, tels que les faisceaux gaussiens ou les faisceaux de Bessel. Ce type de caractérisation devrait permettre une meilleure compréhension et de possibles applications des structures localisées dans différents domaines de l'optique, comme la réalisation de nouveaux types de faisceaux ou le développement des pinces optiques optimisées et reconfigurables.

Nous présentons ici une étude des propriétés de propagation des structures localisées optiques. Celles-ci sont créées par l'intermédiaire des interactions non linéaires dans une expérience comprenant une valve à cristaux liquides avec rétroaction optique. Une fois sorties de la boucle de rétroaction, les structures localisées sont suivies par un système d'imagerie lors de leur propagation libre sur quelques dizaines de centimètres, leur taille caractéristique dans le plan transverse étant de quelques dixièmes de millimètres. La caractérisation expérimentale est accompagnée par des simulations numériques.

2 Dispositif expérimental

L'expérience se compose d'une valve à cristaux liquides dans une boucle de rétroaction optique. Le dispositif expérimental complet est donné par Fig.1. Le laser utilisé est un laser He-Ne de longueur d'onde 632 nm . Le faisceau laser est élargi à l'aide d'un objectif de microscope et collimaté par la lentille L_1 . La polarisation de la lumière incidente I_{in} est verticale, la direction initiale du directeur nématique \mathbf{n} est à 45° , et un cube polariseur, introduit dans la boucle de rétroaction des effets d'interférence de polarisation qui vont induire la bistabilité entre différents états d'orientation du cristal liquide. Après avoir traversé la lentille L_1 , la lumière arrive au niveau de la valve à cristaux liquides. Celle-ci est constituée par un film de cristaux liquides d'épaisseur $d=15\ \mu\text{m}$ pris en sandwich entre une lame de verre transparent et une lame photoconductrice sur laquelle est déposé un miroir diélectrique. La lame photoconductrice a pour propriété de changer d'impédance en fonction de l'intensité lumineuse I_w , dite d'écriture, qu'elle reçoit. La paroi externe du photoconducteur et celle interne de la lame de verre sont recouvertes d'une couche d'oxyde conducteur transparent. Une différence de potentiel peut ainsi être appliquée aux bornes de la valve à cristaux liquides. Un traitement spécial des parois internes permet d'imposer un ancrage planaire des cristaux liquides (directeur \mathbf{n} parallèle aux parois).

Une lumière qui traverse l'épaisseur du cristal liquide est réfléchiée par la valve avec un certain déphasage ϕ et est envoyée dans la boucle de rétroaction pour arriver sur le photoconducteur. L'information sur le déphasage ϕ est couplée à l'intensité lumineuse qui arrive sur le photoconducteur, comme nous le verrons dans la section 3. Lorsque le plan du photoconducteur coïncide avec le plan focal de la lentille L_1 et lorsque les lentilles L_1 et L_2 de même focale sont distantes de $2f$, alors un plan équivalent à celui du photoconducteur est imagé à une distance f de L_2 . Si on déplace l'extrémité du faisceau de

fibres d'une distance L , on peut introduire de la diffraction sur une longueur L de propagation libre dans la boucle de rétroaction. En général la distance L peut être positive ou négative et elle se calcule comme $L = (l_1 + l_2) - 2f$, avec f la distance focale des lentilles L_1, L_2 , et l_1, l_2 précisées sur Fig. 1.

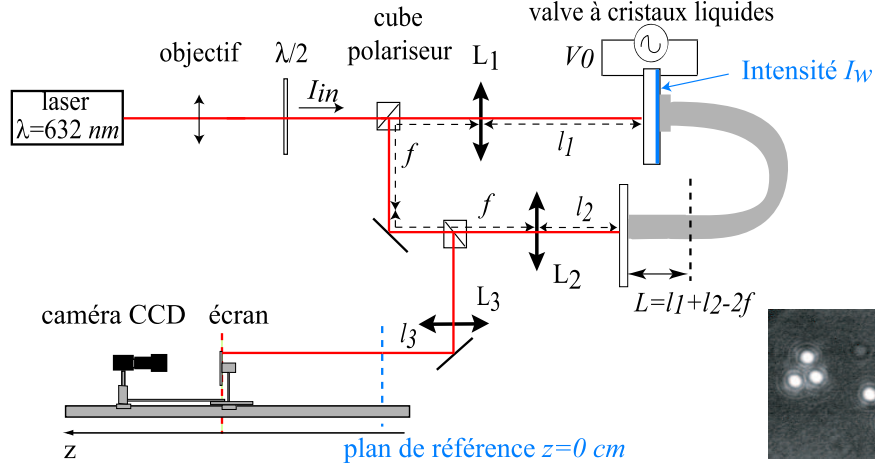


Fig.1. Dispositif expérimental de la valve à cristal liquide avec rétroaction optique. Dans le cadre en bas à droite est montré un exemple de structures localisées observées dans le plan $z = 0 \text{ cm}$.

Dans le montage, un deuxième cube séparateur permet de dévier de la boucle de rétroaction une petite portion du faisceau et de l'utiliser pour suivre l'évolution des structures localisées. Une lentille L_3 de même focale f que L_1 et L_2 est placée sur le chemin du faisceau de telle façon que le cube soit équidistant de L_2 et de L_3 . Le faisceau utilisé pour faire les mesures parcourt ainsi le même chemin optique que le faisceau à l'intérieur de la boucle de rétroaction. Nous définissons ensuite le plan de référence, noté plan $z = 0 \text{ cm}$, comme le plan qui reproduit à l'extérieur de la boucle l'équivalent du plan du photoconducteur. Cela revient à satisfaire la condition $l_2 = l_3$ sur les trajets optiques à l'intérieur, respectivement, à l'extérieur du parcours de rétroaction (Fig. 1).

Pour étudier la propagation des structures localisées, nous déplaçons selon la direction z l'ensemble caméra-écran, rendu solidaire avec une pièce métallique. La caméra est reliée à un ordinateur et à un écran de télévision. Par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition d'images, nous enregistrons la distribution d'intensité lors du déplacement à vitesse contrôlée de l'ensemble caméra-écran.

3 Modèle théorique pour le système de la valve à cristaux liquides

Le modèle pour le système de la valve à cristaux liquides se compose de deux équations couplées : la première pour l'angle θ de basculement des molécules du cristal liquide, cet angle étant une moyenne sur l'épaisseur du film nématique. La seconde équation décrit l'évolution du champ optique dans la boucle de rétroaction. L'équation pour θ comprend un terme diffusif dû au couplage élastique des molécules entre elles et un terme de rappel lié au champ électrique appliqué sur les cristaux liquides. Elle s'écrit

$$\tau \frac{\partial \theta}{\partial t} = l^2 \nabla_{\perp}^2 \theta - \theta + \theta_0 \quad (1)$$

avec l la longueur de cohérence diélectrique et τ le temps de réponse des cristaux liquides [18]. θ_0 est la solution stationnaire homogène qui est définie par régression des données expérimentales comme [17]

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{V_{FT}}{TV_0 + \alpha I_w}} \right).$$

avec V_{FT} la tension de transition de Fréedericksz, V_0 la tension appliquée à la valve, $\Gamma < 1$ un facteur constant qui tient compte des impédances des couches diélectriques et α une constante phénoménologique qui décrit la réponse linéaire du photoconducteur.

Si l'angle θ est petit, nous pouvons écrire le déphasage de la lumière à la traversée de la cellule comme $\phi = \beta \cos^2 \theta$, où $\beta = 2\pi(n_e - n_o)d/\lambda$ avec $n_e - n_o$ la biréfringence du cristal liquide (n_e , n_o l'indice extraordinaire, respectivement, ordinaire), d l'épaisseur du film de cristal liquide et λ la longueur d'onde de la lumière. Après un parcours dans la boucle de rétroaction, l'intensité d'écriture I_w arrivant sur le photoconducteur est donnée par

$$I_w = \frac{I_{in}}{4} \left| e^{\frac{-iL}{2k} \nabla_{\perp}^2} (e^{-i\phi} + 1) \right|^2, \quad (2)$$

avec I_{in} l'intensité à l'entrée, L la longueur de propagation libre dans la boucle de rétroaction, $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde optique et ∇_{\perp}^2 l'opérateur Laplacien transverse. Les équations montrent donc que $I_w = f(\theta)$ et que $\theta = f(I_w)$. Des régimes bistables sont ainsi possibles et, grâce à la diffraction qui sélectionne une taille transverse caractéristique, proportionnelle à $\sqrt{\lambda L}$, la bistabilité peut s'établir entre un état homogène et un état spatialement structuré. Dans ces régimes de paramètres, le système montre des structures localisées qui apparaissent dans le plan $z = 0$ cm comme des taches isolées avec une taille transverse qui dépend de L et qui est de l'ordre de quelques centaines de microns. Un exemple des structures localisées observées en $z = 0$ cm est montré dans la Fig. 1.

4 Propriétés de propagation d'une structure localisée

Les paramètres expérimentaux V_0 et I_{in} ont été ajustés de façon à sélectionner une seule structure localisée. Partant du plan de référence $z = 0$, le dispositif écran-caméra est déplacé pour acquérir des profils d'intensité transverses pour différentes positions z .

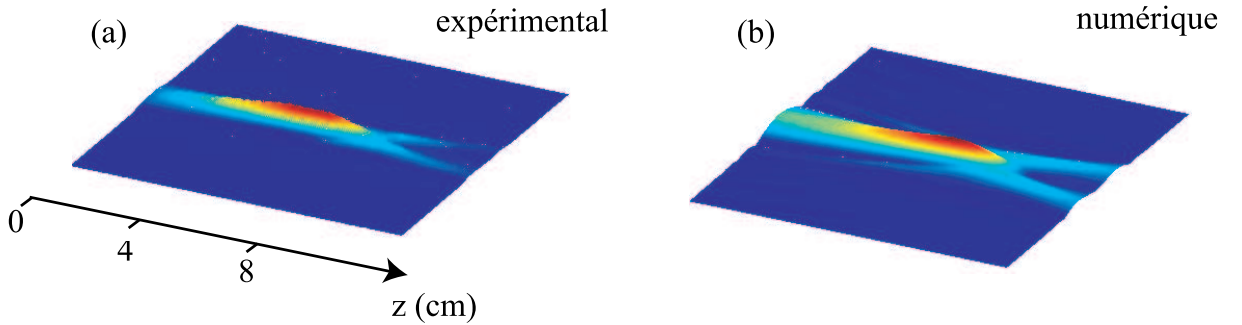


Fig.2. Irradiance (a) expérimental et (b) numérique d'une structure localisée pour $L = -8$ cm.

Une étude préalable réalisée avec un motif hexagonal a permis de déterminer une limite entre champ proche et champ quasi lointain comme $2z_T$, avec z_T la distance de Talbot définie comme $z_T = p^2/\lambda$, p étant la taille caractéristique de la structure [19]. Dans le plan $z = 0$ cm, la structure apparaît comme une tache lumineuse de diamètre proche de $250 \mu\text{m}$ pour $L = -8$ cm. Au cours de sa propagation, elle se focalise puis s'ouvre en présentant un trou central. Elle se referme ensuite pour présenter une seconde focalisation de moindre intensité. Pour $z > 2z_T$, la structure présente des anneaux de diffraction. L'irradiance, c'est-à-dire le profil d'intensité dans une plan (r, z) permet d'avoir une bonne vision suivant z de la forme du faisceau. Les résultats ont montré un très bon accord entre l'expérience et les simulations numériques (Fig.2). Nous avons aussi vérifié numériquement que la structure trou n'est pas associée à une singularité de phase.

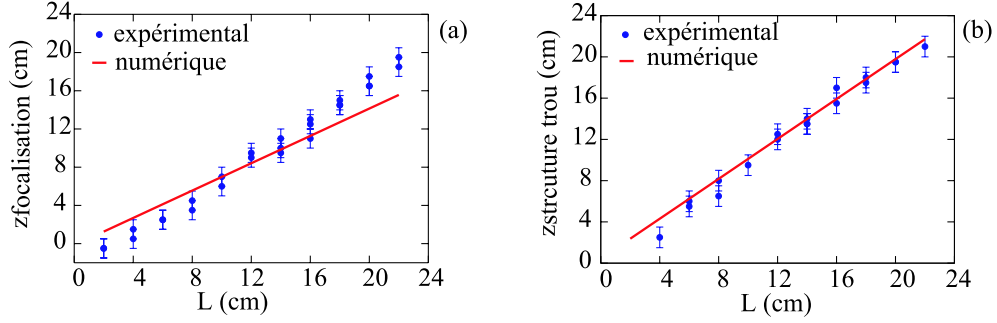


Fig.3. (a) Plan de focalisation et (b) position de la structure trou en fonction de L .

Nous avons étudié la dépendance des positions en z de la focalisation et de la structure trou en fonction de la longueur de propagation libre L dans la boucle de rétroaction. La structure trou apparaît à une distance proche de L tandis la focalisation apparaît toujours à une distance fixe et de quelques centimètres avant la structure trou (Fig.3). Les résultats numériques et expérimentaux coïncident pour la position de la structure trou alors que pour la focalisation il y a un petit décalage dû à la sensibilité du plan de focalisation à la valeur de I_{in} .

En champ quasi lointain, nous avons comparé la divergence du faisceau obtenu par diffraction d'une structure localisée avec celle d'un faisceau gaussien. Pour déterminer cette divergence, nous nous sommes appuyés sur la position du premier minimum d'intensité dans les profils radiaux de la structure (Fig.4). Par cette méthode, nous avons trouvé que le faisceau formé par diffraction d'une structure localisée diverge comme un faisceau gaussien de taille $w_0 = 115 \mu\text{m}$ dans le plan $z = 0 \text{ cm}$.

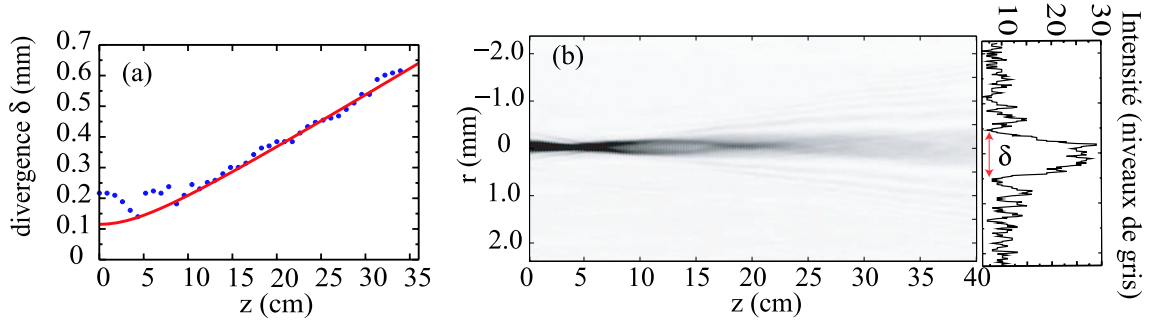


Fig.4. (a) Divergence d'une structure localisée (points) et divergence d'un faisceau gaussien (ligne); (b) irradiance montrant l'évolution de la structure localisée en champ quasi-lointain et profil d'intensité à $z = 40 \text{ cm}$.

5 États liés de structures localisées

Nous avons réalisé des profils transverses d'états liés à deux et trois structures dans le plan de focalisation et en champ quasi lointain (Fig.5). Nous avons mis en évidence que des structures indépendantes dans le plan de focalisation interagissent et interfèrent entre elles en champ quasi lointain. Pour des états liés à deux structures, on observe en champ quasi lointain, un motif rouleau dans la région où les deux structures interfèrent. Pour un état lié à trois structures, formant approximativement un triangle équilatéral, on observe en champ quasi lointain un motif hexagonal. Cette étude sur les états liés montre donc que les structures localisées optiques apparaissent comme des objets qui selon le plan où on les

observe peuvent présenter soit un comportement qui semble particulière ("spot" de lumière) soit un comportement ondulatoire avec formation de figures d'interférences, révélant ainsi une dualité onde-particule.

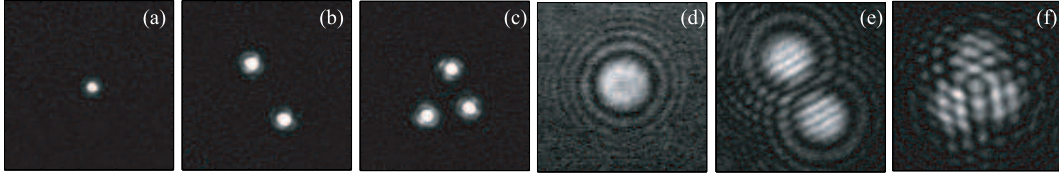


Fig.5. Comportement particulière et ondulatoire des structures localisées : (a),(b),(c) : $z = 4 \text{ cm}$; (d),(e),(f) : en champ quasi-lointain ; $L = -8 \text{ cm}$

6 Conclusions

Nous avons étudié expérimentalement et numériquement les propriétés des structures localisées optiques. Nous avons montré que les caractéristiques de phase et d'intensité de ces structures conduisent à une focalisation suivie d'une structure trou à une position z égale à la longueur L de propagation libre dans la boucle de rétroaction.

Références

1. G. NICOLIS & I. PRIGOGINE, *Self-organization in nonequilibrium systems : from dissipative structures to order through fluctuations*, John Wiley & Sons, New York, (1977).
2. P. B. UMBANHOWAR, F. MELO & H. L. SWINNEY, *Nature*, **382**, 793 (1996).
3. H. ARBELL & J. FINEBERG, *Physical Review Letters*, **85**, 756 (2000).
4. J. VON HARDENBERG, E. MERON, M. SHACHAK & Y. ZARMI, *Physical Review Letters*, **87**, 198101 (2001).
5. K-JIN LEE, W. D. MCCORMICK, J. E. PEARSON & H. L. SWINNEY, *Nature*, **369**, 215 (1994).
6. Y. A. ASTROV & Y. A. LOGVIN, *Physical Review Letters*, **79**, 2983 (1997).
7. S. BARLAND *et al.*, *Nature*, **419**, 699 (2002).
8. B. SCHÄPERS, M. FELDMANN, T. ACKEMANN & W. LANGE, *Physical Review Letters*, **85**, 748 (2000).
9. P. L. RAMAZZA, E. BENKLER, U. BORTOLOZZO, S. BOCCALETTI, S. DUCCI & F. T. ARECCHI, *Physical Review E*, **65**, 066204 (2002).
10. U. BORTOLOZZO, R. ROJAS & S. RESIDORI, *Physical Review E*, **72**, 045201 (2005).
11. Y. POMEAU, *Physica D*, **23**, 3 (1986).
12. M. TLIDI, P. MANDEL & R. LEFEVER, *Physical Review Letters*, **73**, 640 (1994).
13. P. D. WOODS & A. R. CHAMPNEYS, *Physica D*, **129**, 147 (1999).
14. P. COULLET, C. RIERA & C. TRESSER, *Physical Review Letters*, **84**, 3069 (2000).
15. M.G. CLERC & C. FALCON, *Physica A*, **356**, 48 (2005).
16. D. W. MC LAUGHLIN, J. V. MOLONEY & A. C. NEWELL, *Physical Review Letters*, **51**, 75 (1983).
17. U. BORTOLOZZO & S. RESIDORI, *Physical Review Letters*, **96**, 037801 (2006).
18. P.G. DE GENNES & J. PROST, *The Physics of Liquid Crystals*, (Oxford Science Publications, Clarendon Press, 2nd edition, 1993).
19. H. F. TALBOT, *Philosophical Magazine*, **9**, 401 (1836).

Solitons dissipatifs de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe à (3+1)D : balles de lumière et pulsations

Al. Kamagaté, Ph. Grellu & P.T. Dinda

Institut Carnot de Bourgogne, UMR CNRS 5209, Université de Bourgogne, BP 47870, 21078 Dijon Cedex, France

Adresse électronique non communiquée

Résumé. Nous examinons les solutions localisées stationnaires ou oscillantes de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D. La méthode utilisée est celle des coordonnées collectives. Cette méthode consiste à réduire le problème de l'évolution du champ impulsionnel, à un simple problème de dynamique d'un système mécanique gouverné par un nombre restreint de degrés de liberté, qui sont associés aux paramètres fondamentaux de l'impulsion. Nous montrons qu'un choix approprié de la fonction d'essai (ansatz), permet de mettre en évidence plusieurs variétés de solutions stables et localisées, correspondant à des solitons spatio-temporels dissipatifs. Parmi ces solutions, figurent des solitons à évolution parfaitement stationnaire, et des solitons qui se propagent en exécutant des déformations internes de forte amplitude (soliton à respiration).

1 Introduction

L'étude des solitons dissipatifs a connu récemment un regain d'intérêt conduisant à un nombre impressionnant de travaux dans plusieurs domaines des sciences non-linéaires [1]. Les études sur ce type de solitons sont utiles, tant du point de vue fondamental que pour le développement de composants dédiés au traitement par voie purement optique du guidage des impulsions optiques de télécommunications à ultra-haut débit. Les systèmes optiques dissipatifs admettent des solitons à une, deux et trois dimensions [2]. Lorsque les paramètres du système sont bien définis, on peut obtenir des solitons parfaitement stables sur des distances de propagation relativement importantes. En plus des solutions stationnaires, on peut trouver dans d'autres régions de paramètres, des solutions oscillantes, qui correspondent aux impulsions qui se propagent en exécutant des déformations internes de grande amplitude.

Les propriétés et conditions d'existence des solitons à une et deux dimensions, ont été examinées intensivement au cours de la précédente décennie. En comparaison, l'étude des solitons à trois dimensions n'en n'est qu'à ses balbutiements. Dans la présente étude nous nous focalisons sur ce type de solitons, afin d'obtenir ses conditions d'existence et ses propriétés. Nous montrons qu'une approche de coordonnées collectives construite sur des fonctions d'essai convenablement choisies, permet de cerner rapidement les domaines d'existence des solitons stationnaires, et ceux des solitons à respiration.

Pour notre étude, nous considérons le modèle de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D. Cette équation rend compte de la dynamique spatio-temporelle des structures localisées en régime dissipatif non-linéaire, et peut se mettre sous la forme suivante :

$$\psi_z - \frac{i}{2}D\psi_{tt} - \frac{i}{2}\psi_{xx} - \frac{i}{2}\psi_{yy} - i\gamma|\psi|^2\psi - i\nu|\psi|^4\psi = \delta\psi + \beta\psi_{tt} + \epsilon|\psi|^2\psi + \mu|\psi|^4\psi \quad (1)$$

où $\psi = \psi(x, y, t, z)$ représente l'enveloppe normalisée du champ électrique ; t, x, y , sont les coordonnées de temps et d'espace, z est la distance de propagation. Le membre de gauche de cette équation représente les termes conservatifs : D représente le coefficient de dispersion de la vitesse de groupe, γ le coefficient de non-linéarité Kerr, et enfin ν représente le terme de saturation de la non-linéarité. Le membre de droite inclut les termes dissipatifs : δ, ϵ, β , et μ sont respectivement les coefficients de perte linéaire (si négatif), de gain non-linéaire (si positif), de filtre spectral et de saturation de gain non-linéaire (si négatif). Les systèmes dissipatifs complexes sont souvent non intégrables [3]. Bien que les solutions exactes de CGLE (1+1) existent, elles ne peuvent être explicitement présentées que seulement pour certaines relations entre

les paramètres du système et toutes ces solutions analytiques sont instables [4] ; les seules solutions stables sont obtenues numériquement. En outre, à notre connaissance, il n'existe pas de solution stationnaire de CGLE (3+1) sous forme analytique. Notre étude consiste à mettre au point une cartographie des solutions stables et instables dans l'espace des paramètres de l'équation (1). En effet, les études menées jusqu'à présent emploient principalement les simulations numériques qui prennent un temps de calcul considérable [5]. Ce travail intensif peut être nettement allégé avec la méthode des coordonnées collectives, qui permet une réduction complète du problème de l'évolution du champ, (qui a un nombre infini de degré de liberté) à l'évolution d'un jeu fini de caractéristiques d'une fonction d'essai. Dans ce qui suit, nous emploierons des fonctions d'essai à symétrie cylindrique ; compte tenu de la symétrie entre x et y dans (1), on peut poser que $\psi(x, y, t, z) = \psi(r, t, z)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Un des paramètres fondamentaux qui décrit l'évolution de la solution est l'énergie totale Q :

$$Q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2\pi r |\psi(r, t, z)|^2 dt dr. \quad (2)$$

Si la solution reste localisée, l'énergie évolue mais reste finie. En outre, quand la solution stationnaire est atteinte, l'énergie Q converge vers une valeur constante. Une autre possibilité est, pour les solutions à respiration, une oscillation de l'énergie en fonction de z . Et enfin, pour les solutions instables qui divergent, l'énergie tend vers l'infini. Nous avons observé tous ces scénarios lors des simulations numériques.

2 La méthode des Cordonnées Collectives

L'idée de la méthode des coordonnées collectives est d'associer une variable (appelée variable collective) à chaque degré de liberté d'un système mécanique équivalent (au système initial décrit par le champ $\psi(r, t, z)$). Chaque variable collective est introduite de manière à ce qu'elle décrive une grandeur physique fondamentale du soliton (amplitude, position temporelle, largeur, chirp, etc.) [6]. A cette fin, on fait l'approximation qui consiste à exprimer le champ impulsionnel exact $\psi(r, t, z)$, dont l'expression analytique est inconnue, comme suit :

$$\psi(r, t, z) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + q(z, t), \quad (3)$$

où la fonction ansatz f est choisie pour représenter au mieux la configuration de l'impulsion et q est un champ résiduel dont la présence assure que la somme de f et q vérifie l'équation (1). Le choix de l'ansatz est constitué une étape capitale dans la mise en place d'une méthode de coordonnées collectives. Généralement, les fonctions ansatz utilisées pour les solitons optiques sont de type sécante hyperboliques, gaussiennes ou supergaussiennes. Un des résultats remarquables de notre étude est la mise en évidence que l'ansatz qui conduit aux meilleurs résultats dans un vaste domaine de paramètres est la supergaussienne, qui s'exprime de la manière suivante :

$$-\frac{r^4}{x_3^4} + ix_4 t^2 + ix_5 r^2 + ix_6 \quad (4)$$

Nous avons employé une fonction supergaussienne avec un chirp spatial et temporel car le système est dissipatif. Les x_i représentent les coordonnées collectives ($i = 1 \dots 6$) : x_1 est l'amplitude de l'impulsion, x_2 et x_3 sont associés aux largeurs temporelle et spatiale transverse de l'impulsion, $x_4/(2\pi)$ est le paramètre de chirp suivant t de l'impulsion, $x_5/(2\pi)$ est le paramètre de chirp suivant r de l'impulsion, x_6 est la constante de phase.

A l'aide de l'approche des coordonnées collectives et en utilisant notre ansatz (4) nous avons obtenu à partir de l'équation (1), un jeu de six équations différentielles ordinaires qui gouvernent l'évolution des

paramètres d'une impulsion se propageant dans l'espace et le temps.

$$\dot{x}_1 = x_1\delta + 0.46x_1^3\epsilon e^{\frac{1}{2}} + 0.21\mu x_1^5 e - x_1x_4D - 4x_1x_5 - \frac{x_1\beta}{x_2^2}(3.18 + 0.17x_2^4x_4^2) \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2x_4D - 0.12x_2x_1^2\epsilon e^{\frac{1}{2}} - 0.07x_1^4x_2\mu e + (2.63 - 0.81x_2^4x_4^2)\frac{\beta}{x_2} \quad (6)$$

$$\dot{x}_3 = 4x_3x_5 - 0.12x_3x_1^2\epsilon e^{\frac{1}{2}} - 0.07x_1^4x_3\mu e \quad (7)$$

$$\dot{x}_4 = \left(\frac{4.90}{x_2^4} - 2x_4^2\right)D - \frac{18.31x_4\beta}{x_2^2} - \frac{0.63x_1^2\gamma e^{\frac{1}{2}}}{x_2^2} - \frac{0.38x_1^4\nu e}{x_2^2} \quad (8)$$

$$\dot{x}_5 = -4x_5^2 + \frac{5.81}{x_3^4} - \frac{0.63x_1^2\gamma e^{\frac{1}{2}}}{x_3^2} - \frac{0.38x_1^4\nu e}{x_3^2} \quad (9)$$

$$\dot{x}_6 = 2.65\beta x_4 + 0.25x_1^4\nu e + 0.52x_1^2\gamma e^{\frac{1}{2}} - \frac{5.28}{x_3^2} - \frac{1.64D}{x_2^2} \quad (10)$$

L'intérêt de cette approche (de coordonnées collectives) réside dans l'aisance avec laquelle elle permet d'obtenir les points fixes, ainsi qu'une cartographie des différents types de solutions, ce qui réduit de plusieurs ordres de grandeur le volume de calcul habituellement requis pour obtenir le même type de résultats.

3 Etude de la stabilité

Les points fixes (points fixes) du système peuvent être obtenus en résolvant l'équation $\dot{x}_i = 0$ avec $i = 1\dots 6$. Le seuil d'existence des points fixes peut être estimé par la relation suivante $\epsilon_s \approx 2\sqrt{\delta\mu}$. Si $\epsilon > \epsilon_s$ on a deux types de points fixes; les points fixes stables et les points fixes instables. La stabilité des points fixes est déterminée par l'analyse des valeurs propres λ_j avec $j = 1\dots 6$ de la matrice de stabilité $M_{ij} = \partial\dot{x}_i/\partial x_j$ [7,8].

Notre critère de stabilité est le suivant : si la partie réelle d'au moins une des valeurs propres est positive, alors le point fixe correspondant est instable; donc pour avoir des points fixes stables il faut que les parties réelles des valeurs propres de la matrice M_{ij} soient toutes négatives. Les points fixes stables correspondent aux solutions stables de l'équation (1) (balles de lumière stables). Les balles de lumière existent dans des régions définies dans l'espace des paramètres de (1), mais il est extrêmement difficile de faire la cartographie de ces régions en faisant varier à la fois les sept paramètres. On réalise des sections des domaines d'existence en fixant cinq paramètres et variant les deux autres paramètres, ainsi on cartographie dans un plan la région des balles de lumière stables.

Ainsi, en explorant les régions des paramètres situées au voisinage de $D = \gamma = 1$, $\beta = 0.1$, $\delta = -0.4$, et $\mu = -0.1$, nous avons mis en évidence dans le plan (ν, ϵ) une riche variété de solutions de l'équation (1) incluant les solitons spatio-temporels stationnaires. La fonction suivante, arbitraire, est le champ initial à partir duquel on résout l'équation des points fixes.

$$\psi(r, t, 0) = 3.54 \exp\left(-\frac{t^2}{0.33} - \frac{t^4}{0.10} - \frac{r^2}{0.31} - \frac{r^4}{0.10}\right), \quad (11)$$

En partant de cette condition initiale (11), et en faisant varier ν de -0.12 à -0.03 et ϵ de 0.5 à 0.95 , on arrive à une cartographie des solutions de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D regroupant les solitons stationnaires (balles de lumière) et les solitons oscillantes à respirations. La Figure 1 montre la cartographie des solutions pour la gamme des valeurs choisies; on a en pointillé les solutions stables stationnaires qui représentent les balles de lumière. Ces impulsions conservent leurs amplitudes, leurs largeurs spatiales et temporelles et leurs chirps spatial et temporel constants sur de très grandes distances. Après une courte oscillation (à gauche en figure 2), l'énergie d'une telle impulsion devient constante lors de la propagation. La figure 3 donne le profil temporel d'une balle de lumière en propagation.

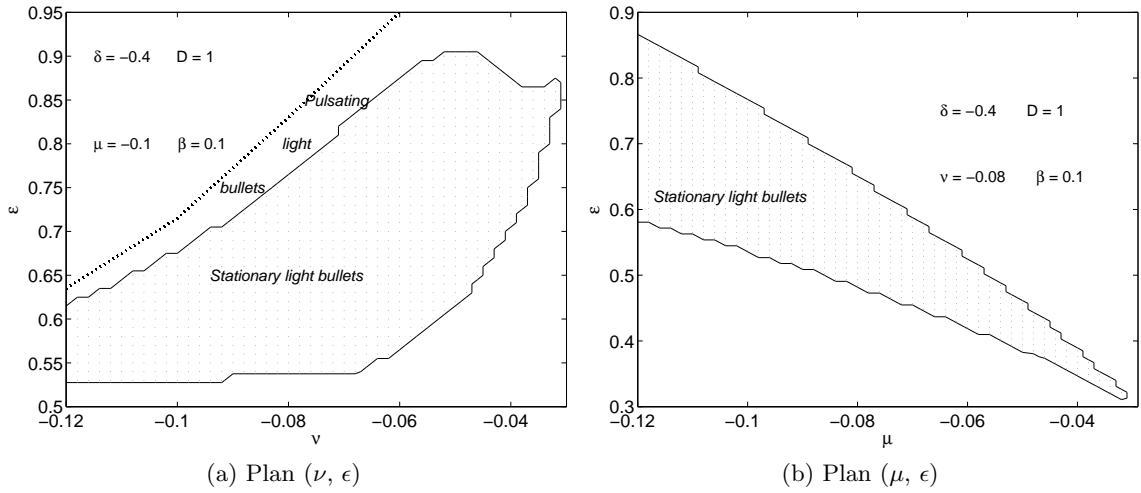


Fig.1. Cartographies des solutions : les points fixes stables sont représentés en pointillés.

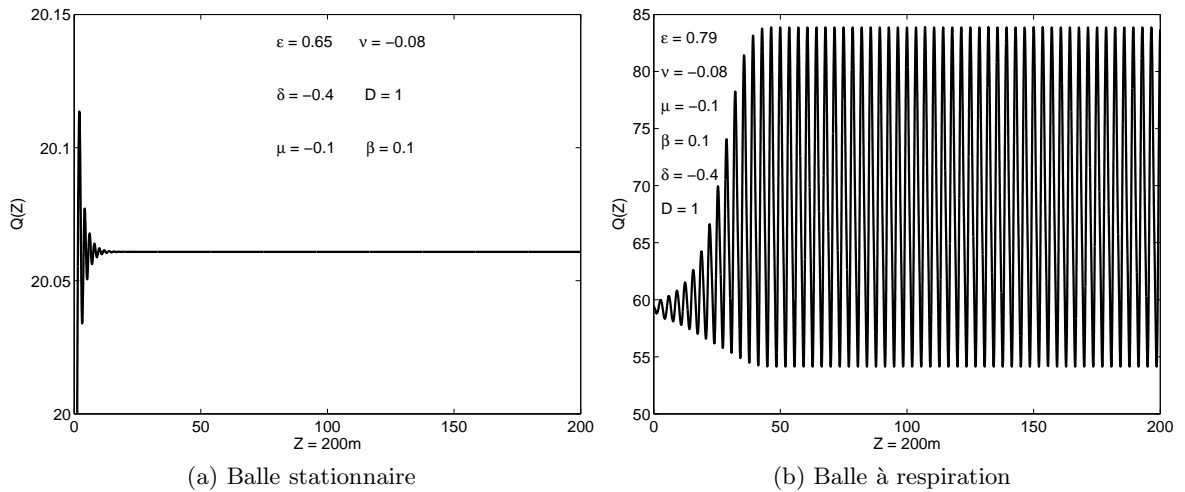


Fig.2. Evolution de l'énergie de balle de lumière.

Au dessus des points fixes stables, on a les points fixes instables. Cette zone peut être divisée en deux parties suivant le comportement des impulsions. La zone proche des solitons stationnaires, correspond à celle des solitons oscillantes que nous appelons "soliton à respiration", par analogie avec les solutions 1D. Ces impulsions ont des paramètres (amplitudes, largeurs) qui oscillent, mais cette oscillation demeure stationnaire sur de très grandes distances. Il en va de même pour l' énergie (voir figure 2), qui oscille au cours de la propagation après une période transitoire de courte distance. Sur la même figure 3, on voit le profil d'une balle de lumière à respiration qui corrobore le comportement d'une telle impulsion. La deuxième partie (la partie supérieure) des points fixes instables correspond aux impulsions instables, dont l'énergie diverge rapidement vers l'infini.

Comme nous l'avons dit plus haut, pour qu'il ait stabilité, il faut entre autre un équilibre entre les pertes et le gain. En d'autres termes il serait intéressant de voir comment le gain non-linéaire et sa saturation agissent sur la stabilité des impulsions. Pour y arriver nous avons obtenu une cartographie des balles de lumière dans le plan (μ, ϵ) pour des valeurs de $\nu, \delta, \gamma, D, \beta$ valant $(-0.08, -0.4, 1, 1, 0.1)$. Le résultat est représenté sur la figure 1. Il en ressort que, lorsque la saturation du gain non-linéaire

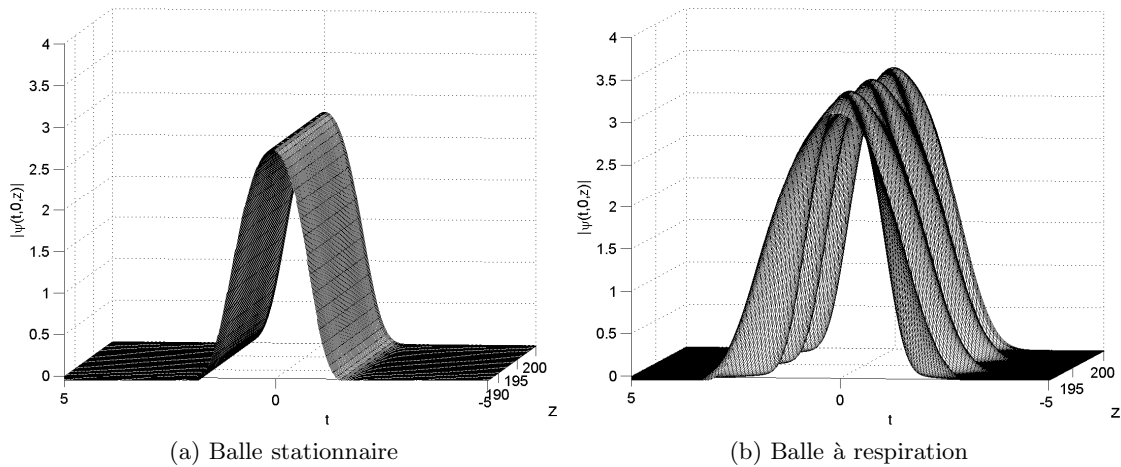


Fig.3. Evolution du profil temporel au cours de la propagation pour une balle de lumière.

diminue et que le gain non-linéaire augmente, on obtient une zone de stabilité de point fixe qui devient de plus en plus large; Ainsi donc, pour avoir des balles de lumières stables il faut que les fortes pertes relatives à la saturation du gain non-linéaire soient compensées par une augmentation du gain non-linéaire. Cette propriété s'accorde qualitativement bien avec celle décrite dans la référence [3], dans le cas unidimensionnel (solitons temporels).

4 Conclusion

Au terme de notre étude, nous avons pu, par une méthode simple et très peu onéreuse en temps de calculs, mettre en évidence des balles de lumière stationnaires et oscillantes de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe (CGLE) à (3+1)D dans différent plans des paramètres de l'équation. Mais la validité de cette étude repose sur un choix minutieux de la fonction ansatz car, en fonction de l'ansatz, l'étendue des différentes zones de stabilité varient. Ce travail peut être approfondi, avec un potentiel applicatif dans les domaines de la physique, la chimie et la biologie qui sont d'écrits par l'équation de Ginzburg-Landau Complexe. A titre d'exemple nous pouvons mentionner pour le domaine optique, les fonctions de traitement parallèle, la réalisation des mémoires tampons optique, et la régénération des bits optiques.

Références

1. *Dissipative solitons*, Ed. N.Akhmediev & A. Ankiewicz, Springer (2005).
2. N. N. ROSANOV, *Spatial Hysteresis and Optical Patterns*, Springer, (2002).
3. J.-M SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV & V. V.AFANAJEV, *Journal of the Optical Society of America B*, **13**, 1439 (1996).
4. J.-M SOTO-CRESPO, P. GRELU, N.AKHMEDIEV & N. DEVINE, *Physical Review E*, **75** 016613 (2007).
5. J.-M. SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV & P. GRELU, *Physical Review E*, **74**, 046612 (2006).
6. P. T. DINDA, A. B. MOUBISSI & K. NAKKEERAN, *Physical Review E*, **64**, 016608 (2001).
7. E. N. TSOY, A. ANKIEWICZ & N. AKHMEDIEV, *Physical Review E*, **73**, 036621 (2006).
8. E. N. TSOY & N. AKHMEDIEV, *Physics Letters A*, **343**, 417-422 (2005).

Tourbillons élastiques supercritiques observés dans l'écoulement de Couette-Taylor de solutions de polymères.

F. Kelai, O. Crumeyrolle & I. Mutabazi

Laboratoire d'Ondes et Milieux Complexes (LOMC), FRE-3102 CNRS-Université du Havre, 76058 Le Havre
 faycal.kelai@univ-lehavre.fr

Résumé. Nous rapportons les observations de l'écoulement de Couette-Taylor des solutions viscoélastiques obtenues à l'aide de solutions aqueuses de polyoxyéthylène (POE) de forte masse molaire et de polyéthylène glycol (PEG) de petite masse molaire. Ces solutions présentent une rhéofluidification négligeable, et se rapprochent du cas des fluides de Boger. A partir de visualisation par nappe laser nous établissons des diagrammes spatiotemporels qui sont étudiés par traitement du signal. Une transition supercritique est observée depuis l'écoulement de base vers un régime de paires irrégulièrement espacées de tourbillons, typiques d'un comportement élastique [1,2]. Nous discutons nos résultats par rapport aux travaux antérieurs.

Abstract. We report observations of the viscoelastic Couette-Taylor flows of polymer solutions obtained with aqueous solutions of polyethylene-oxide (PEO, high molecular weight) and polyethylene glycol (PEG, small molecular weight). These solutions have a negligible shear-thinning, and share similarities with Boger fluids. From laser light-sheet visualisation we extract space-time diagrams. The main flow features are obtained by signal analysis. A supercritical transition is observed from the basic flow to a regime of irregularly spaced pairs of vortices, an attribute of an elastic behaviour [1,2]. We compare our results with previous work.

1 Introduction

Les écoulements viscoélastiques peuvent présenter des comportements différents de ceux observés pour les fluides newtoniens. L'absence pour les fluides viscoélastiques d'équations universelles de type Navier-Stokes comme pour les fluides newtoniens est une limitation majeure pour la prédiction de ces écoulements. L'intérêt industriel pour les écoulements viscoélastiques a donc motivé de nombreux travaux expérimentaux. Les solutions de polymères de forte masse molaires constituent des liquides viscoélastiques modèles. Il est possible de contrôler leurs propriétés (concentrations, viscosité, etc.). Elles présentent aussi des applications immédiates, par exemple en raison du phénomène de réduction de traînée [3]. L'écoulement viscoélastique dans le système de Couette-Taylor constitue un des systèmes modèle pour l'étude des instabilités viscoélastiques, et ceci depuis plus de quarante ans. Le système de Couette-Taylor est constitué de deux cylindres coaxiaux qui peuvent tourner indépendamment l'un de l'autre, et entre lesquels est confiné une couche de fluide. Il a fait l'objet de nombreuses études dans le cas des fluides newtoniens [4-6].

Une étape majeure fut franchie dans le cas viscoélastique quand en 1990 Larson *et al.* [7] rapportèrent que les effets élastiques pouvaient à eux seuls déstabiliser l'écoulement. On parle d'instabilité purement élastique. Elles ont été observées (ex : [7,8]) avec, au seuil, un comportement oscillant non-axisymétrique et désordonné, et ceci pour des nombres de Reynolds très faibles dans la mesure où l'on peut augmenter le temps de relaxation (ex. : en augmentant la masse molaire, la concentration, la viscosité du solvant). Larson *et al.* ont établi l'existence de ce régime à la fois expérimentalement par l'étude de fluides dits de Boger (ex. : solution polyisobutylène/polybutène, très élastique et très visqueuse) et théoriquement par une étude de stabilité linéaire du modèle d'Oldroyd-B. Le mécanisme d'instabilité purement élastique a été précisé et généralisé pour des amplitudes finies –toujours avec le modèle d'Oldroyd-B– par Groisman et Steinberg [8]. Ces auteurs ont montré en étudiant le cas de solution élastiques obtenues à l'aide de polyacrylamide en solution aqueuse sucrée –moins visqueuses que les fluides de Boger– que le seuil de l'instabilité est repéré par $K^2 = (\tau\dot{\gamma})^2(d/a)(\eta - \eta_s)/\eta$ constant (avec η la viscosité de la solution, η_s la

viscosité du solvant, $\tau = (\eta - \eta_s)/nRT$ le temps de relaxation moléculaire avec n le nombre de moles de polymère par unité de volume, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement dans l'entrefer, d l'épaisseur de l'entrefer et a le rayon du cylindre intérieur). On note que dans [8], l'instabilité purement élastique a été observée sous la forme d'une transition avec un important effet d'hystérésis vers un mode supérieur d'instabilité appelé par ces auteurs « oscillations désordonnées » ($K_{forward} = 1,64$) et que les « paires de tourbillons » élastiques isolées, qui délimitent l'écoulement en domaines et sont supposées être le mode d'instabilité élastique « primaire », ne sont observées que si on réduit le paramètre de contrôle (jusqu'à $K_{backward} = 0,86$) une fois le seuil franchi. En faisant varier la concentration, la température, la proportion de sucre, ces auteurs ont notamment vérifié l'influence des viscosités respectives du solvant et de la solution sur la vitesse critique de rotation. Ces travaux ont par la suite conduit à la découverte du régime de turbulence élastique [9].

Seule se distingue l'observation par Baumert et Muller [2], pour une unique solution, d'un motif dit de « *flame pattern* », semblable mais en un peu plus désordonnée à des paires de tourbillons élastiques isolées. Ce motif ne perdurait que peu de temps dans l'expérience.

Dans ce travail nous rapportons l'apparition supercritique de paires de tourbillons élastiques isolées et désordonnées pour des solutions de polymères aqueuses de polyoxyéthylène (POE) et polyéthylène glycol (PEG), que nous comparons aux travaux antérieurs.

2 Dispositif expérimental

2.1 Solutions de polymères

Nous employons des solutions de POE de forte masse molaire (Aldrich, $M = 3.10^6$ g/mol d'après les mesures en diffusion de la lumière) à de faibles concentrations. Le POE est à l'origine du caractère viscoélastique. Le solvant est obtenu à partir de 97,5% d'eau, de 2,5% d'alcool isopropylique et de PEG (Fluka, 20000 g/mol) en différentes concentrations. Ce dernier polymère est employé comme agent viscosifiant. Ces solutions se rapprochent de certains travaux antérieurs avec du polyacrylamide ou du polyisobutylène, à la fois de par la faible concentration en polymère de forte masse molaire, par l'absence de rhéofluidification et par la viscosité du solvant. Cette dernière constitue la contribution principale à la viscosité totale de la solution, et les viscosités ne varient pas avec le taux de cisaillement, comme illustré fig. 1. Les viscosités de l'ensemble des solvants employés vont de 33,5 mPa.s à 98 mPa.s et celles des solutions obtenues varient de 41,5 mPa.s à 113,3 mPa.s. Ceci est à comparer avec les viscosités employées par Groisman et Steinberg [8]. Ces auteurs ont obtenu des viscosités de solutions variant entre 52 mPa.s à 290 mPa.s, avec une contribution polymérique $\eta - \eta_s$ variant fortement avec le taux de cisaillement, le ratio $(\eta - \eta_s)/\eta_s$ pouvant passer de environ 60% pour les faibles taux de cisaillement à 6% pour les valeurs des taux de cisaillement critiques les plus élevées employées dans leurs expériences. L'observation du motif de « *flame pattern* » par Baumert et Muller [2] a été obtenue avec un fluide plus visqueux : $\eta_s = 260$ mPa.s, $\eta = 300$ mPa.s.

2.2 Cellule de Couette-Taylor

Les solutions sont placées dans l'entrefer situé entre deux cylindres coaxiaux verticaux (fig. 2). Le cylindre intérieur est noir, en aluminium anodisé, de rayon extérieur $a = 4$ cm et le cylindre extérieur est en verre, de rayon intérieur $b = 5$ cm. L'entrefer s'étend sur 45,9 cm de hauteur. Le rapport d'aspect est donc de 45,9, tandis que le rapport des rayons vaut $d/a = (b - a)/a = 0,8$. Le cylindre extérieur est maintenu immobile. Ce dernier est isolé thermiquement par une cuve rectangulaire en plexiglas remplie d'eau. Notons que la géométrie rectangulaire du bain favorise les observations optiques. Le cylindre est piloté à l'aide d'un servomoteur qui permet de réguler la vitesse de rotation angulaire Ω du cylindre intérieur à 0,063 rad/s près. L'expérience est réalisée à la température ambiante, très peu variable au cours d'une acquisition. L'éventuelle évolution de la température entre les acquisitions est mesurée.

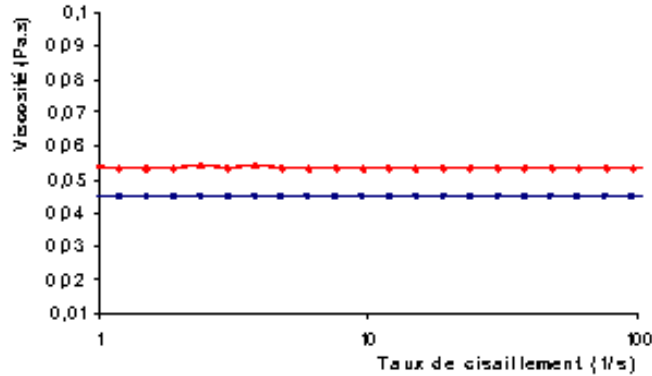


Fig.1. Absence de rhéofluidification : exemple de viscosités de cisaillement à 25°C pour respectivement, courbe inférieure, eau + 30% en masse de PEG (=solvant) et, courbe supérieure, eau + 100 ppm en masse de POE + 30% en masse de PEG (=solution viscoélastique, 100 ppm est la valeur la plus élevée employée).

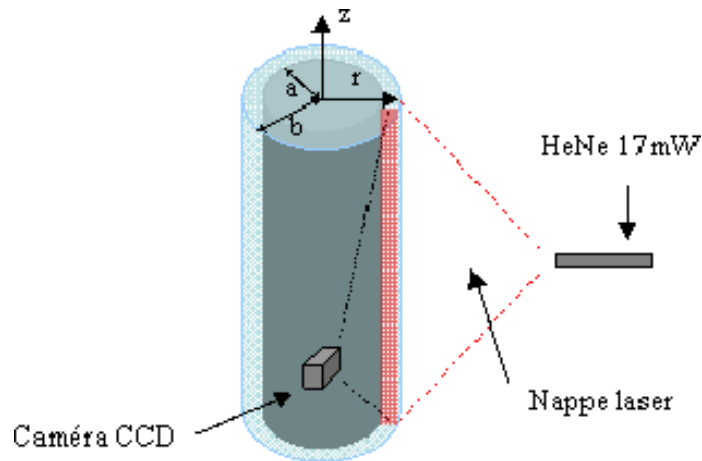


Fig.2. Dispositif expérimental.

2.3 Visualisation

On ajoute à nos solutions 2% (en volume) de Kalliroscope AQ1000. Il s'agit d'une solution diluée de plaquettes réfléchissantes anisotropes ($30\mu\text{m} \times 6\mu\text{m} \times 0,07\mu\text{m}$), sans effet sur les propriétés rhéologiques des solutions. La visualisation de l'écoulement est obtenue par une coupe laser verticale de l'entrefer de 17 à 35 cm de haut. Une caméra CCD 2D (1600x1200 pixels) enregistre l'intensité lumineuse $I(r, z, t)$ à la cadence de 12 images par seconde pendant 10 minutes. A partir de ces acquisitions, on peut extraire des diagrammes spatio-temporels $I(z, t)$ à r fixé. Ces diagrammes sont étudiés par traitement du signal. Chaque expérience est conduite en augmentant progressivement la vitesse de rotation Ω , et donc le taux de cisaillement imposé $\dot{\gamma} = \Omega a/d$, et en respectant des paliers d'attente de 10 minutes.

3 Résultats et discussion

Pour les faibles valeurs de vitesse de rotation du cylindre, l'écoulement observé est un écoulement de Couette circulaire dans tous les cas. Pour les solvants, le mode d'instabilité critique est formé de rouleaux de Taylor, c'est-à-dire des paires de tourbillons axisymétriques contrarotatifs brisant la symétrie de translation axiale. Il s'agit du mode d'instabilité attendu et observé pour les fluides newtoniens dans

le cas présent où seul le cylindre intérieur tourne. Les modes d'instabilités critiques observés pour les solutions viscoélastiques sont rapportés fig. 3 et diffèrent du cas newtonien. Ces motifs d'écoulements observés présentent en effet des domaines séparés par des parois caractérisées par un important écoulement radial comme en témoigne la très faible luminosité renvoyée par les paillettes réfléchissantes. Ces motifs sont semblables à des paires de tourbillon élastiques isolés, en plus désordonnées ([1,2]). Le spectre de Fourier temporel est quasi-continu (fig. 4) pour les fréquences au-delà de 0,1 Hz, fréquence qui correspond en ordre de grandeur à la durée de vie des parois.

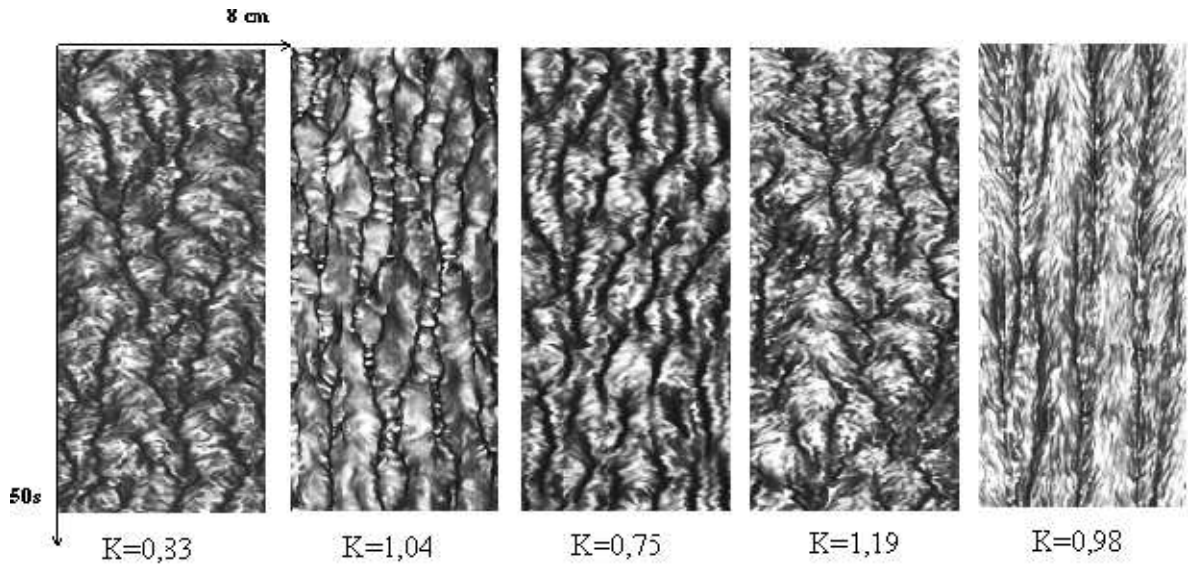


Fig.3. Diagrammes spatiotemporels critiques d'intensité $I(z,t)$ à $r = a + d/4$ pour différents cas de solutions viscoélastiques en fonction de la valeur critique de K observée.

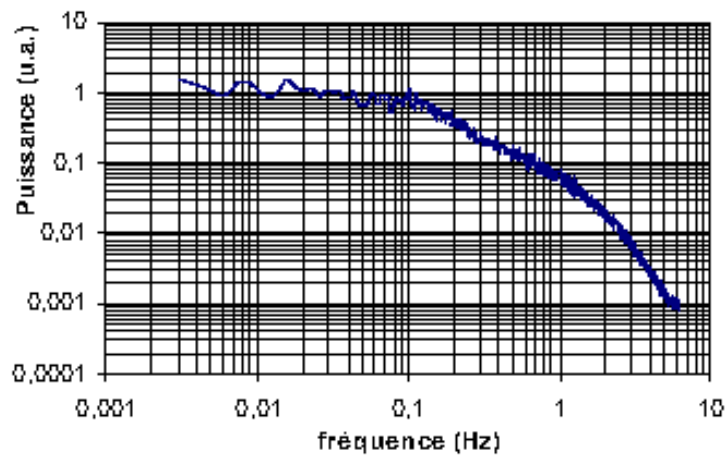


Fig.4. Spectre temporel pour $K = 0,83$.

Les premières mesures de PIV établissent qualitativement le caractère rentrant de l'écoulement au niveau des parois et la faible recirculation autour, ce qui confirme la similitude avec les motifs précédemment observé dans la littérature. Il faut noter que dans cette étude les motifs (fig. 3) ont été observés comme premier mode d'instabilité, en augmentant la vitesse de rotation. Il n'a pas été nécessaire de diminuer la vitesse après apparition d'un premier motif, distinct, comme dans les expériences de Groisman et Steinberg. En effet ces auteurs ont observé une transition vers un régime d'oscillations désordonnées, à partir duquel ils peuvent observer des paires de tourbillons isolées (ex : [1,10]) en diminuant la vitesse de rotation. Pour nos expériences, aucun effet d'hystérésis significatif n'a été observé au voisinage du seuil. Par ailleurs les écoulements ont été observés sur des périodes de plus de vingt minutes sans présenter d'affaiblissement. A l'opposé, l'observation par Baumert et Muller [2] de la transition directement depuis l'écoulement de base vers le « *flame pattern* » n'est que transitoire, puisque le motif disparaît en environ 40 secondes, à vitesse de rotation constante. De plus le seuil a été atteint via une rampe linéaire de vitesse rapide (7 s) plutôt qu'en procédant par pallier avec des délais d'attente comme dans le présent travail.

Nous rapportons les observations pour 5 valeurs différentes des paramètres de contrôles des solutions de polymères : le ratio $S = (\eta - \eta_s)/\eta_s$ varie de 0,11 à 0,28 et le temps¹ τ de 0,1 s à 0,37 s, soit un nombre élastique $E = \tau/\tau_\nu$ qui augmente de 0,04 à 0,42. Le temps de diffusion visqueuse $\tau_\nu = \rho d^2/\eta$ varie de 0,9 s à 2,4 s.

Le seuil d'instabilité est caractérisé par une valeur critique de K variant de 0,75 à 1,2. Le nombre de Taylor critique $Ta = \sqrt{d/a} \cdot Re$ décroît fortement de 42,4 à 6,3 (avec le nombre de Reynolds critique $Re = \dot{\gamma} d^2 \rho/\eta$), ce qui montre que l'instabilité n'est pas inertielle, alors qu'au contraire, les valeurs critiques de K –nombre adimensionnel caractérisant la transition élastique– restent proche de 1. Dans le cas inertio-élastique, nous avons précédemment rapporté [11] que celui-ci s'observe, avec le même type de solutions, uniquement pour des valeurs critiques de K inférieures à 0,7.

Nous rapportons fig. 5 les valeurs critiques de K en fonction des deux paramètres adimensionnels S et E qui caractérisent les solutions, où nous avons aussi porté le résultat de Baumert et Muller [2] (K ; S ; E) = (1,09 ; 0,15 ; 0,16). Celui-ci coïncide bien avec nos résultats.

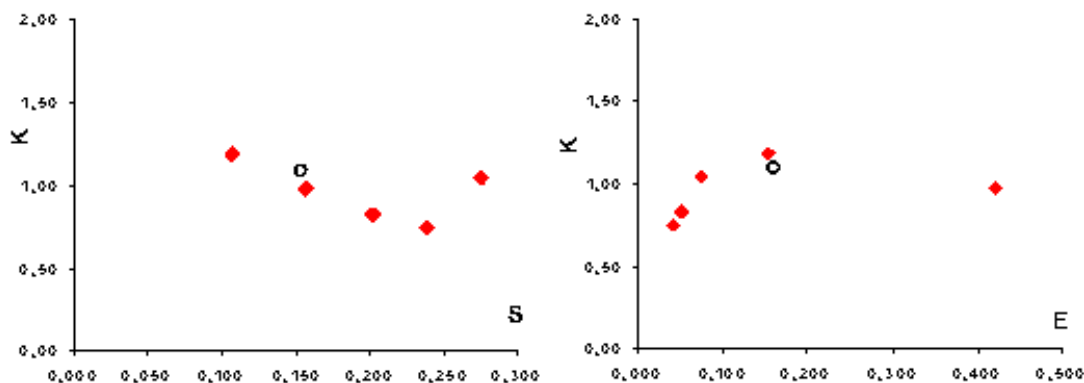


Fig.5. Valeurs critiques de K en fonction des paramètres adimensionnels S et E caractérisant les solutions.

4 Conclusion

Nous avons observé expérimentalement pour l'écoulement de Couette-Taylor de solutions aqueuses de POE+PEG la transition directe depuis l'écoulement de base vers un régime formé de paires de tourbillons isolés désordonnés présentant les caractéristique des instabilités élastiques. Compte-tenu de la bonne résolution expérimentale au niveau du paramètre de contrôle que constitue la vitesse, on peut supposer

¹ calculé avec n le nombre de moles de POE par unité de volume, avec $M = 3.10^6$ g/mol.

que le régime observé résulte bien d'une transition supercritique vers un régime non-transitoire, à l'opposé des travaux antérieurs, qui présentaient soit un fort hystérésis (environ 90% d'écart), soit un caractère transitoire. Le caractère désordonné était attendu compte-tenu du plat présenté par la courbe de stabilité marginale du nombre d'onde au voisinage de son minimum, tel que prédit par le modèle d'Oldroyd-B ([7]). On notera que les solutions employées dans cette étude ont bien une viscosité constante avec le taux de cisaillement, comme requis par le modèle d'Oldroyd-B, et contrairement à [8], et présentent des viscosités faibles par rapport aux solutions de polyisobutylène/polybutène, ce qui évite les problèmes d'échauffement interne. La comparaison avec ce modèle devra donc être conduite.

Références

1. A. GROISMAN & V. STEINBERG, *Europhysics Letters*, **43** (2), 165-170 (1998).
2. B. M. BAUMERT & S.J. MULLER, *Physics of Fluids*, **9** (3), 566-586 (1997).
3. B. A. TOMS, *Proceeding of the Internation Congress on Rheology*, Holland, 1948 (North Holland, Amsterdam), pp. II-135-141 (1949).
4. C. D. ANDERECK, S. S. LIU & H. L. SWINNEY, *Journal of Fluid Mechanics*, **164**, 155 (1986).
5. R. F. GINN & M. M. DENN, Rotational stability in viscoelastic liquids : Theory. *AIChE Journal*, **15** (3), 450-454, (1969).
6. H. FRIEBE Das stabilitätsverhalten verdünnter lösungen sehr langkettiger hochpolymerer in der couette-strömung. *Rheology Acta* **15**, 329-355, (1976).
7. R. G. LARSON, E. S. G. SHAQFEH & S. J. MULLER, A purely elastic instability in Taylor-Couette Flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **218**, 573 (1990).
8. A. GROISMAN & V. STEINBERG, Mechanism of elastic instability in Couette flow of polymer solutions : Experiment, *Physics of Fluids*, **10** (10), 2451 (1998).
9. A. GROISMAN & V. STEINBERG, *New Journal of Physics*, **6** (29), 010029, (2004).
10. A. GROISMAN & V. STEINBERG, *Philosophical Magazine B*, **78** (2), 253-263 (1998).
11. F. KELAI, O. CRUMEYROLLE & I. MUTABAZI , *15th International Couette-Taylor Workshop*, (2007).

Diverses manifestations de l'effet Raman lors de la propagation d'impulsions femtosecondes dans une fibre microstructurée

B. Kibler, A. Guenot, C. Finot & G. Millot

Institut CARNOT Bourgogne, UMR 5209 CNRS-Université de Bourgogne, Dijon
Bertrand.Kibler@u-bourgogne.fr

Résumé. Dans le cadre de la génération de supercontinuum, nous mettons en évidence les dynamiques spectrales majeures de solitons liées à l'effet Raman dans une fibre microstructurée, à l'aide d'un montage expérimental simple. L'étude menée ici concerne l'évolution d'impulsions femtosecondes en régime de dispersion anormale d'une fibre microstructurée présentant deux longueurs d'onde de dispersion nulle. A l'aide de simulations numériques, nous confirmons nos différentes observations expérimentales ayant relevé les manifestations suivantes liées à l'effet Raman : l'auto-décalage en fréquence des solitons, la compensation de cet auto-décalage, mais également la formation et l'auto-décalage en fréquence de paires de solitons liés et enfin la collision de ces solitons.

Abstract. We have investigated specific spectral dynamics of solitons due to the Raman effect in photonic crystal fiber, with a simple experimental setup. In particular, we have studied the nonlinear propagation of femtosecond optical pulses, injected in the anomalous dispersion regime of a photonic crystal fiber exhibiting two zero dispersion wavelengths, leading to supercontinuum generation. Our experimental observations have highlighted the following major manifestations related to the Raman effect : the soliton self-frequency shift, the compensation of this self-frequency shift, but also the formation and self-frequency shift of bound soliton pairs and the collision of these solitons. These dynamics have also been confirmed by our numerical simulations.

1 Introduction

La propagation non-linéaire d'impulsions femtosecondes dans une fibre optique a connu ces dernières années un vif regain d'intérêt avec le développement des fibres microstructurées air-silice. Ces dernières offrent en effet la possibilité d'avoir une dispersion anormale dans les domaines visible et proche-infrarouge, tout en bénéficiant d'une non-linéarité jusque-là inégalée. Ces propriétés ont été à la base du développement des sources supercontinuum [1]. Un tel élargissement spectral est le fruit d'une interaction complexe entre effets linéaires et non-linéaires. La dynamique de l'impulsion peut alors être décrite par l'équation de Schrödinger non-linéaire généralisée. Outre la dispersion et la non-linéarité Kerr de la silice, cette équation prend également en compte le terme de choc optique modifié et la réponse Raman de la fibre [2]. Les simulations numériques présentées par la suite sont basées sur cette équation généralisée (1) et les caractéristiques de dispersion (β_k) et non-linéarité (γ) de la fibre fournies par le constructeur.

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \sum_{k \geq 2} \frac{i^{k+1}}{k!} \beta_k \frac{\partial^k A}{\partial T^k} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma \left(1 + i\tau_{shock} \frac{\partial}{\partial T} \right) \left[A(z, T) \int_{-\infty}^{+\infty} R(T') |A(z, T - T')|^2 dT' \right] \quad (1)$$

Nous nous intéressons ici plus particulièrement à l'évolution d'impulsions femtosecondes, dans le régime de dispersion anormale d'une fibre microstructurée. Ce cas de figure donne lieu généralement à un élargissement spectral de plusieurs centaines de THz, suite à l'injection d'impulsions assimilables à des solitons d'ordre supérieur [1]. Les impulsions subissent un premier élargissement spectral symétrique (par automodulation de phase) qui est suivi alors de la fission (brisure due aux effets perturbatifs) des solitons d'ordre supérieur (dès les premiers centimètres). Un soliton initial donne ainsi naissance à plusieurs solitons fondamentaux. Les solitons éjectés les premiers ont les amplitudes les plus élevées et les durées les plus courtes, et se propagent avec des vitesses de groupe plus grandes. Dans le même temps,

les perturbations des ordres supérieurs de dispersion permettent le transfert d'énergie de l'autre côté du zéro de dispersion vers les plus courtes longueurs d'onde sous la forme de génération d'ondes dispersives (DW), lorsque le pompage est effectué proche du premier zéro de dispersion. Enfin le processus majeur de l'élargissement spectral est la diffusion Raman qui entraîne un décalage continu des solitons émis vers les hautes longueurs d'onde. Cet effet est appelé auto-décalage en fréquence du soliton (SSFS) [3] et résulte du recouvrement du spectre du soliton avec sa propre bande de gain Raman.

Cependant, ce processus d'auto-décalage en fréquence du soliton n'est pas la seule conséquence de la diffusion Raman sur les dynamiques des solitons issus de la fission. Des interactions plus complexes peuvent également donner lieu à des dynamiques temporelles et spectrales originales [4]-[5].

À l'aide d'un montage expérimental simple, nous avons pu mettre en évidence ces manifestations majeures liées à l'effet Raman dans le cadre de la génération de supercontinuum, et des simulations numériques complémentaires les ont confirmées. Le montage expérimental utilisé est présenté à la Fig. 1 avec les principales caractéristiques de la fibre microstructurée (PCF), en particulier ses deux longueurs d'onde de dispersion nulle (ZDW) ainsi que son coefficient de non-linéarité γ . La source impulsionnelle est un laser Titane :Saphir (Mira Coherent) pouvant délivrer des impulsions de largeur temporelle estimée à 150 fs avec un taux de répétition de 76 MHz à des longueurs d'onde comprises entre 750 et 900 nm. Notons que le couplage maximum obtenu à l'entrée de la PCF est d'environ 35%. Dans ce montage, l'ensemble lame demi-onde et polariseur permet de modifier la puissance à l'entrée tout en gardant la polarisation rectiligne du laser alignée parallèlement à l'un des axes propres de la fibre biréfringente microstructurée (Crystal Fibre PCF NL-PM-750).

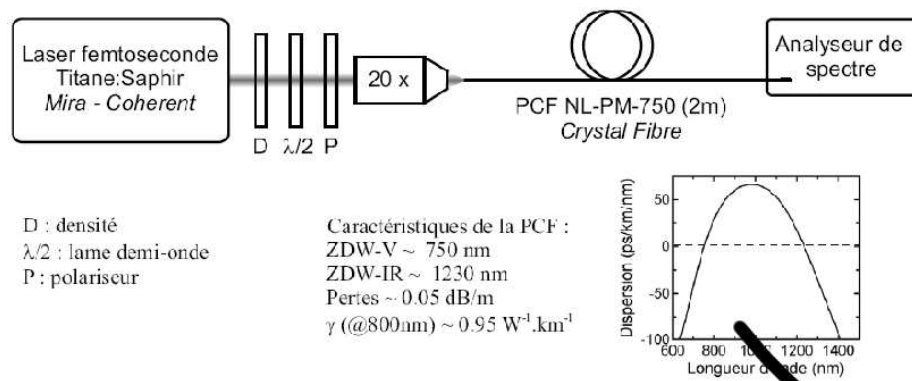


Fig.1. Schéma du montage expérimental et caractéristiques constructeur de la PCF utilisée

2 Auto-décalage et stabilisation en fréquence de solitons

La Fig. 2(a) montre l'évolution des spectres expérimentaux relevés pour diverses valeurs de l'énergie en entrée de fibre. Les impulsions injectées de longueur d'onde 891 nm (dans le régime de dispersion anormale de la PCF) ont un profil d'intensité gaussien et une largeur temporelle à mi-hauteur d'environ 160 fs. Nous observons effectivement l'auto-décalage spectral des solitons issus de la brisure de l'impulsion d'entrée en faisant croître l'énergie initiale des impulsions. Les décalages en fréquence (par rapport à la fréquence pompe) par effet Raman sont présentés à la Fig. 2(b), pour les fréquences centrales des deux premiers solitons issus de la fission (S1 et S2). Nous identifions alors clairement deux dynamiques spectrales distinctes, d'une part un auto-décalage en fréquence de 891 à 1215 nm pour des énergies initiales inférieures à 100 pJ (pour S1), et d'autre part une interruption de ce décalage menant à une stabilisation en fréquence pour les énergies supérieures. Le soliton S2 montre les mêmes dynamiques avec un décalage initial en énergie. En effet, une impulsion initiale plus puissante est nécessaire pour générer un soliton d'ordre supérieur suffisant.

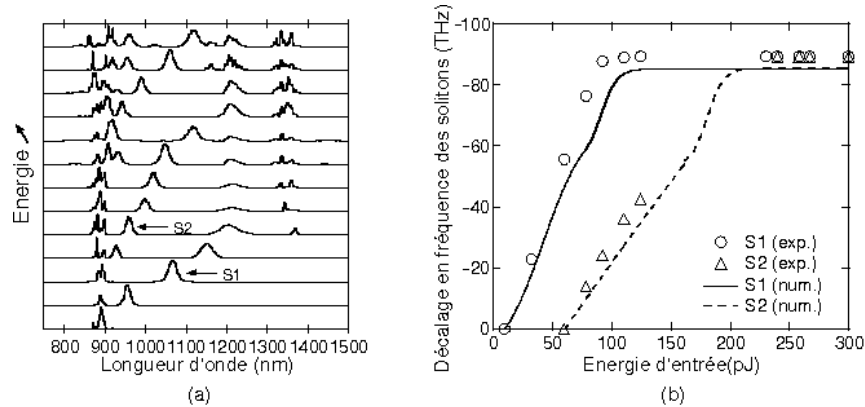


Fig.2. (a) Spectres expérimentaux relevés pour différentes énergies injectées dans la PCF montrant les dynamiques d'auto-décalage et de stabilisation en fréquence des solitons. (b) Comparaison des décalages en fréquence (par rapport à la pompe) expérimentaux et numériques des deux premiers solitons issus de la fission (S1 et S2).

Le processus de stabilisation en fréquence vers 1215 nm s'effectue donc au voisinage du second zéro de dispersion de la PCF (donné par le constructeur à 1230 nm) et s'accompagne de la génération de nouvelles composantes spectrales centrées vers 1350 nm dans le régime de dispersion normale de la fibre. En effet au voisinage du zéro de dispersion, la dispersion de vitesse de groupe varie de manière significative (changement de signe) à travers la largeur spectrale du soliton. Par conséquent, une certaine condition de résonance peut être satisfaite, si bien que de nouvelles fréquences appelées radiations de Cherenkov (ou ondes dispersives) sont générées par un transfert d'énergie du soliton [4]-[6]. Ce couplage entre soliton et onde dispersive donne lieu à un rappel vers les courtes longueurs d'onde du soliton [6] qui compense le décalage par effet Raman vers les grandes longueurs d'onde [7]. La conséquence majeure est une stabilisation en fréquence des solitons au voisinage du deuxième zéro de dispersion.

Les simulations numériques correspondantes ont permis de confirmer ces évolutions spectrales. Les décalages en fréquence des solitons (S1 et S2) obtenus numériquement sont également représentés à la Fig. 2(b), et montrent un bon accord avec les résultats expérimentaux. Cependant, nous pouvons observer une légère différence quelle que soit l'énergie sur les positions spectrales obtenues numériquement et expérimentalement, surtout visible au niveau de la stabilisation. Cette différence peut s'expliquer notamment par les écarts possibles entre la courbe de dispersion fournie par le constructeur et la dispersion réelle de la PCF utilisée. Les évolutions temporelle et spectrale obtenues par simulation sont montrées à la Fig. 3. L'auto-décalage en fréquence des solitons (S1 et S2) se traduit également par leur compression temporelle et leur décalage temporel résultant de leur différente vitesse de groupe qui évolue. Une fois la stabilisation en fréquence atteinte par S1, nous observons sur la Fig. 3(b) toujours un décalage temporel de S1 accompagné de la génération d'une onde dispersive (DW) qui se déplace plus rapidement que lui. Lorsque l'énergie initiale augmente, nous observons que le soliton S2 atteint lui aussi la stabilisation en fréquence vers 200 pJ et génère lui aussi son onde dispersive. Cette superposition spectrale de deux solitons décalés temporellement donne lieu à l'apparition d'une modulation spectrale dont la période varie en augmentant l'énergie injectée. En effet, ce phénomène s'explique par le fait que la distance temporelle entre les solitons S1 et S2 diminue pour des énergies supérieures à 200 pJ. Donc, en augmentant la puissance injectée (ou la distance de propagation), il est possible d'obtenir plusieurs solitons stabilisés à la même longueur d'onde avec un contrôle de leur décalage temporel.

L'analyse spectrale expérimentale sur les ondes dispersives générées aux longueurs d'onde visibles à gauche du premier zéro de dispersion, n'est pas présentée ici à cause de leur très faible amplitude. En effet, le choix d'un pompage loin du premier zéro de dispersion permet de limiter le transfert d'énergie vers les courtes longueurs d'ondes, et d'atteindre plus rapidement le processus de stabilisation en fréquence des solitons. Cependant, une étude récente [8] a montré l'impact des solitons décalés par l'effet Raman sur les dynamiques temporelle et spectrale des ondes dispersives piégées, lors de la propagation.

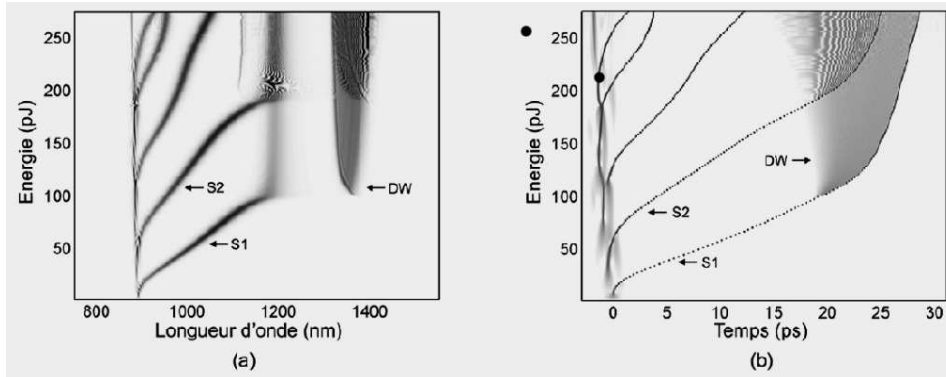


Fig. 3. Evolutions spectrale (a) et temporelle (b) obtenues par simulation numérique en fonction de l'énergie initiale des impulsions. L'intensité spectrale est représentée sur une échelle linéaire, tandis que l'intensité temporelle est représentée sur une échelle logarithmique pour mettre en évidence les ondes dispersives générées dans l'infrarouge.

3 Formation de paires de solitons liés et collisions

Durant la phase de propagation, nous avons également observé la formation de paires de solitons liés pour certaines puissances [5], faisant suite à la fission de l'impulsion initiale. Ces paires de solitons subissent également un auto-décalage en fréquence. Cependant, de faibles variations de ces puissances particulières mènent à l'observation de collisions de ces solitons au lieu de formations de paires stables.

La Fig. 4(a) montre l'évolution spectrale relevée en sortie de la PCF en fonction de l'énergie d'entrée, pour des impulsions initiales de largeur temporelle d'environ 150 fs et de longueur d'onde 794 nm. L'augmentation de l'énergie des impulsions d'entrée mène comme auparavant à la génération de plusieurs solitons fondamentaux qui subissent un auto-décalage en fréquence par effet Raman vers les hautes longueurs d'onde. L'énergie nécessaire (~ 180 pJ) à la stabilisation en fréquence du premier soliton décalé (S1) est supérieure au cas précédent, ceci s'explique notamment par un pompage qui s'effectue plus loin du deuxième zéro de dispersion de la fibre. L'analyse du décalage spectral du deuxième soliton permet d'observer des dynamiques très différentes à celles décrites précédemment. En effet, nous remarquons deux zones particulières de l'évolution spectrale du deuxième soliton (S2) : la première se situe pour une énergie initiale d'environ 280 pJ, où le soliton subit un net premier recul spectral puis reprend un auto-décalage habituel, puis la deuxième zone se situe pour une énergie d'environ 400 pJ où nous notons alors clairement un deuxième recul accompagné d'une accélération du décalage du troisième soliton (S3), menant à une superposition spectrale totale des deux solitons. Si nous augmentons encore l'énergie, les solitons se séparent de nouveau. Nous notons également ces mêmes évolutions particulières du troisième soliton (S3) avec le quatrième (S4) aux énergies voisines de 230 pJ. De façon générale, de faibles variations de l'énergie initiale vers ces points particuliers donnent lieu à des instabilités spectrales (croissance ou décroissance discontinues des espacements spectraux entre solitons) allant jusqu'au chevauchement spectral de solitons.

Les Fig. 4(b-c) présentent alors plus en détails les spectres mesurés pour les énergies correspondantes aux chevauchements S2 avec S3 (vers 1070 nm), et S3 avec S4 (vers 855 nm). Remarquons l'apparition d'une modulation spectrale significative de période environ $\Delta\lambda = 7,25$ nm en particulier pour le chevauchement total entre S2 et S3. Nous pouvons donc supposer que ces deux solitons à la même longueur d'onde sont décalés temporellement d'environ 500 fs. Cette distance temporelle inter-soliton est très faible comparée à celle observée dans la Fig. 3(b) qui est supérieure à plusieurs ps. Ceci conduit à envisager qu'une paire stable de solitons liés a été formée après la fission de l'impulsion initiale [5]. Afin de confirmer ces comportements, des simulations numériques ont été effectuées avec ces paramètres d'impulsions initiales (voir Fig. 4(d)). Nous remarquons un bon accord qualitatif de ces dynamiques spectrales avec celles obtenues expérimentalement. De plus, nous retrouvons les chevauchements spectraux des solitons S2 et S3 pour une énergie initiale d'environ 320 pJ, et des solitons S3 et S4 vers 215 pJ. Il faut souligner

que les chevauchements spectraux obtenus par simulation ne sont que partiels (même entre S2 et S3), il faut s'attendre alors à ne pas obtenir la formation de paires stables de solitons liés dans nos simulations.

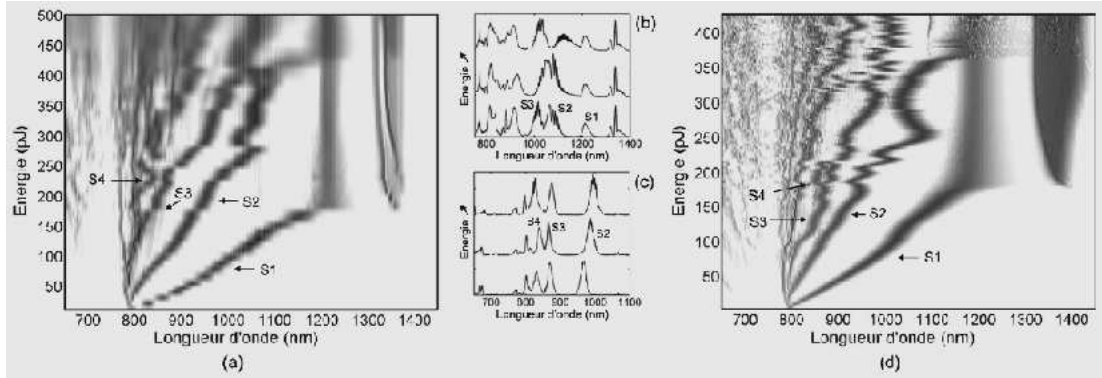


Fig.4. (a) Evolution spectrale relevée expérimentalement en fonction de l'énergie initiale des impulsions montrant les instabilités spectrales des solitons (intensité spectrale représentée sur une échelle logarithmique). Détails des spectres sur une échelle linéaire lors des chevauchements des solitons : (b) S2 avec S3 et (c) S3 avec S4. (d) Evolution spectrale correspondante obtenue par simulation numérique en fonction de l'énergie initiale des impulsions.

Néanmoins, les évolutions spectrale et temporelle en fonction de la distance de propagation dans la PCF sont présentées à la Fig. 5, pour mettre en évidence le processus à l'origine de ces chevauchements. La propagation des impulsions est étudiée pour une énergie égale à 215 pJ (voir Fig. 5(a-c), menant à l'observation du chevauchement entre S3 et S4) et pour une autre énergie initiale de 218 pJ qui est légèrement supérieure (voir Fig. 5(b-d), menant à la collision de S3 avec S4). Les Fig. 5(a-c) montrent que les distances spectrale et temporelle entre les deux solitons S3 et S4 sont très faibles après la fission. Leur évolution temporelle radiative peut alors entraîner de fortes interactions et la quasi-formation d'une paire stable sur le premier mètre de propagation (les deux solitons sont superposés spectralement et se propagent à la même vitesse). Cet état multi-soliton subit également un auto-décalage en fréquence par effet Raman. Cependant, nous remarquons que cette paire de solitons n'est pas exactement liée lorsque la distance de propagation augmente jusqu'à 2 m. Une légère augmentation de l'énergie injectée conduit au cas des Fig. 5(c-d), qui mettent en évidence un processus de collision entre les solitons S3 et S4 après 80 cm de propagation, démontrant un échange d'énergie élevé de S4 vers S3, ce qui mène à leur division spectrale et une amplification des décalages temporel et spectral de S3.

Pour des énergies particulières, il est néanmoins possible de former des paires stables de solitons qui continuent à se propager en maintenant leurs profils temporel et spectral constants même en présence de l'effet Raman [5]-[9]. Nos résultats montrent de manière générale que les distances spectrale et temporelle entre solitons peuvent être ajustées simultanément par le simple contrôle de l'énergie. Des caractérisations temporelles des solitons au cours de ces dynamiques observées sont à l'étude afin de compléter ces travaux.

4 Conclusion

Nous avons mis en évidence les dynamiques spectrales majeures liées à l'effet Raman dans une fibre microstructurée, avec un montage expérimental simple. Ces manifestations comme l'auto-décalage en fréquence des solitons, la compensation de cet auto-décalage, mais également la formation de paires de solitons et leur collision, ouvrent la possibilité de générer de façon contrôlée des impulsions de même longueur d'onde et décalées temporellement. La génération de paires de solitons liés et l'observation de collisions dans le cadre de la génération de supercontinuum par une seule pompe, peut permettre d'explorer simplement les interactions entre les solitons et les paires de solitons, de manière expérimentale.

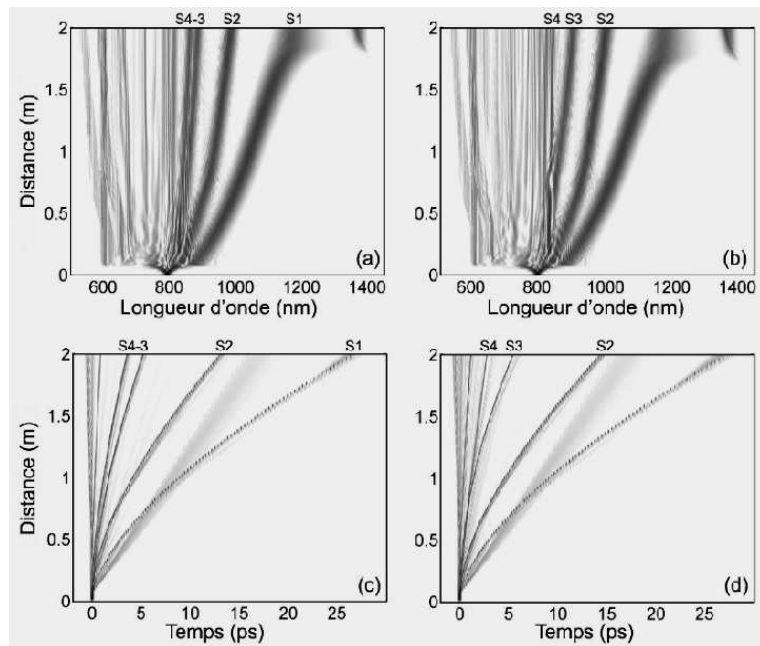


Fig.5. Simulations numériques des évolutions spectrales (a,b) et temporelles (c,d) des impulsions en fonction de la distance de propagation (2m de PCF) pour deux énergies initiales différentes (menant respectivement à la quasi-formation d'une paire de solitons liés entre S3 et S4, et dans l'autre cas à la collision de S3 avec S4; l'énergie d'entrée croît de a vers b).

Remerciements : Nous tenons à remercier le Professeur J. M. Dudley pour nos échanges scientifiques fructueux, ainsi que le financement de cette étude apporté par les projets ANR SUPERCODE et SOFI-CARS.

Références

1. J.M. DUDLEY ET AL, Supercontinuum generation in photonic crystal fiber, *Reviews of Modern Physics*, **78**, 1135-1184 (2006).
2. B. KIBLER ET AL, Supercontinuum generation and nonlinear pulse propagation in photonic crystal fiber : influence of the frequency-dependent effective mode area, *Applied Physics B*, **81**, 337-342 (2005).
3. F.M. MITSCHKE AND L.F. MOLLENAUER, Discovery of the soliton self-frequency shift, *Optics Letters*, **11**, 659-661 (1986).
4. D.V. SKRYABIN ET AL, Soliton self-frequency shift cancellation in photonic crystal fiber, *Science*, **201**, 1705-1708 (2003).
5. A. PODLIPENSKY ET AL, Bound soliton pairs in photonic crystal fiber, *Optics Express*, **15**, 1653-1662 (2007).
6. N. AKHMEDIEV AND M. KARLSSON, Cherenkov radiation emitted by solitons in optical fibers, *Physical Review A*, **51**, 2602-2607 (1995).
7. F. BIANCALANA ET AL, Theory of the soliton self-frequency shift compensation by the resonant radiation in photonic crystal fibers, *Physical Review E*, **70**, 016615 1-9 (2004).
8. A.V. GORBACH AND D.V. SKRYABIN, Light trapping in gravity-like potentials and expansion of supercontinuum spectra in photonic crystal fibers, *Nature Photonics*, **1**, 653-657 (2007).
9. N. AKHMEDIEV ET AL, Influence on the Raman-effect on solitons in optical fibers, *Optics Communications*, **131**, 260-266 (1996).

Instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession

Romain Lagrange¹, Patrice Meunier¹, Christophe Eloy¹ & François Nadal²

¹ IRPHE, CNRS & Aix-Marseille Université, 49 rue Joliot-Curie, 13013 Marseille

² Commissariat à l'Énergie Atomique, CESTA 33114 Le Barp

lagrange@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Dans ce papier nous analysons de façon théorique et expérimentale l'instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession. Pour des nombres de Reynolds petits cet écoulement est stable et peut être décrit comme une superposition de modes de Kelvin forcés par le mouvement de précession. Pour des grands nombres de Reynolds l'écoulement devient instable. Un mécanisme de résonance triadique entre modes de Kelvin explique ce phénomène et permet de déterminer le seuil de stabilité. Cette théorie est en très bon accord avec les mesures expérimentales.

Abstract. This paper addresses experimentally and theoretically the instability of a fluid inside a precessing cylinder. For small Reynolds numbers this flow is stable and can be described as a superposition of Kelvin modes forced by the precessional motion. For larger Reynolds numbers it becomes unstable. A mechanism of triadic resonance between Kelvin modes explains this phenomenon and allows to determine the stability threshold, in excellent agreement with experimental results.

1 Introduction

L'étude de l'instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession s'applique à de nombreux domaines. Par exemple, en aéronautique, la présence d'un fluide (tel que le carburant liquide) dans un objet volant (satellite, fusée) peut avoir des conséquences dangereuses sur la stabilité de cet objet. En effet, si un léger angle de précession apparaît du fait d'une non-axisymétrie de l'objet, l'écoulement à l'intérieur de celui-ci peut exercer un couple sur sa structure et dévier sa trajectoire. Il semble donc important de connaître l'écoulement à l'intérieur de l'objet, mais aussi de connaître le couple induit. D'un point de vue géophysique, la précession de la Terre génère un forçage sur son noyau liquide. L'écoulement induit par ce forçage pourrait alors être responsable de la géodynamo, qui crée le champ magnétique terrestre. On comprend ainsi pourquoi l'étude de l'écoulement dans un objet en précession a déjà fait l'objet de nombreuses recherches.

Des expériences telles que celles menées par McEwan (1970) ont clairement montré qu'un fluide en précession engendre un écoulement de rotation solide auquel se superposent des ondes, appelées ondes inertielles ou encore modes de Kelvin. Ces ondes sont forcées à la fréquence de précession. Une analyse linéaire non-visqueuse suffit pour prédire précisément leurs structures et leurs amplitudes. Cependant, lorsque la fréquence de précession est égale à la fréquence libre d'une onde, son amplitude diverge par un phénomène de résonance. La prise en compte des non-linéarités et des effets visqueux est alors nécessaire pour connaître la saturation en amplitude. Dans le cas de la précession on constate que cet écoulement de base devient instable lorsque le nombre de Reynolds, ou l'angle de précession, augmente. Cela conduit à un état très désordonné et possédant de petites structures par rapport à la taille du cylindre. L'apparition brutale de ce désordre, appelé phénomène de "resonant collapse" par McEwan (1970) ou encore "explosion" par Kobine (1996) et Manasseh (1996) reste encore incompris à l'heure actuelle. Nous proposons un mécanisme de résonance triadique pour expliquer cette instabilité qui constitue la première bifurcation d'une transition vers la turbulence.

2 Présentation du problème

Nous considérons un cylindre de rayon R et de hauteur H empli entièrement d'un fluide de viscosité cinématique ν . Ce cylindre est en rotation autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire Ω_1 . Il est positionné sur une plateforme tournant à la vitesse angulaire Ω_2 . L'angle entre les deux axes de rotation est noté θ comme indiqué sur la figure 1(a). Cet angle de précession reste petit : $0.25^\circ < \theta < 10^\circ$. La dynamique de ce système en précession dépend de quatre nombres sans dimension : le rapport d'aspect $h = H/R$, le rapport de fréquence $\omega = \Omega_1/(\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta))$, le nombre de Rossby $Ro = \Omega_2 \sin(\theta)/(\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta))$ et le nombre de Reynolds $Re = (\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta))R^2/\nu$. Un montage expérimental a été construit au sein du laboratoire et permet de réaliser des mesures PIV (Particle Image Velocimetry) de champs de vitesse dans une section transverse du cylindre. Cela est décrit en détail dans Meunier et al. (2008). Dans la suite de l'étude nous utilisons les coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) . Les longueurs sont adimensionnées par R et le temps par $(\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta))^{-1}$.

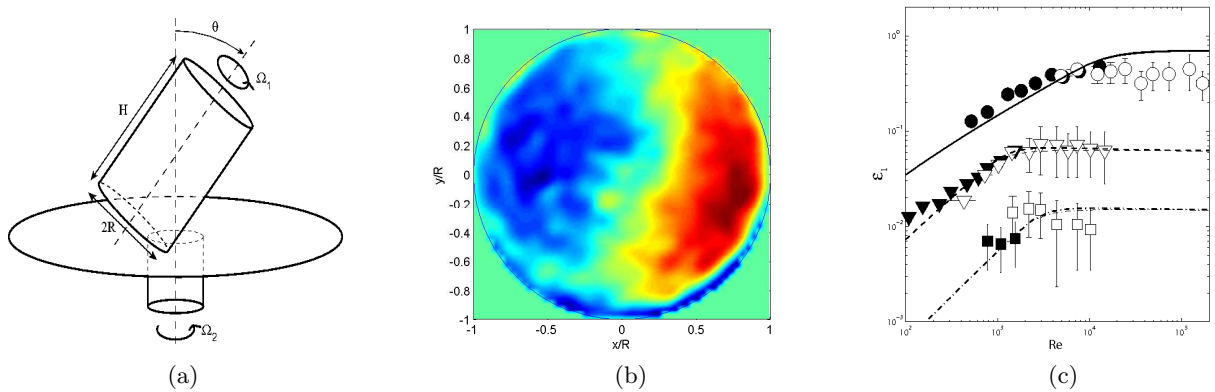


Fig.1. (a) Schéma d'un cylindre en précession. (b) Champ de vorticité du premier mode de Kelvin obtenu par PIV à sa première résonance, en l'absence d'instabilité ($h = 1.62$, $\omega = 1.18$, $Re \approx 3500$, $Ro = 0.0031$). (c) Amplitude du premier mode de Kelvin à sa première (ligne continue), deuxième (ligne discontinue) et troisième (ligne discontinue avec points) résonance. Les symboles représentent des mesures expérimentales ($h = 1.8$, $\theta = 2^\circ$).

3 Écoulement de base

La figure 1(b) représente la vorticité axiale de l'écoulement, dans le référentiel du cylindre, pour des petits nombres de Reynolds et de Rossby. Deux tourbillons contra-rotatifs sont observés. Cette structure correspond à un mode de Kelvin (premier mode de Kelvin) excité par la précession. Une théorie linéaire et non visqueuse permet de prédire son amplitude ε_1 . Quand ce mode est résonant (i.e $h = n\lambda/2$, avec n un nombre impair et λ la longueur d'onde du mode) son amplitude diverge. Une théorie visqueuse (Gans (1970)) et faiblement non-linéaire (Meunier et al. (2008)) est alors nécessaire pour prédire la saturation en amplitude. La figure 1(c) représente l'amplitude de saturation ε_1 du premier mode de Kelvin en fonction de Re à ses trois premières résonances. Nous avons montré (Meunier et al. (2008)) que pour des faibles nombres de Reynolds ε_1 varie en $Ro\sqrt{Re}$. Pour des grands nombres de Reynolds ε_1 varie en $Ro^{1/3}$. Ces deux scalings sont vérifiés par des mesures PIV représentées par des symboles sur la figure 1(c).

4 Etude de l'instabilité

4.1 Visualisation expérimentale

Il est bien connu que lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds ou le nombre de Rossby (Manasseh (1996), Kobine (1996)), l'écoulement devient instable puis rapidement turbulent. Nous montrons que cette instabilité résulte d'un mécanisme de résonance triadique entre le mode de Kelvin forcé et deux modes

libres. Ces modes libres ont été observés par des mesures PIV en regardant la vorticité de l'écoulement dans deux sections différentes du cylindre (Figures 2(a) et 2(b)). Ils vérifient la condition de résonance $m_2 - m_1 = m$ où m_1 , m_2 et m sont les nombres d'onde azimutaux respectifs des deux modes libres et du mode de Kelvin forcé. Pour confirmer ce mécanisme une analyse de stabilité linéaire a été développée.

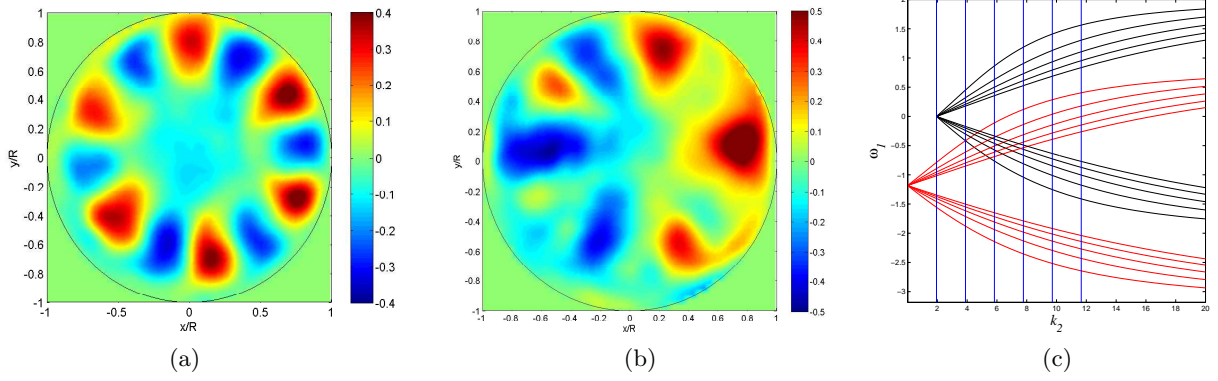


Fig.2. (a) Champ de vorticité expérimental mesuré à mi-hauteur du cylindre. (b) Champ de vorticité expérimental mesuré au trois quart de la hauteur du cylindre. $h = 1.62$, $Re = 5900$, $Ro = 0.0031$, $\omega = 1.18$. (c) Relations de dispersion des modes de Kelvin libres de nombre azimutal $m = 5$ (noir) déplacée de k_l et de nombre azimutal $m = 6$ (rouge) déplacée de ω .

4.2 Analyse de stabilité linéaire

Dans la suite de ce papier, les variables en caractères gras représentent des quadrivecteurs vitesse–pression.

Le point de départ de l'analyse de stabilité linéaire est de considérer que l'écoulement à l'intérieur du cylindre est la somme de l'écoulement de base (constitué d'un mode de Kelvin résonnant \mathbf{u}_l , d'amplitude ε_l), auquel vient s'ajouter une perturbation notée \mathbf{u}

$$\mathbf{v} = \varepsilon_l \mathbf{u}_l + \mathbf{u}. \quad (1)$$

Nous supposons que \mathbf{v} vérifie l'équation de Navier–Stokes ainsi que l'équation de continuité. Cela se résume sous forme matricielle par l'égalité suivante pour la perturbation

$$L\mathbf{u} = \varepsilon_l N(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}), \quad (2)$$

où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur permettant l'interaction du mode de base résonnant \mathbf{u}_l avec la perturbation \mathbf{u} . La solution de l'équation (2) est recherch e en effectuant un développement asymptotique de \mathbf{u} en puissance du petit paramètre ε_l

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \varepsilon_l \mathbf{u}^{(1)} + O(\varepsilon_l^2). \quad (3)$$

En injectant la décomposition (3) dans l'équation (2) nous obtenons les problèmes d'ordre 0 et 1 en ε_l . Le problème d'ordre 0 en ε_l s'écrit

$$L\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

La solution de ce problème correspond à une somme de modes de Kelvin libres

$$\mathbf{u}^{(0)}(r, \varphi, z, t) = \sum_{\omega, m, k} \mathbf{u}_{\omega, m, k}(\mathbf{r}) e^{i(\omega t + m\varphi + kz)}. \quad (5)$$

Ils sont définis par leur fréquence ω , nombre d'onde azimutal m et nombre d'onde axial k et vérifient la relation de dispersion tracée figure 2(b) pour les modes $m = 5$ et $m = 6$

$$D(m, \omega, k) = 0. \quad (6)$$

Pour résoudre le problème d'ordre 1 en ε_l nous retenons de la perturbation à l'ordre 0 une combinaison linéaire de deux modes de Kelvin libres d'amplitudes A_1 et A_2 lentement variables en fonction de t

$$\mathbf{u}^{(0)} = A_1(t)\mathbf{u}_1(r)e^{i(\omega_1 t + m_1 \varphi + k_1 z)} + A_2(t)\mathbf{u}_2(r)e^{i(\omega_2 t + m_2 \varphi + k_2 z)}. \quad (7)$$

L'écoulement est donc composé à cet ordre d'un mode de Kelvin forcé résonnant et de deux modes de Kelvin libres. Ces trois modes peuvent interagir par un mécanisme de résonance triadique si l'interaction non-linéaire entre deux modes de Kelvin permet le développement du troisième. Ce mécanisme est possible si les trois conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} m_2 - m_1 = 1, \\ \omega_2 - \omega_1 = \omega, \\ |k_2 - k_1| = k_l. \end{cases} \quad (8)$$

Les modes de Kelvin libres sont donnés par la relation de dispersion (6). Trouver ceux vérifiant la condition de résonance triadique (8) revient à chercher les solutions de l'équation $D(m_1, \omega_1, k_1) = D(m_2 - 1, \omega_2 - \omega, k_2 \pm k_l)$. Il y a une infinité de solutions qui correspondent aux points d'intersection visibles sur la figure 2(b). La détermination des coordonnées de ces points définit les modes de Kelvin libres résonnants. En injectant l'expression (7) dans le problème d'ordre 1 en ε_l nous obtenons via une condition de solvabilité les équations d'amplitude suivantes

$$\begin{cases} \partial_t A_1 = \varepsilon_l N_1 A_2, \\ \partial_t A_2 = \varepsilon_l N_2 A_1. \end{cases} \quad (9)$$

Pour un triplé de modes de Kelvin choisis (écoulement de base et modes de Kelvin libres résonnants), N_1 et N_2 sont des constantes qui peuvent s'exprimer analytiquement.

En cherchant A_j sous la forme $A_j = C_j \exp(\sigma t)$ avec C_j une constante nous obtenons l'équation pour le taux de croissance σ

$$\sigma = \varepsilon_l \sqrt{N_1 N_2}. \quad (10)$$

Cette relation est vraie dans le cas d'un cylindre infini en hauteur. Pour prendre en compte son aspect fini et donc respecter des conditions aux limites, nous sommes obligés de rajouter des termes de detuning à nos deux modes de Kelvin libres résonnants. Leur nombre d'onde axial devient alors $k_j + \Delta k_j$, où Δk_j qui est le "detuning" sur le mode j doit être d'ordre ε_l pour que l'analyse asymptotique reste valide. Graphiquement (figure 2(b)), Δk_j correspond à la distance entre un point d'intersection et la droite verticale bleue la plus proche (Ces droites représentent la discrétisation sur k_j induite par les conditions limites aux extrémités du cylindre). Les effets visqueux (volumiques et surfaciques) peuvent également être pris en compte. Dans ce cas les équations d'amplitude deviennent

$$\begin{cases} \partial_t A_1 = \varepsilon_l N_1 A_2 - i\Delta k_1 Q_1 A_1 - Re^{-1} V_1^{vol} A_1 - Re^{-1/2} V_1^{surf} A_1, \\ \partial_t A_2 = \varepsilon_l N_2 A_1 - i\Delta k_2 Q_2 A_2 - Re^{-1} V_2^{vol} A_2 - Re^{-1/2} V_2^{surf} A_2, \end{cases} \quad (11)$$

où $Q_1, Q_2, V_1^{vol}, V_2^{vol}$ (termes d'amortissement visqueux volumiques), V_1^{surf}, V_2^{surf} (termes d'amortissement visqueux surfaciques) peuvent s'exprimer analytiquement.

Le taux de croissance vérifie alors une équation polynomiale du second degré, à coefficients complexes et dépendant du nombre de Reynolds et de l'amplitude ε_l

$$a(\varepsilon_l, Re) \sigma^2 + b(\varepsilon_l, Re) \sigma + c(\varepsilon_l, Re) = 0. \quad (12)$$

L'amplitude critique ε_{crit} pour laquelle l'écoulement devient instable est obtenue en résolvant

$$\sigma(\varepsilon_{crit}, Re) = 0. \quad (13)$$

5 Discussion

Nous avons regardé la stabilité de l'écoulement dans un cylindre en précession en fonction du rapport d'aspect h , du nombre de Rossby Ro et du nombre de Reynolds Re . Afin de prédire le nombre d'onde azimutal de la perturbation, nous avons tracé pour un nombre de Reynolds fixé, dans le cas de la première résonance du mode 1, l'amplitude critique $\varepsilon_{crit}(Re, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ en fonction du rapport d'aspect (figure 3(a)). Nous nous sommes intéressé au cas des modes de Kelvin dont le nombre d'onde azimutal m_1 est compris entre 1 et 14. (En ne considérant que les 5 premières branches des relations de dispersion cela correspond à l'étude d'environ 750 résonances¹). Les courbes de même couleur correspondent à une même valeur de m_1 . Pour distinguer les différentes branches des relations de dispersion des modes de Kelvin (ω_1, m_1, k_1) (respectivement (ω_2, m_2, k_2)), on les numérote par un indice l_1 (respectivement l_2) variant de un à l'infini. Les courbes en trait continu correspondent alors à une interaction entre des modes avec $l_1 = l_2 = 1$. Les traits discontinus correspondent à une interaction entre modes de Kelvin $l_1 = l_2 = 2$. Nous avons montré que les interactions conduisant au taux de croissance maximal ($\sigma_{max} = \varepsilon_l \sqrt{N_1 N_2}$) le plus grand sont celles telles que : $l_1 = l_2$. De plus, $(\sigma_{max})_l$ est une suite décroissante. Ces raisons expliquent pourquoi nous nous sommes intéressé aux cas $l_1 = l_2 = 1$ et $l_1 = l_2 = 2$.

Pour $h = 1.62$ la valeur de ε_{crit} la plus faible est obtenue pour la courbe rouge. Cette courbe est associée à une valeur $m_1 = 5$ donc $m_2 = 6$. Nous expliquons ainsi les visualisations expérimentales faisant apparaître six lobes de vorticité (figure 2(a)) et cinq lobes (figure 2(b)).

Ceci appelle la remarque suivante : le fait de se trouver à un minimum de la courbe rouge est dû au fait que pour $h = 1.62$ nous avons une résonance exacte entre modes (pas d'effets de detuning). Graphiquement (figure 2(b)) les branches $l_1 = 1, l_2 = 1$ des relations de dispersion et la deuxième droite verticale bleue se coupent au même point).

Il nous reste à prédire, pour un nombre de Reynolds donné, le nombre de Rossby critique pour lequel l'écoulement devient instable. Pour cela il suffit de dire que l'écoulement est instable si l'amplitude du mode de Kelvin forcé $\varepsilon_l(Ro, Re)$ donnée par la théorie non-linéaire visqueuse (Meunier et al. (2008)) est supérieure à l'amplitude critique $\varepsilon_{crit}(Re)$ déterminée précédemment. Nous avons vu (théorie non-linéaire visqueuse) qu'en fonction du nombre de Reynolds $\varepsilon_l \sim Ro\sqrt{Re}$ (régime visqueux) ou $\varepsilon_l \sim Ro^{1/3}$ (régime non linéaire). La majorité des expériences réalisées se situent dans le domaine visqueux. Ainsi $\varepsilon_l \sim Ro\sqrt{Re}$. L'analyse de stabilité linéaire montre que pour une résonance exacte $\varepsilon_{crit} \sim Re^{-1/2}$ (saturation du taux de croissance par les effets visqueux surfaciques $Re^{-1/2}V_j^{surf}$) ou $\varepsilon_{crit} \sim Re^{-1}$ (saturation du taux de croissance par les effets visqueux volumiques $Re^{-1}V_j^{vol}$). Ainsi dans nos expériences $Ro_{crit} \sim Re^{-1}$ (régime visqueux et saturation de l'instabilité par les effets surfaciques) ou $Ro_{crit} \sim Re^{-3/2}$ (régime visqueux et saturation de l'instabilité par les effets volumiques). La figure 3(b) est un diagramme de stabilité dans le plan (Re, Ro) . La théorie est représentée par la courbe verte et délimite la zone stable de la zone instable. Pour les paramètres expérimentaux choisis nous avons $Re^{-1/2}V_j^{surf} \approx Re^{-1}V_j^{vol}$ pour $Re \approx 3000$. Ainsi pour les raisons expliquées précédemment, pour $Re \gg 3000$, en diagramme logarithmique, la courbe théorique est une droite de pente -1 . Pour $Re \ll 3000$ c'est une droite de pente $-3/2$. Des mesures expérimentales tirées de la PIV sont également représentées sur la figure 3(b). Nous obtenons un très bon accord entre théorie et expérience, en particulier dans le domaine central de la figure 3(b). Pour les faibles nombres de Reynolds et grands nombres de Rossby nous sommes à la limite de validité de notre théorie asymptotique. En effet dans ce domaine de paramètres l'hypothèse $\varepsilon_1 \ll 1$ n'est plus valable (nous avons $\varepsilon_1 \approx 0.4$). Ceci explique l'écart observé entre théorie et expérience sur le diagramme de stabilité.

¹ Le cas $m_1 = 0$ a été traité isolément. Il conduit au résultat que l'interaction d'un mode $m = 0$ avec deux modes $m = 1$ (perturbation et écoulement de base) est toujours stable.

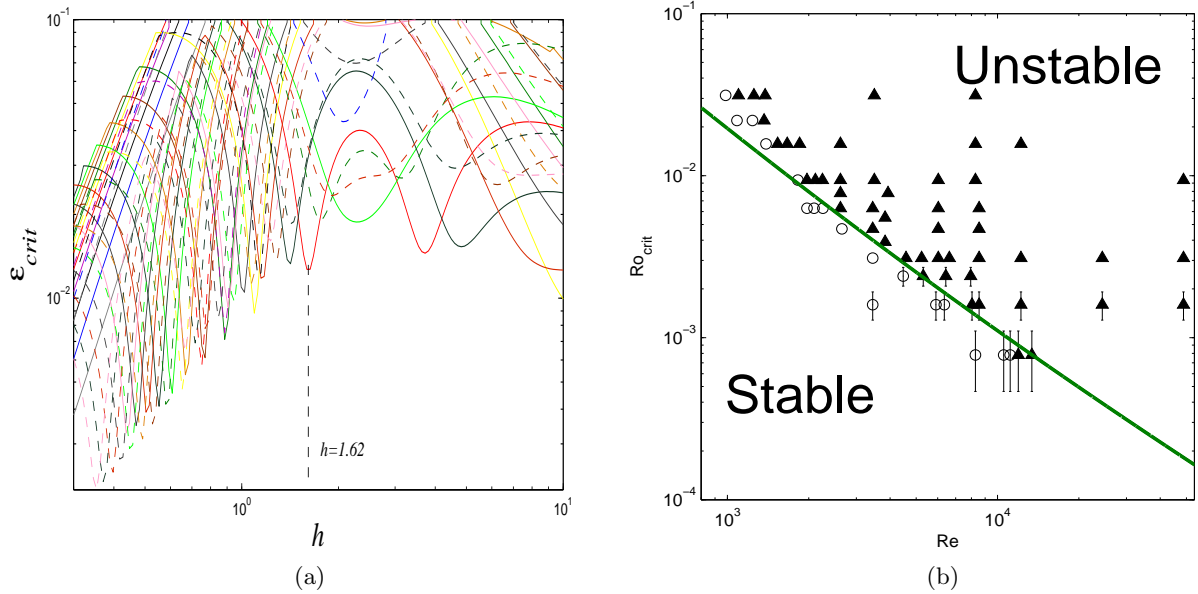


Fig.3. (a) Amplitude critique d'apparition de l'instabilité en fonction du rapport d'aspect pour la première résonance du mode 1. $Re = 10^5$. Chaque courbe correspond à une résonance particulière de 2 modes libres de nombres d'ondes azimutaux m_1 et $m_2 = m_1 + 1$. Traits pleins : premières branches des relations de dispersion $l_1 = l_2 = 1$; traits discontinus : deuxièmes branches $l_1 = l_2 = 2$. (b) Diagramme de stabilité d'un cylindre en précession. La courbe verte correspond au nombre de Rossby critique en fonction de Re obtenu théoriquement pour $h = 1.62$, $\omega = 1.18$. Les cercles représentent des mesures expérimentales stables. Les triangles représentent des mesures instables.

6 Conclusion

Dans cette étude une expression du taux de croissance de l'instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession a été établie. Nous avons montré par une analyse de stabilité linéaire qu'un mécanisme de résonance triadique entre certains modes de Kelvin conduisait à une instabilité. Cette théorie a été vérifiée et validée grâce à des mesures expérimentales obtenues par PIV. A l'heure actuelle nous sommes donc en mesure de prédire les modes de Kelvin participant à l'instabilité (prédiction du nombre d'onde azimutal de la perturbation). Cette théorie permet également de prédire correctement le nombre de Rossby critique en fonction du nombre de Reynolds (diagramme de stabilité).

Références

1. P. MEUNIER, C. ELOY, R. LAGRANGE & F. NADAL, Rotating fluid cylinder subject to weak precession, *Journal of Fluid Mechanics*, **599**, 405-440, (2007).
2. J. J. KOBINE, Azimutal flow associated with inertial wave resonance in a precessing cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, **319**, 387-406, (1996).
3. R. MANASSEH, Nonlinear behaviour of contained inertia waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **315**, 151-173, (1996).
4. A. MAHALOV, The instability of rotating fluid columns subjected to a weak external Coriolis force, *Physics of Fluids A*, **5** (4), 891-900, (1993).
5. A. D. MCEWAN, Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, **40** (3), 603-640, (1970).
6. R. F. GANS, On the precession of a resonant cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, **41** (4), 865-872, (1970).

Échelles de temps multiples dans les équations intégro-différentielles à retard en optoélectronique

L. Larger¹, M. Peil¹, M. Jacquot¹, Y. Chembo¹, & T. Erneux²

¹ UMR CNRS FEMTO-ST 6174 / Dépt. d'Optique P.M. Duffieux, Université de Besançon, 16 route de Gray, F-25030 Besançon, France

² Optique Non linéaire Théorique, Université Libre de Bruxelles Campus Plaine CP 231, B-1050 Bruxelles, Belgium

laurent.larger@univ-fcomte.fr

Résumé. Les oscillateurs chaotiques optoélectroniques développés pour les communications par chaos [1] haut débit présentent intrinsèquement au moins 3 échelles de temps caractéristiques, qui s'étalent sur plus de 6 ordres de grandeurs (de quelques 10 ps à quelques 10 μ s). Pour des valeurs modérées du gain de la boucle d'oscillation (avant d'atteindre les régimes chaotiques utilisés en communications par chaos), des régimes dynamiques complexes révélant chacune de ses échelles, ont été observés expérimentalement [2]; ceux-ci sont formés par une enveloppe presque périodique très lente, comprenant des oscillations quasi-rectangulaires rapides, suivi de régimes chaotiques entièrement développés et ultra-rapides.

La modélisation du montage expérimental fait appel à un processus différentiel linéaire correspondant à un filtre passe-bande, et soumis à une excitation non linéaire retardée de la variable dynamique [3]. Sur la base d'un tel modèle dynamique non linéaire à retard, prenant en compte un terme intégral inhabituel en plus du terme différentiel, des formes d'onde similaires peuvent être obtenues numériquement, si l'on prend soin de supprimer des transitoires extrêmement longs.

La communication proposée expose les résultats expérimentaux obtenus en termes de formes d'onde temporelle, de transformées en ondelettes, et de spectres de Fourier. Les résultats seront comparés aux solutions numériques, et dans le cas très simple des régimes périodiques, une interprétation analytique de la solution à échelle de temps multiple sera proposée.

Abstract. Optoelectronic chaotic oscillators for high bit rate chaos communications [1] do intrinsically possess at least 3 characteristic time scales, which span over more than 6 orders of magnitude (from few tens of ps to few tens of μ s). For moderate values of the loop gain (that is, before reaching the chaotic regimes used in chaos communications), complex dynamical regimes revealing each of these scales have been experimentally observed [2]; they are formed by a very slow quasi-periodic envelope, whose inner structure is a fast quasi-rectangular oscillation, followed by ultrafast and fully developed chaotic regimes.

The modeling of the experimental set-up involves a band-pass linear filter process, subjected to a delayed nonlinear excitation of the dynamical variable [3]. On the basis of such a nonlinear dynamical model taking into account an unusual integral term beside the typical differential one, similar waveforms can be obtained numerically, if the extremely long transients are properly skipped.

In this communication, we will report on the experimental results obtained in terms of time-domain waveforms, wavelet transforms, and Fourier spectra. These results will be compared to numerical solutions, and in the very simple case of periodic regimes, an analytical interpretation of the multiple timescale solution will be proposed.

1 Introduction

Les dynamiques de systèmes à délai sont actuellement activement étudiées dans différentes domaines scientifiques comme la mécanique, l'optique, l'économie ou les sciences de la vie. Par contre, elles ont souvent été soigneusement évitées dans bien d'autres domaines dans le passé, à cause de la difficulté inhérente à leur traitement mathématique. En effet, malgré leur expression formelle relativement simple, les équations à délai ont mathématiquement une dimension infinie. Cette particularité donne lieu à diverses phénoménologies, qui vont typiquement de la multistabilité à l'hyperchaos.

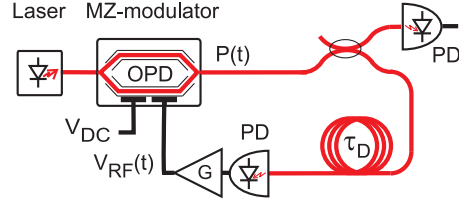


Fig.1. Représentation schématique du système expérimental.

Le paradigme des équations à délai est le modèle d'Ikeda, qui décrit la dynamique d'un faisceau laser dans une cavité en anneau non linéaire avec l'équation :

$$\tau \dot{x}(t) = -x(t) + f[x(t - \tau_D)], \quad (1)$$

où f est une fonction non linéaire, τ le temps de réponse du système (inversement proportionnel à sa fréquence de coupure), et enfin τ_D est le délai.

En étudiant un générateur de chaos pour les communications large bande, nous avons été amenés à développer une architecture particulière d'oscillateur électro-optique non linéaire à retard, qui a révélé expérimentalement une très grande richesse en terme de comportements dynamiques. Par contre, ce nouvel oscillateur est décrit par une équation légèrement différente, à savoir :

$$\frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t x(\eta) d\eta + \tau \dot{x}(t) = - \left(1 + \frac{\tau}{\theta}\right) x(t) + f[x(t - \tau_D)], \quad (2)$$

où un nouveau terme intégral (par rapport aux équations à retard usuelles) traduit le filtrage des basses fréquences, avec une fréquence de coupure $1/2\pi\theta$. Le rapport entre le "nouveau" temps caractéristique θ associé au terme intégrale, et le temps caractéristique "usuel" τ , correspond au ratio entre les fréquences de coupure haute et basse du filtre passe-bande caractéristique de la boucle de rétro-action optoélectronique. L'expérience montre que les modèles différentiel (1) et intégral-différentiel (2) diffèrent de manière significative, en ce sens que de nombreuses solutions dynamiques nouvelles émergent dans le second cas.

L'objectif de la présente communication est de reporter les divers comportements dynamiques associés à l'introduction de ce terme intégral dans l'équation d'évolution. Nous mettons l'emphase sur le cas où les trois constantes de temps sont réparties à équidistance logarithmique, à savoir $\theta \sim 10^3\tau_D \sim 10^6\tau$. L'étude de ce type de dynamiques n'existe pratiquement pas dans la littérature, et notre but est de contribuer à leur meilleure compréhension, particulièrement du point de vue expérimental.

Cette communication est organisée comme suit. Dans la section 2, le système expérimental est décrit en détail, et sa modélisation est effectuée dans la section 3. Les divers comportements dynamiques observés sont reportés et discutés dans la section 4, et la dernière section conclut cette étude.

2 Le système expérimental

Le système expérimental étudié est représenté dans la Fig. 1. C'est un oscillateur électro-optique avec retard, dont le principe fondamental est la modulation non linéaire, par un signal radio-fréquence large bande, de la puissance optique de sortie d'un laser à semiconducteur en régime continu. Cette modulation est effectuée grâce à un modulateur électro-optique de Mach-Zehnder (MZ) intégré en LiNbO_3 , dont les tensions demi-onde en continu et en radio-fréquence sont telles que $V_{\pi,DC} = V_{\pi,RF} \equiv V_{\pi} = 4.0$ V. Le MZ est alimenté en continu par un laser DFB (Distributed FeedBack) à $1.55 \mu\text{m}$, dont on peut faire varier la puissance optique injectée P_0 de 0 à 10 mW. Il est important de noter qu'il n'y a ici aucune dynamique propre au laser lui-même, qui opère en régime continu. La sortie optique modulée du MZ est

envoyée dans une ligne à retard fibrée de quelques mètres, donnant un délai dont l'ordre de grandeur typique est de 40 ns. Le signal lumineux modulé en intensité est ensuite transformé en signal électrique radio-fréquence grâce à une photodiode (PD) de 12 GHz de bande passante, et un facteur de conversion $S = 1.9$ V/mW. La boucle fermée de l'oscillateur est telle que le signal électrique module finalement la puissance optique du laser grâce au MZ, après avoir été amplifié par un amplificateur très large bande ayant 18 dB de gain (amplification d'amplitude de $G = 8$).

La boucle de rétro-action est ainsi fermée, et la bande passante combinée de tous les composants optoélectronique et électro-optique est d'environ 30 kHz–12 GHz ; cette large bande de fréquence de la chaîne d'oscillation est principalement délimitée par la photodiode. Un tel filtrage large bande est précisément à l'origine des termes intégral et différentiel dans l'équation d'évolution du système, tel que modélisés par l'équation (2). Enfin, l'intensité lumineuse à la sortie du MZ peut être visualisée grâce à la sortie libre d'un coupleur 2×2 . C'est par cette sortie optique modulée en intensité que nous pouvons observer les différents comportements dynamiques du système, en fonction de deux paramètres physique principaux, la puissance optique P_0 (jouant sur le gain de l'oscillateur), et la la tension de bias V_{DC} du MZ (modifiant la forme locale de la non linéarité retardée).

3 Le modèle

Comme expliqué dans la section précédente, le filtrage est essentiellement responsable de la dynamique temporelle observée. Le signal lumineux à la sortie du MZ est retardé de $\tau_D = nL/c$, où n est l'indice du cœur de la fibre à la longueur d'onde du faisceau laser, L est la longueur de la fibre, et c la vitesse de la lumière dans le vide. La puissance optique à l'entrée de la photodiode peut donc s'écrire $p(t) = \alpha P_0 \cos^2[\pi v(t - \tau_D)/(2V_{\pi,RF}) + \pi V_{DC}/(2V_{\pi,DC})]$ où α est le facteur de perte de la boucle, et $v(t)$ est le signal électrique de modulation du MZ. Après la conversion optique / électrique, l'amplification et le filtrage, on arrive à l'équation suivante pour la dynamique de la tension radio-fréquence $v(t)$

$$\tau \dot{v}(t)/G + \left(1 + \frac{\tau}{\theta}\right) v(t)/G + \frac{1}{\theta} \int_{t_0}^t v(\eta)/G d\eta = \alpha S P_0 \cos^2 \left[\frac{\pi v(t - \tau_D)}{2V_{\pi,RF}} + \frac{\pi V_{DC}}{2V_{\pi,DC}} \right]. \quad (3)$$

Cette équation peut être ramenée à (2), en considérant la variable normalisée $x(t) = \pi v(t)/(2V_{\pi,RF})$, et la fonction non linéaire $f(x) = \beta \cos^2[x + \Phi]$ avec $\beta = \pi \alpha S G P_0 / (2V_{\pi,RF})$ et $\Phi = \pi V_{DC} / (2V_{\pi,DC})$. Le paramètre sans dimension β apparaît donc comme le "poids" du terme de rétro-action non linéaire retardé, et il peut être linéairement augmenté en faisant varier la puissance optique P_0 du laser. D'autre part, le paramètre Φ est le déphasage statique du MZ, et il peut aussi être librement changé à travers la tension statique V_{DC} .

On peut aussi remarquer que l'approximation $1 + \tau/\theta \simeq 1$ est valable, puisque $\tau/\theta \simeq 10^{-6}$. Cette approximation est excellente tant que le filtre est large bande, et non résonant.

4 La dynamique

Comme expliqué dans l'introduction, nous avons principalement utilisé trois techniques pour caractériser expérimentalement les divers comportements dynamiques de ce système, à savoir les diagrammes de bifurcation des fonctions de densité de probabilité, les séries temporelles, et enfin les transformées en ondelette. Le gain sera modifié grâce au courant de pompage du laser I_L , qui agit sur la puissance optique P_0 .

- Gain faible

Lorsque le feedback est très faible, typiquement pour $\beta < 1$, le système n'oscille pas car le gain de boucle est inférieur aux pertes. Le système reste alors sur le point d'équilibre trivial. Par contre, quand ce gain dépasse la valeur critique des pertes, il y a bifurcation vers des solutions non triviales. En particulier, comme on peut le voir sur la figure 2(gauche), il y a deux types distincts de solutions périodiques

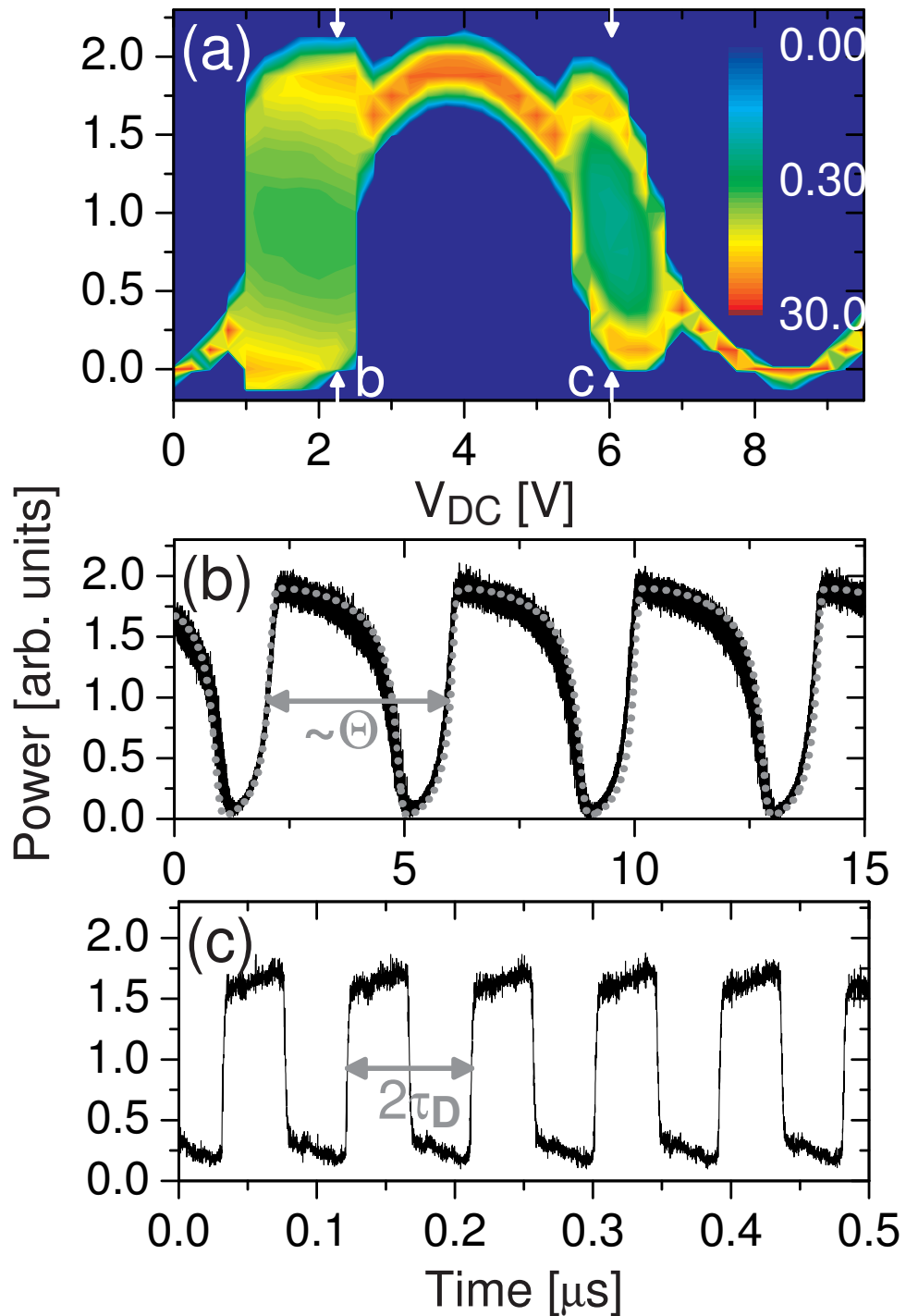


Fig. 2. Dynamique pour les gains faibles (figures de gauche) : (a) Fonction de densité de probabilité de l'intensité, pour $I_L = 30$ mA. Les traces temporelles sont présentées en (b) pour $V_{DC} = 2.25$ V, et en (c) pour $V_{DC} = 6.00$ V. La ligne discontinue grise montre le résultat numériquement obtenu en utilisant l'équation (2). Dynamique pour les gains modérés (figures de droite) : (a) Fonction de densité de probabilité de l'intensité, pour $I_L = 45$ mA. Les traces temporelles sont présentées en (b) pour $V_{DC} = 2.25$ V, en (c) pour $V_{DC} = 3.75$ V, en (d) pour $V_{DC} = 6.50$ V, et en (e) pour $V_{DC} = 7.50$ V.

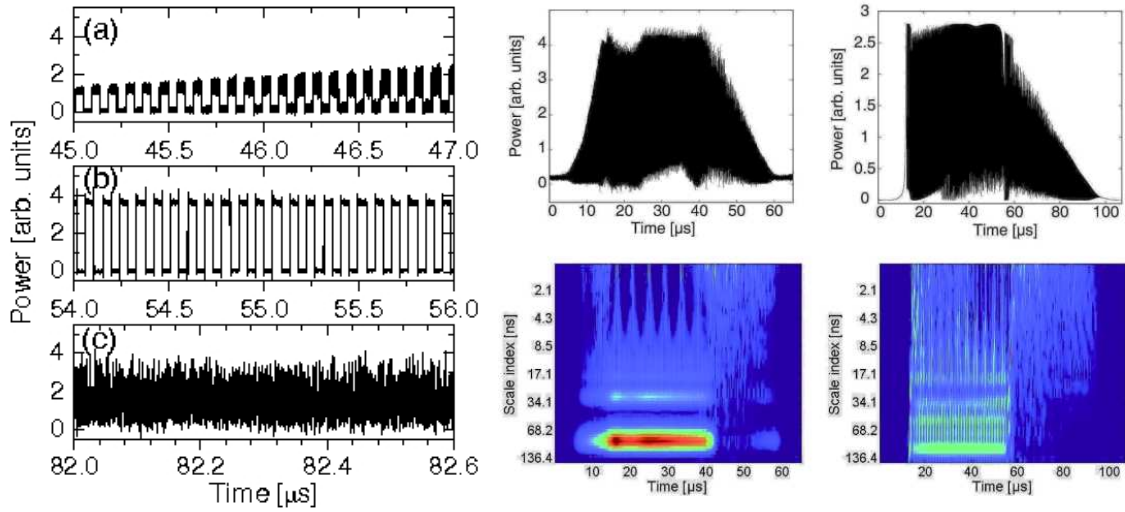


Fig.3. Figures de gauche : zoom du *breather* chaotique de la figure 2e (à droite). Figures de droite : trace temporelle (haut) et transformée en ondelettes (bas) : (a) pour la trace temporelle de la figure 2e (à droite), et (b) pour la trace temporelle obtenue avec le modèle de l'équation 2.

dans ce régime. À la figure 2(gauche)b, une période de l'ordre de θ est observée, tandis que cette période est égale à $2\tau_D$ à la figure 2(gauche)c. Ce dernier régime est en fait celui qui est observable dans les équation à retard usuelles (sans terme intégral), de type Ikeda, ou Mackey–Glass. Une différence notable avec notre système est que les plateaux sont légèrement inclinés, à cause de la fréquence de coupure basse qui filtre les composantes continues du signal (i.e. les plateaux constant de l'onde carrée). Par contre, le changement le plus net induit par le paramètre θ est clairement la solution périodique de la figure 2(gauche)b, qui cependant ne laisse pas *a priori* entrevoir une influence du délai τ_D .

- Gain modéré

En augmentant le gain, on arrive au régime correspondant à une contre réaction dite “modéré”. Ici, tel qu'on peut le voir dans la figure 2 (à droite), de nouvelles solutions apparaissent, totalement absentes du système “classique”, comme celui d'Ikeda. Ces nouvelles solutions sont hybrides, en ce sens qu'elles sont multi-échelles : d'un côté périodiques sur une échelle très lente, et de l'autre périodiques ou chaotiques sur une échelle beaucoup plus rapide, comme on peut l'observer sur la figure 3(à gauche). Les échelles de temps en question sont clairement séparées, puisque l'échelle lente est de l'ordre de θ , tandis que l'échelle rapide est de l'ordre de τ_D .

L'analyse en ondelettes de la figure 3 (à droite) donne une vision encore plus précise de cette dynamique multi-échelle, car elle distingue non seulement les différentes fréquences présentes dans le signal, mais aussi comment ces fréquences varient dans le temps (ce que le spectre de Fourier par exemple ne peut pas faire, à cause de l'hypothèse de stationnarité). C'est ainsi qu'au début des *breathers*, la dynamique rapide est périodique (de période $2\tau_D$), alors qu'à leur fin, ils ont une dynamique hyperchaotique, pour laquelle les fréquences très hautes s'étalent jusqu'à environ $1/\tau_D$.

- Gain fort

Enfin, lorsque le gain est poussé aux plus hautes valeurs expérimentalement accessibles, nous sommes dans le régime que nous qualifions de gain “fort”. Dans ce régime, on observe généralement l'état un hyperchaos totalement développé, tel qu'illustré sur la figure 4. Cet état est caractérisé par une trace temporelle presque indiscernable d'un bruit blanc (certes spectralement délimité par la bande passante de la boucle de rétro-action).

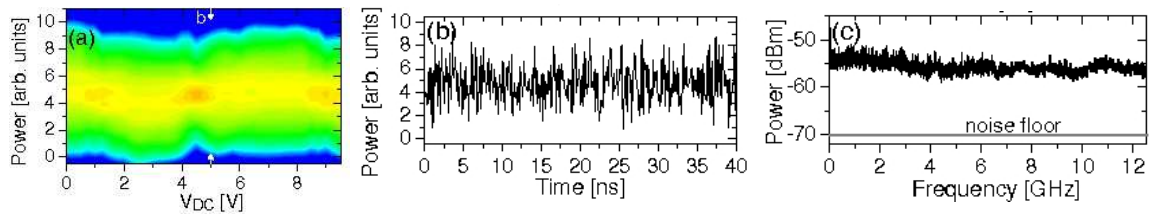


Fig.4. Dynamique pour les gains forts. (a) Fonction de densité de probabilité de l'intensité, pour $I_L = 70$ mA. (b) Traces temporelles pour $V_{DC} = 6.50$ V. (c) Spectre radio-fréquence correspondant.

Il faut aussi noter que dans ce régime, selon la valeur de β et de Φ , on peut aussi observer d'autres comportements dynamiques, comme par exemple des états dits "isomériques", dont peut résulter une amplitude de modulation périodique. D'autres comportements ont aussi été observés (dans le cas de plus grands retards, typiquement de l'ordre de la μs pour 200 m de fibre optique), tels que la dynamique "multi-pulses", probablement à rapprocher du phénomène d'excitabilité sur le plan qualitatif. Nous avons dans ce cas constaté certaines régularités, comme par exemple la périodicité des séquences de pulses, de même que la dépendance du nombre de ces pulses par séquence en fonction du gain.

5 Conclusion

En conclusion, cette étude nous a permis de mettre en évidence une large variété de dynamiques multi-échelles dans les systèmes intégrés-différentiels à retard.

La liste des phénomènes décrits est loin d'être exhaustive, si on considère l'étendue de la plage de variation des différents paramètres, qui couvre comme nous l'avons fait remarquer plus haut plus de 6 ordres de grandeur. Des efforts conjoints analytiques, numériques et expérimentaux devront encore être déployés pour poursuivre et compléter cette étude.

Enfin, l'importance de cette étude peut aussi être cruciale pour les systèmes dits PID (Proportional, Integral, Derivative), qui sont très souvent utilisés en ingénierie pour le contrôle ou l'asservissement des systèmes automatiques, et dans lesquels les effets de retard sont particulièrement critiques pour la stabilité de l'asservissement.

Références

1. A. ARGYRIS *et al*, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **438**, 343-346 (2005).
2. Y.C. KOUOMOU *et al*, Hyperchaotic breathers in delayed optical systems, *Physical Review Letters*, **95**, 043903 (2005).
3. V.S. UDALTSOV *et al*, Chaotic bandpass communication system, *IEEE Trans. On Circuits And Systems*, **49** (7), 1006-1009 (2002)

Analyse topologique d'un nouvel attracteur chaotique toroidal

C. Letellier¹ & R. Gilmore^{1,2}

¹ CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

² Physics Department, Drexel University, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA

Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé. La plupart des systèmes dynamiques tri-dimensionnels connus sont décrits par une surface branchée (gabarit). Toutefois, un système de dimension 3, récemment proposé par Diquan Li, se révèle être structuré autour d'un tore — dont le genre est déterminé à partir de la relation d'Euler-Poincaré — et dont la caractérisation topologique reste un problème ouvert. De plus, il possède une symétrie de rotation qui complique un peu plus l'analyse. Une première analyse topologique de ce système est ici proposée.

Abstract. Most of the known tri-dimensional dynamical systems are described by a branched manifold (template). Nevertheless, a 3D system, recently proposed by Diquan Li, is structured around a torus — whose genus is determined using the Euler-Poincaré formulae — but its topological characterization remains an open problem. Moreover, it presents a symmetry property which makes more difficult the analysis. A first topological analysis is here proposed.

1 Introduction

La caractérisation topologique des attracteurs chaotiques dont la dimension de Lyapunov est inférieure à 3 est relativement bien définie pour les systèmes très dissipatifs [1]. Toutefois, parmi cette famille d'attracteurs, les systèmes produisant un attracteur chaotique structuré sur un tore demeurent délicat à représenter par une surface branchée (un gabarit), principalement en raison du manque de modèle simple (la majeure partie des systèmes conduisant à un attracteur toroidal appartient à la famille des systèmes non autonomes, dont l'analyse est confrontée à des difficultés inhérentes à ces systèmes). Récemment, Diquan Li [2] a publié un système qui se présente comme un système de Lorenz modifié et qui produit un attracteur inscrit sur un tore. L'analyse de ce système dont l'importance pourrait bien être du même ordre que celle des systèmes de Lorenz (1963) ou de Rössler (1976) est ici entreprise. Il est montré que ce système répond à une symétrie de rotation — comme le système de Lorenz — et peut être plongé au sein d'une frontière toroidale de genre 3 [3]. Toutefois, la particularité de ce système est que les « trous » de cette frontière toroidale se croisent, nécessitant d'avoir recours à la relation d'Euler-Poincaré pour la détermination du genre. Il est également montré que l'attracteur de Li résulte d'une bifurcation « épluchage », c'est-à-dire d'une intersection de l'axe de rotation avec l'attracteur, comme cela a été récemment détaillée pour le système de van der Pol [4].

2 Le système de Li

Le système de trois équations différentielles ordinaires récemment proposé par Li [2] est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + dxz \\ \dot{y} = bx + ky - xz \\ \dot{z} = cz + xy - ex^2 \end{cases} . \quad (1)$$

Par comparaison avec le système de Lorenz, ce système présente deux termes nonlinéaires supplémentaires, dxz dans la première équation et ex^2 dans la troisième équation. Ce système a trois points singuliers, un

situé à l'origine de l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ et deux reliés par la symétrie de rotation et dont les coordonnées sont

$$F_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{ae(b+k)}{ac+cdk+bd-a}} \\ y_{\pm} = \pm \frac{a-bd}{a+dk} \sqrt{\frac{ae(b+k)}{ac+cdk+bd-a}} \\ z_{\pm} = \frac{a(b+k)}{a+bd} \end{cases}. \quad (2)$$

Le système de Li (1) est globalement invariant sous une symétrie de rotation d'ordre 2 $\mathcal{R}_z(\pi)$ à l'instar du système de Lorenz. Lorsque $x = y = 0$, les équations (1) se réduisent à $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ et $\dot{z} = cz$, c'est-à-dire qu'une trajectoire issue de conditions initiales inscrites sur l'axe Oz est éjectée à l'infini. Par comparaison avec le système de Lorenz, le flot est donc inversé. Pour les valeurs des paramètres ici considérées, $a = 40$, $b = 55$, $c = 11/6$, $d = 0.16$, $e = 0.65$ et $k = 20$, les deux points singuliers F_{\pm} sont complexes et ne sont donc pas pris en compte dans le reste de l'analyse. En tournant légèrement les axes Ox et Oy d'un angle $\theta = 0.16\pi$ autour de l'axe Oz , la symétrie d'ordre 2 devient évidente (Fig. 1) et le trou autour de l'axe Ox' devient ainsi apparent.

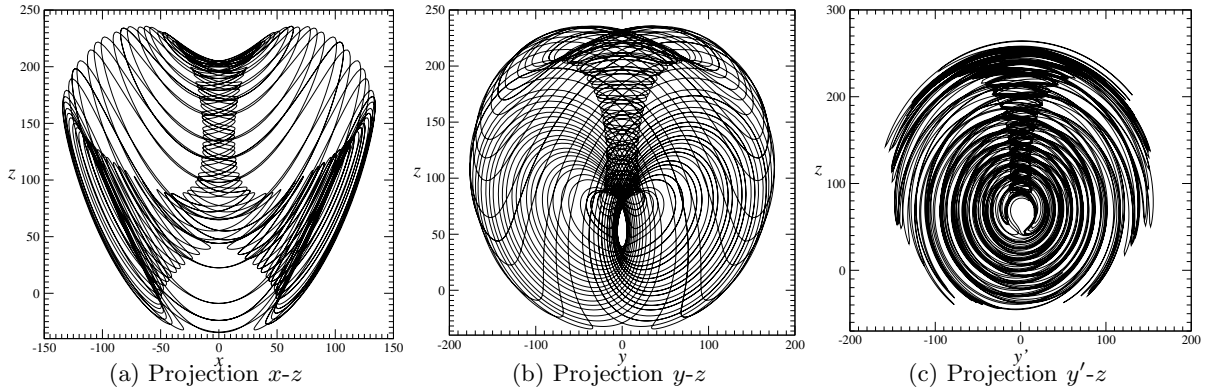


Fig.1. Attracteur solution du système de Li (1). Dans l'espace réorienté $\mathbb{R}^3(x', y', z)$, la symétrie d'ordre 2 devient évidente.

3 Frontières toroidales et section de Poincaré

3.1 Brève revue

Il est connu qu'un attracteur chaotique peut être borné par une surface semi-perméable définissant un domaine de l'espace des phases hors de laquelle une trajectoire ne peut s'échapper [5]. Une telle surface frontière est orientée, c'est-à-dire que toute orbite qui entre ne peut en sortir. En général, une telle surface dans \mathbb{R}^3 est une surface de genre g , où g est le nombre de « trous » de la frontière. Une surface avec $g = 0$ est une sphère et lorsque $g = 1$, nous obtenons ce que nous appelons un tore. La frontière toroidale est organisée autour d'un certain nombre de points singuliers qu'elle entoure : typiquement, il y a des foyers (correspondant à un contour sans singularité) et des cols (contour avec quatre singularités). Ainsi, il peut être montré que le nombre de singularités N_s est relié au genre g par la relation $N_s = 2(g - 1)$ [6].

Tout flot, restreint à une frontière toroidale, peut être représenté sous une forme canonique. Pour les genres $g = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$, il y a $0, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 5, 6, \dots$ formes canoniques inéquivalentes [6]. La forme canonique pour $g = 3$ est montrée Fig. 2 : elle est constituée d'un trou central pourvu de quatre

singularités entourant un col et deux autres trou dont le contour est circulaire et entourant des foyers. Ceci ne signifie pas qu'un système borné par un tore de genre 3 a nécessairement trois points singuliers mais que trois points singuliers sont entourés par le flot, les autres éventuels points singuliers sont hors de la frontière toroidale. La forme canonique (Fig. 2) correspond la frontière toroidale de l'attracteur de Lorenz.

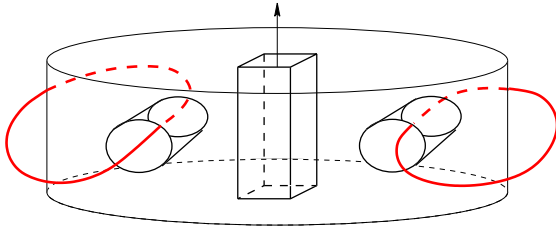


Fig.2. La forme canonique de genre 3 consiste en une frontière toroidale pourvue de trois trous intérieurs. Les quatre singularités de la surface sont confinées au trou central. La localisation des deux composantes de la section de Poincaré sont également représentées par deux boucles fermées.

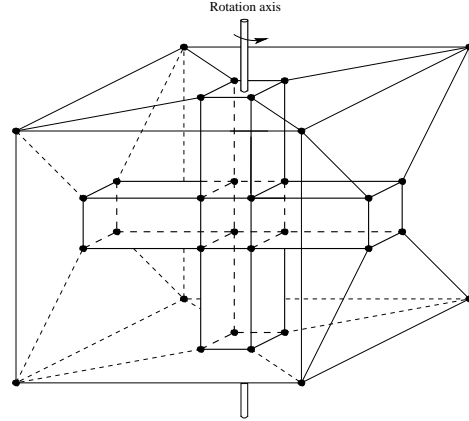


Fig.3. Frontière toroidale entourant l'attracteur de Li. Sa représentation schématique est constituée de 68 vertex, 72 arêtes et 36 faces. Le genre est trois.

Dans un espace de dimension trois, une surface de Poincaré est une surface minimale de dimension deux avec la propriété que la trajectoire traverse toujours cette surface de manière non tangente. Plus généralement, la section de Poincaré est une union disjointe d'un ou plusieurs disques [6]. En particulier, lorsqu'un système dynamique possède une symétrie d'ordre η , la surface de Poincaré est composée de η composantes de manière à calculer correctement une section de Poincaré [7]. En fait, le nombre de composantes déconnectées est égal au nombre de trous intérieurs associés à un point singulier de type foyer. La surface de Poincaré d'une frontière toroidale de genre g est constituée de $g - 1$ disques disjoints [6].

3.2 Cas du système de Li

La frontière toroidale entourant l'attracteur du système de Li est schématisée Fig. 3. Le genre g d'une telle surface n'est pas évidente, essentiellement en raison de l'intersection entre les deux trous. Dans un tel cas, il est utile d'appliquer la formule d'Euler-Poincaré [8]

$$N_V - N_E + N_F = 2 - 2g \quad (3)$$

où N_V est le nombre de vortex, N_E le nombre d'arêtes et N_F le nombre de faces de la surface. Appliquée à la représentation schématique de la Fig. 3, la formule conduit à une frontière toroidale de genre trois. Comparée à la forme canonique pour une frontière toroidale de genre 3 (Fig. 2), le trou central est d'une certaine manière dégénérée, suite à une bifurcation épluchage [9,3].

Il a été montré que la structure des attracteurs du type « Lorenz » résultait de la présence de deux foyers — symétriques l'un de l'autre — et de la stabilité transverse de l'axe z [10,11]. La stabilité transverse peut être calculée à partir de la matrice Jacobienne dans le plan $x-y$:

$$\mathcal{J}_{xy} = \begin{bmatrix} -a + dz & a \\ b - z & k \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées pour $z \in]70.1 ; 7098.6[$. Les points de l'axe Oz sont du type foyer sur cet intervalle; le foyer est stable pour $z < 125$ et instable pour $z > 125$. Pour $z < 70.1$, la

stabilité transverse est du type col et pour $z > 7098.6$, elle correspond à des nœuds instables. Utilisant la convention de dessiner les trous entourant des foyers par des cylindres (sans singularité) et ceux entourant les cols par des canaux rectangulaires (pourvus de quatre singularités), nous obtenons une croix dont la partie inférieure consiste d'un canal rectangulaire, et dont la partie supérieure consiste en un cylindre faisant un « Y » connectant les trous le long de l'axe x' (Fig. 4). Grossièrement, $z \approx 70$ correspond à l'axe horizontal au centre des deux trous autour de l'axe z et autour duquel chaque « aile » se développe. Puisque seuls les trous sans singularité peuvent être utilisés pour définir les composantes d'une section de Poincaré, il n'y a qu'une seule manière de tracer deux boucles fermées — comme un frontière de genre 3 l'indique — autour de chaque aile, en accord avec la symétrie de rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$ (Fig. 4). Aucune partie de ces deux boucles fermées ne visite le canal rectangulaire comme le veut la théorie. La section de Poincaré est par conséquent définie comme l'union de deux disques bornés par les boucles fermées passant dans chaque trou (Fig. 4).

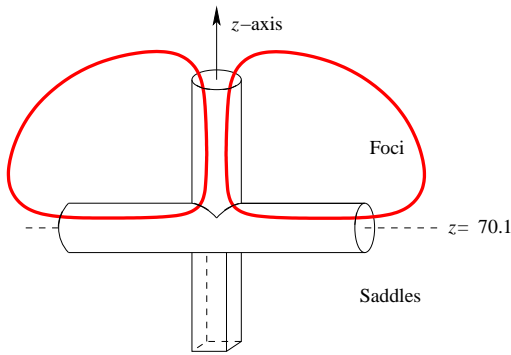


Fig. 4. Vue schématique des trous de la frontière toroïdale de genre 3 entourant l'attracteur de Li. Le canal rectangulaire présente quatre arêtes (des singularités) et ne peut être utilisé pour définir les composantes de la section de Poincaré. A l'opposé, les deux autres canaux ne présente aucune singularité et sont utilisés pour définir les deux composantes d'une telle section.

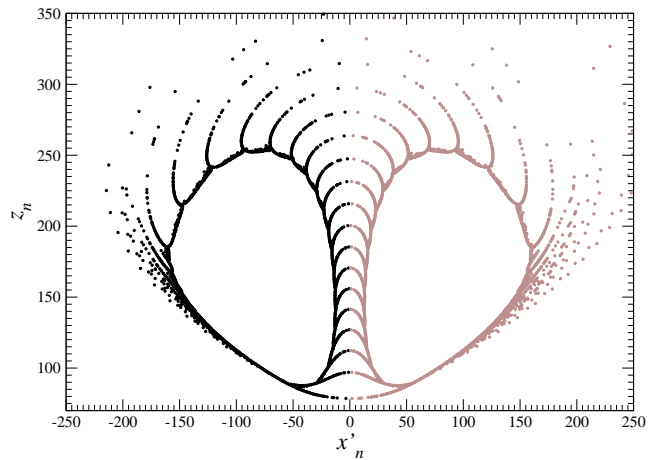


Fig. 5. Section de Poincaré de l'attracteur chaotique de Li. La structure toroïdale se traduit par une double forme annulaire de la section. 180000 points sont retenus pour cette section de Poincaré. Valeurs des paramètres : $a = 41$, $b = 55$, $c = 11/6$, $d = 0.16$, $e = 0.65$ et $k = 20$.

A partir de la définition des deux composantes de la surface Poincaré, celle-ci doit contenir le demi-axe autour duquel les deux trous sont organisés. La valeur en z de cet axe est de 70,1. La section de Poincaré définie comme

$$P = \{(x'_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y'_n = 0\}, \tag{5}$$

est représentée Fig. 5. Une double structure annulaire est observée. Au moins 29 plis peuvent être comptés dans chaque aile. La haute périodicité de l'orbite impliquée dans la « route vers le chaos » ne permet pas de distinguer clairement tous les plis (partie supérieure de chaque portion annulaire représentée Fig. 5).

4 Image de l'attracteur

Lorsqu'un système présente une symétrie, il est plus simple d'analyser l'image du système dynamique que le système original [9,3]. L'information identifiée sur le système image peut alors être redéployée sur le système original d'une manière assez simple. Pour ces raisons, l'image du système de Li (1) est construite en s'affranchissant de la symétrie. L'application $2 \rightarrow 1$ telle que $\Psi : \mathbb{R}^3(x', y', z) \mapsto \mathbb{R}^3(u, v, w)$ est définie

par :

$$\Psi \equiv \begin{cases} u = \operatorname{Re}(x' + iy')^2 = x'^2 - y'^2 \\ v = \operatorname{Im}(x' + iy')^2 = 2x'y' \\ w = z \end{cases} . \quad (6)$$

Cette application implique d'identifier les points liés par la symétrie, c'est-à-dire les points tels que $(+x', +y', z)$ et $(-x', -y', z)$ distincts de l'axe de symétrie avec un simple point (u, v, w) dans l'espace image. Le portrait de phase du système image peut être obtenue en appliquant l'application à une trajectoire dans l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x', y', z)$ du système original. Deux projections planes sont représentées Fig. 6. La structure toroïdale apparaît comme un tore de genre 1 dont le trou entoure grossièrement l'axe de rotation de la partie supérieure de l'attracteur image.

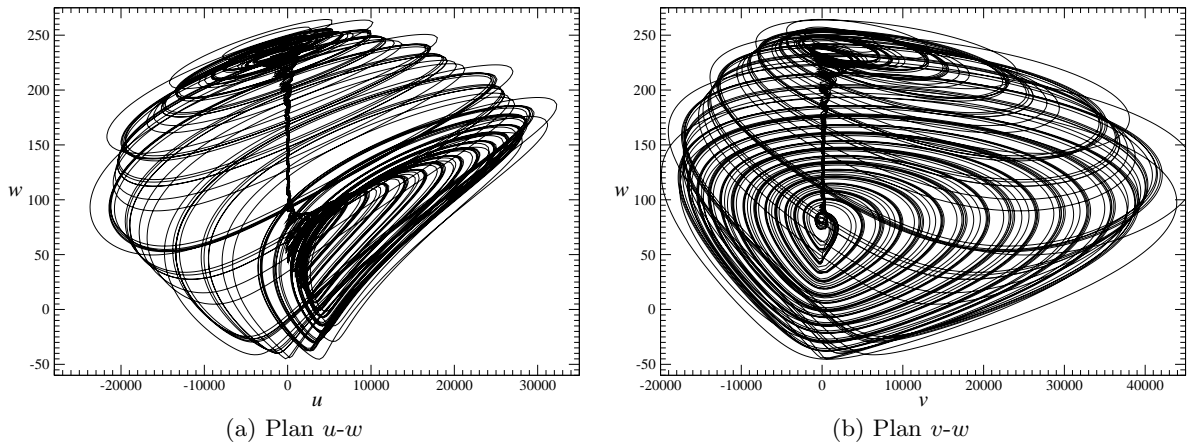


Fig.6. Deux projections planes de l'image de l'attracteur solution du système de Li. Mêmes valeurs des paramètres que Fig. 5.

La section de Poincaré peut être choisie comme

$$P_{\text{I}} = \{(u_n, w_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y_n = 0, \dot{y}_n > 0\} \quad (7)$$

ou

$$P_{\text{II}} = \{(u_n, w_n) \in \mathbb{R}^2 \mid y_n = 0, \dot{y}_n < 0\} . \quad (8)$$

Les deux sections de Poincaré sont montrées Fig. 7. La forme annulaire — caractéristique d'un attracteur toroïdal — est clairement identifiée. Les nombreux plis, identifiés dans l'espace $\mathbb{R}^3(x', y', z)$, également évidents. Le trou est déformé. Cette propriété a une conséquence importante dans la structure du portrait de phase comme décrit ci-dessous. En effet, l'axe de rotation est parallèle au cœur du trou dans la partie supérieure de l'attracteur (Fig. 8) mais, comme cela est montré Fig. 7, la partie inférieure du trou est déformée et l'axe de rotation coupe la frontière toroïdale et l'attracteur qu'elle contient. L'axe de rotation coupe ainsi le tore d'une telle manière que la partie supérieure de l'attracteur est « couverte » comme cela est représenté Fig. 8.

5 Conclusion

Un nouvel attracteur chaotique toroïdal, récemment proposé par Li, a été étudié. Il est montré que cet attracteur est borné par un tore de genre trois avec auto-intersection des trous. Par conséquent, l'attracteur de Li correspond à un attracteur chaotique d'un nouveau type de topologie. Le système de Li est ainsi un nouveau système quadratique avec une rotation d'ordre 2. Ce système mérite de rejoindre les attracteurs de Rössler et de Lorenz pour illustrer différents types de topologies inéquivalentes.

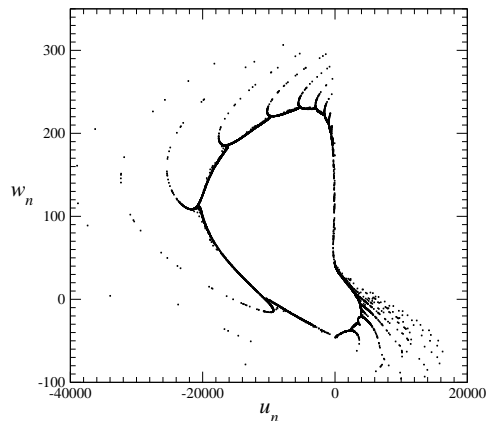


Fig.7. Section de Poincaré P_I et P_{II} de l'image de l'attracteur toroïdal chaotique de Li. Mêmes valeurs des paramètres que Fig. 5.

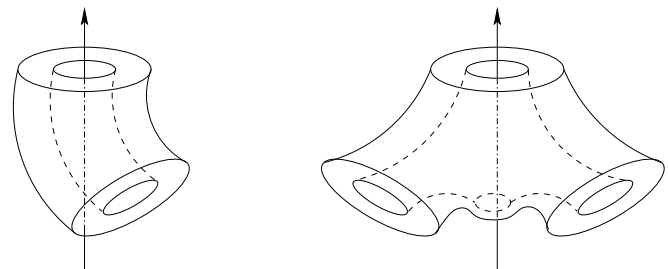


Image déformée

Double couverture

Fig.8. Double couverture du tore image de genre 1 et « déformé ». La double couverture est un tore de genre 3 comme indiqué Figs. 3 et 4.

Remerciements

Robert Gilmore remercie le CNRS — Département ST2I — pour sa position de chercheur invité au CORIA pour l'année 2006-2007.

Références

1. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The topology of chaos*, Wiley, 2002.
2. D. LI, A three-scroll chaotic attractor, *Physics Letters A*, **372** (4), 387-393, 2008.
3. R. GILMORE & C. LETELLIER, *The Symmetry of Chaos*, Oxford University Press, 2007.
4. C. LETELLIER, R. GILMORE & T. JONES, Peeling bifurcations of toroidal chaotic attractors, *Physical Review E*, **76**, 066204, 2007.
5. H. GIACOMINI & S. NEUKIRCH, Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model, *Physics Letters A*, **227**, 309-318, 1997.
6. T. D. TSANKOV & R. GILMORE, Topological aspects of the structure of chaotic attractors in \mathbb{R}^3 , *Physical Review E*, **69**, 056206, 2004.
7. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & G. GOUESBET. Characterization of the Lorenz system taking into account the equivariance of the vector field, *Physical Review E*, **49** (4), 3492-3495, 1994.
8. M. GREENBERG & J. HARPER, *Algebraic Topology*, Benjamin/Cummings, 1981.
9. C. LETELLIER & R. GILMORE, Covering dynamical systems : Two-fold covers, *Physical Review E*, **63**, 16206, 2001.
10. G. BYRNE, R. GILMORE & C. LETELLIER, Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors, *Physical Review E*, **70**, 056214, 2004.
11. C. LETELLIER, G. AMARAL & L. A. AGUIRRE, Insights into the algebraic structure of Lorenz-like systems using feedback circuit analysis and piecewise affine models, *Chaos*, **16**, 013115, 2006.

Identification de la valeur du retard d'un laser à cavité externe chaotique

Alexandre Locquet¹, Damien Rontani^{1,2,3}, Marc Sciamanna^{1,2}, & David S. Citrin^{1,3}

¹ Unité Mixte Internationale 2958 Georgia Tech-CNRS, Georgia Tech Lorraine, 57070 Metz, France

² Supélec, LMOPS CNRS UMR-7132, 2 rue Edouard Belin, 57070 Metz, France

³ School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA

alocquet@georgiatech-metz.fr

Résumé. Nous démontrons numériquement l'existence de régimes chaotiques d'un laser à cavité externe pour lesquels une analyse classique de l'intensité optique ne révèle pas la valeur du retard de ce système.

Abstract. We show numerically that an external-cavity laser can experience chaotic regimes for which it is difficult to identify the delay value by analyzing the time series of the optical intensity.

1 Introduction

Une des applications principales en optique des dynamiques nonlinéaires est l'utilisation du chaos produit par une diode laser pour masquer un message utile [1]. Ce type de cryptage physique, qui peut atteindre des débits de plusieurs Gbit/s, peut être combiné avec un chiffrement algorithmique classique et procurer ainsi une sécurisation supplémentaire des communications optiques. Les lasers chaotiques utilisés sont souvent des systèmes à retard, en raison de la grande dimensionnalité du chaos produit par ces derniers, ce qui est considéré comme utile au masquage. Cependant, il a été montré que malgré la grande dimensionnalité d'un système à retard, il est facile de casser ce type de système si la valeur du retard est connue [2]. Ceci explique l'importance du problème de l'identification de la valeur de ce retard.

Nous nous intéressons dans cet article à l'identification du retard d'un laser à cavité externe (LCE), qui est l'une des principales sources de chaos optique utilisée pour masquer un message utile. Un LCE est constitué par une diode laser soumise à la réinjection optique de sa propre lumière, provenant d'une réflexion sur un miroir externe. La valeur du retard correspond au temps d'aller-retour de la lumière dans la cavité externe. On considère généralement qu'il est facile d'identifier le retard d'un LCE [3,4], ce qui compromet sa sécurité et incite à employer des systèmes chaotiques plus complexes pour masquer un message utile.

Nous montrons numériquement que, contrairement à ce qui est communément admis, il existe des régimes de fonctionnement chaotique d'un LCE pour lesquels il est impossible d'identifier le retard par des techniques classiques basées sur l'autocovariance ou l'information mutuelle. Nous mettons en lumière que les paramètres opérationnels qui déterminent principalement la qualité de l'identification sont la force de la rétroaction, qui est proportionnelle à la quantité de lumière injectée par le miroir externe dans la diode, ainsi que le rapport entre le retard τ et un temps caractéristique de la dynamique du laser qu'est la période τ_{RO} des oscillations de relaxation. Nous montrons que lorsque la rétroaction est faible et que τ et τ_{RO} sont proches, il devient difficile d'identifier la valeur du retard.

2 Modèle dynamique et techniques d'identification

Nous utilisons le célèbre système d'équations d'évolution de Lang et Kobayashi [5] pour modéliser le comportement dynamique du champ optique et des porteurs de charge d'un LCE. Les détails de ce modèle et les paramètres utilisés peuvent être trouvés dans la Ref. [6]. Les temps caractéristiques de la dynamique du LCE sont le retard τ et la période des oscillations de relaxation τ_{RO} . Ces oscillations de

relaxation correspondent à une compétition entre les populations de photons et de porteurs de charge. Elles peuvent être observées de façon transitoire lorsque l'on change brutalement le courant d'injection d'une diode laser. En plus de ces temps caractéristiques, un autre paramètre opérationnel important de la dynamique est la force de la rétroaction γ , qui représente la quantité de lumière réinjectée optiquement dans la zone active de la diode laser.

L'identification de la valeur du retard τ est réalisée sur base d'une analyse de l'intensité optique $I(t)$ produite par le LCE. La première technique d'identification que nous considérons utilise l'autocovariance ρ_I de $I(t)$, définie de la façon suivante :

$$\rho_I(\theta) = \frac{\langle (I(t+\theta) - \langle I(t) \rangle) (I(t) - \langle I(t) \rangle) \rangle}{\left(\langle I(t) - \langle I(t) \rangle \rangle^2 \langle I(t+\theta) - \langle I(t) \rangle \rangle^2 \right)^{1/2}}. \quad (1)$$

La deuxième technique consiste à calculer l'information mutuelle entre l'intensité $I(t)$ et une version décalée dans le temps de celle-ci, $I(t-\theta)$. Cette information mutuelle $M(\theta)$ est définie par :

$$M(\theta) = \sum_{I(t), I(t-\theta)} p(I(t), I(t-\theta)) \log \frac{p(I(t), I(t-\theta))}{p(I(t)) p(I(t-\theta))}, \quad (2)$$

où $p(I(t), I(t-\theta))$ est la fonction de densité de probabilité conjointe de $I(t)$ et $I(t-\theta)$ et $p(I(t))$, $p(I(t-\theta))$ sont les densités de probabilité marginales. La présence de retard dans le système crée un lien non-local dans le temps entre $I(t)$ et $I(t-\tau)$, qui se manifeste habituellement sous la forme d'un extremum de l'autocovariance et de l'information mutuelle localisé dans un petit voisinage de $\theta = \tau$.

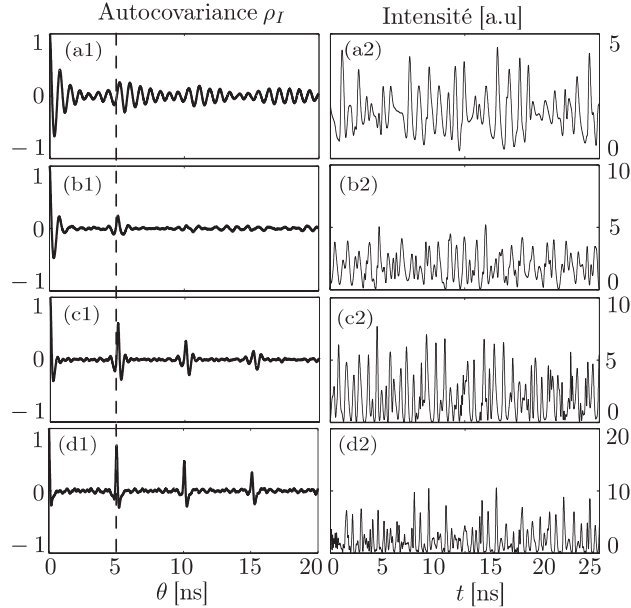


Fig.1. Intensité optique et autocovariance pour $\tau = 5$ ns et $\tau_{RO} = 0.75$ ns. (a1)-(a2) $\gamma = 2.5$ GHz, (b1)-(b2) $\gamma = 5$ GHz, (c1)-(c2) $\gamma = 10$ GHz and (d1)-(d2) $\gamma = 15$ GHz. La ligne verticale pointillée indique la valeur de τ .

3 Influence de la force de la rétroaction sur l'identification

Nous avons représenté aux Figs. 1(a)-(d) l'évolution de l'intensité optique $I(t)$ et de son autocovariance, pour quatre valeurs croissantes de la force de rétroaction γ , et pour des valeurs distantes des

temps caractéristiques ($\tau = 5$ ns et $\tau_{RO} = 0.75$ ns). Les Figs. 1(a2)-(d2) nous montrent que l'intensité optique varie de façon chaotique pour toutes les forces de rétroaction considérées. Les autocovariances révèlent cependant des dynamiques fort différentes. Les fortes rétroactions utilisées aux Figs. 1(c1) et 1(d1) conduisent au cas classique observé dans la littérature [3,4], et révèlent aisément la valeur du retard par la présence d'un extremum très marqué autour de la valeur de ce dernier. L'utilisation d'une rétroaction plus faible à la Fig. 1(b1) conduit à une décroissance significative de l'amplitude de l'extremum proche de τ , qui est due à la plus faible influence qu'a la rétroaction optique sur la dynamique. Enfin, une diminution ultérieure de la force de la rétroaction (Fig. 1(a1)) conduit à l'apparition de très nombreux extrema locaux situés à des multiples de $\tau_{RO}/2$. L'identification du retard est donc malaisée dans ce cas étant donné qu'il est difficile de déterminer quel extremum correspond à la valeur du retard.

De façon générale, de fortes rétroactions retardées conduisent à des dynamiques qui sont fortement déterminées par le retard τ et qui révèlent aisément la valeur de ce dernier. Pour des rétroactions plus modérées, il existe une forte compétition entre les échelles de temps τ et τ_{RO} qui conduit à une identification plus difficile du retard.

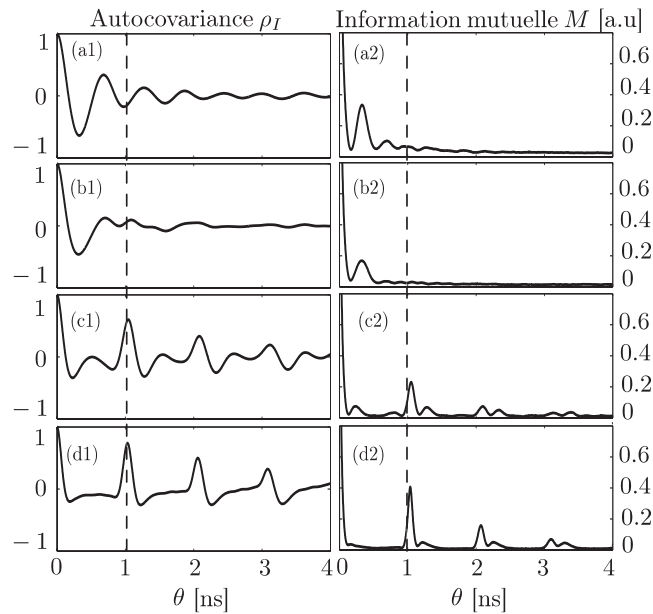


Fig.2. Autocovariance et information mutuelle pour $\tau = 1$ ns et $\tau_{RO} = 0.75$ ns. (a1)-(a2) $\gamma = 2.5$ GHz, (b1)-(b2) $\gamma = 5$ GHz, (c1)-(c2) $\gamma = 10$ GHz and (d1)-(d2) $\gamma = 15$ GHz. La ligne verticale pointillée indique la valeur de τ

4 Influence de la proximité des temps caractéristiques du système sur l'identification

L'identification est donc malaisée et approximative dans le cas d'une rétroaction faible, mais elle est tout de même possible. Nous avons eu l'intuition que le fait de rapprocher les valeurs des deux échelles de temps, tout en gardant une faible valeur de la rétroaction, rendrait l'identification difficile. Nous avons pu vérifier qu'en effet ce rapprochement conduit à une compétition forte entre les 2 échelles de temps qui produit des dynamiques inattendues, au sein desquelles il est difficile d'identifier la valeur du retard τ . Ceci est illustré aux Figs. 2(a-d), qui représentent l'évolution des fonctions d'autocovariance et d'information mutuelle avec la force de la rétroaction γ , pour des valeurs proches des temps caractéristiques ($\tau = 1$ ns et $\tau_{RO} = 0.75$ ns).

Les Figs. 2(c) et 2(d) correspondent au cas classique d'une rétroaction forte qui produit une dynamique au sein de laquelle la valeur du retard peut être facilement identifiée par la présence d'un extremum local très marqué en la valeur de ce retard. Les Figs. 2(a) et (b) correspondent à des régimes chaotiques produits par des rétroactions plus faibles. Dans ces cas, la présence de retard dans le laser à cavité externe n'est pas détectable. En effet, l'autocovariance et l'information mutuelle ne présentent pas d'extremum local marqué autour de la valeur de ce retard. Un espion qui se baserait sur la détection d'extrema pour identifier le retard se tromperait lourdement puisque, comme le montrent les Figs. 2(a) et (b), il déterminerait ainsi une valeur grandement inférieure à celle de τ . Ce type de comportement dynamique d'un laser à cavité externe semble être particulièrement intéressant dans un contexte de cryptage. Dans nos prochains travaux, nous comptons expliquer théoriquement et vérifier expérimentalement l'impossibilité de détecter la valeur du retard.

5 Conclusion

Nous avons démontré sur base du modèle de Lang-Kobayashi que, contrairement à ce qui est communément admis, un laser à cavité externe peut produire des régimes chaotiques au sein desquels il est difficile de détecter la valeur d'un paramètre essentiel de la dynamique qui est le retard. Ces régimes pourraient donc être avantageusement utilisés pour augmenter la sécurité d'une communication chaotique utilisant des lasers à cavité externe.

Références

1. A. ARGYRIS, D. SYVRIDIS, L. LARGER, V. ANNOVAZZI-LODI, P. COLET, I. FISCHER, J. GARCIA-OJALVO, C. R. MIRASSO, L. PESQUERA & K.A. SHORE, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **437**, 343 (2005).
2. R. HEGGER, M.J. BÜNNER, H. KANTZ & A. GIAQUINTA, Identifying and modeling delay feedback systems, *Physical Review Letters*, **81**, 558 (1998).
3. M.J. BÜNNER, A. KITTEL, J. PARISI, I. FISCHER & W. ELSÄSSER, Estimation of delay times from a delayed optical feedback laser experiment, *Europhysics Letters*, **42**, 353 (1998).
4. M.W. LEE, P. REES, K.A. SHORE, S. ORTIN, L. PESQUERA & A. VALLE, Dynamical characterization of a laser diode subject to double optical feedback for chaotic optical communications, *IEE Proceedings in Optoelectronics.*, **152**, 97 (2005).
5. R. LANG & K. KOBAYASHI, External Optical feedback effects on semiconductor injection laser properties-Dynamical characterization of a laser diode subject to double optical feedback for chaotic optical communications, *IEEE Journal of Quantum Electron.*, **16**, 347 (1980).
6. D. RONTANI, A. LOCQUET, M. SCIAMANNA, AND D.S. CITRIN, Loss of time-delay signature in the chaotic output of a semiconductor laser with optical feedback, *Optics Letters*, **32**, 2960 (2007).

Démodulation complexe de signaux expérimentaux appliquée aux ondes internes

Matthieu Mercier, Nicolas Garnier, & Thierry Dauxois

Laboratoire de Physique, ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07
 matthieu.mercier@ens-lyon.fr

Résumé. Nous montrons comment les propriétés physiques des ondes internes de gravité dans les fluides stratifiés à deux dimensions peuvent être élucidées grâce à l'utilisation de la transformée de Hilbert et à la représentation complexe de signaux expérimentaux [1]. Les ondes internes ont été obtenues expérimentalement par un générateur d'un nouveau genre qui émet des ondes planes monochromatiques [2]. Une onde interne plane solution du problème linéaire se trouve également être solution du problème non-linéaire : les deux comportements ont été rencontrés expérimentalement. Une fois la source analysée, l'étude de la dissipation, de la réflexion et de la diffraction des ondes internes éclairée par la transformée de Hilbert a permis d'apporter des réponses à des interrogations soulevées par la théorie.

Abstract. New insights in the physics of internal waves in two-dimensional fluid have been obtained thanks to the Hilbert Transform [1]. The internal waves were obtained experimentally using a recently developed generator [2] that creates monochromatic internal plane waves. These waves are solutions of both linear and nonlinear problems, and the two regimes have been observed in experiments. The analysis of dissipation, reflection and diffraction of internal waves using the Hilbert Transform has permitted to answer fundamental questions raised by theory.

1 Introduction

Les ondes internes de gravité sont des ondes atypiques se propageant dans les fluides continuent stratifiés. Leur originalité se trouve particulièrement dans le fait qu'à une pulsation donnée, les ondes sont contraintes de se propager selon une direction donnée. Une autre particularité des ondes internes est que les solutions en ondes planes du problème linéaire se trouvent également être solutions du problème non-linéaire. La technique de visualisation appelée "strioscopie synthétique" ('Synthetic Schlieren' [3] en anglais) permet des mesures quantitatives d'ondes internes dans les fluides stratifiés à deux dimensions. Cependant dans de nombreuses situations telles que l'émission d'ondes par des objets oscillants, ou bien encore par des écoulements oscillants au-dessus de topographies, la possibilité d'émettre plusieurs faisceaux pour une seule pulsation d'excitation complique l'analyse des champs observés. La même remarque s'applique lors de réflexions multiples au cours d'expériences dans des cuves de petite taille. Nous proposons une méthode permettant de discriminer les différents faisceaux émis pour une pulsation donnée, en se basant sur la seule grandeur qui les différencie, leur vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$. Cette technique de démodulation complexe est basée sur la transformée de Hilbert et fournit qui plus est une représentation analytique des signaux qui permet l'extraction de l'enveloppe et de la phase du signal. Après avoir présenté la technique de démodulation complexe et le dispositif expérimental, nous nous concentrons sur la source d'ondes internes planes avant de l'utiliser pour apporter des réponses aux problèmes fondamentaux de dissipation, réflexion et diffraction des ondes internes.

2 Démodulation complexe et dispositif expérimental

2.1 Ondes internes à deux dimensions

A deux dimensions, en notant t la variable temporelle, $\rho(x, z, t)$ la densité et g la gravité, on rappelle que la théorie linéaire pour un fluide stratifié stable, i.e. $\partial\rho/\partial z < 0$, établit l'équation

$$\psi_{zztt} + N^2\psi_{xx} = 0 \quad (1)$$

où le champ $\psi(x, z, t)$ peut tout aussi bien être la fonction courant, les composantes de la vitesse, la pression ou les gradients de densité. La constante $N^2 = -(g/\rho)\partial\rho/\partial z$, est le carré de la pulsation de Brunt-Väisälä, qui caractérise l'oscillation d'une particule fluide lorsque la stratification est linéaire. Les solutions en ondes planes $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$, avec $\mathbf{x} = (x, z)$ et $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ vérifient la relation de dispersion $\omega^2 = N^2 k_x^2 / (k_x^2 + k_z^2) = N^2 \sin^2 \theta$, où θ est l'angle que fait le vecteur d'onde avec la gravité. Ainsi quatre faisceaux peuvent être émis pour chaque valeur de ω . On peut remarquer que ces solutions sont également solutions du problème non-linéaire [4], ainsi les paquets d'ondes planes se révèlent être un outil théorique particulièrement intéressant.

2.2 Dispositif expérimental

Les expériences présentées par la suite ont été réalisées dans une cuve rectangulaire de dimensions $80 \times 42.5 \times 17 \text{ cm}^3$ remplie d'eau linéairement stratifiée en sel (NaCl). La faible largeur de la cuve nous permet de considérer une approche bi-dimensionnelle. La stratification linéaire est obtenue par la méthode des deux bacs, et le résultat est vérifié directement à partir de mesures de densité à différentes altitudes, estimant la valeur de N avec une incertitude inférieure à 5%. La technique de strioscopie synthétique permet de quantifier le gradient de densité. Les perturbations locales de densité dues au passage d'une onde interne sont obtenues en comparant l'image d'une mire à travers la cuve avec un état de référence sans onde. Dans la suite, nous noterons $U(x, z, t)$ (respectivement $V(x, z, t)$) le gradient horizontal (respectivement vertical) de densité. Ses champs ont été observés avec une caméra classique, de résolution maximale 1024×1280 pixels, et calculés grâce au logiciel de corrélation d'images CIVx développé à la plateforme Coriolis de Grenoble.

Les ondes internes générées sont issues d'une source particulière dont le principe est illustré Fig. 1. Le forçage imposé par les plaques oscillant horizontalement est de la forme

$$v_x(x = 0, z, t) = v_0 \cos(\omega t - k_e z) \quad (2)$$

où $k_e = 2\pi/\lambda_e$ est le nombre d'onde associé à la longueur d'onde $\lambda_e = 4.4 \text{ cm}$ du générateur, et $v_0 \sim a\omega$ avec $a = 5 \text{ mm}$ l'amplitude de l'oscillation des plaques.

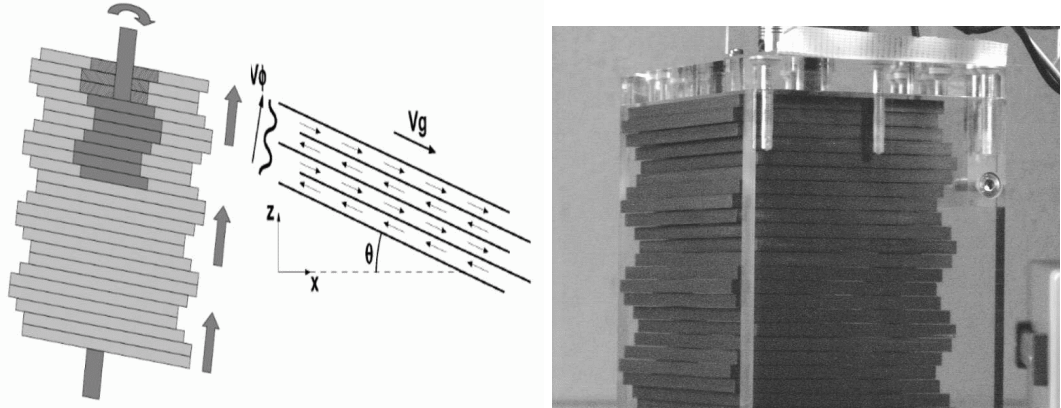


Fig.1. Principe du générateur d'ondes internes planes avec le champ de vitesse émis idéalement (gauche) et vue en perspective du générateur (droite).

2.3 Démodulation complexe

Nous appelons démodulation complexe (ou transformée de Hilbert) l'opération consistant à obtenir le champ complexe $\tilde{U}(x, z, t)$ tel que $U(x, z, t)$ correspond à sa partie réelle $Re(\tilde{U}(x, z, t))$. Pour cela nous

utilisons la transformée de Hilbert. À noter que le nom de transformée de Hilbert est parfois associé à l'opération consistant à obtenir le champ réel $Im(\tilde{U})$ à partir du champ U , étape nécessaire à la construction de \tilde{U} . Cette technique a permis le calcul de propriétés locales et instantanées d'onde [5] (amplitude, fréquence, longueur d'onde) auparavant, mais jamais à notre connaissance dans le contexte des ondes internes de gravité. En pratique, nous réalisons la démodulation complexe en trois calculs successifs :

- i) transformée de Fourier de $U(x, z, t)$ en temps t ,
- ii) filtrage passe-bande (plus ou moins sélectif) dans l'espace de Fourier centré sur la fréquence positive $f = \omega/2\pi$,
- iii) transformée de Fourier inverse du spectre filtré,

ce qui aboutit à \tilde{U} . Il est important de remarquer qu'après cette étape n'opérant que selon la coordonnée temporelle, le champ obtenu se décompose selon quatre faisceaux d'ondes internes à la même pulsation ω mais se propageant dans quatre directions différentes

$$\tilde{U}(x, z, t) = \tilde{A}(x, z, t) + \tilde{B}(x, z, t) + \tilde{C}(x, z, t) + \tilde{D}(x, z, t), \quad (3)$$

avec

$$\tilde{A}(x, z, t) = A(X, Z, T) \exp[i(\omega t - k_x x - k_z z)], \quad (4)$$

$$\tilde{B}(x, z, t) = B(X, Z, T) \exp[i(\omega t - k_x x + k_z z)], \quad (5)$$

$$\tilde{C}(x, z, t) = C(X, Z, T) \exp[i(\omega t + k_x x - k_z z)], \quad (6)$$

$$\tilde{D}(x, z, t) = D(X, Z, T) \exp[i(\omega t + k_x x + k_z z)]. \quad (7)$$

Il est possible de différencier ces faisceaux par le signe devant chaque composante du vecteur d'onde k_x et k_z (cf. Fig. 2). On peut alors isoler une de ces composantes par filtrage dans l'espace de Fourier spatial, selon les nombres d'ondes k_x et k_z associés aux coordonnées spatiales x et z . Il est important de noter qu'on ne peut différencier les nombres d'ondes positifs et négatifs que pour un signal complexe car le spectre associé n'est pas une fonction paire ; il faut donc avoir réalisé la démodulation complexe auparavant.

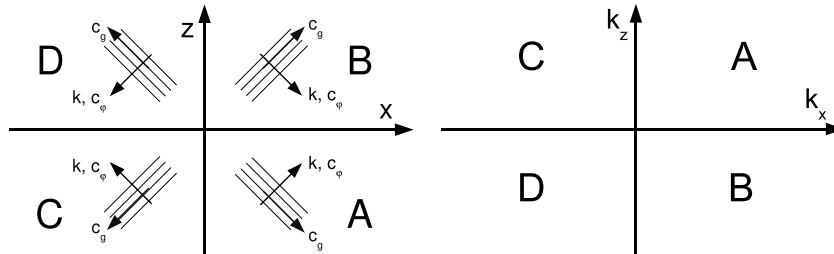


Fig.2. Décomposition d'une onde interne harmonique selon les composantes se propageant dans les quatre directions de propagation autorisées par la relation de dispersion, dans l'espace réel à gauche et l'espace de Fourier à droite.

Au final, il est possible d'extraire de la mesure de $U(x, z, t)$ un champ complexe

$$\chi(x, z, t) = |\chi(X, Z, T)| \exp[i\varphi_\chi(x, z, t)], \quad (8)$$

où χ correspond à A , B , C ou D . La phase φ_χ varie rapidement avec la pulsation de l'onde mais contient également des modulations lentes. On peut extraire ses modulations grâce aux champs

- i) amplitude $|\chi(X, Z, T)|$,
- ii) pulsation $\omega(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial t$,
- iii) nombre d'onde selon la direction x : $k_x(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial x$,
- iv) nombre d'onde selon la direction z : $k_z(x, z, t) = \partial\varphi_\chi/\partial z$.

3 Caractérisation d'une source d'ondes internes planes

Nous avons appliqué les outils précédents à l'analyse de la source d'ondes internes planes. Du fait du système de plaques oscillantes, la structure du générateur est discrète et susceptible de générer des harmoniques de la pulsation et/ou du nombre d'onde.

3.1 Monochromaticité temporelle

La composante horizontale du gradient filtrée à la pulsation d'excitation ω , et aux harmoniques susceptibles de se propager (inférieures à N) sont représentées à la Fig. 3. On peut distinguer les harmoniques notamment grâce à l'angle de propagation qui change d'après la relation de dispersion. On constate que les structures associées à chaque harmonique sont différentes, ainsi que les amplitudes, ce qui va être étudié par la suite.

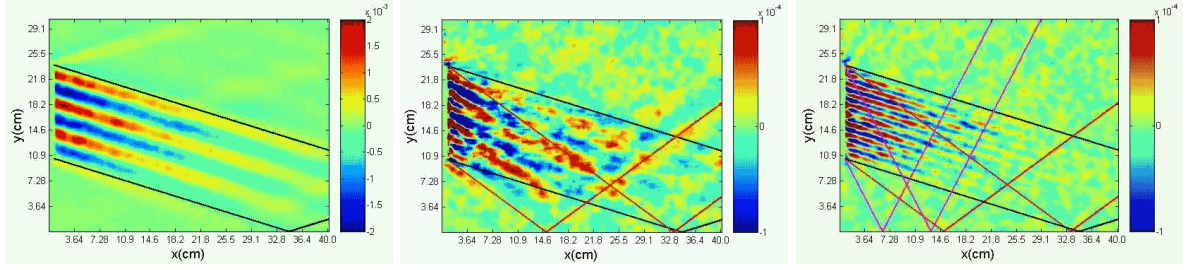


Fig.3. $Re(\tilde{U})$ en ΔN^2 (rad.s^{-1})² filtré à $\omega = 0.18$ rad.s^{-1} (gauche), 2ω (centre) et 3ω (droite). $\omega/N = 0.3$. Les lignes noires, rouges et violettes délimitent les bords du faisceau à ω , 2ω et 3ω d'après la relation de dispersion.

3.2 Monochromaticité spatiale

La longueur d'onde émise associée à ω vérifie bien la loi imposée par la condition aux limites (2). Ainsi la loi $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(k_e \cos \theta)$ a été vérifiée directement. Cependant les structures associées aux harmoniques 2ω et 3ω correspondent à des longueurs d'ondes 2 et 3 fois plus petites que λ . La sélection des longueurs d'ondes étant indépendante de la pulsation pour les ondes internes, ce résultat reste à analyser. Qui plus est ces structures changent avec la propagation de l'onde, suggérant des interactions non-linéaires entre les harmoniques. Quoi qu'il en soit, l'amplitude des harmoniques reste faible devant la composante fondamentale (cf. Fig. 4 à gauche).

Une mesure indirecte de la longueur d'onde se propageant fait intervenir la dissipation visqueuse. La structure d'une onde interne plane avec viscosité est [6,7] $\psi(\xi, \eta, t) = \psi_0 e^{-\beta \xi} e^{i(\omega t - k \eta)}$, où ξ est la coordonnée longitudinale (selon la ligne noire Fig. 4 au centre) et η la coordonnée transverse. La grandeur

$$\beta = \frac{\nu k^3}{2N \cos \theta} = \frac{\nu k^3}{2N \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{N^2}}}. \quad (9)$$

est l'inverse de la longueur de dissipation. D'après la dépendance de k avec ω , la relation est $\beta = \nu k_e^3 / 2N \cos^4 \theta$, qui se réécrit sous la forme plus générique

$$N\beta = \frac{\nu k_e^3}{2} \frac{1}{(1 - x^2)^2} \quad \text{avec} \quad x = \omega/N. \quad (10)$$

La vérification expérimentale de la loi (10) pour différentes valeurs de N est illustrée Fig. 4 à droite. Le trait plein correspond au modèle avec k_e comme paramètre ajustable. L'estimation de $\lambda_e = 3.6 \pm 0.2$ cm est en accord avec le forçage.

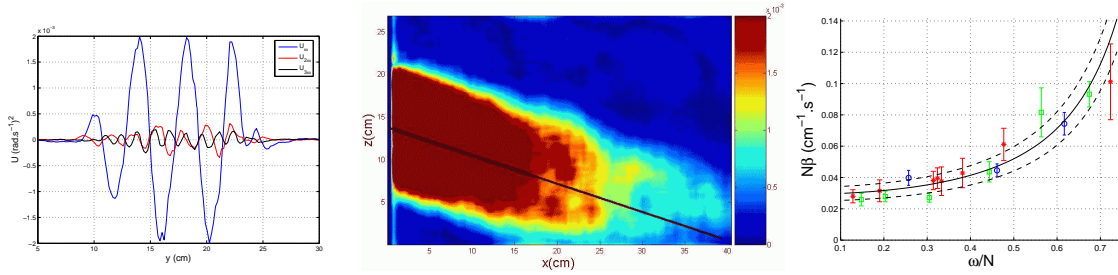


Fig.4. *Gauche* : coupe verticale (à $x = 1.5\text{cm}$) des faisceaux représentés Fig.3. *Centre* : $|\tilde{A}| = A$ filtré à $\omega = 0.2 \text{ rad.s}^{-1}$ ($\omega/N = 0.3$). *Droite* : Etude de l'atténuation en fonction de la pulsation pour trois stratifications. $N = 0.66$ (étoile), 0.68 (carré) et 0.76 (rond) rad.s^{-1} .

4 Applications

4.1 Réflexion non-linéaire

La réflexion des ondes internes est atypique du fait que les ondes se propagent en conservant l'angle qu'elles font avec la gravité. Ainsi les lois de Descartes ne s'appliquent pas. De plus, des non-linéarités sont susceptibles de se produire par interaction du faisceau incident avec le réfléchi. Ceci a été observé expérimentalement lors de la réflexion d'un faisceau d'ondes internes planes à la surface libre (cf. Fig. 5) ainsi que sur un fond plat.

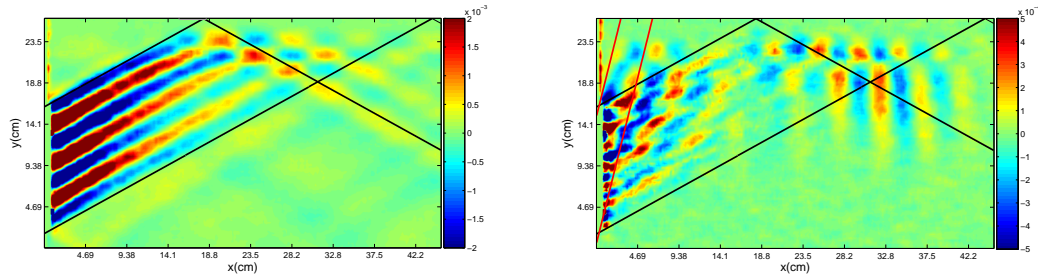


Fig.5. Réflexion d'un faisceau sur la surface libre : $Re(\tilde{U})$ en $\Delta N^2 (\text{rad.s}^{-1})^2$ filtré à $\omega = 0.38 \text{ rad.s}^{-1}$ (gauche), 2ω (droite). $\omega/N = 0.48$. Les lignes noires et rouges délimitent les bords du faisceau à ω et 2ω d'après la relation de dispersion.

La réflexion "en retour", ie selon la direction du faisceau incident, est une autre question ouverte soulevée par Baines [8] notamment. La figure 6 illustre le principe et l'absence de ce faisceau dans les expériences réalisées sur un fond plat incliné d'un angle $\alpha < \theta$ (le cas $\alpha > \theta$ apporte le même résultat). La discrimination des faisceaux descendants ou montants permet de montrer l'absence de faisceaux remontant après la réflexion.

4.2 Diffraction

Le problème de la diffraction d'une onde interne plane par une fente de largeur comparable à la longueur d'onde est également très intéressant. Le fait que la relation de dispersion impose un angle de propagation signifie que l'onde ne sera pas réémise dans toute les directions comme en optique mais on peut s'attendre à une propagation dans les deux directions autorisées, à la sortie d'une fente dont la largeur est comparable à λ . L'analyse de Hilbert permet alors de mettre en avant les faisceaux émis dans une direction différente de l'onde incidente.

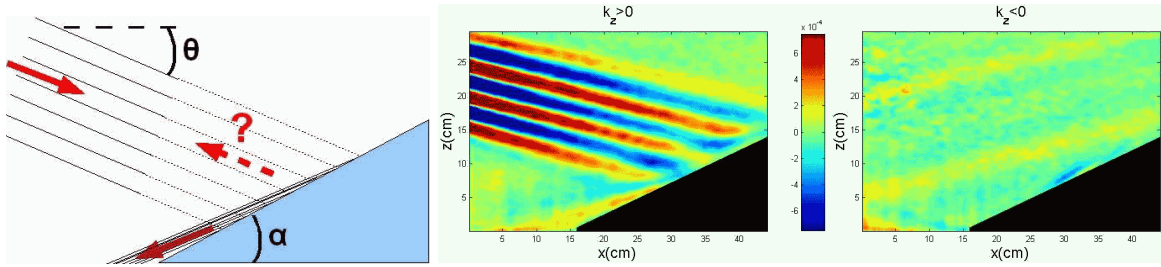


Fig.6. Principe de la réflexion “en retour” à gauche. Faisceaux descendants (au centre, $Re(\tilde{A} + \tilde{C})$) et montants (à droite, $Re(\tilde{B} + \tilde{D})$) en ΔN^2 (rad.s^{-1})², issus de la réflexion sur une pente ($\alpha = 14^\circ$). $\omega/N = 0.43$ et $N = 0.42 \text{ rad.s}^{-1}$.

5 Conclusion

Nous avons présenté les intérêts de la transformée de Hilbert appliquée aux ondes internes à deux dimensions. L’atténuation d’ondes internes planes a permis de quantifier l’influence de la pulsation ainsi que de la longueur d’onde. Les interactions non-linéaires sont clairement identifiées bien que les structures spatiales engendrées sont assez complexes. Le problème de la réflexion d’ondes est présenté sous un nouvel aspect permettant de trancher la question d’une onde réfléchie “en retour” lors de la réflexion sur un fond plat. Enfin, la diffraction des ondes internes semble un sujet prometteur, notamment grâce à la relation de dispersion atypique des ondes internes.

Références

1. M. J. MERCIER, N. B. GARNIER, T. DAUXOIS, Hilbert transform applied to experimental data tackling internal waves issues, *Physics of Fluids*, soumis (2008).
2. L. GOSTIAUX, H. DIDELLE, S. MERCIER, AND T. DAUXOIS, A novel internal waves generator, *Experiments in Fluids*, **42**, 123-130 (2007).
3. S. B. DALZIEL, G. O. HUGHES, AND B. R. SUTHERLAND, Whole-field density measurements by ‘synthetic schlieren’, *Experiments in Fluids*, **28**, 322-335 (2000).
4. A. TABAEI AND T. R. AKYLAS AND K. G. LAMB, Nonlinear Effects in Reflecting and Colliding Internal Wave Beams, *Journal of Fluid Mechanics*, **526**, 217-243 (2005).
5. N. B. GARNIER, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, AND A. PRIGENT, Nonlinear dynamics of waves and modulated waves in 1d thermocapillary flows. i. general presentation and periodic solutions, *Physica D*, **174**, 1-29 (2003).
6. N. H. THOMAS AND T. N. STEVENSON, A similarity solution for viscous internal waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **54**, 495-506 (1972).
7. D. G. HURLEY AND G. KEADY, The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. part 2. approximate viscous solution, *Journal of Fluid Mechanics*, **351**, 119-138 (1997).
8. P. G. BAINES, The reflexion of internal/inertial waves from bumpy surfaces. part 2. split reflexion and diffraction, *Journal of Fluid Mechanics*, **49**, 113-131 (1971).

Oscillations induites par une dynamique transcriptionnelle lente dans l'expression d'un gène réprimé par sa propre protéine

P.-E. Morant¹, Q. Thommen¹, F. Lemaire², C. Vandermoere¹, B. Parent³, & M. Lefranc¹

¹ Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules, UMR USTL/CNRS 8523, UFR de Physique, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq

² Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR USTL/CNRS 8022, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq

³ Unité de Glycobiologie Structurale et Fonctionnelle, UMR USTL/CNRS 8576, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq

marc.lefranc@univ-lille1.fr

Résumé. Nous étudions la dynamique d'un gène réprimé par sa propre protéine dans le cas où le taux de transcription est une variable dynamique qui ne s'adapte pas instantanément à la concentration de protéines. Nous obtenons un critère analytique pour l'apparition d'oscillations spontanées qui montre que celles-ci peuvent alors se produire pour des mécanismes de dégradation bien moins non linéaires. Les prédictions déterministes sont aussi comparées à des simulations stochastiques.

Abstract. We revisit the dynamics of a gene repressed by its own protein in the case where the transcription rate does not adapt instantaneously to protein concentration but is a dynamical variable. We derive analytical criteria for the appearance of sustained oscillations and find that they require degradation mechanisms much less nonlinear than for infinitely fast regulation. Deterministic predictions are also compared with stochastic simulations of this minimal genetic oscillator.

1 Introduction

Les réseaux de gènes interagissant via des protéines qui régulent leurs activités sont des systèmes fortement non linéaires présentant une grande variété de comportements dynamiques [5,2]. Notre étude porte sur le circuit génétique élémentaire représenté schématiquement à la figure 1. Des molécules d'ARN

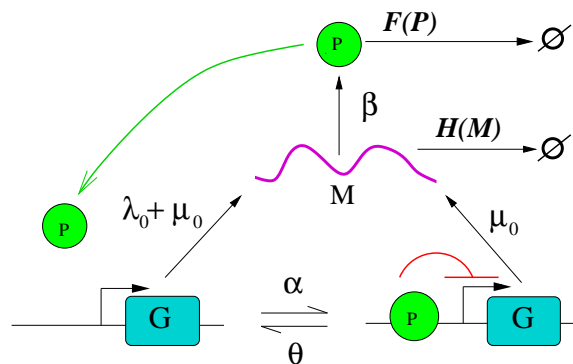


Fig.1. Schéma réactionnel du gène auto-régulé.

sont produites à partir d'un gène (*transcription*). Des protéines sont ensuite synthétisées à partir de ces ARN (*traduction*). Une des protéines produites peut se fixer sur le gène, entraînant une modification du taux de synthèse d'ARN (*taux de transcription*). Protéines et ARN peuvent être dégradés par des

processus externes. Enfin, le gène est présent en exemplaire unique et ne peut être dégradé. Trois variables dynamiques, G , M et P décrivent à chaque instant l'état du réseau. Les variables M et P représentent respectivement le nombre d'ARN et de protéines. Quant à la variable G , elle représente l'activité du gène.

Ce réseau simple décrit une boucle de rétroaction du gène sur lui-même. Comme nous nous intéressons aux comportements oscillatoires, nous nous limitons au cas d'une rétroaction négative, où la protéine réprime sa propre expression : le taux de production d'ARN est moindre lorsqu'une protéine est fixée à la zone régulatrice du gène.

Les études théoriques de réseaux génétiques ont généralement supposé que les processus d'activation d'un gène via son interaction avec la protéine régulatrice sont rapides par rapport à la dynamique des ARN et des protéines, et donc que le taux de transcription réagit instantanément à la concentration en protéines. Cependant, cette synthèse est un processus complexe [1], et cette hypothèse n'est pas toujours justifiée. Dans cet article, nous montrons comment la dynamique intrinsèque du gène peut modifier de manière spectaculaire le comportement du système dans le cas du gène auto-réprimé.

2 Dynamique déterministe

Nous modélisons le circuit de la figure 1 par le système d'équations différentielles (1a–1c)

$$\dot{G} = \theta_0(1 - G) - \alpha_0 GP \quad (1a)$$

$$\dot{P} = [\theta_0(1 - G) - \alpha_0 GP] + \beta_0 M - \delta_P F(P) \quad (1b)$$

$$\dot{M} = \mu_0 + \lambda_0 G - \delta_M H(M) \quad (1c)$$

L'équation (1a) décrit a priori la dynamique de l'interaction de la protéine avec le gène, les paramètres α_0 et θ_0 étant les taux d'accrochage et de relargage de la protéine. La variable G varie continûment entre 0 et 1 et peut être interprétée comme une moyenne temporelle de l'activité du gène lorsque le temps moyen de résidence de la protéine sur le gène est petit par rapport à la période d'oscillation [3]. De manière plus générale, l'équation (1a) décrit la dynamique d'une activité génique G relaxant lentement vers une valeur d'équilibre donnée par la fonction de régulation habituelle $G = 1/[1 + (P/P_0)]$, où $P_0 = (\theta_0/\alpha_0)$ est le seuil de demi-expression ($G = 1/2$ pour $P = P_0$). Une telle dynamique peut résulter de phénomènes coopératifs et de recrutement dans la machinerie de transcription. Les études précédentes ont généralement considéré θ_0 et α_0 comme très grands devant les autres paramètres.

Dans l'équation (1b), les deux premiers termes correspondent à la dynamique de fixation/relargage de la protéine; les troisième et quatrième décrivent la traduction et la dégradation. L'équation (1c) décrit la transcription avec un taux $\mu_0 + \lambda_0 G$ et la dégradation de l'ARN. Le critère d'oscillation est obtenu ci-dessous pour des fonctions de dégradation arbitraires $F(P)$ and $H(M)$, que nous choisissons de dérivée unitaire en zéro de sorte que δ_P et δ_M représentent les taux de dégradation à faible nombre de molécules.

En renormalisant le temps et les variables dynamiques comme suit :

$$t = \frac{t'}{\delta_M}, \quad G = g, \quad P = pP_0, \quad M = mM_0, \quad P_0 = \left(\frac{\theta_0}{\alpha_0}\right), \quad M_0 = \frac{\delta_P P_0}{\beta_0} \quad (2)$$

les équations (1a–1c) peuvent être réécrites sous la forme plus simple (on note $x' = dx/dt'$)

$$g' = \theta [1 - g(1 + p)], \quad (3a)$$

$$p' = \alpha [1 - g(1 + p)] + \delta [m - f(p)], \quad (3b)$$

$$m' = \mu + \lambda g - h(m). \quad (3c)$$

Les paramètres renormalisés et les fonctions de dégradation sont donnés par

$$\theta = \frac{\theta_0}{\delta_M}, \quad \alpha = \frac{\theta_0}{P_0 \delta_M}, \quad \delta = \frac{\delta_P}{\delta_M}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{M_0 \delta_M}, \quad \mu = \frac{\mu_0}{M_0 \delta_M}, \quad f(p) = \frac{F(P)}{P_0}, \quad h(m) = \frac{H(M)}{M_0}. \quad (4)$$

Lorsque les fonctions f et g sont monotones, le modèle (3a–3c) a un unique point fixe (g_*, p_*, m_*) caractérisé par les équations :

$$g_* = \frac{1}{1 + p_*}, m_* = f(p_*), g_* = \frac{h(m_*) - \mu}{\lambda} \quad (5)$$

Remarquons que le point fixe ne dépend que des paramètres λ et μ et des fonctions de dégradations f et h , tandis que les paramètres θ , α , δ contrôlent les échelles de temps.

Le comportement des fonctions de dégradation au voisinage du point fixe est décrit par les pentes

$$s = \left. \frac{df(p)}{dp} \right|_{p=p_*} \quad \text{et} \quad u = \left. \frac{dh(m)}{dm} \right|_{m=m_*}$$

Dans le cas d'une dégradation linéaire [$f(p) = p$, $h(m) = m$], on trouve $u = s = 1$. Des valeurs petites (ou même négatives) des pentes s et u dénotent généralement des mécanismes de dégradation fortement non linéaires [2,11], par exemple des saturations.

Pour déterminer si les équations (3a)–(3c) possèdent un régime d'oscillation spontanée, nous avons cherché les valeurs des paramètres pour lesquelles le point fixe perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf. Dans un souci de simplicité, nous nous plaçons dans le cas d'une répression parfaite ($\mu = 0$) et d'un seuil de commutation du gène P_0 élevé ($\alpha \sim 0$). Dans ces conditions, le critère de Routh-Hürwitz nous indique que le point fixe devient instable lorsque la quantité

$$\mathcal{H} = \sigma + g_* (-\delta \lambda g_*^2 + \sigma^2) \tau + \pi g_*^2 \sigma \tau^2 \quad (6)$$

devient négative. Dans l'équation (6), la variable $\tau = 1/\theta$ est le temps de réponse du gène (à strictement parler, le temps moyen de résidence de la protéine sur le gène) ; la somme $\sigma = \delta s + u$ et le produit $\pi = \delta s u$ sont des fonctions symétriques des taux de dégradation δs et u .

Le critère (6) permet de retrouver nombre de résultats connus relatifs à la dynamique du gène auto-réprimé. Ainsi, on remarque par exemple qu'une rétroaction négative importante (λ élevé) déstabilise le système alors que des taux de dégradation importants (σ et π élevés) tendent à le stabiliser. Une approximation couramment utilisée est de considérer que le gène réagit instantanément à la concentration de protéine. Dans ce cas, $\tau = 0$ et $\mathcal{H} = \sigma$: l'existence d'oscillations implique alors $\sigma < 0$. Il est effectivement bien connu que des taux de dégradation négatifs peuvent induire des oscillations [2,11]. On aussi peut montrer que \mathcal{H} est toujours positif quand les protéines et les ARN ont des dégradations linéaires : il ne peut apparaître d'oscillations dans ce cas. De même, quand les dégradations des protéines et des ARN sont complètement saturées, ($s = u = \sigma = 0$), $\mathcal{H} = -\tau \delta \lambda g_*^3$ est *constamment négatif* : des oscillations apparaîtront systématiquement. Le comportement intermédiaire entre les régimes de dégradation linéaires et saturés dépend du temps de réponse τ .

Par la suite, nous considérons que $u, s > 0$ et démontrons que des oscillations peuvent apparaître pour des valeurs de τ finies. Plus précisément, nous souhaitons comprendre comment les oscillations peuvent apparaître en l'absence d'une dégradation saturée. Dans ce but, nous utilisons un premier indice $\nu = \sqrt{us} = \sqrt{\pi/\delta}$ correspondant à la moyenne géométrique des pentes ($\nu = 1$ pour des dégradations linéaires et $\nu = 0$ pour une dégradation saturée). Nous nous proposons de déterminer la valeur de τ donnant des oscillations pour des valeurs de ν les plus grandes possibles.

Remarquons d'abord que dans (6), les quantités σ et π jouent des rôles complémentaires. Le taux global de dégradation σ contrôle l'instabilité pour les valeurs de τ faibles et modérés, alors qu'un produit π élevé bloque les oscillations pour les grandes valeurs de τ , lorsque la dynamique du gène est lente. Pour une valeur donnée du taux de dégradation global σ , π varie entre $\sigma^2/4$ et 0 selon que les taux de dégradation des protéines et des ARN sont égaux ou déséquilibrés. Nous introduisons un deuxième indice $\epsilon = 2\sqrt{\pi}/\sigma \in [0, 1]$ caractérisant l'équilibre des taux de dégradations ($\epsilon = 1$ indique le cas symétrique et $\epsilon = 0$ le cas déséquilibré).

Il apparaît clairement dans (6) que

$$\sigma < \sigma_c = g_* \sqrt{\delta \lambda} = \frac{g_* \sqrt{2}}{t_{sw}} \quad (7)$$

est une condition nécessaire d'oscillation, où la quantité t_{sw} est le temps durant lequel un gène non réprimé ($G = 1$) synthétise à partir de zéro la quantité de protéines correspondant au seuil de demi-répression. En particulier, il suffit lorsque l'une des dégradations est complètement saturée ($\pi = 0$) que la condition (7) soit vérifiée pour que les oscillations apparaissent systématiquement pour des valeurs de τ suffisamment grandes. Cette condition suggère la mise à l'échelle suivante

$$\sigma = \sigma_c \Sigma, \quad \pi = \left(\frac{\epsilon \sigma_c}{2} \right)^2 \Sigma^2, \quad \tau = \frac{T}{g_* \sigma_c} \quad (8)$$

qui permet de réécrire la condition d'oscillation sans dépendance explicite par rapport aux paramètres

$$\mathcal{H}_\epsilon(\Sigma, T) = \Sigma \times \left[\frac{\epsilon^2 \Sigma^2}{4} T^2 + \left(\Sigma - \frac{1}{\Sigma} \right) T + 1 \right] < 0. \quad (9)$$

La condition (9) définit une série de courbes $\Sigma_\epsilon(T)$ spécifiant le taux de dégradation Σ au seuil d'oscillation comme une fonction du temps de réponse T du gène et de l'indice d'équilibre ϵ . Pour un indice ϵ donné, les oscillations apparaissent pour $\Sigma \leq \Sigma_\epsilon(T)$. Parallèlement, lorsque l'on maintient T fixe $\Sigma_\epsilon(T)$ décroît de manière monotone avec ϵ . La figure 2 représente les courbes limites $\Sigma_1(T)$ et $\Sigma_0(T)$ qui sont particulièrement importantes pour comprendre le diagramme de bifurcation : quel que soit l'indice d'équilibre ϵ , le circuit oscille toujours quand $\Sigma < \Sigma_1(T)$ et jamais quand $\Sigma > \Sigma_0(T)$.

Pour vérifier la pertinence de notre analyse, nous avons exploré numériquement l'espace des paramètres des équations (3a–3c) à la recherche d'oscillations. Pour cela, nous avons considéré le cas d'une dégradation de la protéine via une enzyme allostérique et d'une dégradation de Michaelis-Menten pour l'ARN :

$$f(p) = \frac{p \times (a + p/\kappa)}{a + 2a(p/\kappa) + (p/\kappa)^2}, \quad h(m) = \frac{\chi m}{\chi + m}. \quad (10)$$

Les points obtenus sont représentés par des points noirs sur la figure 2. Bien que les simulations numériques aient été menées avec $\mu, \alpha \neq 0$, l'accord est excellent : tous les points sont en dessous de la courbe $\Sigma_0(T)$ et les quelques points significativement au-dessus de $\Sigma_1(T)$ ont généralement un des taux de dégradation petit. Notre analyse semble donc pouvoir établir des résultats généraux quant aux comportements dynamiques des équations (1a–1c).

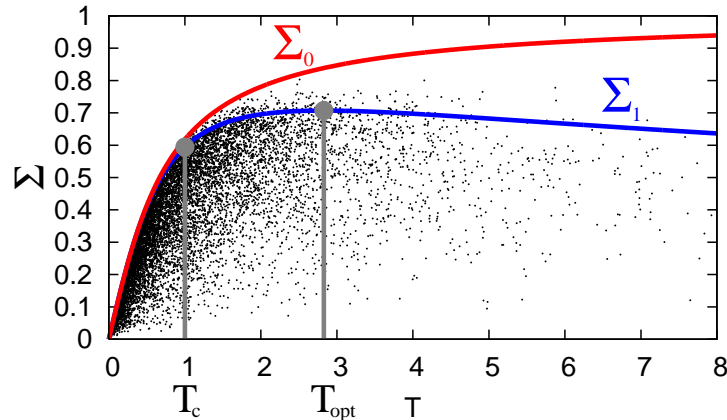


Fig.2. Diagramme de bifurcation de (1a–1c) dans le plan (Σ, T) obtenu d'après (9). Un système avec un indice d'équilibre ϵ oscille pour $\Sigma < \Sigma_\epsilon(T)$. Les points noirs indiquent les paramètres d'oscillation de (1a–1c), avec $\theta, \delta \in [10^{-1}, 10]$, $\theta/\alpha \in [10, 1000]$, en supposant les mécanismes de dégradation (10) avec $a \in [10^{-6}, 1]$. $T_c = 1$ est l'échelle de temps en deçà de laquelle la dynamique transcriptionnelle ne peut être négligée. $T_{\text{opt}} = 2\sqrt{2}$ est la position du maximum de $\Sigma_1(T)$.

Sur la figure 2, deux régions peuvent être distinguées. Pour $T < 1$, le seuil d'instabilité $\Sigma_\epsilon(T)$ augmente rapidement avec T et sa dépendance en ϵ est négligeable. Pour les petits T , nous trouvons que $\Sigma_\epsilon(T) \sim T$, soit en retranscrivant à l'aide de (8) :

$$\sigma < \lambda g_*^3 \delta \tau \quad (11)$$

Dans la région où $T > 1$, $\Sigma_\epsilon(T)$ atteint une valeur maximale $\Sigma_m(\epsilon) = 1/\sqrt{\epsilon+1}$ pour $T = T_m(\epsilon) = 2\sqrt{\epsilon+1}/\epsilon$, et décroît comme T^{-1} pour $T \rightarrow \infty$, si $\epsilon \neq 0$. $\Sigma_0(T)$ croît de manière monotone jusque $\Sigma = 1$. Pour une valeur de Σ fixée, les oscillations apparaissent dans un domaine de T restreint ; ce domaine devient infini lorsque $\epsilon = 0$

Notons que des valeurs plus importantes de Σ au seuil d'oscillation peuvent être obtenues pour des valeurs de ϵ plus petites (Fig. 2). Cependant, celles-ci correspondent aussi à des plus petites valeurs de l'indice $\nu \sim \epsilon \Sigma$, c'est-à-dire à des configurations plus proches d'une dégradation saturée ($s = 0$ ou $u = 0$). Il est facile de montrer qu'au seuil d'oscillation, la valeur maximale de l'indice ν est atteinte pour $\epsilon = 1$, au maximum de la courbe $\Sigma_1(T)$ situé en $T_{\text{opt}} = 2\sqrt{2}$ avec

$$\nu_{\text{opt}} = \frac{g_* \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} \quad (12)$$

Ainsi, notre analyse suggère l'existence d'un phénomène de résonance dans la dynamique d'un gène auto-régulé tenant compte de la dynamique de la transcription : le circuit bifurque plus facilement vers un comportement périodique, ou plus généralement devient moins stable, pour une valeur finie du temps de relaxation du gène donné par

$$\tau_{\text{opt}} = 2\sqrt{2} \tau_c, \quad \tau_c = \frac{1}{g_*^2 \sqrt{\delta \lambda}} = \delta_M \times \frac{1}{g_*^2} \sqrt{\frac{P_0}{\lambda_0 \beta_0}}. \quad (13)$$

Le comportement dynamique du circuit diffère significativement du cas de la régulation instantanée du gène pour $\tau > \tau_c$ (notons que τ_c est proportionnel à t_{sw} défini par (7)). Cela suggère que la dynamique de transcription d'un gène peut être négligée seulement quand τ_c est démesurément grand. Comme g_* dépend de λ , μ , et des fonctions de dégradation à travers (5), la détermination de la borne inférieure de τ_c nécessite la connaissance des fonctions de dégradation. Néanmoins, il est remarquable que pour des valeurs réalistes des paramètres $\lambda_0 = \beta_0 = 10 \text{ min}^{-1}$, $P_0 = 100$, et $g_*^2 = 0,5$, on obtienne $t_c = \tau_c/\delta_M = 2$ minutes, ce qui correspond à une valeur très réaliste.

3 Dynamique stochastique

Nous allons voir maintenant que même lorsque G est une variable stochastique binaire (le gène est soit inactif soit actif), notre résultat principal reste valable : il existe une échelle de temps voisine de τ_{opt} favorisant les oscillations. Pour cela, nous avons effectué des simulations stochastiques du circuit génétique de la figure 1 pour différents temps de résidence τ en maintenant P_0 fixé. Dès lors, les oscillations régulières semblables à celle issue du modèle déterministe ne peuvent bien entendu plus être observées. L'évolution du nombre de protéines en fonction du temps présente des séquences de pics irrégulièrement espacés. Il est naturel de se demander si ces pics apparaissent plus régulièrement pour les valeurs des paramètres donnant une oscillation dans le modèle déterministe et en particulier quand $\tau = \tau_{\text{opt}}$.

Les intervalles de temps Δt entre les pics sont définis entre deux passages par $P = 1, 2P_{\text{avg}}$ séparés par au moins un passage par $P = 0, 8P_{\text{avg}}$ (c'est-à-dire en imposant une amplitude minimum de 40%), P_{avg} étant le niveau moyen de protéine. La distribution des intervalles de temps est alors caractérisée par son coefficient de variation $\eta = \frac{\sigma_{\Delta t}}{\langle \Delta t \rangle}$. Sans boucle de rétroaction, Δt est la somme de deux variables suivant chacune une distribution de Poisson et donc $\eta \in [1/\sqrt{2}, 1]$. La figure 3 présente une variation typique de η avec τ dans notre système. Cela suggère clairement que notre analyse déterministe reste pertinente dans le régime stochastique. En effet, il y a clairement une échelle de temps minimisant la fluctuation de l'intervalle temporel entre les pics, et celle-ci est voisine de τ_{opt} . De plus, il y a un domaine étendu autour du domaine d'oscillation du modèle déterministe pour lequel $\eta < 1/\sqrt{2}$, c'est-à-dire où l'intervalle de temps entre les pics est plus régulier que pour une cascade de deux processus de Poisson.

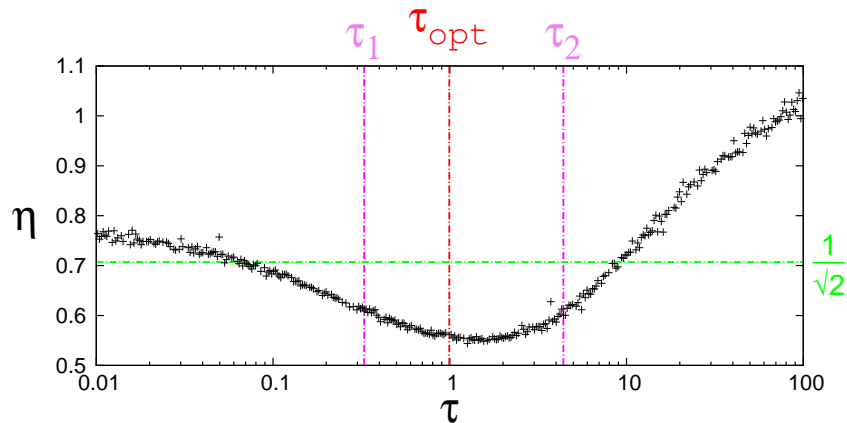


Fig.3. Coefficient de variation de l'intervalle de temps séparant deux pics en fonction du temps moyen de résidence τ pour une simulation stochastique du gène auto-réprimé.

4 Conclusion

En conclusion, nous avons montré qu'une dynamique de transcription non triviale peut déstabiliser un gène auto-réprimé. Bien qu'il soit déjà connu qu'un mécanisme de dégradation non linéaire puisse induire des oscillations dans ce système, nous observons un phénomène de résonance telle qu'une moindre non linéarité des mécanismes de dégradation est nécessaire pour induire des oscillations lorsque le temps de réponse du gène avoisine un certain temps caractéristique. L'expression de ce temps peut être déterminée analytiquement, ce qui nous permet d'identifier la région de l'espace des paramètres où la dynamique de la transcription ne peut être négligée. Les stimulations stochastiques effectuées confirment l'existence de ce temps caractéristique. La dynamique de la transcription doit ainsi être considérée comme une source potentielle d'oscillations à l'instar d'autres effets déterministes [5,2,4,7,6,10,8,11] ou stochastiques [9].

Références

1. X. DARZACQ, Y. SHAV-TAL, V. DE TURRIS, Y. BRODY, S. M SHENOY, R. D. PHAIR, & R. H. SINGER, In vivo dynamics of RNA polymerase II transcription, *Nat. Struct. Mol. Biol.* **14**, 796–806 (2007).
2. C. P. FALL, E. S. MARLAND, J. M. WAGNER, & J. J. TYSON, *Computational Cell Biology* (Springer, New York, 2002).
3. D. B. FORGER & C. S. PESKIN, Stochastic simulation of the mammalian circadian clock, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **102**, 321–324 (2005).
4. A. GOLDBETER, A model for circadian oscillations in the *Drosophila* period protein (Per), *Proc. R. Soc. Lond. B* **261**, 319–324 (1995).
5. A. GOLDBETER. *Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms : The molecular bases of periodic and chaotic behaviour* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
6. M. H. JENSEN, K. SNEPPEN, AND G. TIANA. Sustained oscillations and time delays in gene expression of protein hes1, *FEBS Lett.* **541**, 176–177 (2003).
7. J.-C. LELOUP, D. GONZE, & A. GOLDBETER, Limit cycle models for circadian rhythms based on transcriptional regulation in *Drosophila* and *Neurospora*, *J. Biol. Rhythms* **14**, 433–448 (1999).
8. J. LEWIS, Autoinhibition with transcriptional delay : a simple mechanism for the zebrafish somitogenesis oscillator, *Curr. Biol.* **13**, 1398–1408 (2003).
9. A. LOINGER & O. BIHAM, Stochastic simulations of the repressilator circuit, *Phys. Rev. E* **76**, 051917 (2007).
10. N. A. M. MONK, Oscillatory expression of Hes1, p53 and NF- κ B driven by transcriptional time delays, *Curr. Biol.* **13**, 1409–1413 (2003).
11. J. J. TYSON, C. I. HONG, C. D. THRON, & B. NOVAK, A simple model of circadian rhythms based on dimerization and proteolysis of Per and Tim, *Biophys. J.* **77**, 2411–2417 (1999).

Analyse déterministe de la compétition nonlinéaire de modes dans un écoulement en cavité

L.R. Pastur^{1,2}, F. Lusseyran¹, Th.M. Faure^{1,3}, & C. Letellier⁴

¹ LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

² Université Paris Sud XI, F-91405 Orsay Cedex

³ Université Pierre et Marie Curie, Paris

⁴ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

luc.pastur@limsi.fr

Résumé. Les écoulements affleurants présentent généralement des régimes d'oscillations entretenues résultant d'un processus de rétro-action complexe, en particulier pour des nombres de Reynolds modérés. Des travaux antérieurs ont révélé un phénomène d'échange de modes qui restait à caractériser d'un point de vue dynamique. L'intermittence entre les deux modes dominants est ici caractérisée par dynamique symbolique. La première étape consiste à reconstruire, à partir des composantes principales de la série temporelle obtenue par vélocimétrie par effet Doppler (LDV), l'espace des phases du système. Le problème de la dimension élevée de cet espace (comprise entre 5 et 10) peut être contourné en considérant une section de Poincaré dans une restriction 2D de l'espace. Le point clef consiste à réaliser une partition de l'application angulaire de premier retour à une section de Poincaré. Cette partition permet alors, sans recourir à un critère de seuil arbitraire (tel que requis dans des méthodes de démodulation complexe), une quantification précise de tous les événements oscillants.

Abstract. Open flows over a cavity present, even for medium Reynolds numbers, sustained oscillations resulting from a complex feedback process. Previous works have revealed a mode-switching phenomenon which remained to characterize from a dynamical point of view. In the configuration here investigated, the intermittency between the two dominant modes is characterized using a symbolic dynamics based approach. The first step of the procedure is to reconstruct the phase space from the time series measured by the Laser Doppler Velocimetry (LDV) technique, using the principal components. The quite high dimensionality of the reconstructed space ($5 \leq d \leq 10$) can be overcome by using a Poincaré section in a 2D projection of the phase portrait. The key step consists to define a partition of the angular first-return map to the Poincaré section without any arbitrary thresholding (as demodulation techniques requires), this partition allows a very precise quantification of all oscillating events.

1 Introduction

L'écoulement en cavité est un paradigme abondamment étudié pour les écoulements autour de discontinuités structurelles d'engins [1]. Dans notre expérience, l'écoulement s'effectue à basse vitesse, et peut donc être considéré comme incompressible. L'instabilité de la couche de cisaillement fait apparaître, sur

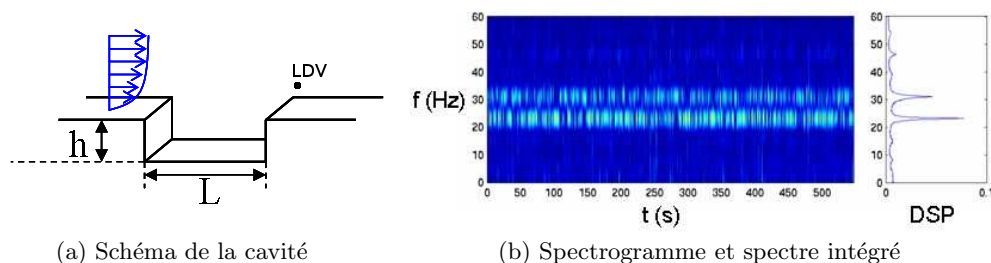


Fig.1. Schéma de l'expérience et spectrogramme du signal LDV. Dans le cas étudié, $U = 2,09 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, deux pics à $f_1 = 23.2 \text{ Hz}$ et $f_2 = 31.0 \text{ Hz}$ apparaissent clairement dans le spectre.

une plage continue du nombre de Reynolds, une compétition entre deux modes d'oscillation, qui s'excluent mutuellement (*cf* Fig 1b) [2].

2 Dispositif expérimental

La cavité a pour longueur $L = 100$ mm, hauteur $H = 50$ mm, largeur $S = 300$ mm (*cf* Figure 1a). Le rapport de forme de la cavité vaut $R = L/H = 2$. L'écoulement est créé par un ventilateur centrifuge placé en amont de la chambre de tranquillisation de la soufflerie. Un conduit se terminant par un nid d'abeille et un convergent amène l'écoulement vers la section d'essais. La paroi supérieure de la section d'essais se trouve à 75 mm au dessus de la cavité. L'épaisseur de la couche limite sur cette paroi reste inférieure à 10 mm et a essentiellement pour effet d'accélérer le fluide au dessus de la cavité ($U_1 > U_e$), par conservation du débit. La vitesse amont U_e est mesurée à 102 mm en amont de la cavité, et 25.5 mm au dessus de la plaque amont.

La vitesse longitudinale $u_x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x$ de l'écoulement est mesurée par LDV au point aval représenté sur la Figure 1a. La source lumineuse est fournie par un laser Argon-ion continu à 488 nm (bleu). La fréquence moyenne d'échantillonnage, utilisée pour ré-échantillonner la série, vaut $f_{LDV} = 1530$ Hz.

3 Portrait de phase du système

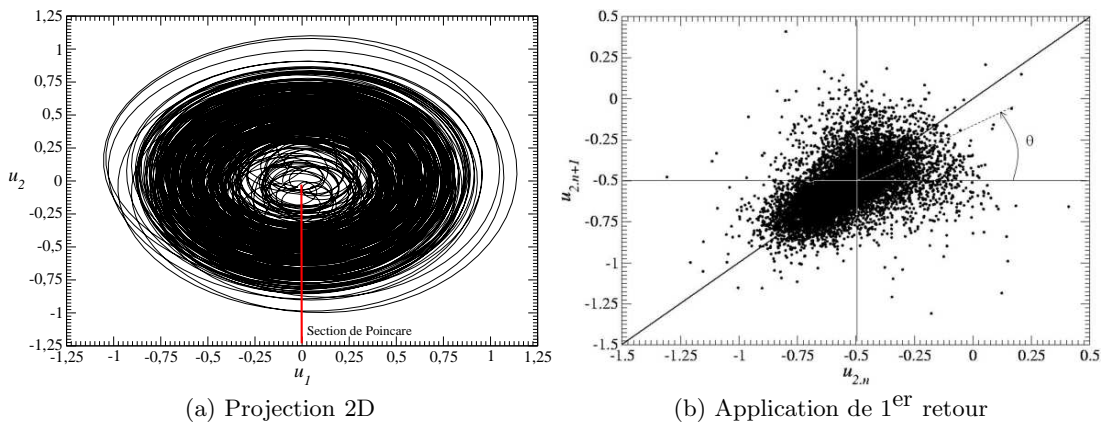


Fig.2. Portrait de phase construit sur les deux premières composantes principales de la matrice des retards, construite sur le signal LDV, et application de premier retour dans la section de Poincaré.

L'espace des phases du système est reconstruit à partir des composantes principales de la dynamique obtenues par une décomposition orthogonale propre de la matrice des retards [4]. La dimension de corrélation, d_c , du portrait de phases est évaluée à 4,2 à partir d'un algorithme de Grassberger-Proccacia [5], ce qui donne pour limite supérieure $d_e = 10$ pour la dimension de l'espace de plongement, d'après le critère de Takens. C'est une dimension trop élevée pour pouvoir étudier de façon approfondie une éventuelle structure déterministe de la dynamique sous-jacente. Il est néanmoins possible d'étudier la dynamique du système en considérant le sous-espace défini par les deux premières composantes principales de la dynamique (Fig. 2a). Une section de Poincaré

$$II = \{u_2 \in \mathbb{R} \mid u_1 = 0, \dot{u}_1 > 0\}, \quad (1)$$

est construite : un nuage de points est observé, ce qui signifie que le tore, s'il existe pour d'autres valeurs des paramètres, est déjà déstabilisé. Le portrait conserve une réminiscence d'une structure toroïdale mais est organisé autour d'une structure plus complexe. L'application de premier retour (Fig. 2b) ne permet pas

d'identifier une dynamique déterministe. Comme il l'a été montré dans le cas d'un jet [6], une structure toroidale peut cependant s'étudier avec une application de premier retour angulaire, construite sur la position angulaire θ_n du $n^{\text{ème}}$ itéré de l'application de premier retour relativement à l'axe horizontal, avec pour centre le barycentre de l'application (Figure 2b). L'angle θ_{n+1} est alors tracé en fonction de θ_n . La fonction de densité de probabilité $P(\theta_n)$ résultante est représentée Fig. 3. On y voit que la dynamique

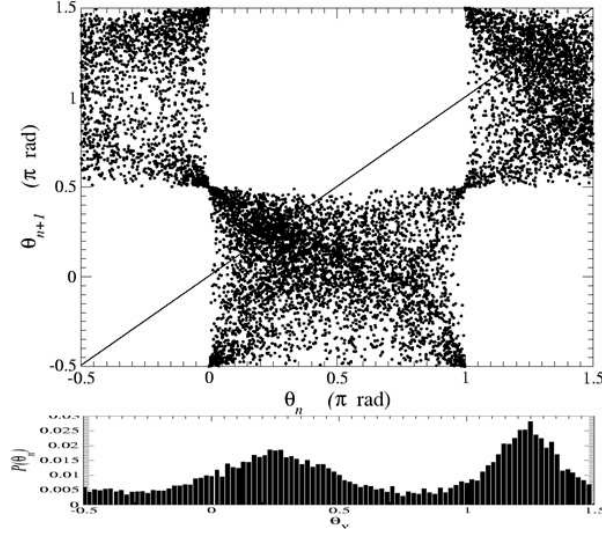


Fig.3. Application angulaire construite sur l'application de premier retour (en haut) et distribution angulaire de l'application de premier retour (en bas).

est essentiellement organisée autour de deux domaines angulaires, correspondant aux deux pics. Ces deux domaines sont situés au voisinage de la bissectrice, c'est-à-dire qu'ils entourent deux points de période 1 (des points proches de la bissectrice sont tels que $\theta_{n+1} \approx \theta_n$). Le premier pic de $P(\theta_n)$, centré sur $\theta_n = \pi/4$, correspond à des cycles de période moyenne 33.5 ms, de fréquence associée 29.9 Hz voisine de $f_2 = 31.0$ Hz. Le second pic, centré sur $\theta_n = 5\pi/4$, correspond à des événements de période moyenne de 42.3 ms, de fréquence associée 23.6 Hz très voisine de $f_1 = 23.2$ Hz. On peut ainsi séparer le domaine angulaire en deux sous-domaines, $\mathcal{I}_2 = [-\pi/4, 3\pi/4]$ associé au mode f_2 , et $\mathcal{I}_1 = [-\pi/2, -\pi/4[\cup]3\pi/4, 3\pi/2[$ associé au mode f_1 .

4 Dynamique symbolique

Afin d'étudier de manière plus approfondie la dynamique sous-jacente au système, une dynamique symbolique est définie sur l'application angulaire de premier retour (Fig. 2b). La $n^{\text{ème}}$ intersection avec Π est associée à un symbole selon que l'angle θ_n appartienne à l'intervalle \mathcal{I}_1 ou \mathcal{I}_2 , soit

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_n \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}] & \text{mode } f_2 \\ 1 & \text{si } \theta_n \in [-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}[& \text{mode } f_1 \end{cases} \quad (2)$$

Une telle partition ne donne pas de mode privilégié, puisque les deux modes sont équiprobables sur la série de mesures. Le nombre moyen d'oscillations par bouffée pour le mode f_2 (resp. f_1) est de 3,55 (resp. 3,85).

La probabilité pour qu'un mode soit entretenu sur un nombre i de cycles est donnée par la probabilité de trouver i symboles consécutifs identiques. Les courtes durées sont clairement privilégiées (de 1 à 2 oscillations sans transition) (Fig. 4).

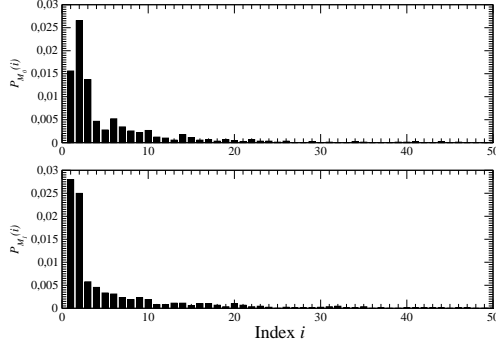


Fig.4. Distribution des durées de cycle (en unité de période) dans le mode f_2 (en haut), ou le mode f_1 (en bas). L'indice i représente le nombre de σ_n consécutifs se trouvant dans le même état 0 ou 1.

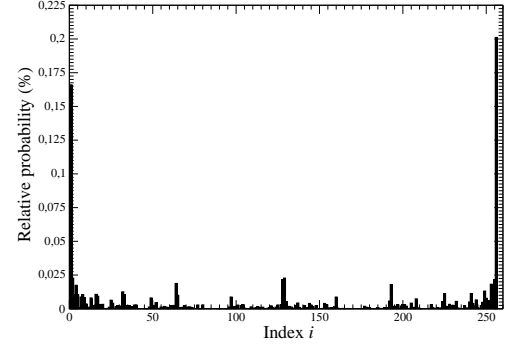


Fig.5. Probabilité des séquences à 8 caractères. L'indice i est associé à la séquence Σ_i (voir texte).

Une étude plus approfondie de la dynamique est possible à partir des séquences symboliques à p symboles consécutifs. Plus la séquence est longue, meilleure est l'analyse de la dynamique. La longueur p doit néanmoins rester raisonnablement basse pour que la statistique reste bien définie. Il a été montré qu'un bon choix pour p est tel que le rapport $q^p/N \approx 1\%$ [6], où $N \simeq 14300$ est le nombre de passages à travers Π et $q = 2^p$ est le nombre total de séquences possibles à p caractères. On se limite donc à des séquences de longueur $p = 8$, c'est-à-dire à 8 oscillations du signal. On définit ainsi 2^8 séquences Σ_i telles que $\Sigma_1 = 0000\ 0000$, $\Sigma_2 = 0000\ 0001$, ..., $\Sigma_{256} = 1111\ 1111$ et l'on étudie leur probabilité d'occurrence dans la section de Poincaré. Les deux séquences principales sont Σ_1 et Σ_{256} , qui correspondent respectivement chacune à 8 oscillations consécutives dans le mode f_2 et le mode f_1 . Les événements courts de 1 à 2 oscillations dans le même mode se répartissent sur d'autres séquences de probabilité moindre, mais leur contribution sommée est statistiquement prépondérante comme le suggère la Figure 4. On remarque par ailleurs que les séquences complémentaires, telle que $\Sigma_{65} = 0100\ 0000$ et $\Sigma_{192} = 1011\ 1111$, sont quasi équiprobables (séquences symétriques par rapport au couple $\{\Sigma_{128}, \Sigma_{129}\}$).

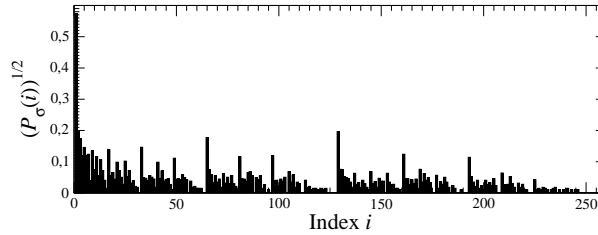


Fig.6. Fonction de densité de probabilité des séquences symboliques à 8 caractères construites sur les événements transitionnels.

Le codage peut également être réalisé sur les événements transitionnels :

$$\xi_i = \begin{cases} \text{N} & \text{si } \sigma_i\sigma_{i+1} = 00 \text{ ou } \sigma_i\sigma_{i+1} = 11 \\ \text{T} & \text{si } \sigma_i\sigma_{i+1} = 10 \text{ ou } \sigma_i\sigma_{i+1} = 01 \end{cases} \quad (3)$$

La nouvelle distribution de probabilité (Fig. 6) montre que la séquence la plus probable est $\Xi_1 = \text{NNNN NNNN}$, c'est-à-dire des séquences où le mode d'oscillation (f_1 ou f_2 indifféremment) est entretenu. Parmi les séquences les plus souvent réalisées, on trouve successivement :

$$\begin{aligned}
 \Xi_{129} &= \text{TNNN NNNN} \\
 \Xi_{65} &= \text{NTNN NNNN} \\
 \Xi_{33} &= \text{NNTN NNNN} \\
 \Xi_{17} &= \text{NNNT NNNN} \\
 \Xi_9 &= \text{NNNN TNNN} \\
 \Xi_5 &= \text{NNNN NTNN} \\
 \Xi_3 &= \text{NNNN NNTN} \\
 \Xi_2 &= \text{NNNN NNNT}
 \end{aligned}$$

qui sont des permutations circulaires d'une transition T isolée. C'est la signature de séquences correspondant à des régimes entretenus à f_1 ou f_2 supérieures à 8 oscillations. Les séquences suivantes

$$\begin{aligned}
 \Xi_{193} &= \text{TTNN NNNN} \\
 \Xi_{161} &= \text{TNTN NNNN} \\
 \Xi_{97} &= \text{NTTN NNNN} \\
 \Xi_{81} &= \text{NTNT NNNN} \\
 \Xi_{49} &= \text{NNTT NNNN}
 \end{aligned}$$

indiquent que lorsque la dynamique visite un mode, la transition à l'autre mode s'accompagne le plus souvent d'un retour rapide (1 à 2 oscillations au plus) au premier mode d'oscillation. On comprend aisément que des événements aussi brefs puissent passer inaperçus lors d'une analyse spectrale. Cela explique également les différences quantitatives observées par exemple sur les durées de vie moyennes des modes, entre cette étude et celle basée sur la démodulation complexe des séries LDV [3] (de l'ordre de 4 oscillations de base dans la présente étude contre une petite vingtaine dans la précédente).

On peut également s'intéresser aux trajectoires respectivement associées aux modes f_1 et f_2 , ainsi qu'à leurs transitions. Les oscillations à f_1 (Fig. 7a) sont d'amplitude supérieure aux cycles sur f_2 (Fig. 7b), ce qui va dans le sens de la distribution spectrale relative entre les deux modes (Fig. 1b), celui-ci ne résultant donc pas d'un taux de présence plus important d'un mode par rapport à l'autre (celui-ci étant de 1/2 pour chacun d'eux — voir plus haut). On peut également suivre la transition, sur un cycle d'oscillation, entre une orbite parcourue à la fréquence f_1 vers une orbite à f_2 (Fig. 7c) ou de f_2 vers f_1 (Fig. 7d). L'étude détaillée de ces trajectoires pourra fournir une base solide à la caractérisation de la physique de transition.

5 Conclusion

La compétition non-linéaire entre les deux modes d'oscillation, observée dans la couche de cisaillement de notre écoulement en cavité, est ici étudiée par le biais d'outils d'analyse empruntés à la théorie des systèmes dynamiques. A partir du portrait de phase obtenu dans le sous-espace à deux dimensions engendré par les deux premières composantes principales de la dynamique, l'application angulaire de premier retour dans une section de Poincaré permet de définir la dynamique symbolique du système. Deux symboles (0 ou 1) sont utilisés pour distinguer les modes en compétition. Il est très remarquable que les outils, souvent réputés ne pouvoir caractériser que des dynamiques à peu de degrés de liberté, puissent malgré tout conduire à des résultats aussi précis sur les caractéristiques du portrait de phase de séries temporelles obtenues à partir d'un écoulement réel complexe. Néanmoins, par construction, la partition σ_n exclut à priori de l'analyse les éventuels événements correspondants à une coexistence mutuelle, ou une absence simultanée, des deux modes. Une étude statistique des séquences symboliques révèle une dynamique sous-jacente en partie déterministe, en partie stochastique. Les transitions entre modes, qui se révèlent très fréquentes, se produisent sur des temps de l'ordre de une à deux oscillations du cycle de base, ce qui explique que des techniques spectrales puissent passer à côté de tels événements.

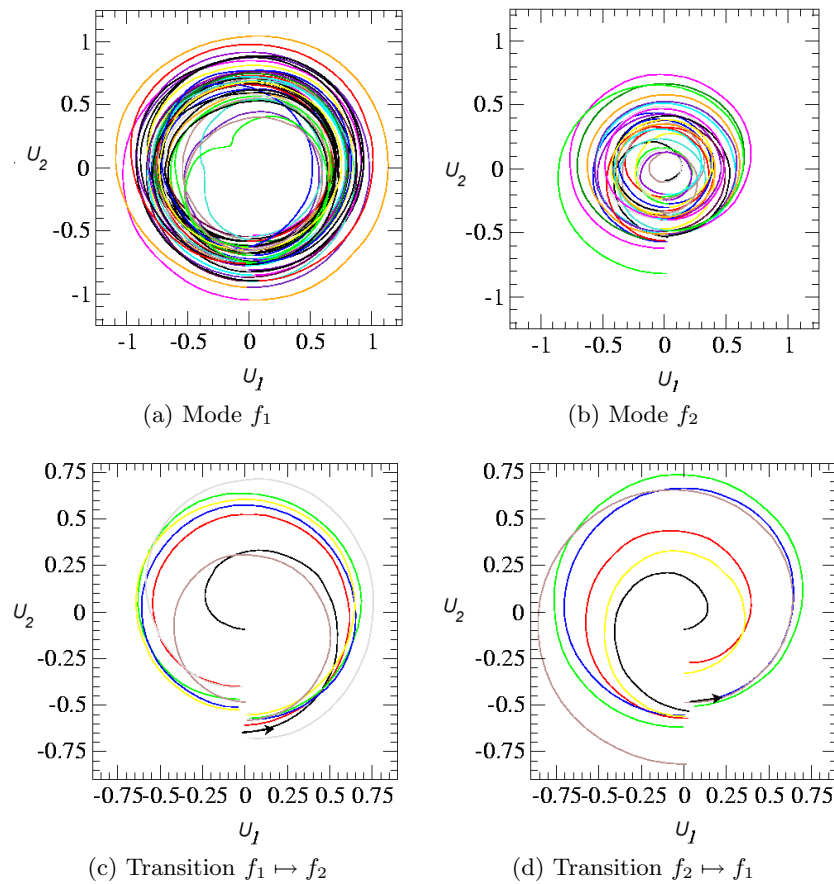


Fig.7. Trajectoires respectivement associées au mode f_1 (a), au mode f_2 (b), à la transition $f_1 \mapsto f_2$ (c) et à la transition $f_2 \mapsto f_1$ (d).

Références

1. D. ROCKWELL & E. NAUDASCHER, Self-sustained oscillations of impinging free shear layers, *Annual Review of Fluid Mechanics* **11**, 67-94, 1979.
2. R. PETHIEU, L.R. PASTUR, F. LUSSEYRAN & T.M. FAURE, Comptes-rendus de la Rencontre du Non Linéaire 2007, Ed. , pp.
3. L.R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T.M. FAURE, R. PETHIEU & P. DEBESSE, Quantifying the non-linear mode competition in the flow over an open cavity at medium Reynolds number, *Experiments in fluids* online first.
4. D.S. BROOMHEAD & G.P. KING, Extracting qualitative dynamics from experimental data, *Physica D* **20** 217-236, 1986.
5. P. GRASSBERGER & I. PROCCACIA, Characterization of strange attractors, *Physical Review Letters* **50** 346-349, 1983.
6. J. GODELLE & C. LETELLIER, Symbolic sequence statistical analysis for free liquid jets, *Physical Review E*, **62** (6), 7973-7981, 2000.

Vers où croissent les dendrites en solidification dirigée d'un matériau cristallin ?

A.Pocheau, J.Deschamps, & M.Georgelin

IRPHE, CNRS & Universités Aix-Marseille I & II, 49 rue Joliot-Curie, B.P. 146, Technopôle de Château-Gombert, F-13384 Marseille, Cedex 13, France
alain.pocheau@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. En solidification dirigée de matériaux cristallins, notamment en métallurgie, deux directions privilégiées sont en compétition pour orienter la direction de croissance des microstructures dendritiques : la direction du gradient thermique et une direction imposée par l'orientation du cristal. Ainsi, à mesure que la vitesse de solidification augmente, les directions de croissance tournent de la première vers la seconde. Ceci conditionne largement la forme et la dynamique des dendrites et donc les propriétés résultantes du matériau solidifié. Nous avons caractérisé expérimentalement cette rotation en détail puis découvert une symétrie importante dans son mécanisme : l'invariance d'échelle en nombre de Péclet. Ceci a conduit à la première identification de la forme de cette loi de rotation. L'origine de son invariance et son lien avec l'anisotropie des propriétés interfaciales restent à élucider.

Abstract. In the directional solidification of crystalline materials, in particular in metallurgy, two characteristic directions compete for setting the growth direction of dendritic microstructures : the thermal gradient direction and a direction fixed by the crystal orientation. As the solidification velocity increases, the growth direction then rotates from the former to the latter. This largely monitors the form and the dynamics of dendrites and thus the resulting properties of the solidified material. We have experimentally characterized this rotation in detail and discovered an important symmetry in its mechanism : a scale-invariance with respect to the Péclet number. This enabled us to find out the first identification of this rotation law. The origin of its invariance and its link to anisotropic interfacial properties remain to elucidate.

1 Introduction

A l'exception des produits formés par épitaxie ou par frittage, les matériaux qui nous entourent sont issus de la solidification d'une phase liquide sous gradient de température (solidification dirigée). Ceci est notamment le cas des matériaux naturels (roches) ou industriels (métaux, plastiques) pour lesquels la thermalisation induit naturellement la solidification. De manière générique, celle-ci procède par avancée d'une interface solide/liquide dont la forme plane s'avère instable au delà d'une vitesse d'avancée V_c souvent largement dépassée en pratique. L'interface se déstabilise alors en cellules puis en dendrites, ces dernières constituant de loin les microstructures les plus rencontrées dans les applications usuelles.

A priori, ces microstructures ne semblent devoir concerner que le transitoire de solidification des matériaux avant disparition finale des interfaces de changement de phase. En réalité, leur empreinte sur le matériau dure souvent sa vie entière. Ceci résulte de la différence de composition entre les phases liquide et solide qui induit un rejet de soluté le long de leurs interfaces. Il en découle ainsi une modulation de concentration de la phase solide à l'image des microstructures qui l'ont produites (microségrégation). De ce fait, la manière dont un matériau s'est solidifié, en particulier les formes et la dynamique des microstructures qui l'ont traversé, conditionne ses structures aux échelles micrométriques et donc les propriétés physiques qui y sont attachées (ductilité, fragilité, élasticité, conductivité thermique ou électrique).

Ce rôle essentiel des microstructures de solidification envers les propriétés des matériaux a stimulé de nombreuses études visant à comprendre leur genèse, leurs morphologies et leur dynamique. Pour autant, leur large diversité au sein d'un même matériau reste largement incomprise. Ceci provient de leur grande sensibilité aux orientations cristallines dont les effets n'ont été investigués que récemment par des études modèles. Ceux-ci se manifestent cependant dans les coupes de lingots par la variété de microstructures

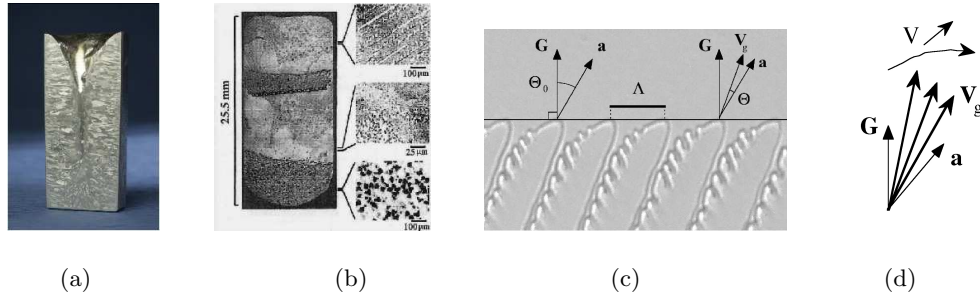


Fig.1. Macrostructures, microstructures de solidification et schéma des variables d'étude. (a) Coupe d'un lingot d'aluminium moulé. (b) Coupe d'un alliage eutectique Pb-Sn montrant les microstructures associées à chaque grain. (c) Variables de l'étude : gradient thermique \mathbf{G} , direction de croissance asymptotique \mathbf{a} , vitesse de croissance par rapport à la phase liquide \mathbf{V}_g , taille des dendrites Λ , angle d'ouverture $\Theta_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{G})$ entre \mathbf{a} et \mathbf{G} , angle $\Theta = (\mathbf{a}, \mathbf{V}_g)$ entre la direction de croissance \mathbf{V}_g et la direction asymptotique \mathbf{a} . (d) Rotation de \mathbf{G} à \mathbf{a} des directions de croissance dendritique \mathbf{V}_g induite par l'augmentation de la vitesse de solidification V .

associées aux différents grains et donc aux différentes orientations cristallines [Fig. 1 (a), (b)]. Outre le gradient de température, l'orientation cristalline s'avère donc un élément essentiel du développement des microstructures de solidification.

L'effet premier de l'orientation cristalline sur les cellules et les dendrites consiste à infléchir leur direction de croissance [1,2,3,4,5,6]. Ainsi, à basse vitesse de solidification V , les cellules croissent dans la direction du gradient de température \mathbf{G} . Cependant, au fur et à mesure de l'augmentation de V , la direction de croissance \mathbf{V}_g de leur pointe dans la phase liquide tourne pour se caler, à grande vitesse de solidification, sur une direction asymptotique \mathbf{a} induite par l'orientation cristalline [Fig. 1 (c), (d)]. Ce faisant, l'inclinaison de leur axe de croissance s'accompagne d'une asymétrie de plus en plus prononcée [Fig. 2 (a) à (i)]. Celle-ci est notamment marquée par la génération de branchements secondaires qui, à des vitesses modérées, parviennent à se développer jusqu'aux lignes de pointes dendritiques, augmentant ainsi la distance moyenne entre dendrites [Fig. 2 (a) à (i)].

Ainsi, à chaque vitesse de solidification, les dendrites croissent selon une direction *intermédiaire* entre la direction du gradient \mathbf{G} et une direction \mathbf{a} prescrite par le cristal, et avec une asymétrie et une taille globalement croissante avec l'inclinaison. L'objectif de cette étude expérimentale a été de documenter en détail cette évolution, puis d'en déterminer les propriétés physiques principales. L'analyse d'une centaine de données obtenues sur une quinzaine d'angles d'ouverture $\Theta_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{G})$ entre les deux directions fixes du problème a révélé l'existence d'une symétrie interne inattendue : une invariance d'échelle vis à vis d'un nombre de Péclet [5,6]. Celle-ci traduit une équivalence physique de toutes les dendrites pour ce problème et conduit à l'identification de la loi d'évolution de leurs directions de croissance.

La section 2 expose le dispositif expérimental et les méthodes utilisés pour cette étude. Les différents états observés sont discutés en section 3. La section 4 présente la mise en évidence de la symétrie interne des données. La signification et les implications de ces résultats sont finalement discutées en section 5.

2 Expérience

L'expérience vise à réaliser la solidification en lame mince de matériaux transparents pour des vitesses de solidification V , des tailles de structures Λ et des angles d'ouverture $\Theta_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{G})$ variables. La principale novation par rapport aux dispositifs expérimentaux existants concerne le pilotage de la variable Θ_0 , et donc de l'orientation relative du gradient de température \mathbf{G} et du cristal. Ceci a été réalisé en adaptant notre montage de manière à ouvrir la possibilité de rotation des éléments thermiques responsables du gradient de température. Pour rester compatible avec le dispositif mécanique existant, nous avons opté pour un prolongement des éléments thermiques par des éléments angulaires. Six angles de rotation répartis entre 0° et 45° ont été ainsi réalisés avec une précision de 0.1° .

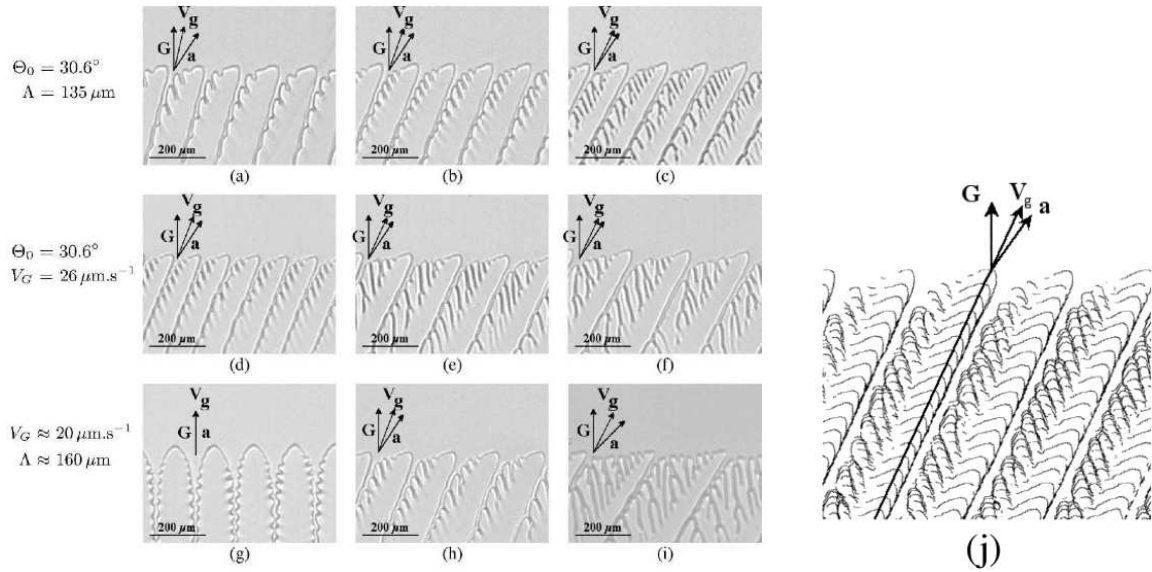


Fig.2. Directions de croissance. (a) à (i) : Variations des directions de croissance des dendrites avec la vitesse effective de poussée V_G (a,b,c), la taille des dendrites Λ (d,e,f) et l'angle d'ouverture Θ_0 (g,h,i). (a,b,c) : Accroissement de V_G . (a) $V_G = 8.7 \mu\text{m.s}^{-1}$, (b) $V_G = 17.3 \mu\text{m.s}^{-1}$, (c) $V_G = 43.3 \mu\text{m.s}^{-1}$. (d,e,f) : Accroissement de Λ . (d) $\Lambda = 112 \mu\text{m}$. (e) $\Lambda = 174 \mu\text{m}$. (f) $\Lambda = 214 \mu\text{m}$. (g,h,i) : Accroissement de Θ_0 . (g) $\Theta_0 = 0^\circ$, $\Lambda = 145 \mu\text{m}$. (h) $\Theta_0 = 30.6^\circ$, $\Lambda = 160 \mu\text{m}$. (i) $\Theta_0 = 41.9^\circ$, $\Lambda = 213 \mu\text{m}$. (j) Mesure de la direction de croissance par reconstruction de la trajectoire de la pointe dendritique dans le référentiel du laboratoire.

Pour déterminer les orientations cristallines, nous avons utilisé le fait qu'à haute vitesse de croissance, elles définissent, comme en solidification libre, la direction de croissance des dendrites. La sélection de mono-grains a été obtenue par fusion/solidification itérative des échantillons, chaque opération étant pilotée de manière à augmenter le domaine relatif à un grain présélectionné. L'observation à haute vitesse des mono-grains obtenus révèle des branchements dendritiques dirigés selon la normale à l'échantillon. Ceci signifie qu'un des axes principaux $[1, 0, 0]$ du cristal est aligné sur cette normale. Ceci est corroboré par l'absence de structure en algues à toute vitesse et tout angle d'ouverture Θ_0 .

Le mélange utilisé est un alliage de succinonitrile (SCN), un matériau plastique transparent dont la solidification par interface rugueuse mime celle des métaux. Une étude par RMN ne révèle qu'une liaison chimique différente de celles du SCN : une liaison éthylénique correspondant à l'éthylène ou à l'acrylonitrile. Les caractéristiques du mélange sont les suivantes : température de fusion du SCN pur $T_0 = 58^\circ\text{C}$, diffusivité solutale $D = 1.35 \times 10^3 \mu\text{m}^2.\text{s}^{-1}$, coefficient de partage $k = 0.3$, pente du liquidus $m = 1.72 \text{mol}.\%.\text{K}^{-1}$, concentration en soluté $c_\infty = 1.2 \text{mol}.\%$. Il est inséré par capillarité dans des échantillons larges de 45 mm, longs de 15 cm et d'épaisseur suffisamment fine, $50 \mu\text{m}$, pour n'autoriser qu'une seule couche de dendrite dans son épaisseur.

Les fours sont chauffés par une feuille de résistance et placés en regard de refroidisseurs composés de modules à effet Peltier. Ces éléments sont régulés électroniquement à 100°C et 10°C à une précision de $0,05^\circ\text{C}$ et séparés de 5mm pour donner un gradient thermique effectif de 140K.cm^{-1} . La translation de l'échantillon dans ce gradient est assurée par un moteur pas à pas de 6400 pas par tour entraînant une vis de pas 5mm couplée à un écrou à recirculation de roulement. La position de l'échantillon est mesurée par un dispositif interférométrique de type Michelson. Ceci permet d'optimiser le dispositif et d'attester de la constance de la vitesse de poussée à 3% près sur un tour de vis.

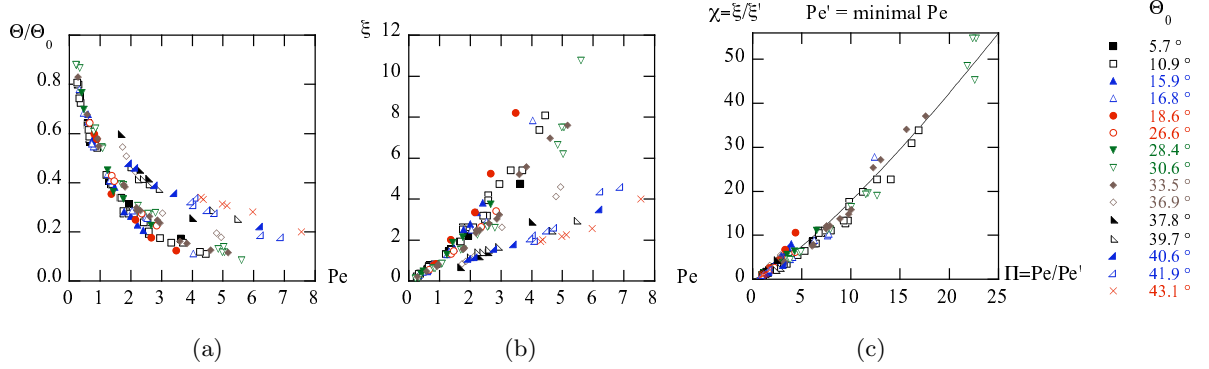


Fig.3. Variation des directions de croissance en fonction du nombre de Péclet Pe . Les symboles indiquent l'angle d'ouverture Θ_0 . (a) Angle réduit Θ/Θ_0 . (b) Position angulaire relative $\xi = (\Theta_0 - \Theta)/\Theta$. (c) Variables ξ et Pe renormalisées. Les facteurs de normalisation correspondent, à chaque angle d'ouverture Θ_0 , à un nombre de Péclet arbitraire Pe' (ici le minimum de la base de donnée) et à la position angulaire correspondante $\xi' = \xi(\Theta_0, Pe')$: $\Pi = Pe/Pe'$, $\chi = \xi/\xi'$. La courbe correspond à la loi d'échelle $\chi(\Pi) = \Pi^e$ avec $e = 1.25$.

3 Rotation des directions de croissance

Les directions de croissance des pointes de dendrites sont mesurées par reconstruction de leur trajectoire dans le référentiel de la phase liquide. Pour cela, des images successives de l'interface sont superposées avec un décalage correspondant à la distance de translation de l'échantillon [Fig. 2 (j)]. Les vitesses de poussée ont été variées de $V = 5$ à $50 \mu\text{m.s}^{-1}$ et les tailles de structures de $\Lambda = 70$ à $230 \mu\text{m}$. Notons que seule la translation de l'interface normalement aux isothermes compte ici, la translation tangentielle ne modifiant pas les températures. Ainsi, la vitesse de poussée effective à considérer sera ici la composante parallèle au gradient : $V_G = \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}/G$.

La figure 2 montre l'évolution des directions de croissance, des tailles et des branchements dendritiques lorsque l'une des variables V_G , Λ ou Θ_0 est augmentée. Un accroissement de vitesse ou de taille conduit ainsi la direction de croissance à se rapprocher de la direction asymptotique \mathbf{a} . Ceci va de pair avec un accroissement des branchements dendritiques, notamment de ceux qui se pérennisent entre deux pointes de dendrites et qui conduisent ainsi à un accroissement de la taille dendritique Λ . Le même effet est constaté pour une augmentation de l'angle Θ_0 .

Un effet systématique des variations de V_G ou de Θ_0 sur les formes de dendrites est ainsi visible. Cela conduit à s'interroger sur l'existence d'une caractéristique analogue sur les directions de croissance : Comment ces directions tournent-elles de \mathbf{G} vers \mathbf{a} lorsque V_G ou Λ augmentent ? Comment dépendent-elles de Θ_0 à V_G et Λ fixés ? Leur évolution dépend-elle de caractéristiques spécifiques ou présente-t-elle des caractéristiques communes ? La réponse à ces questions appelle à une étude quantitative large et systématique, puis à une analyse dédiée des données.

4 Symétrie et équivalence

La figure 3a expose les directions de croissance normalisées Θ/Θ_0 en fonction du nombre de Péclet $Pe = V_G \Lambda / D$. On y observe un faisceau de courbes paramétrées par Θ_0 . Ceci confirme la dépendance de Θ en Pe [4] mais montre également de larges variations avec Θ_0 . Pour comparer les évolutions de ces courbes, il est judicieux de considérer la position relative ξ des angles de croissance Θ dans leur gamme possible de variation $[0, \Theta_0]$. Celle-ci s'écrit $\xi = (\Theta_0 - \Theta)/\Theta$ et correspond au rapport entre les angles formés par la direction de croissance avec \mathbf{G} ou \mathbf{a} : $\xi = (\mathbf{V}_g, \mathbf{G})/(\mathbf{a}, \mathbf{V}_g)$. La figure 3 (b) montre alors des courbes croissant avec Pe dans une gamme devenue $[0, \infty[$. Curieusement, leurs évolutions ne pointent aucun nombre de Péclet caractéristique. En particulier, aucune période, aucun extremum local ni aucun point d'inflexion ne s'en dégage. Cela conduit à s'interroger sur l'existence ou l'absence de nombre de

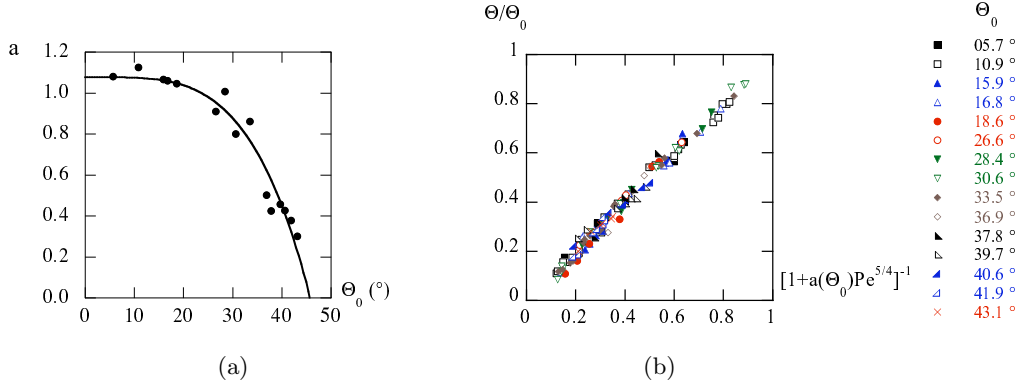


Fig.4. Loi d'orientation issue de la loi d'échelle $\xi(\Theta_0, Pe) = a(\Theta_0)Pe^e$ avec $e = 1.25$. (a) Préfacteur $a(\Theta_0)$ et ajustement à une constante près à un monôme de plus bas degré. (b) Loi d'orientation (1). Ordonnées Θ/Θ_0 ; abscisses $[1 + a(\Theta_0)Pe^{1.25}]^{-1}$.

Péclet caractéristique et donc, sur la pertinence d'une invariance d'échelle vis à vis de Pe . Pour tester cette hypothèse, une méthode canonique consiste à effectuer des changements d'étalons et donc d'échelle sur Pe et ξ puis à analyser les variations obtenues. Pour cela, nous introduisons, à chaque Θ_0 , un nombre de Péclet arbitraire $Pe \equiv Pe'$, la valeur de ξ correspondante $\xi' \equiv \xi(\Theta_0, Pe')$ et les variables relatives ainsi obtenues $\chi = \xi/\xi'$, $\Pi = Pe/Pe'$. En prenant pour Pe' les nombres de Péclet les plus petits de notre base de donnée, on observe alors une *superposition* surprenante de toutes les données [Fig. 3 (c)]. Poursuivant l'étude à d'autres valeurs de Péclet tout aussi arbitraires (les nombres de Péclet maximaux ou médians de notre base de donnée ou encore une valeur fixe arbitraire), nous obtenons la *même* superposition et sur la *même* courbe : les directions de croissance respectent une invariance d'échelle vis à vis de Pe , quelque soient les valeurs de V_G , Λ ou Θ_0 considérées.

Ce résultat montre que la variable χ , a priori dépendante de Θ_0 , Pe' et Π ne dépend en fait que de Θ_0 et de Π et même, finalement, que de Π uniquement : $\chi \equiv \chi(\Theta_0, Pe', \Pi) = \chi(\Theta_0, \Pi) = \chi(\Pi)$. Cette réduction du nombre de variable est synonyme d'invariance vis à vis de Pe' et de Θ_0 , c'est à dire d'invariance d'échelle vis à vis de Pe et d'indépendance vis à vis de Θ_0 .

L'invariance d'échelle, correspond à une symétrie profonde qui sélectionne des relations spécifiques. Pour les déterminer, considérons deux étalons Pe'_1 , Pe'_2 et les variables relatives ξ et χ correspondantes :

$$\Pi_1 = \frac{Pe}{Pe'_1} ; \chi_1(\Theta_0, \Pi_1) = \frac{\xi(\Theta_0, Pe)}{\xi(\Theta_0, Pe'_1)} ; \Pi_2 = \frac{Pe}{Pe'_2} ; \chi_2(\Theta_0, \Pi_2) = \frac{\xi(\Theta_0, Pe)}{\xi(\Theta_0, Pe'_2)}$$

En écrivant $\chi_1(\Theta_0, \Pi_1) = [\xi(\Theta_0, Pe)/\xi(\Theta_0, Pe'_2)] \times [\xi(\Theta_0, Pe'_2)/\xi(\Theta_0, Pe'_1)]$ et en notant que $Pe'_2/Pe'_1 = \Pi_1/\Pi_2$, on obtient : $\chi_1(\Theta_0, \Pi_1) = \chi_2(\Theta_0, \Pi_2) \chi_1(\Theta_0, \Pi_1/\Pi_2)$. L'invariance d'échelle permet alors d'identifier les deux fonctions $\chi_1(\Theta_0, \cdot)$, $\chi_2(\Theta_0, \cdot)$ à une fonction commune $\chi(\Theta_0, \cdot)$ qui vérifie ainsi :

$$\forall \Theta_0, \forall x, \forall y ; \chi(\Theta_0, x) \chi(\Theta_0, y) = \chi(\Theta_0, xy)$$

La solution de cette équation fonctionnelle, non partout discontinue, est une loi de puissance $\chi(\Theta_0, x) = \chi(\Theta_0, 1) x^{e(\Theta_0)}$. Or, par définition, $\chi(\Theta_0, 1) = 1$, et par constatation [Fig. 3 (c)], $e(\Theta_0)$ est indépendant de Θ_0 : $e(\Theta_0) = e$. Ceci conduit à $\chi(\Theta_0, \Pi) = \Pi^e$, puis à $\xi(\Theta_0, Pe) = a(\Theta_0)Pe^e$ avec un préfacteur a dépendant de Θ_0 , et finalement, à $\Theta/\Theta_0 = [1 + a(\Theta_0)Pe^e]^{-1}$.

En ajustant la fonction $\chi(\Pi) = \Pi^e$ à l'ensemble des courbes, nous obtenons $e = 1.25$ [Fig. 3 (c)]. En ajustant alors, à chaque Θ_0 , les fonctions $a(\Theta_0)Pe^e$ aux courbes $\xi(\Theta_0, Pe)$ [Fig. 3 (b)], nous obtenons les valeurs des préfacteurs $a(\Theta_0)$ sur lesquels nous ajustons empiriquement, à une constante près, un monôme de plus bas degré : $a(\Theta_0) = 1.08[1 - (\frac{\Theta_0}{45.8^\circ})^4]$ [Fig. 4 (a)]. L'ensemble conduit à la loi d'évolution des directions de croissance :

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{1}{1 + 1.08[1 - (\frac{\Theta_0}{45.8^\circ})^4]Pe^{1.25}} \quad (1)$$

composée d'une identification fondamentale en $Pe^{1.25}$ par invariance d'échelle et d'une identification empirique du préfacteur $a(\Theta_0)$.

5 Discussion

La symétrie d'échelle mise en évidence signifie que la *manière* dont les dendrites tournent de direction avec le nombre de Péclet est *la même pour toutes* : pour un accroissement α de Pe , toutes augmentent leur position angulaire relative ξ de la même quantité $\alpha^{1.25}$. Cette propriété, universelle dans notre base de donnée, est d'autant plus étonnante que les dendrites présentent des asymétries, des tailles et des cortèges de branchement très différents (Fig. 2). Aucune de ces particularités n'influe donc sur leur direction de croissance.

Ces propriétés inattendues sont d'autant plus précieuses que la compréhension du rôle de l'anisotropie est délicate. Il s'agit en effet d'une modulation minimale d'un sous-refroidissement capillaire ou cinétique lui-même très faible. Au total, sa traduction en terme de position correspond ainsi, au gradient $G = 140\text{K/cm}$ où nous avons mené nos expériences, à une variation de 40 nanomètres seulement. Pour comprendre le mécanisme de son spectaculaire effet sur les directions de croissance, les propriétés de symétrie mises en évidence autorisent à se concentrer au besoin sur les faibles vitesses ou sur les formes quasi-symétriques, dont les effets de rotation sont ainsi assurés d'être représentatifs de l'ensemble.

La variation empirique du préfacteur a avec Θ_0 peut s'interpréter comme une renormalisation des vitesses V_G ou des tailles Λ à chaque angle d'ouverture Θ_0 . La seconde interprétation fait écho à l'observation d'une augmentation moyenne des tailles avec Θ_0 , suite aux inclinaisons plus fortes des dendrites, facteur favorisant de l'immixtion de dendrites secondaires entre les pointes des dendrites primaires [Fig. 2 (g) à (i)]. Ceci va de pair avec une diminution du préfacteur a qui renormaliserait donc bien cet effet.

6 Conclusion

Lorsque la vitesse de solidification augmente, les directions de croissance des dendrites tournent de la direction du gradient thermique \mathbf{G} à une direction asymptotique \mathbf{a} fixée par l'orientation cristalline. Nous avons déterminé expérimentalement cette rotation avec le nombre de Péclet pour des orientations cristallines diverses représentées par une quinzaine d'angles $\Theta_0 = (\mathbf{a}, \mathbf{G})$. Ceci constitue la première étude exhaustive de ce problème dont l'analyse des données révèle une symétrie inattendue : une invariance d'échelle des directions de croissance vis à vis du nombre de Péclet. Celle-ci traduit une équivalence physique de toutes les dendrites vis à vis de cet effet de rotation, indépendamment de leurs caractéristiques propres d'asymétrie, de tailles ou de branchements. Son origine demeure cependant à élucider, en lien avec les propriétés d'anisotropie interfaciales, capillaires ou cinétiques, du système.

Références

1. R. TRIVEDI, *Applied Mechanical Review*, **43**, 79 (1990) — R. TRIVEDI, V. SEETHARAMAN & M. A. ESHELMAN, *Metall. Transactions A* **22**, 585 (1991).
2. P. OSWALD, M. MOULIN, P. METZ, J.C. GÉMINARD, P. SOTTA & L. SALLEN, *Journal de Physique III* **3**, 1891 (1993).
3. T. OKADA & Y. SAITO, *Physical Review E* **54**, 650 (1996).
4. S. AKAMATSU & T. IHLE, *Physical Review E* **56**, 4479 (1997).
5. J. DESCHAMPS, M. GEORGIN & A. POCHEAU, *European Physical Letters* **76**, 291-297 (2006).
6. A. POCHEAU, J. DESCHAMPS & M. GEORGIN, *JOM* **59**, 71-76 (2007).

Modèles POD pour la zone de paroi d'un canal turbulent

B. Podvin & L. Lorang

LIMSI-CNRS UPR3251, Université Paris-Sud, 91403 Orsay Cedex
podvin@limsi.fr

Résumé. Nous étudions comment la zone de paroi d'un canal plan turbulent peut être représentée par un modèle d'ordre réduit correspondant à une projection de Galerkin sur les modes POD de l'écoulement. Les hypothèses de dérivation du modèle sont confrontées à la simulation numérique. Les prédictions du modèle sont comparées aux résultats de la simulation. En particulier nous examinons dans quelles conditions le modèle présente un comportement apparemment chaotique, qualitativement semblable à celui observé dans la simulation

Abstract. POD-based low-order models are built for the wall layer of a turbulent plane channel flow. We use a Galerkin projection of the Navier-Stokes equations onto the POD modes to obtain a system of ordinary differential equations for the POD modes. The derivation assumptions are validated using results from direct numerical simulation. The model predictions are compared with the direct computation of the POD modes in the simulation. In particular, we wish to determine under which conditions the model behavior is apparently chaotic, and qualitatively similar to that of the true POD modes.

1 Introduction

Les modèles réduits fondés sur la POD ont été appliqués à une grande diversité d'écoulements, provenant aussi bien d'expériences que de simulations numériques. La POD (Décomposition Orthogonale aux valeurs propres) est une technique statistique introduite par Lumley [7] et appliquée pour la première fois à l'écoulement turbulent dans une conduite cylindrique. Aubry *et al* [1] ont été les premiers à construire un modèle d'ordre réduit pour la zone de paroi d'un canal plan turbulent. D'autres exemples de réduction de modèles incluent la couche de mélange plane [2], un jet plan turbulent (Gordeyev [3]), ou les structures transitionnelles de la couche limite de plaque plane Rempfer and Fasel [10] ou les écoulements de sillage.

Représenter correctement la dynamique dans la zone de paroi d'un canal turbulent s'avère difficile, en raison de plusieurs facteurs. L'un de ces facteurs est la diversité des échelles mises en jeu. Les filaments de vitesse longitudinale alternativement rapides et lents, les 'streaks' s'étendent typiquement sur plusieurs centaines d'unités de paroi. Leur séparation transverse est bien définie et s'établit autour d'environ 100 unités de paroi. Les structures vorticales alignées avec l'écoulement sont en général caractérisées par des dimensions plus restreintes.

Un autre facteur est la complexité du mécanisme par lequel les diverses structures présentes dans la zone de paroi se génèrent et interagissent entre elles. Diverses théories ont été proposées, telles que celle de Waleffe [12,13], ou celle de Jimenez and Pinelli [5]. Notre point de vue ici est différent. Plutôt que de proposer une étiologie des structures cohérentes, nous utilisons l'existence de ces structures comme point de départ et cherchons à reproduire leur dynamique à l'aide d'une troncature acceptable des équations de Navier-Stokes. Une représentation de ces structures spatiales est fournie par la POD et un modèle pour l'évolution de ces structures peut être obtenu en projetant les équations de Navier-Stokes sur la base des fonctions POD. La dynamique prédite par le modèle est alors comparée aux résultats de la simulation numérique. L'article est organisé comme suit : dans une première partie, nous présentons les outils de la simulation numérique et de la POD. Dans une seconde partie, nous présentons quelques principaux résultats de l'intégration des modèles, que nous comparons à la simulation numérique. Nous présentons ensuite une conclusion.

2 Outils numériques

2.1 La simulation numérique directe

Nous utilisons un code de simulation numérique directe pour calculer l'évolution de l'écoulement dans un canal plan turbulent. Le code est semblable à celui de Kim, Moin et Moser [6] et a été décrit dans [8]. Le code est un code spectral avec des modes de Fourier dans les directions horizontales (notées x et z) et des modes de Chebyshev dans la direction normale à la paroi (notée y). On note respectivement u, v, w ou u_1, u_2, u_3 . Les équations sont avancées en temps avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour les termes non-linéaires et un schéma de Crank-Nicolson pour les termes linéaires. Les conditions aux limites sont périodiques dans les directions horizontales et verticales. On définit un nombre de Reynolds macroscopique à partir de la vitesse au centre du canal U et de la demi-hauteur du canal Re et un nombre de Reynolds de paroi où la vitesse de référence est la vitesse de friction à la paroi. Les unités de référence faisant intervenir la vitesse de friction sont notées avec un $+$. Nous utilisons 96x65x96 modes (avant dealiasing). Les dimensions horizontales du domaine sont $(L_1, L_3) = (4\pi, 4\pi/3)h$ ou $(L_1+, L_3+) = (2380, 750)$. Les statistiques de la turbulence ont été calculées et comparées à celles de la simulation de Kim, Moin and Moser [6]. L'accord observé est tout à fait satisfaisant.

2.2 Les modèles réduits POD

La POD est une technique statistique qui vise à identifier les mouvements organisés le mieux corrélés. Une introduction complète à la POD peut être trouvée dans Holmes, Lumley and Berkooz [4]. L'idée est de décomposer le champ de vitesse comme la superposition de structures spatiales dont l'amplitude varie avec le temps. Dans les directions horizontales, les modes POD sont les modes de Fourier de sorte que la décomposition du champ de vitesse peut être directement effectuée dans l'espace de Fourier. Dans tout ce qui suit la POD est appliquée à la fluctuation du champ de vitesse. On a ainsi

$$u_{lk}^i(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{lk}^n(t) \phi_{lk}^{in}(y) \quad (1)$$

où

- u_{lk}^i est la i -ième composante du champ de vitesse dans l'espace de Fourier
- le mode POD $a_{lk}^n(t)$ représente l'amplitude du n -ième mode POD. Sa moyenne est nulle et sa variance vaut $\lambda_{lk}^n = \langle |a_{lk}^n(t)|^2 \rangle$.
- λ_{lk}^n est la n -ième valeur propre POD : elle contient l'énergie du n -ième mode POD associé au vecteur d'onde (l, k) .
- ϕ_{lk}^{in} est la i -ième composante de la n -ième structure spatiale POD. Par construction, les structures spatiales sont orthonormales : $\int \phi_{lk}^{in} \phi_{lk}^{*jm} dy = \delta_{nm}$

La POD est appliquée à la zone de paroi $0 < y+ < 70$ d'un canal turbulent, en utilisant environ 500 échantillons répartis sur $2500U/h$. On s'intéresse ici exclusivement à la partie fluctuante du champ de vitesse. On notera u_{lk} pour \hat{u}_{lk} afin d'alléger les notations.

Les modes POD sont obtenus en projetant le champ de vitesse sur la structure spatiale correspondante dans la zone de paroi.

$$a_{lk}^n(t) = \int_{y=0}^{y=70+} u_{lk}^j(y, t) \phi_{lk}^{*jn}(y) dy \quad (2)$$

3 Modèles d'ordre réduit

3.1 Caractéristiques des modèles

Nous utilisons la projection de Galerkin pour obtenir les équations d'évolution pour les modes POD (amplitudes temporelles des structures spatiales). La première étape consiste à sélectionner une troncature. On notera respectivement N_x, N_y et N_z le nombre de modes retenus dans les directions x, y et z . Le nombre total de modes sera donc $N_x N_y N_z$.

Puisque nous nous limitons à un nombre de modes relativement petit ($O(100)$), il est nécessaire de modéliser les transferts d'énergie aux modes non résolus. Ces transferts sont représentés de manière très simple en s'appuyant sur une hypothèse de Heisenberg [1]. Un paramètre α caractérisant l'intensité du transfert aux petites échelles, intervient donc dans le modèle. Ce paramètre peut être calculé à partir de la simulation numérique directe (voir [9] ou [11])

Le champ de vitesse moyenne est considéré ici comme une constante. L'influence de la zone externe, qui apparaît dans le modèle à travers un terme de pression, est négligée. La dimension du domaine correspondant au modèle, c'est-à-dire les modes les plus grands est de $l_x = 600$ et de $l_z = 400$, ce qui correspond environ à deux paires de structures cohérentes.

3.2 Comparaison avec la simulation numérique directe

Une question mal résolue concerne l'évaluation de la performance du modèle lorsque le comportement souhaité est chaotique. Etant donné la dimension réduite des modèles et le caractère simplificateur des hypothèses de construction de ces modèles, la comparaison doit nécessairement porter sur des grandeurs statistiques telles que les moments ou l'analyse fréquentielle des modes. La figure 1 représente la densité spectrale des modes POD dans la simulation numérique directe. La figure 2 montre que Les modes avec variation longitudinale sont convectés par le champ de vitesse moyenne et sont donc caractérisés par une fréquence correspondant à une vitesse de convection d'environ $U = 13u_*$, où u_* est la vitesse de friction. L'amplitude de ces modes varie sur une échelle plus longue correspondant aux échelles caractéristiques des modes sans variation longitudinale.

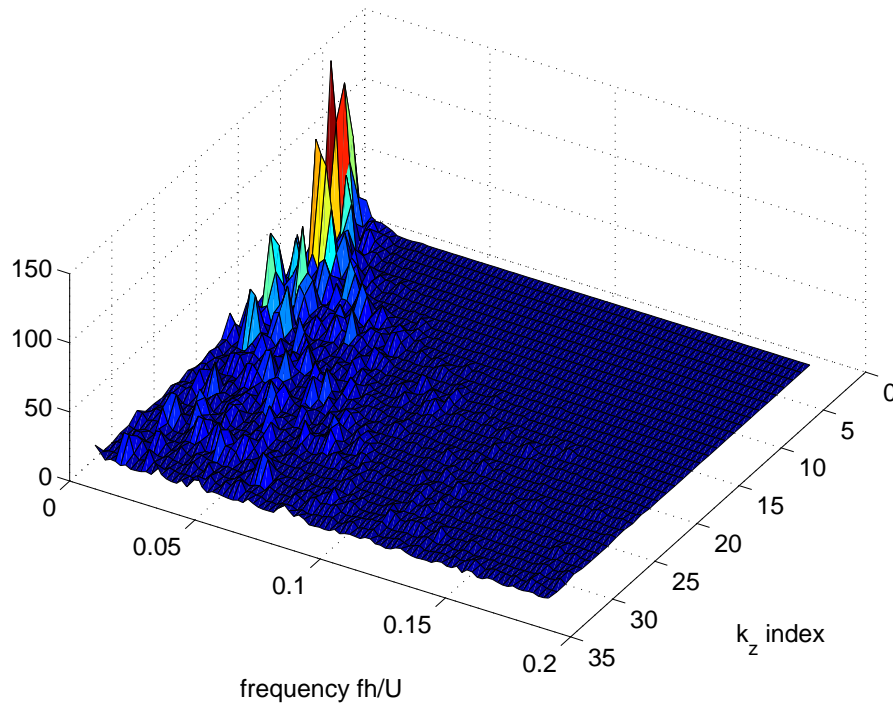


Fig.1. Densité spectrale des modes POD $Re[a_{0k}]/\lambda_{0k}^{1/2}$

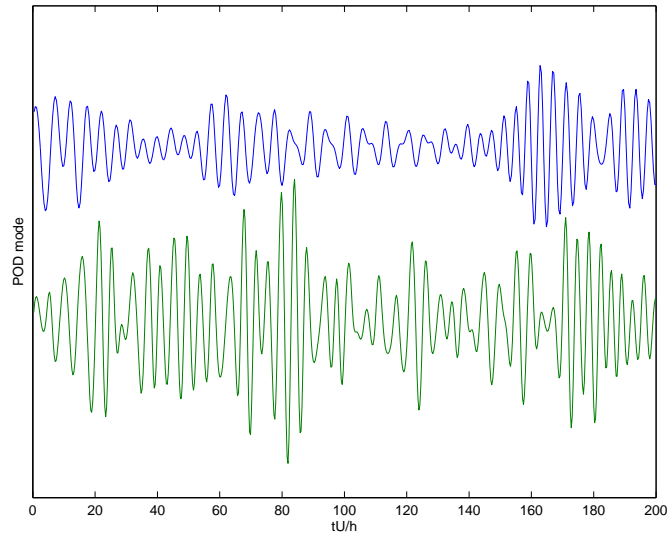


Fig.2. Mode avec variation longitudinale $Re[a_{11}]/\lambda_{11}$. (a) en haut : DNS (b) en bas : modèle avec $(N_x, N_y, N_z) = (12, 1, 12)$ et un paramètre α estimé à 0.8

3.3 Effet du nombre de modes normaux

Nous avons intégré des modèles avec respectivement 1 et 3 modes normaux. La figure 3 montre que la dynamique globale des modes est relativement inchangée. L'amplitude des modes d'ordre supérieur est importante que . On observe là un effet de troncature, puisque l'énergie ne peut être transmise aux modes d'ordre élevé et s'accumule dans les derniers modes inclus dans la troncature. On s'aperçoit en outre que les modes normaux sont correspondant à un même mode de Fourier sont couplés dans le modèle avec 3 modes normaux, ce qui n'est pas le cas dans la simulation.

4 Conclusion

Nous avons construit des modèles réduits POD pour la zone de paroi d'un canal plan turbulent à $R^* = 180$. Nous avons utilisé jusqu'à 12 modes de Fourier en x et en x , correspondant à des échelles spatiales respectives de 100 et 30 unités de paroi. L'influence du nombre de modes POD dans la direction normale a également été étudiée. Les prédictions des modèles ont été comparées aux résultats de la simulation numérique directe, de manière à la fois qualitative et quantitative. Un certain accord a été observé, mais nous avons également mis en évidence certaines divergences. L'importance de ces divergences, et par là la fiabilité des modèles d'ordre réduit, devra être évaluée en fonction de l'application envisagée.

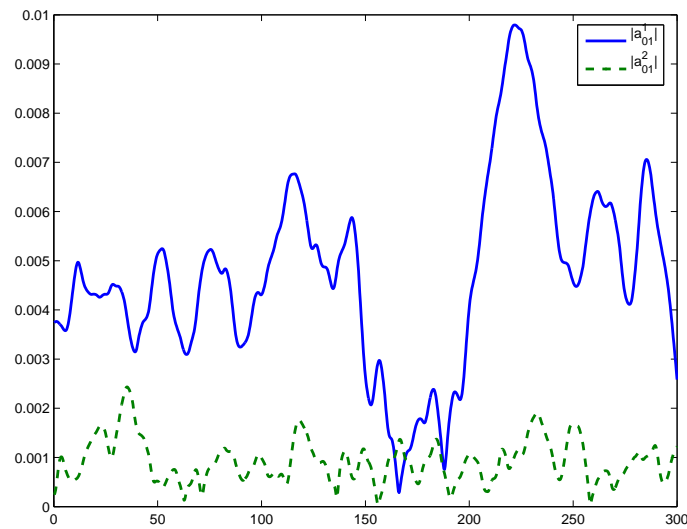


Fig.3. POD modes $Re[a_{01}^1]$ et $Re[a_{01}^2]$ dans la simulation numérique directe

Références

1. N. AUBRY, P. HOLMES, J.L. LUMLEY & E. STONE, The dynamics of coherent structures in the wall region of the wall boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **192**, 115–173, (1988).
2. J. DELVILLE, L. UKEILEY, L. CORDIER, J.P. BONNET & M. GLAUSER, Examination of large-scale structures in a turbulent plane mixing layer. Part 1 : proper orthogonal decomposition, *Journal of Fluid Mechanics*, **391**, 91–122, (1999).
3. S. GORDEYEV & F. THOMAS, Coherent structure in the turbulent planar jet. part 1. extraction of proper orthogonal decomposition eigenmodes and their self-similarity, *Journal of Fluid Mechanics*, **414**, 145–194, (2000).
4. P. HOLMES, J.L. LUMLEY & GAL BERKOOZ, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge University Press, (1996).
5. J. JIMENEZ & A. PINELLI, The autonomous cycle of near-wall turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **389**, 335–359, (1999).
6. J. KIM, P. MOIN & R. MOSER, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, **177**, 133–166, (1986).
7. J. L. LUMLEY, The structure of inhomogeneous turbulent flows, In A. M. Iaglom & V.I. Tatarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pp. 221–227. Nauka, Moscow, (1967).
8. B. PODVIN, On the adequacy of the 10-d model for the wall layer, *Physics of Fluids*, **13**, 210–224, (2001).
9. B. PODVIN & J. L. LUMLEY, A low-dimensional approach for the minimal flow unit, *Journal of Fluid Mechanics*, **362**, 121–155, (1998).
10. D. REMPFER & H. FASEL, Dynamics of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, 275, 1994.
11. T.R. SMITH, J. MOEHLIS & P. HOLMES, Low-dimensional models for turbulent plane couette flow in a minimal flow unit, *Journal of Fluid Mechanics*, **538**, 71–110, (2005).
12. F. WALEFFE, Hydrodynamic stability and turbulence : Beyond transients to a self-sustaining process, *Studies in Applied Mathematics*, pp. 319–343, 1995.
13. F. WALEFFE, Transition in shear flows : non-linear normality versus non-normal linearity, *Physics of Fluids*, **7**, 3060–3066, (1996).

Sur le déferlement des vagues

Y. Pomeau¹, M. Le Bars², P. Le Gal², T. Jamin², M. Le Berre³, Ph. Guyenne⁴, S. Grilli⁵ & B. Audoly⁶

¹ Los Alamos National Lab, CNLS, Los Alamos, NM 87545, USA

² IRPHE, 49 rue F. Joliot Curie, 13384 Marseille

³ Laboratoire de Photophysique Moléculaire, Bat.210, 91405 Orsay, France

⁴ Department of Mathematics, University of Delaware, Newark DE 19716-2553, USA

⁵ Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island, Narragansett, RI 02882, USA

⁶ L.M.M., Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris

legal@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Le déferlement des vagues peut-être considéré comme la manifestation d'une singularité dans la solution des équations du mouvement de l'interface. Alors que l'étude des lois d'échelles découlant de l'apparition d'une singularité pour le cas d'une dynamique à une seule dimension d'espace est connue, ces résultats sont étendus par une analyse théorique des équations de Burgers à deux dimensions puis des équations d'eau peu profonde. A partir de l'instant où apparaît le déferlement ($t=0$) la crête des vagues s'élargit transversalement en $t^{1/2}$ alors que l'épaisseur de la vague croît longitudinalement comme $t^{3/2}$. Ce comportement générique se déduit de considérations purement géométriques qui conduisent à une description dynamique du déferlement où les effets non-linéaires sont dominants. Nos prédictions théoriques sont alors confirmées par les simulations numériques des équations d'Euler en 3D pour le cas de vagues déferlant sur un fond incliné et par une étude expérimentale où les vagues sont initiées par un batteur et se propagent sur un fond horizontal.

Abstract. Wave breaking can be seen as the manifestation of a singularity in the solution of the equations for the dynamics of the fluid surface. The analysis of the scaling laws coming from the appearance of this singularity in a single spatial dimension is known. These results are first extended by a theoretical analysis of the two-dimensional Burgers equation then of the shallow water equations. From the onset of breaking ($t=0$) the crest of the wave extends laterally as $t^{1/2}$ together with the thickness of the wave that grows as $t^{3/2}$. This generic behavior is deduced from pure geometrical considerations and leads to a description of the dynamics of the breaking where non linear effects are dominant. Our theoretical predictions are then confirmed by numerical simulations of the 3D Euler equations for the case of waves that break on an inclined bottom and by an experimental study where waves are generated by a wave maker and progress on an horizontal bottom.

1 Introduction

Le déferlement des vagues a depuis toujours inspiré de nombreux artistes comme en témoignent « La grande vague au large de Kanagawa » de Hokusai ou encore les fameuses représentations de vagues peintes par Courbet. Mais les peintres ne furent pas les seuls à s'intéresser à ce phénomène. L'attention des physiciens a aussi été attirée par ce comportement singulier des vagues dont l'apparition est source de multiples phénomènes nouveaux et primordiaux pour la compréhension des interactions et des échanges entre océans et atmosphère comme la turbulence ou la création et la dispersion de gouttes ou de bulles. Notre analyse mathématique de la singularité qui pré-existe au déferlement, s'appuie sur la remarque de Poisson [1] en 1808 qui expliqua la résolution du problème de Cauchy pour l'équation suivante, à une seule dimension d'espace x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

L'équation (1) possède la solution implicite suivante

$$u(x, t) = u_0(x - ut), \quad (2)$$

où u_0 est la condition initiale du problème. Une autre manière d'écrire cette solution est de considérer l'inverse $f(\cdot)$ de la fonction u_0 . Dans ce cas l'équation (2) peut s'écrire :

$$f(u(x, t)) = x - ut, \tag{3}$$

Pour toutes conditions initiales suffisamment lisses, la première singularité de la fonction $u(x, t)$ qui apparaît dans le temps, se manifeste au point d'inflexion de $u(x, t)$. Ainsi, au voisinage de ce point - que l'on place en $x = u = t = 0$, grâce aux invariances par translation et par transformation Galiléenne - le développement de Taylor de $f(u)$ se réduit au simple terme du troisième ordre u^3 . Ainsi, l'équation universelle du déferlement à une seule dimension d'espace s'écrit :

$$0 = u^3 + x - ut. \tag{4}$$

L'examen de l'équation (4) montre que pour des temps courts, u se comporte comme $t^{1/2}$ et x comme $t^{3/2}$, ce qui permet à tous les termes de l'équation d'être à l'ordre $t^{3/2}$. Le coefficient de u^3 a été pris égal à (-1) par un choix judicieux des dimensions et de signe négatif pour que la singularité apparaisse pour des temps positifs. Ainsi comme le montre la figure 1, $u(x)$ est multivaluée pour une certaine plage d'abscisse x quand t est positif. Notons cependant que si un terme dissipatif est ajouté à l'équation (1) pour qu'elle ressemble à l'équation de Navier-Stokes de la dynamique des fluides, la solution n'est plus multi-valuée mais forme un choc qui régularise la solution de l'équation (1). Il est important de noter que cette régularisation n'est pas nécessairement pertinente dans le cas du déferlement des vagues à la surface libre d'un fluide.

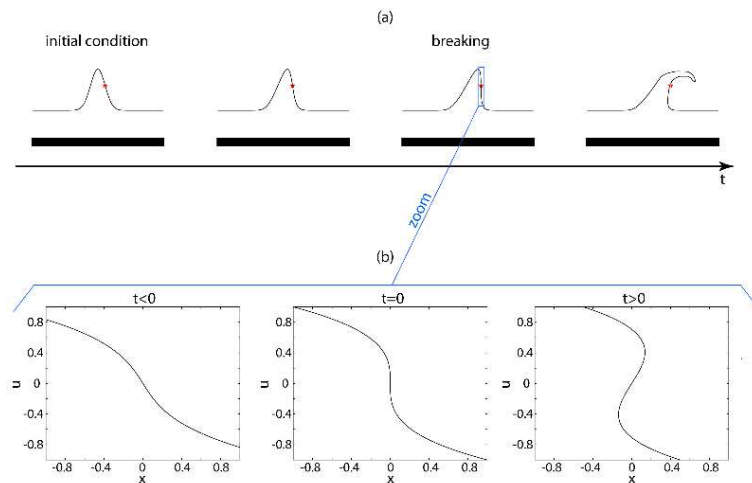


Fig.1. Illustration de l'apparition ($t < 0$) d'une singularité avant le déferlement de la vague. Pour $t > 0$, la solution présente un point d'inflexion et est multivaluée.

2 Etude de la singularité des équations de Burgers 2D

Cette approche standard du problème mathématique de la formation des chocs dans les solutions des équations hyperboliques non linéaires à une seule variable d'espace, peut-être étendue aux équations dans des espaces de plus grande dimensionalité. Si nous considérons le cas à deux variables d'espace x et y , une simple généralisation de l'équation (1) fournit un modèle pour l'apparition de singularités pour des fonctions dans le plan (x, y) . Ce modèle est en fait un modèle d'équations décrivant la dynamique d'un

fluide sans pression. Appelons $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ les deux projections cartésiennes de la vitesse, leurs dynamiques se décrivent par les équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Remarquons que des modèles proches de ces équations ont été proposés pour décrire la formation des grandes échelles de l'univers [2]. Ces équations possèdent une solution formelle très similaire à la solution du cas uni-dimensionnel (3) :

$$x - tu(x, y, t) = F(u, v), \quad (7)$$

et

$$y - tv(x, y, t) = G(u, v). \quad (8)$$

Nous remarquons alors, que le membre de gauche de ces équations est invariant par application de tout opérateur linéaire M qui transformerait le repère (x, y) en (\tilde{x}, \tilde{y}) . En effet, dans ce cas $(\tilde{u}, \tilde{v}) = M(u, v)$ est solution de l'équation correspondante. Bien-entendu, les termes de droite des équations sont modifiés de manière complexe, mais à cause de la linéarité de l'opérateur M , celui-ci ne modifie pas l'ordre des développements de Taylor de $F(u, v)$ et $G(u, v)$. Cette remarque va permettre par la suite de simplifier l'analyse par des changements adéquats de variables en orientant le repère de telle sorte que la singularité s'étende perpendiculairement à x . Comme pour le cas 1D, les fonctions $F(u, v)$ et $G(u, v)$ sont définies par les conditions initiales. Si celles-ci sont suffisamment lisses, (u, v) et (x, y) sont liées de manière univoque avant l'apparition de la singularité. Par contre, la solution des équations (5) et (6) devient singulière quand le Jacobien $J(t)$ de l'application de (u, v) vers (x, y) s'annule. Ce Jacobien s'écrit :

$$J(t) = \left(\frac{\partial G}{\partial v} + t \right) \left(\frac{\partial F}{\partial u} + t \right) - \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (9)$$

En utilisant les propriétés d'invariance par translation et par transformation Galliléenne, on peut toujours supposer que la première singularité apparaît pour $t = 0$ et aux coordonnées $x = y = 0$ avec $u = v = 0$ également. Ainsi une condition similaire à la condition de l'existence du point d'inflexion pour le problème 1D est que dans un voisinage de $t = u = v = 0$, le développement de Taylor de $J(t)$ ne comporte pas de termes linéaires en u et v :

$$J(t) = at + bu^2 + cv^2 + 2d uv + \dots, \quad (10)$$

Les constantes a, b, c et d doivent être obtenues des développements de Taylor de $F(u, v)$ et $G(u, v)$ près de l'origine. D'autre part, à $t = 0$ la matrice Jacobienne possède une valeur propre nulle car son déterminant s'annule. Grâce à la propriété évoquée plus haut et relative à l'orientation du repère, on peut toujours définir cette direction propre comme étant l'axe x . Ainsi, les coefficients du développement de Taylor des fonctions $F(u, v)$ et $G(u, v)$ doivent vérifier que $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ et $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ pour $u = v = t = 0$. Ceci montre alors que le premier terme du développement de $F(u, v)$ est $b'v^2 + d'u^3$ alors que celui de $G(u, v)$ est simplement $c'v$, où b' , c' et d' sont des coefficients provenant des conditions initiales de l'équation d'origine. De plus, parce que $G \sim v$, le terme vt peut être négligé dans l'équation (8) car t peut-être rendu à priori plus petit que la constante d' . L'équation (8) devient donc $y = d''v$. Si on remplace alors le terme proportionnel à v^2 dans l'équation (7), celle-ci devient après mise à l'échelle des coefficients et en ne retenant que les termes d'ordre $|t|^{3/2}$ (voir [3] ou [4] pour plus de détails) :

$$0 = u^3 + x - u(t - y^2). \quad (11)$$

Ainsi, cette équation, équivalente à l'équation (4) du cas uni-dimensionnel, généralise le comportement de la solution bi-dimensionnelle au voisinage de sa singularité et montre en particulier que celle-ci progresse

selon l'axe y , c'est-à-dire le long de la crête des vagues, en \sqrt{t} . Nous avons alors montré dans les articles [3] et [4], que les solutions des équations d'eau peu profonde se comportent au voisinage de la singularité d'une manière similaire aux équations (5) et (6). Nous exposerons donc dans les paragraphes suivants nos vérifications expérimentales et par simulation numérique des équations d'Euler 3D. Nous verrons alors que les lois d'échelles obtenues à partir de l'équation (11) sont effectivement suivies par les déferlements des vagues en eau peu profonde.

3 Analyse expérimentale des déferlements

Plutôt que de filmer des vagues le long d'une plage, afin de mieux contrôler les paramètres du déferlement nous avons préféré générer des ondes solitaires sur une table à eau munie d'un dispositif de visualisation par ombroscopie et d'un fond horizontal. La figure 2 présente le dispositif expérimental. L'épaisseur d'eau est de l'ordre de 2 cm et les vagues solitaires sont générées par le brusque mouvement vers le bas d'un batteur incliné par rapport à la surface. Les déformations de la surface de l'eau initialement plane provoquant une focalisation ou une défocalisation de la lumière traversant la nappe, la visualisation par ombroscopie des vagues et de leurs déferlements peut être enregistrée par caméra vidéo rapide cadencée entre 1 et 3.6 kHz. Les grandes dimensions de la table (longueur 2m et largeur 1.4 m) permettent de retarder l'interaction entre la vague solitaire générée par le batteur et les vagues réfléchies sur les bords équipés de bandes de mousse et ainsi d'éviter des effets parasites.

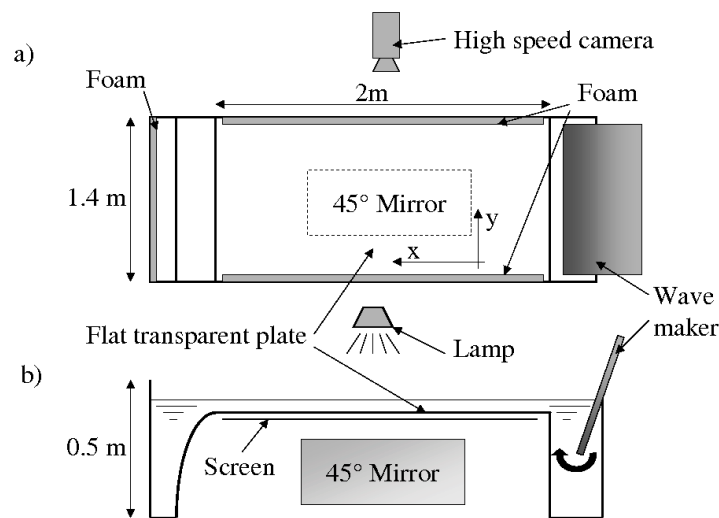


Fig.2. Montage expérimental, a) vue de dessus, b) vue de côté. Une onde solitaire est initiée par le mouvement rapide d'un batteur. Les déformations de la surface sont visualisées par ombroscopie et enregistrées par caméra rapide.

La Figure 3 montre un exemple de trois images consécutives d'un film d'une vague se propageant de la droite vers la gauche et déferlant au milieu de son parcours le long de la table. Ces images sont extraites d'un film enregistré à 2.8 kHz. Les tailles horizontales et verticales des images sont limitées par la taille du miroir. La vague y apparaît comme la juxtaposition d'une ligne sombre et d'une ligne claire formées par la focalisation et la défocalisation de la lumière par les déformations de la surface libre. Le déferlement de la vague est clairement observé sur les images b) et c) par la courbure de la ligne noire qui se déplace juste en avant de la crête de la vague. Les flèches de la Figure 3-b) montrent les deux singularités associées au déferlement et progressant le long de l'axe y . On peut alors superposer une série complète d'images :

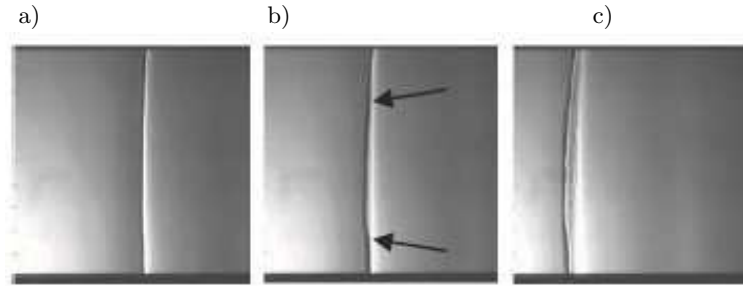


Fig.3. Ombroscopie du déferlement d'une vague enregistrée par caméra rapide. a) $t = 25ms$, b) $t = 100ms$, c) $250ms$. Les flèches indiquent les positions des singularités qui progressent le long de l'axe y . La taille de la fenêtre d'observation est de $32.5 \text{ cm} \times 32.5 \text{ cm}$.

comme la vague se déplace à vitesse constante dans la direction longitudinale, la variable x est alors directement proportionnelle au temps t . Afin d'améliorer le contraste de l'image obtenue, le gradient horizontal de chaque image est d'abord calculé. La Figure 4-a montre cette superposition où les images successives sont séparées de 3 ms. Le déferlement apparaît par la trace sombre qui possède bien, comme démontré par l'analyse précédente, une forme en \sqrt{t} . Cette loi d'échelle est finalement confirmée par la représentation logarithmique de la figure 4-b.

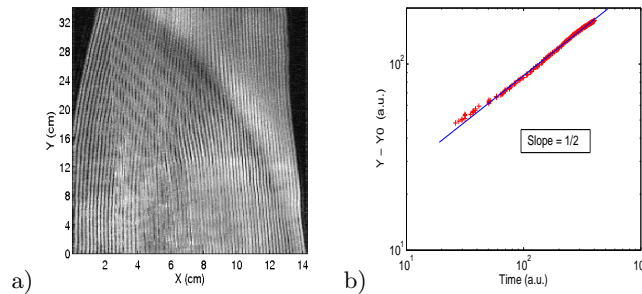


Fig.4. a) Trace du déferlement obtenue par superposition d'images séparées de 3 ms. L'axe horizontal est proportionnel au temps. La profondeur de la couche d'eau est de 17.4 mm et la hauteur de la vague est 8 mm . b) Représentation logarithmique de la progression du déferlement qui confirme la progression transversale en \sqrt{t} .

4 Analyse numérique des déferlements

Le système d'équations d'Euler 3D pour un fluide possédant une surface libre a été très récemment résolu numériquement afin de simuler les étapes initiales du déferlement tri-dimensionnel d'une onde solitaire [5]. Ce déferlement est provoqué par un changement de topographie du fond pour un écoulement en eau peu profonde. Les vagues se propagent vers les x positifs et la hauteur d'eau $z = -h_0$ est tout d'abord constante dans la première partie du canal. Le fond en pente débute à l'abscisse $x = 5.22$ avec une pente de $1/5$ dans la partie centrale et une modulation transverse de forme $sech^2(ky)$ (les variables non adimensionnées (x, y) étant mises à l'échelle par h_0 et le temps par $\sqrt{h_0/g}$). Avec un tel fond, la vague déferle en $y = 0$. Nous nous intéresserons ici aux résultats obtenus pour $k = 0.25$. Le profil 3D de la vague au temps $t = 1.378$ est représenté sur la Figure 5-a, juste avant que le jet ne plonge vers la surface sous-jacente. D'autre part, le contour apparent du domaine déferlé de la surface est également représenté dans l'espace (x, y, z) en Figure 5-b. A partir des projections de ce contour apparent sur le plan

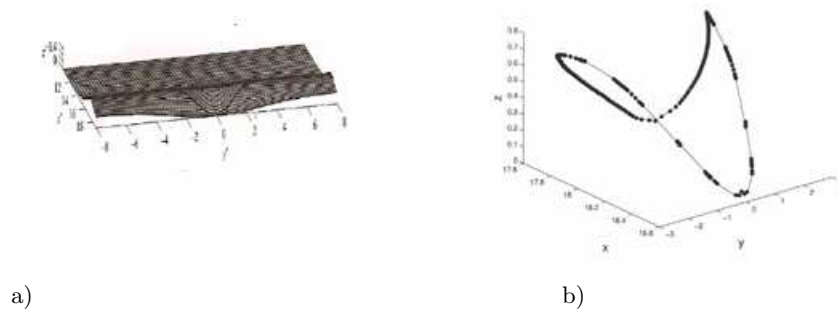


Fig.5. Simulation numérique 3D de la vague déferlante (a), représentation tri-dimensionnelle du contour du domaine déferlé au temps $t = 1.378$ (b).

(x, y) , il est aisé de mesurer son extension selon les deux axes x et y . La Figure 6 montre les évolutions longitudinale et transversale de la zone déferlée. Les deux courbes présentent un excellent accord avec les lois de puissance $t^{3/2}$ et $t^{1/2}$ obtenues théoriquement.

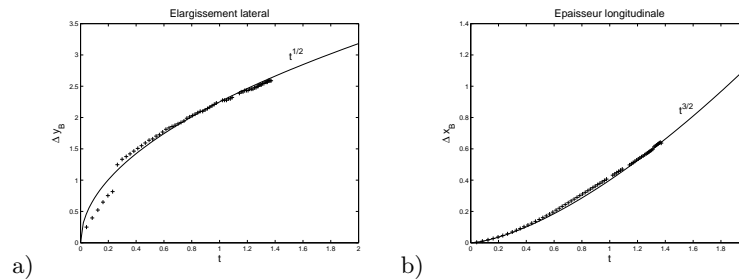


Fig.6. Résultats du calcul numérique. a) Extension longitudinale du domaine déferlé. b) Extension latérale du domaine déferlé.

5 Conclusion

Après avoir présenté l'analyse théorique de la solution de l'équation de Burgers sans viscosité dans le cas uni-dimensionnel, nous avons étendu cette théorie au cas bi-dimensionnel. L'équation maîtresse obtenue fait apparaître des lois d'échelles respectivement en $t^{3/2}$ et $t^{1/2}$ pour les extensions longitudinales et transversales des déferlements. Une extension de ces résultats pour les équations d'eau peu profonde (non présentée ici, mais détaillée dans [3] et [4]) montre que ces résultats peuvent être appliqués aux déferlements des vagues à la surface d'un fluide. Une analyse expérimentale ainsi que des simulations numériques tri-dimensionnelles attestent de la validité de nos prédictions théoriques.

Références

1. S.D. POISSON, Mémoire sur la théorie du son, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, (14), **7**, 319-392 (1808).
2. YA.B. ZEL'DOVICH, *Astrophysics*, **6** 319-335, (1970).
3. Y. POMEAU, T. JAMIN, M. LE BARS, P. LE GAL & B. AUDOLY, Law of Spreading of the crest of a breaking wave, *Proceedings of the Royal Society*, à paraître.
4. Y. POMEAU, M. LE BERRE, P. GUYENNE & S.T. GRILLI, Wave breaking and generic singularities of nonlinear hyperbolic equations, *preprint*.
5. P. GUYENNE & S. T. GRILLI, Numerical study of three-dimensionnal overtuning waves in shallow water, *Journal of Fluid Mechanics*, **547**, 361-388 (2006).

Habitude à la ventilation non invasive diagnostiquée par diagrammes de récurrences et entropies de Shannon

H. Rabarimanantsoa¹, C. Letellier¹, L. Achour², A. Cuvelier³, & J.-F. Muir³

¹ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

² ADIR Association — GRHV UPRES EA, Université de Rouen

³ Service de Pneumologie — CHU de Rouen

rabari@coria.fr

Résumé. Introduits pour visualiser les propriétés de récurrences des systèmes dynamiques, les diagrammes de récurrences sont communément interprétés par des indices statistiques. Parmi ceux-ci, l'entropie de Shannon dont une nouvelle définition a été donnée récemment afin qu'elle soit corrélée au plus grand exposant de Lyapunov, nous permet de quantifier objectivement la qualité mécanique des interactions patient-ventilateur lors d'une ventilation non invasive. Deux entropies de Shannon — S_P et S_T — respectivement calculées à partir de la pression aérienne et de la durée des cycles ventilatoires issus du circuit de ventilation ont permis de quantifier le taux d'asynchronismes patient-ventilateur et la variabilité respiratoire du patient. En traçant une carte définie sur ces deux entropies, il est alors possible de suivre l'habitude des patients lors des séances de ventilation et/ou de modifier les réglages du ventilateur jusqu'à l'obtention d'une qualité optimale des interactions patients-ventilateur, c'est-à-dire qu'il atteigne la zone optimale de la carte définie par deux entropies inférieures à 1, ce qui correspond à moins de 10% d'asynchronismes et une faible variabilité respiratoire.

Abstract. Introduced to visualize the recurrence properties of dynamical systems, the recurrence plots are usually interpreted by statistical measures. Among them, the Shannon entropy for which a new definition has been recently given to make it correlated with the largest Lyapunov exponent, allows us to quantify objectively the mechanical quality of patient-ventilator interactions during noninvasive ventilation. Two Shannon entropies — S_P et S_T — computed from the airway pressure and from the total duration of ventilatory cycles allow to quantify the rate of patient-ventilator asynchronisms and the patient respiratory variability, respectively. By tracing a map based on these two entropies, it is possible to follow patients' training during noninvasive ventilation and to modify the ventilator settings in order to reach the optimal zone of the map defined by the two entropies less than 1, that corresponds to a rate of asynchronisms less than 10% and a low respiratory variability.

1 Introduction

Une dynamique chaotique est une dynamique déterministe présentant des oscillations avec des fluctuations impossibles à prévoir à long terme. Pourtant, la trajectoire représentative d'une telle dynamique chaotique est bornée dans l'espace des phases, c'est-à-dire que, bien que ne se répétant jamais égale à elle-même, elle reste dans un domaine bien délimité de l'espace des phases. De ce fait, un comportement chaotique présente nécessairement des propriétés de récurrences — non triviales — qui permettent à la trajectoire de décrire des objets complexes mais structurés. Les diagrammes de récurrences ont été introduits par Eckmann, Kamphorst et Ruelle [1] pour étudier ces propriétés de récurrence. Ils se définissent comme une matrice carrée R_{ij} construite comme suit. Il est regardé si chaque point de la trajectoire $\{x_i\}_{i=1}^N$ est proche ou non d'un autre point x_j . Si la distance entre deux points est inférieure à un seuil prédéfini ϵ , les points sont dits récurrents et sont associés à un point noir ; dans le cas contraire, ils sont non récurrents et sont associés à un point blanc. Ceci se traduit par une matrice $N \times N$ telle que

$$R_{ij} = \theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|) \quad (1)$$

où $\theta(x_i)$ est la fonction de Heaviside.

Dans cette étude, l'entropie de Shannon (indice statistique des diagrammes de récurrences) sera utilisée pour quantifier les interactions patient-ventilateur en ventilation non invasive et pour suivre l'habitude des patients à leur ventilation.

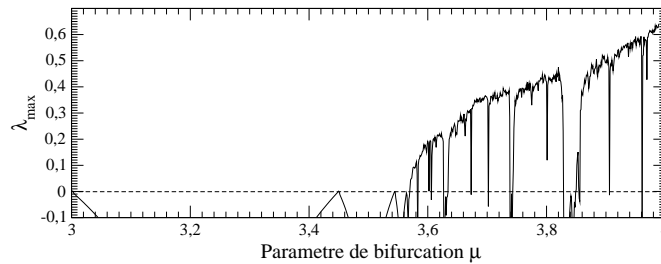
2 Diagrammes de récurrences et entropie de Shannon

De manière générale, l'entropie de Shannon se définit comme :

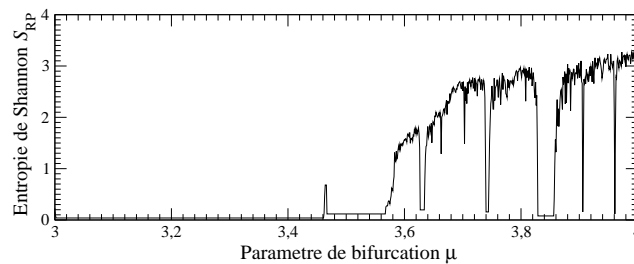
$$S = - \sum_{n=1}^N P_n \log(P_n) \quad (2)$$

où P_n désigne la probabilité d'observation d'un évènement n et N représente le nombre d'évènements différents considérés.

Par définition, une entropie quantifie le degré d'information apporté par le système, c'est-à-dire le degré de complexité de la dynamique. C'est pourquoi la conjecture de Pesin affirme que l'entropie de Kolmogorov doit croître au fur et à mesure que le comportement chaotique se développe. Dans les travaux précédents [2] utilisant l'entropie de Shannon, l'évènement n désigne un segment diagonal de n points récurrents. L'entropie ainsi définie quantifie le degré de récurrence —de périodicité— et non de complexité. Aussi, cette entropie est inversement proportionnelle au plus grand exposant de Lyapunov, puisque ce dernier est une bonne estimation de la complexité du système. Cette définition de l'entropie de Shannon est donc contraire à son sens usuel et ne vérifie pas la conjecture de Pesin. Pour pallier à ce désaccord, une nouvelle définition de l'entropie de Shannon a récemment été proposée [3] : il suffit de remplacer la probabilité d'observer des segments diagonaux de points récurrents par la probabilité d'observer des segments diagonaux de points **non** récurrents. L'entropie de Shannon ainsi redéfinie croît alors au fur et à mesure que la dynamique se développe comme cela est attendu (Fig. 1). La robustesse du calcul de l'entropie de Shannon est équivalente à celle du calcul du plus grand exposant de Lyapunov [3].



(a) Plus grand exposant de Lyapunov



(b) Entropie de Shannon redéfinie

Fig.1. Evolutions corrélées du plus grand exposant de Lyapunov λ_{max} et de l'entropie de Shannon S_{RP} en fonction du paramètre μ de la fonction logistique.

3 Applications à la ventilation non invasive.

La ventilation non invasive est aujourd'hui un moyen de traitement efficace pour soulager l'insuffisance respiratoire [4]. Elle consiste à apposer un masque au visage du patient et à lui relier un ventilateur qui lui

insufflera de l'air à chacun de ses efforts inspiratoires. Cependant, il arrive que le ventilateur ne réponde pas de façon adéquate à la demande du patient ; dans ce cas, nous sommes en présence d'asynchronismes et cela peut être néfaste au patient. Puisque le patient est au repos durant sa séance de ventilation, il doit respirer régulièrement, son besoin en oxygène étant constant. Des fluctuations du rythme respiratoire reflètent donc un conflit entre le patient et le ventilateur, traduisant un certain inconfort du patient. Le taux d'asynchronismes et la variabilité respiratoire sont donc essentiels pour la quantification de la nature des interactions patient-ventilateur dont dépend le succès de la ventilation.

L'asynchronisme le plus rencontré est le non déclenchement du ventilateur suite à un effort inspiratoire du patient. Il est reconnaissable à partir de données non invasives (débit et pression) issues du circuit de ventilation (Fig. 2a). Lors d'un cycle normal le ventilateur se déclenche et la pression au sein du circuit de ventilation atteint une valeur de pression inspiratoire pré réglée (IPAP) tandis que lors d'un cycle non déclenché, la pression reste à la valeur de la pression expiratoire pré réglée (PEEP) (Fig. 2b). Puisque la valeur de la pression détermine si le cycle est déclenché ou non, les diagrammes de récurrences à partir des maxima de pression atteintes au cours de chaque cycle servent à calculer une première entropie de Shannon, notée S_P . D'autre part, puisque la variabilité respiratoire joue un rôle important dans le confort du patient, les diagrammes de récurrences à partir de la durée totale de chaque cycle respiratoire servent à calculer une seconde entropie de Shannon, notée S_T . Le choix de ces deux variables — les maxima de pression et les durées totales des cycles respiratoires —, est d'autant plus pertinent puisqu'il a été montré qu'une estimation de l'entropie de Shannon à partir de variables discrètes (applications de premier retour à une section de Poincaré) est plus probante qu'une estimation à partir de variables continues (séries temporelles) [3].

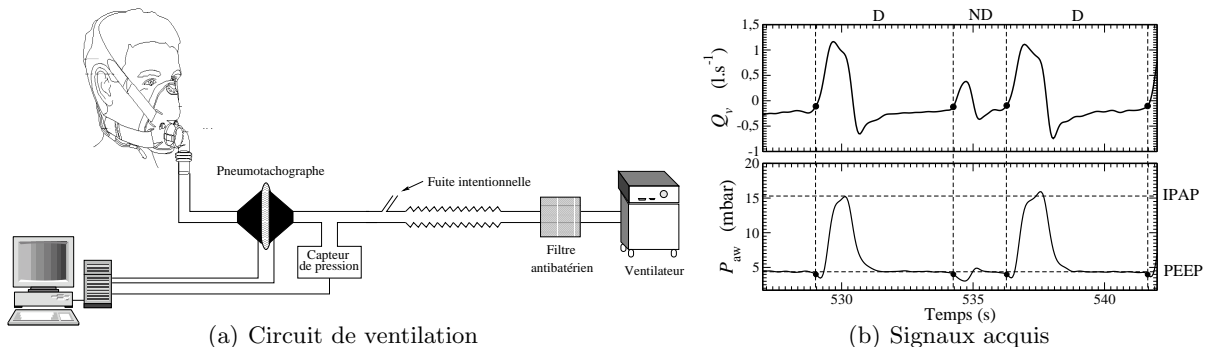
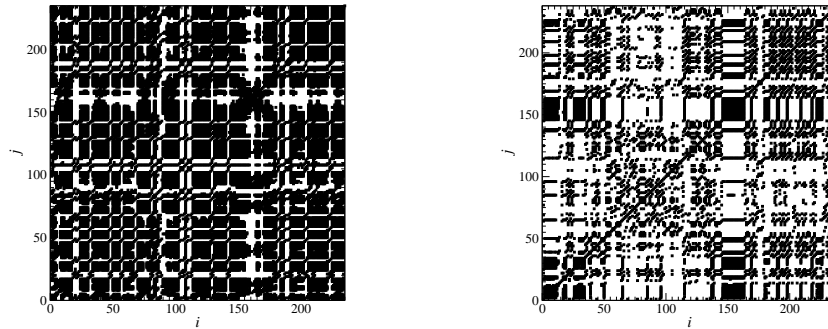


Fig.2. Les évolutions de débit et de pression (b) sont respectivement obtenues par le pneumotachographe et le capteur de pression insérés au sein du circuit de ventilation (a) dans le cas d'une ventilation à deux niveaux de pression (IPAP=16mbar et PEEP=4mbar). Présence d'un cycle non déclenché (ND) entre deux cycles déclenchés (D).

Un premier protocole d'étude a été réalisé [5] ; il impliquait douze sujets dont quatre patients souffraient d'une Broncho-Pneumopathie Chronique Obstructive (P_1 à P_4), quatre patients avaient un Syndrome d'Obésité Hypoventilation (P_5 à P_8) et les quatre derniers sujets étaient sains (S_9 à S_{12}). Chaque sujet était ventilé durant six séances avec une pression inspiratoire variant de 10 à 20 mbar, par palier de 2 mbar. Les entropies S_P à partir des maxima de pression et S_T à partir des durées totales des cycles respiratoires étaient ensuite calculées pour chaque séance.

Sur les 69 enregistrements de notre protocole, l'entropie de Shannon S_P s'est trouvée fortement corrélée au taux d'asynchronismes avec un coefficient de corrélation égal à 0,92. L'entropie de Shannon S_P estimée à partir des maxima de pression est donc un excellent quantificateur du taux d'asynchronismes [6].

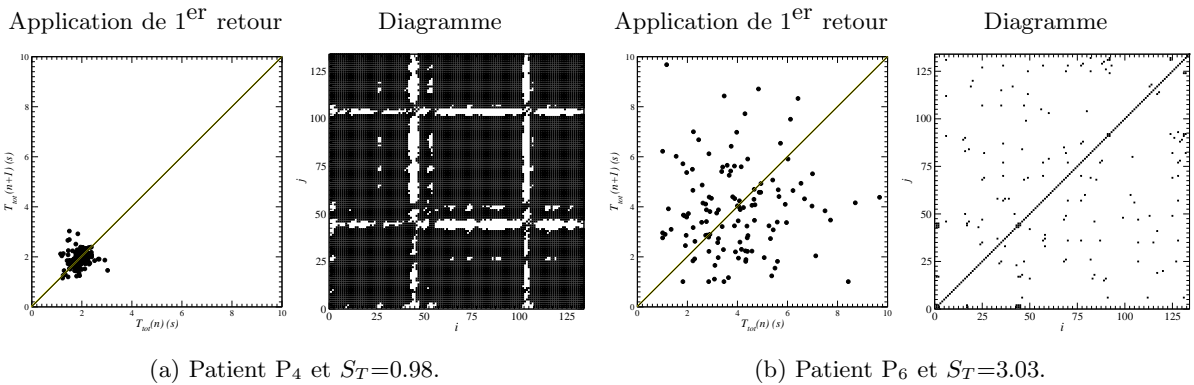
A partir des applications de premier retour sur la durée totale des cycles respiratoires (Fig. 4), il est facile de distinguer les deux cas : une variabilité respiratoire faible (Fig. 4a) et une variabilité respiratoire



(a) IPAP=10 mbar, ND=8%, $S_P = 0,91$ (b) IPAP=16 mbar, ND=31%, $S_P = 2,18$

Fig.3. Diagrammes de récurrences obtenus à partir des maxima de la pression aérienne pendant les cycles respiratoires enregistrés sur le patient P_5 souffrant d'un Syndrome d'Obésité Hypoventilation (pour deux niveaux d'IPAP différents). Plus le taux d'asynchronismes (ND) est élevé, plus le diagramme de récurrences présente de larges zones noires et plus l'entropie de Shannon S_P est élevée.

forte (Fig. 4b). Les diagrammes de récurrences construits sur la durée des cycles respiratoires qui leurs sont associés reflètent également ce constat (Fig. 4). L'entropie de Shannon S_T permet donc de quantifier la variabilité respiratoire (Fig. 4).



(a) Patient P_4 et $S_T=0.98$. (b) Patient P_6 et $S_T=3.03$.

Fig.4. Exemple du suivi de la régularité du cycle respiratoire pour un patient souffrant de Broncho-Pneumopathie Chronique Obstructive, P_4 , et d'un patient atteint de Syndrome d'Obésité Hypoventilation, P_6 . Les diagrammes de récurrences et l'entropie de Shannon S_T permettent de distinguer clairement la variabilité respiratoire (IPAP=16 mbar).

Ainsi, les entropies de Shannon S_P et S_T permettent de quantifier deux aspects des interactions patient-ventilateur : quantification du taux d'asynchronismes, et quantification de la variabilité respiratoire. Nous considérerons par la suite qu'une entropie de Shannon S_P inférieure à 1 correspond à un faible taux d'asynchronismes (<10%) et une entropie de Shannon S_T inférieure à 1 signifie une faible variabilité respiratoire.

4 Habitude à la ventilation non invasive

A partir des 69 enregistrements du protocole, les entropies S_T sont tracés en fonction des entropies S_P , conduisant à une carte reflétant les interactions patient-ventilateur (Fig. 5) [6,7].

Typiquement, quatre zones correspondant à quatre types d'interactions patient-ventilateur sont distinguées sur la carte. La première zone est celle définie par $S_P < 1$ et $S_T < 1$: ce sont des patients qui sont synchronisés au ventilateur et qui respirent régulièrement. C'est donc la zone où les interactions patient-ventilateur sont optimales. La seconde zone correspond à $S_P > 1$ et $S_T < 1$: les patients maintiennent leur rythme respiratoire régulier quel que soit le taux d'asynchronismes. Le patient respire à son rythme sans se préoccuper du déclenchement (ou non) du ventilateur. La troisième zone est définie par $S_P < 1$ et $S_T > 1$: ce sont des patients qui acceptent mal leur ventilateur malgré un déclenchement relativement correct du ventilateur. Ces patients ne sont pas habitués à la ventilation ou ils sont "stressés". Enfin la quatrième zone est définie par $S_T > 1$ et $S_T > 1$: les patients ont à la fois une grande variabilité respiratoire et un taux élevé d'asynchronismes. Ces patients ne sont pas habitués à la ventilation ou les réglages du ventilateur ne leur conviennent pas. Cette dernière zone est la plus critique pour le patient car la qualité mécanique de la ventilation est très mauvaise. Cette carte permet de suivre l'adéquation des paramètres pour les différentes séances de ventilation et de modifier les réglages du ventilateur afin que le patient atteigne la zone optimale.

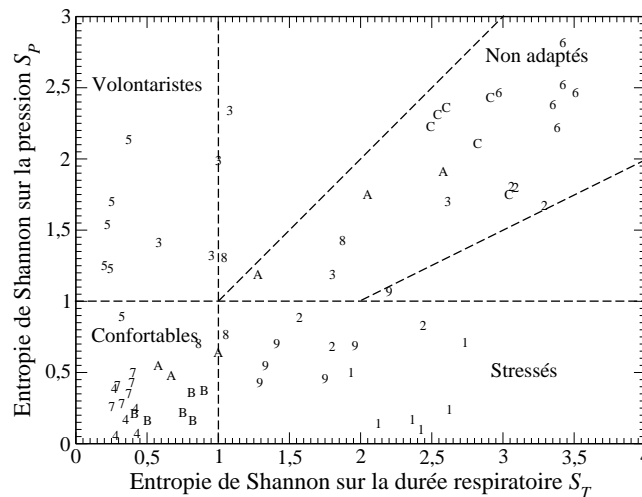


Fig.5. Entropie de Shannon S_P en fonction de l'entropie de Shannon S_T pour les 69 enregistrements du protocole. Les indices i (i de [1 ;9]) désignent le sujet P_i pour les 6 valeurs d'IPAP. Les lettres A,B et C désignent respectivement les sujets S_{10} , S_{11} et S_{12} .

Le phénomène d'habitude peut également être mis en évidence avec notre carte. Pour cela quatre sujets sains novices sont ventilés une fois par semaine, en gardant constant les réglages du ventilateur. Au fur et à mesure des séances d'habitude, le chemin suivi sur la carte est différent pour chaque sujet (Fig. 6). Le premier sujet S_1 n'atteint jamais la zone optimale en dépit des six séances d'habitude. Le sujet S_2 est situé directement dans la zone optimale dès la première séance et reste dans cette zone les séances suivantes. Les sujets S_3 et S_4 sont les cas les plus "intéressants" car, au fur et à mesure des séances, leur interaction avec le ventilateur s'améliore jusqu'à atteindre la zone optimale. Ces quatre exemples montrent qu'il existe une habitude à la ventilation non invasive, dépendant non seulement de la physiologie mais aussi de la psychologie (volonté de la personne). En effet, comme ce sont des sujets sains, la maladie ne peut expliquer l'inadéquation au ventilateur (cas du sujet S_1).

5 Conclusion

Les diagrammes de récurrences peuvent être utilisés pour caractériser les propriétés de récurrence dans les systèmes dynamiques, particulièrement dans le domaine de la biomédecine. Une nouvelle définition de

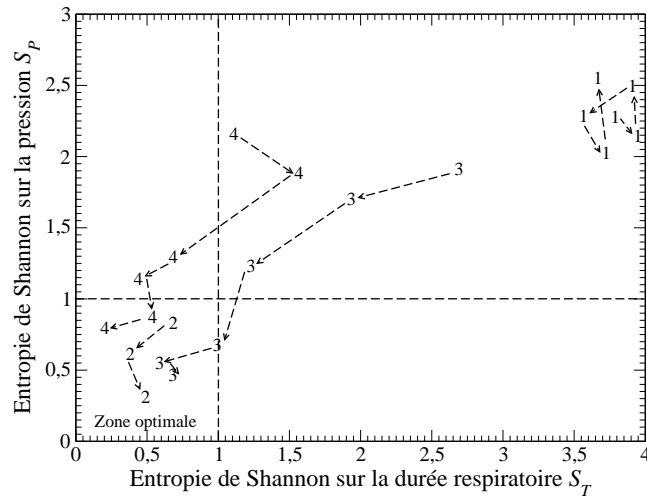


Fig.6. Entropie de Shannon S_P en fonction de l'entropie de Shannon S_T pour quatre sujets sains novices. Les indices i (i de $[1 ; 4]$) désignent le sujet S_i . Les flèches indiquent le passage d'une séance d'habituatation à la suivante. L'habituatation du sujet S_3 et S_4 est bien observée.

l'entropie de Shannon a été utilisée pour qu'elle puisse croître lorsque le chaos se développe, comme le suggère la conjecture de Pesin. En ventilation non invasive (traitement de l'insuffisance respiratoire), nous avons montré que cette approche offrait une caractérisation de la dynamique des interactions patient-ventilateur. En effet, la présence des asynchronismes et la variabilité du rythme respiratoire peuvent ainsi être finement suivies grâce à deux entropies de Shannon. A partir d'une carte définie par ces entropies, les médecins pneumologues possèdent maintenant des quantificateurs précis qui leur permettent d'ajuster les réglages du ventilateur et de mieux entraîner leur patient par le suivi du phénomène d'habituatation.

Remerciements

La bourse de thèse de H. Rabarimanantsoa est financée par ADIR Association.

Références

1. J.-P. ECKMANN, S. OLIFFSON KAMPHORST & D. RUELLE, Recurrence Plots of Dynamical Systems, *Europhysics Letters*, **4**, 973-977, 1987.
2. L. L. TRULLA, A. GIULIANI, J. P. ZBILUT & C. L. WEBBER JR., Recurrence quantification analysis of the logistic equation with transients, *Physics Letters A*, **223** (4), 255-260, 1996.
3. C. LETELLIER, Estimating the Shannon entropy : recurrence plots versus symbolic dynamics, *Physical Review Letters*, **96**, 254102, 2006.
4. M. VITACCA, F. RUBINI, K. FOLIO, S. SCALVINI, S.NAVA & N. AMBROSINO, Non invasive modalities of positive pressure ventilation improve the outcome of acute exacerbations in COLD patients. *Intensive Care in Medicine*, **19**, 450-455, 1993.
5. L. ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER, E. VÉRIN, J.F. MUIR, Asynchrony and cyclic variability in pressure support noninvasive ventilation, *Computers in Biology and Medicine*, **37**, 1308-1320, 2007.
6. H. RABARIMANANTSOA, L.ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER & J.F. MUIR, Recurrence plots and Shannon entropy for a dynamical analysis of asynchronisms in mechanical noninvasive ventilation, *Chaos*, **17**, 015113, 2007.
7. C. LETELLIER, H. RABARIMANANTSOA, L. ACHOUR, A. CUVELIER, J.F. MUIR, Recurrence plots for dynamical analysis of non-invasive mechanical ventilation, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **366**, 621-634, 2008.

Vitesses ioniques et instabilité d'une colonne de plasma magnétisé

C. Rebont, N. Claire, Th. Pierre, F. Doveil, S. Jaeger, A. Ajendouz, & A. Escarguel

CNRS UMR6633, LPIIM, Aix-Marseille Université, Campus Saint Jérôme, 13397 Marseille Cedex 20
 thiery.pierre@univ-provence.fr

Résumé. Les mécanismes de l'instabilité d'une colonne de plasma magnétisé sont étudiés en analysant l'évolution spatio-temporelle de la fonction de distribution des ions du plasma. Les mesures par sondes montrent que le mode instable correspond à une déformation elliptique en rotation avec des bras spiraux de la colonne de plasma. Ces vitesses ioniques indiquent une rotation différentielle du plasma.

Abstract. The instability of linear magnetized plasma is studied using spatiotemporal evolution of ion velocity distribution function. Langmuir probes measurements exhibit rotation of the column. The column elliptical column is surrounded by two spiral arms. The ion velocities show a differential rotation and a large change in the velocity the spirals.

1 Introduction

Le magnétoplasma d'Argon produit dans une colonne droite en champ magnétique constant par le dispositif Mistral présente des régimes instables, réguliers ou turbulents. Le transport anormal associé a été étudié en détail ces dernières années à la fois par des sondes électriques [1] et par imagerie ultra-rapide. Le contrôle du transport anormal a été réalisé en appliquant aux régimes faiblement turbulents les techniques du contrôle du chaos, réduisant notablement le transport à travers le champ magnétique [2]. Cependant, les modes analysés ont été souvent improprement caractérisés comme des ondes de dérive diamagnétiques [3]. Nous avons montré récemment que, dans la plupart des cas étudiés, ces instabilités se produisent à des fréquences, de 15 kHz supérieures à la fréquence cyclotronique ionique, de 6 kHz, et que, par conséquent, il ne peut pas s'agir d'ondes de dérive. Le travail présenté ici associe aux mesures par sondes la Fluorescence Induite par Laser (FIL) qui permet de déterminer avec une grande précision la fonction de distribution des vitesses ioniques dans l'instabilité. Le paramètre de contrôle de l'instabilité est le potentiel du collecteur placé en bout de colonne. Il contrôle le flux des électrons ionisants injectés dans la colonne et donc les gradients de densité. Le profil du champ électrique détermine une rotation en bloc ou bien différentielle du plasma. La force de Lorentz joue en plasma magnétisé le même rôle que la force de Coriolis dans les écoulements tournants [4]. Le paramètre de contrôle est ajusté de façon à obtenir un mode cohérent fortement nonlinéaire d'ordre $m=2$, correspondant à une déformation elliptique en rotation avec 2 bras spiraux de la colonne. A partir des données de la FIL, le champ de vitesse est calculé. Après avoir présenté le principe de fonctionnement de la FIL et le dispositif expérimental, les résultats sont exposés et discutés.

2 Principe de fonctionnement de la fluorescence induite par laser (FIL)

La FIL, voir l'article de Hill [6] repose sur deux principes l'effet Doppler et le pompage optique d'un atome ou d'un ion. Un faisceau laser, ($\lambda = 611.492nm$), excite un ion du niveau métastable $3d^2G_{9/2}$ vers un niveau a durée de vie courte, $4p^2F_{7/2}$. L'émission de fluorescence émise, par l'ion en se désexcitant vers le niveau inférieur, $3s^2D_{5/2}$, est alors enregistrée. La fluorescence, $\lambda = 460.957nm$, ainsi récupérée est proportionnelle au nombre d'ions excités par le laser donc au nombre d'ions métastables en résonance avec la fréquence du laser Comme les ions dans le plasma ne sont pas immobiles mais animés d'une

vitesse \vec{v} , ils perçoivent une fréquence laser décalée par l'effet Doppler. La pulsation perçue par les ions en fonction de leur vitesse est : $\omega' = \omega_l - \vec{k} \cdot \vec{v}$. Cette pulsation doit correspondre à la pulsation de la transition $1 \rightarrow 2$, ω_{12} . On associe donc la fréquence du laser à la vitesse de l'ion : $\omega_l = \omega_{12} + \vec{k} \cdot \vec{v}$. Pour obtenir dans le plasma la fonction de distribution en vitesse des ions métastables le long du faisceau laser, il faut balayer la fréquence laser pour couvrir l'ensemble des vitesses ioniques.

3 Dispositif expérimental

3.1 La définition temporelle et spatiale du diagnostic

Pour collecter la lumière de fluorescence, nous utilisons un objectif avec un filtre interférentiel centré sur la longueur d'onde de fluorescence. Une fente placée dans le plan image de l'objectif permet d'avoir une définition spatiale de 1cm, de l'ordre de ρ_i le rayon de Lamor des ions thermiques, le long du faisceau laser. La lumière est transmise à un photomultiplicateur à l'aide d'une fibre optique. Le signal du photomultiplicateur est traité par un analyseur multicanaux (MCS). Le MCS permet d'échantillonner les photons de fluorescence en se synchronisant avec le phénomène à étudier, qui doit donc être répétitif. Pour avoir un rapport signal (fluorescence) sur bruit (émission spontanée) suffisant, des cumuls sont effectués.

3.2 Le dispositif MISTRAL

Le dispositif est composé de deux chambres : une chambre source, où les électrons primaires ionisants sont produits à partir de 32 filaments et une colonne droite placée dans un solénoïde, dans laquelle les mesures sont faites à champ magnétique constant (Fig. 1).

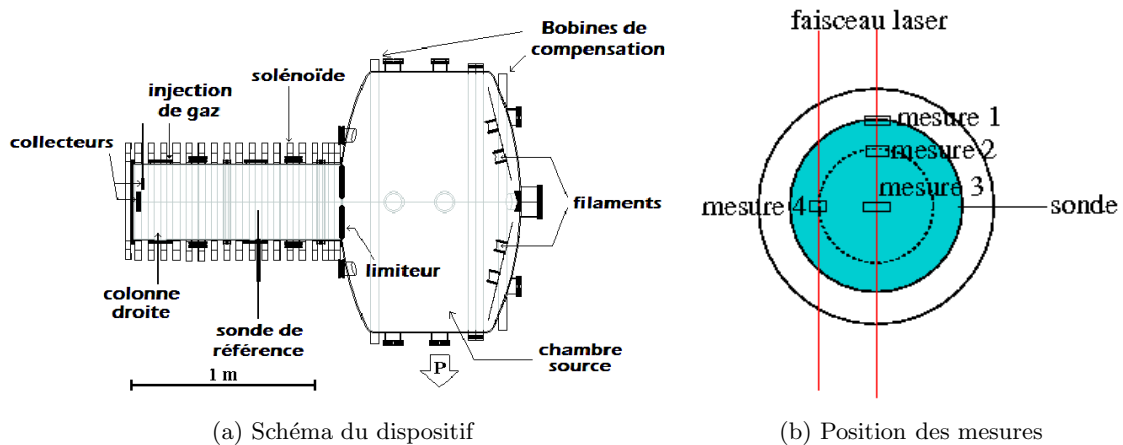


Fig.1. (a) Schéma de principe du dispositif MISTRAL. (b) Position des mesures par FIL et de la sonde de synchronisation dans une section droite de la colonne magnétique de plasma.

Les électrons primaires ionisants sont produits par émission thermoélectronique des filaments portés à une température supérieure à 2000K. L'anode recouvrant l'ensemble de la chambre source est constituée d'une grille sur laquelle est placée un ensemble d'aimant pour former une chambre multipolaire. Cette configuration permet d'augmenter le libre parcours moyen des électrons primaires, en les réfléchissant sur le champ magnétique. En polarisant l'anode par rapport aux filaments, les électrons sont accélérés pour que leur énergie soit suffisante pour ioniser le gaz d'Argon. Dans nos conditions expérimentales, un courant de 114A traverse les filaments chauffés sous 16V et la décharge est produite sous une tension de décharge de 50V et un courant de 7A. La colonne droite de MISTRAL mesure 1m de long pour un diamètre de 40cm. Le solénoïde qui permet le confinement du plasma par champ magnétique est constitué

de 20 bobines régulièrement espacées. Le champ magnétique uniforme peut varier de 0 à 30 mT. Dans notre cas, le champ magnétique est fixé à 16 mT.

La colonne droite est séparée de la chambre source par un diaphragme de 10 cm de diamètre et d'une grille séparatrice qui peut être polarisée. Au bout de la colonne se trouve un collecteur également polarisable. La tension du collecteur a été fixée à 20V et celle de la grille séparatrice à 4V. Nous travaillons en plasma d'Argon à une pression de 2.10^{-4} mbar.

4 Mesures et Résultats

Les précédents travaux réalisés sur la machine MISTRAL indiquent que la colonne de plasma est en rotation. Cette rotation a pu être mise en évidence aussi bien à l'aide de sondes que par imageries. Grâce à la FIL, les mesures précédentes peuvent être vérifiées par une analyse quantitative des vitesses ioniques. Les fluctuations de densité observées par une sonde placée au bord du plasma sont interprétées comme la rotation de la colonne de plasma à une fréquence de $15kHz$, déformée elliptiquement et possédant des bras spiraux le long du grand axe de l'ellipse, Figure 5. Nous allons voir que le mouvement ionique est plus complexe qu'une simple rotation en bloc du plasma. Nos quatre points mesures sont synchronisés à partir du signal d'une sonde placée au bord du plasma, à la limite radiale du diaphragme (voir Figure 1). Nous enregistrons, sur une période de rotation de la structure, 20 points correspondant à une définition temporelle de $5\mu s$. La Figure 2 montre le signal de sonde correspondant à la densité électronique. Les valeurs minimales correspondent à un maximum de densité se situant dans les bras spiraux.

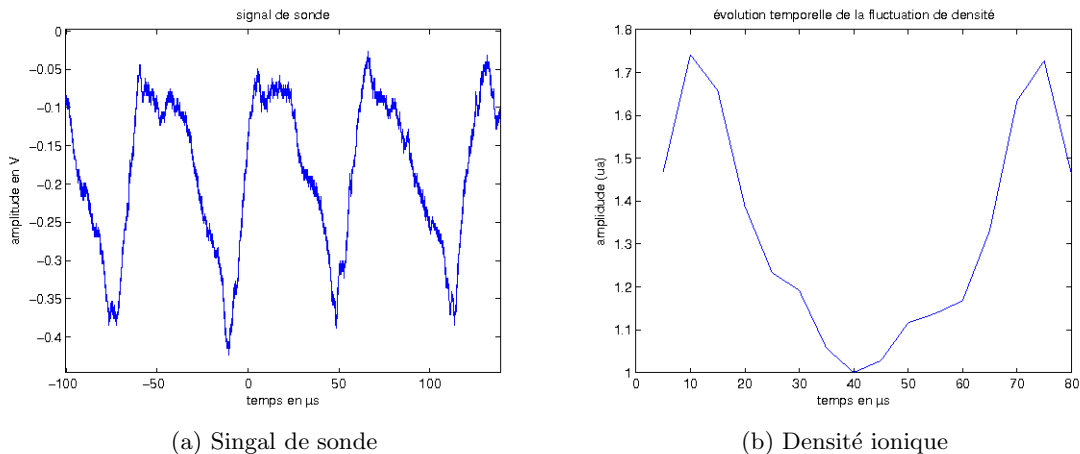


Fig.2. Signal de sonde au bord de la colonne de plasma et évolution temporelle de la densité ionique mesurée avec la FIL.

Sur la Figure 3, nous pouvons visualiser l'effet de la structure, sur l'ensemble des mesures,. La fluctuation des vitesses ioniques associée à la structure augmente avec la position radiale, la structure est plus importante au bord du plasma qu'au centre, où elle est quasiment nulle. Cette fluctuation en vitesse est également accompagnée d'une fluctuation en densité. A un rayon de 3cm, la densité ionique varie d'environ 30% (Figure 2). La différence du niveau fluctuation ionique et électronique s'explique par une légère différence de positionnement des deux types de mesures. Le phénomène que nous observons n'est donc pas seulement un phénomène de bord mais il correspond à une fluctuation dans la colonne de plasma également. Nous avons également aussi des mesures axiales des fonctions de distribution. Dans ce cas, aucune fluctuation en vitesse n'est observée, mais une fluctuation de la densité de l'ordre de 10% dans l'axe de la colonne à la même fréquence que la fréquence rotation, $15kHz$. Si une fluctuation de densité radiale est enregistrée. Elle s'accompagne obligatoirement d'une

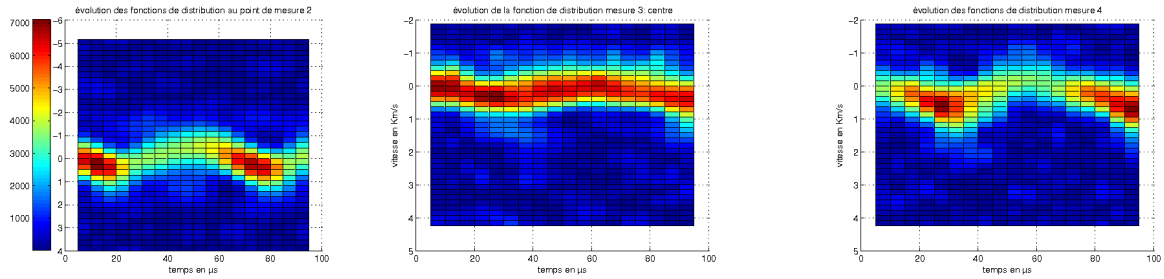


Fig.3. Evolution des fonctions de distribution en vitesse au cours du temps.

fluctuation longitudinale, la vitesse ionique ayant trois composantes : radiale et tangentielle dans la section droite de la colonne et longitudinale.

Dans la suite de notre étude, l'évolution du vecteur vitesse en deux dimensions pour un rayon donné est analysée, et le champ électrique en est déduit. Nous utilisons les mesures 2 et 4 enregistrées pour un même rayon. La mesure des vitesses ioniques au point 2 correspond à une mesure des vitesses radiales en ce point. Avec une hypothèse de rotation, nous considérons la mesure des vitesses ioniques le long du faisceau laser au point 4 comme la mesure des vitesses tangentielles au point 2 par rotation de $\frac{\pi}{2}$. La synchronisation temporelle est réalisée en juxtaposant les maximums de perturbation de densité ionique mesurés en 2 et 4. La Figure 4 montre les deux composantes, radiale et tangentielle, de la vitesse fluide \vec{v}_f au point de mesure 2 en fonction du temps.

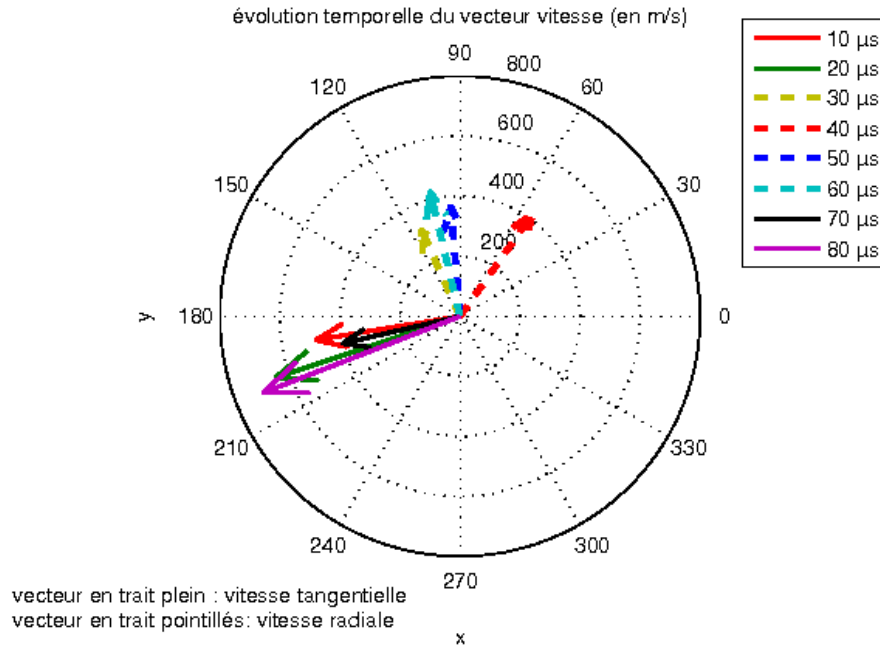


Fig.4. Hodographe

Nous pouvons remarquer que la vitesse est principalement soit tangentielle soit radiale. Le minimum de densité correspond aux vitesses radiales alors que le maximum de densité correspond aux vitesses tangentielles. On pourrait a priori conclure que l'éjection du plasma (vitesses ioniques radiales) se produit

dans les bras spiraux. Cependant lors des précédentes études [9] par sonde de Langmuir (Fig. 5), les bras spiraux indiquaient le maximum de densité se situe le long du grand axe de l'ellipsoïde.

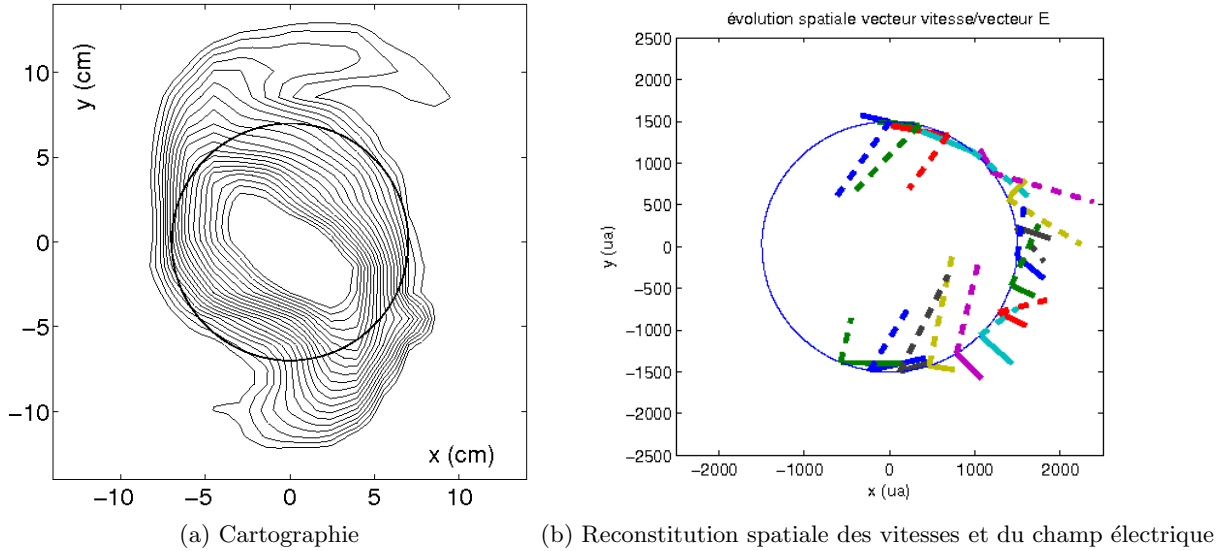


Fig.5. (a) Cartographie 2D de la colonne de plasma réalisée par sonde. La densité au centre est supérieure à la densité au bord. Sur un cercle, la densité est maximale au niveau du bras. (b) Reconstitution spatiale des vitesses et du champ électrique. Les vecteurs en trait plein représentent les vitesses et en pointillés le champ électrique. Les longueurs des vecteurs sont caractéristique de leurs normes.

La mesure semble indiquer l'éjection de plasma en dehors des bras spiraux. Au passage des bras, certains ions pourraient être piégés ou réfléchis, ce qui pourrait expliquer le maximum de densité dans ces bras accumulant les ions. Il est toutefois à noter que la vitesse de rotation des bras est de 1.5 km/s à une fréquence de 15 kHz , alors que les ions ont une vitesse fluide de rotation (vitesse tangentielle) dans les bras de 700 m/s . Il faut donc s'intéresser non plus à l'aspect fluide du problème mais bel et bien à son aspect cinétique, en regardant la forme des fonctions de distribution. Cette étude est en cours. A partir des vitesses fluides, nous pouvons calculer l'évolution temporelle du champ électrique en utilisant le principe fondamentale de la dynamique pour un ion fluide, $m \frac{d\vec{v}_f}{dt} = q\vec{E} + \vec{v}_f \times \vec{B}$ où $m = 6.6 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ est la masse de l'Argon; \vec{v}_f la vitesse fluide calculée avec les fonctions de distributions; $\vec{B} = B_z \vec{z}$ le champ magnétique axial dans la colonne droite.

La Figure 6 représente la norme du champ électrique et son angle en degrés en par rapport à la vitesse en fonction du temps. Nous observons un champ électrique moyen de 18 V/m . La norme du champ électrique est modulée par la structure, avec des variations brutales de l'angle à $t=20 \mu\text{s}$. Cette fluctuation est à rapprocher de la fluctuation de la densité électronique visible en Figure 2. Celle-ci est dissymétrique avec un front raide. Ce front raide se produit au passage des bras spiraux. La référence temporelle est différente sur ces figures, la carte de densité est à tourner de 60° , sens horaire.

L'angle formé par le vecteur \vec{E} et \vec{v}_f oscille autour $-\pi/2$, qui correspond à l'angle d'une dérive $\vec{E} \times \vec{B}$. Il est possible ainsi de reconstruire les évolutions temporelles de la vitesse fluide et du champ électrique, et d'obtenir une image instantanée d'une section droite du plasma. Moyennant l'hypothèse de rotation de la structure à la vitesse de $1.5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, les évolutions temporelles sont transformées en évolutions spatiales le long d'un cercle, $\delta s = 1.4 \cdot 10^3 * \delta t$, où s est l'abscisse curviligne le long du cercle de rayon $R=3\text{cm}$, correspondant au mesure 2 et 4. La Figure 5 montre une image de la vitesse fluide et du champ électrique dans une section droite de la colonne.

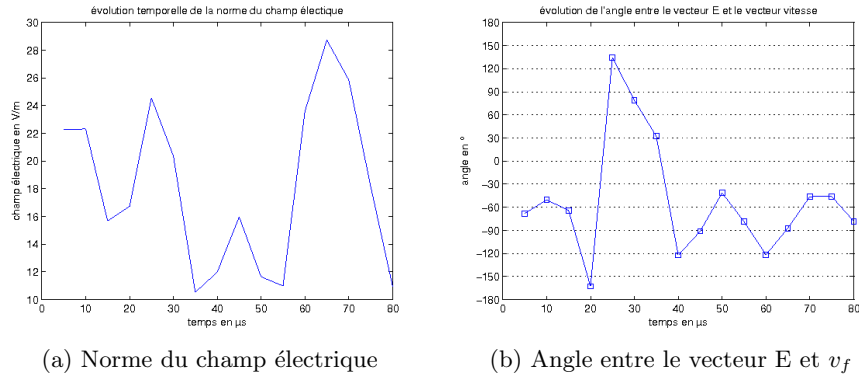


Fig.6. Evolution en fonction du temps de la norme du champ électrique et de l'angle entre le vecteur E et v_f : l'angle change brutalement au passage de la structure.

5 Conclusion

Dans cette étude dans une instabilité fortement non-linéaire, nous avons mis en évidence la complexité des mouvements ioniques. L'image du plasma tournant en bloc est fautive au vu de nos résultats obtenues en FIL. L'extension spatiale des bras spiraux en dehors de la zone d'ionisation délimitée par le diaphragme n'est pas expliquée. La vitesse de rotation de la structure est plus grande que la vitesse de rotation des ions (700 m/s au lieu de 1.5 km/s). Nous observons des vitesses tangentielles lors du passage des bras et des vitesses radiales en dehors. Le bras spiral est caractérisé par un front raide visible sur la variation de densité et sur la variation brutale de l'angle entre le champ électrique et la vitesse, ce qui ressemble à une onde de choc. Une étude fluide n'est pas la meilleure méthode dans notre cas. Une étude plus approfondie de la forme des fonctions de distribution est nécessaire pour étudier différents groupes d'ions : ceux qui sont peu sensibles à la structure tournante et ceux qui le sont. Des mesures à l'extérieur de la zone d'ionisation seront effectuées pour comprendre l'extension spatiale des bras spiraux. La variation des paramètres plasma est en cours pour déterminer l'origine et la nature de la perturbation. En conclusion la mise en oeuvre de ce nouveau diagnostic optique, voisin dans son principe de la PIV, ouvre de nouvelles perspectives et nécessite un approfondissement de l'analyse théorique.

Références

1. TH. PIERRE, *et al.*, Radial Convection of Plasma Structures in a Turbulent Rotating Magnetized-Plasma Column, *Physical Review Letters*, **92**, 065004 (2004).
2. TH. PIERRE *et al.*, Contrôle, *Congrès SFP-Plasmas*, Cadarache (2002).
3. T. KLINGER, A. LATTEN, A. PIEL, G. BONHOMME, TH. PIERRE & T. DUDOK DE WIT, Route to Drift Wave Chaos and Turbulence in a Bounded Low- β Plasma Experiment, *Physical Review Letters*, **79**, 3913 (1997).
4. V. NEZLIN, *Rossby Vortices, Spiral Structures, Solitons*, Springer-Verlag Berlin, (1993).
5. S. CILIBERTO & J. P. GOLLUB, Pattern Competition leads to Chaos, *Physical Review Letters*, **52**, 922 (1984).
6. D. N. HILL, S. FORNACA & M. G. WICKHAM, Single frequency scanning laser as a plasma diagnostic, *Rev. Sci. Instrum.*, **54**, 309 (1986).
7. T.F. JOHNSTON, *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, **17**, 96 (1987).
8. B. PELISSIER & N. SADEGHI, Time-resolved pulse-counting lock-in detection of laser induced fluorescence in the presence of a strong background emission, *Rev. Sci. Instrum.*, **10**, 3405 (1986).
9. M. MATSUKUMA, TH. PIERRE ET AL., Spatiotemporal structure of nonlinear low frequency waves in a magnetized plasma device, *Physics Letters A*, **314** (1-2), 163 (2003).

Magnétohydrodynamique dans un disque képlerien : instabilité magnéto-rotationnelle et saturation non linéaire

A. Ribeiro¹, C. Nore^{1,2}, J. Léorat³, & J.-L. Guermond⁴

¹ LIMSI-CNRS, BP133, 91403 Orsay Cedex, France

² Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay cedex, France

³ LUTH, Observatoire de Paris-Meudon, 92195 Meudon, France

⁴ Department of Mathematics, Texas A&M University, 3368 Tamu, College Station, TX 77843-3368, USA
 ribeiro@limsi.fr

Résumé. Nous présentons des simulations globales et non linéaires obtenues avec un code [1] éléments finis MHD (magnétohydrodynamique) en coordonnées cylindriques permettant d'imposer différentes conditions aux limites magnétiques entre vide et régions conductrices. Nous étudions l'évolution d'un écoulement azimuthal képlerien de fluide conducteur au sein d'un disque d'axe Oz , de faible épaisseur, soumis à un champ magnétique extérieur uniforme H_0 parallèle à l'axe. Cette configuration initialement stationnaire peut se déstabiliser par instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) suivant le choix des paramètres de contrôle, le nombre de Prandtl magnétique $Pm = Rm/Re = \nu/\eta$ (fixé ici à 1), le nombre de Reynolds Re et le nombre de Hartmann $Ha = \mu_0 H_0 L \sqrt{\sigma/\rho\nu}$ qui mesure l'intensité du champ appliqué (où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, σ la conductivité électrique, ρ la masse volumique, ν la viscosité cinématique et η la diffusivité magnétique). La croissance exponentielle des fluctuations avec un taux proche de la fréquence de rotation maximale entraîne l'apparition d'une force de Lorentz qui va modifier l'écoulement azimuthal initial en brisant la symétrie équatoriale, mettant ainsi fin à cette phase linéaire. Les caractéristiques temporelles et spatiales du régime de saturation non linéaire dépendent des deux paramètres Re et Ha que nous avons fait varier. Les conditions aux limites magnétiques entre vide et conducteur jouent aussi un rôle primordial dans le régime non linéaire.

Abstract. A nonlinear and global numerical model for the magnetorotational instability in a disk geometry is considered using a MHD finite element code in cylindrical coordinates and different magnetic boundary conditions between vacuum and conducting regions. We study the evolution of a conducting fluid quasi-keplerian flow in a flat disk embedded in a uniform magnetic field H_0 parallel to the flow axis Oz . This configuration is selected as an initial condition since it can exhibit the linear magnetorotational instability (MRI) for a chosen range of control parameters, the magnetic Prandtl number, $Pm = Rm/Re = \nu/\eta$ (fixed to 1 herein), the Reynolds number Re and the Hartmann number $Ha = \mu_0 H_0 L \sqrt{\sigma/\rho\nu}$ which measures the magnetic field intensity (where μ_0 is the vacuum permeability, σ the electric conductivity, ρ the fluid density, ν the kinematic viscosity and η the magnetic diffusivity). The fluctuation exponential growth with a growthrate comparable with the maximum rotation frequency generates a Lorentz force which will then become sufficiently strong to modify the initial azimuthal flow and breaks the equatorial symmetry. This leads to the end of the linear MRI stage. The temporal and spatial characteristics of the nonlinear regime depend on the parameters Re and Ha that are varied. The magnetic boundary conditions between vacuum and conducting regions also play a major role.

1 Introduction

L'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) a été mise en évidence de façon indépendante par Velikhov en 1959 et par Chandrasekhar en 1960. Son importance en astrophysique a été relevée par Balbus et Hawley en 1991 [2]. Elle a depuis été l'objet de nombreuses publications (voir par exemple l'article de revue [3]) soit théoriques soit numériques. Elle intervient dans de multiples scénarios astrophysiques faisant intervenir des phénomènes variés susceptibles d'apparaître dans des écoulements compressibles, avec moment angulaire, soumis à un champ de gravitation central, etc. La situation la plus simple donnant naissance à cette instabilité se rencontre dans un écoulement cisailé incompressible. Les écoulements d'intérêt astrophysique peuvent en effet souvent être classés dans cette catégorie comme, par exemple, dans les disques proto-stellaires ou les disques galactiques. Nous allons vérifier que de tels écoulements, qui

sont linéairement stables du point de vue purement hydrodynamique, deviennent instables en présence d'un champ magnétique uniforme. Cela peut être montré soit par une analyse locale du cisaillement [2] soit par une analyse globale [4,5], qui doit tenir compte des conditions aux limites du problème. Nous présentons ici un modèle numérique global et non linéaire.

2 Modèle numérique de l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI)

2.1 Etat d'équilibre initial et conditions aux limites

Pour étudier les effets magnétohydrodynamiques (MHD) dans un écoulement en cisaillement, nous considérons un cylindre (plat) d'axe de symétrie Oz et de rayon R plus grand que sa hauteur L dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Nous étudions numériquement la perturbation d'un écoulement de type képlerien, purement azimutal $(u_r, u_\theta, u_z)(r, \theta, z, t) = (0, V(r), 0)$ et soumis à un champ magnétique extérieur uniforme $(0, 0, H_0)$. Afin de pouvoir comparer avec des publications précédentes de l'étude linéaire de la MRI [4,5], nous choisissons le profil $V(r)$ utilisé par [4]. Ce profil est caractérisé par un paramètre s_0 , tel que, près de l'axe du disque ($r \ll s_0$), le fluide est en rotation solide et, loin de l'axe ($r \gg s_0$), il développe un profil képlerien :

$$V_\theta(r) = \frac{\Omega_0 r}{\left(1 + \left(\frac{r}{s_0}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1)$$

Pour compenser les pertes par diffusion visqueuse, est appliquée la force motrice purement azimutale suivante :

$$f_K(r) = -\nu \left(\Delta V(r) - \frac{V(r)}{r^2} \right) = \frac{15}{2} \frac{\Omega_0 \nu}{s_0} \frac{X^2 (1 + 0.1 X^3)}{(1 + X^3)^{\frac{5}{2}}}, \quad (2)$$

où ν est la viscosité cinématique et $X = r/s_0$. Pour que $(0, V(r), 0)$ soit l'état de base cinématique, des conditions de glissement sans frottement (free-slip) sont imposées en $z = \pm L/2$: $u_z = 0, \partial u_r / \partial z = 0, \partial u_\theta / \partial z = 0$. En $r = R$, c'est-à-dire à la paroi latérale qui sépare le fluide du vide, on impose des conditions de Dirichlet : $u_r = 0, u_z = 0, u_\theta = V(R)$. Dans l'article [4], les conditions aux limites magnétiques sont telles que les composantes tangentielles du champ magnétique s'annulent : $B_r = 0, B_\theta = 0$ en $z = \pm L/2$. Ces conditions simplifiées seront appelées ici conditions de 'pseudo-vide' (PV). Le code SFE-MaNS [1] (voir section 2.3) que nous avons développé peut aussi bien traiter le cas des conditions PV que les conditions exactes de continuité du champ magnétique entre le conducteur et le vide dénotées 'vrai-vide' (VV). On sera amené à comparer l'importance de ces conditions aux limites magnétiques sur la solution à temps longs.

2.2 Equations de la MHD pour la MRI

Pour adimensionner les équations de la MHD, on utilise la hauteur du cylindre L et le temps de retournement $1/\Omega_0$ comme unités de longueur et de temps et $V^* = \Omega_0 L$ comme unité de vitesse. L'unité du champ magnétique est définie par $V^* \sqrt{\rho/\mu_0}$ (vitesse d'Alfvén), μ_0 la perméabilité magnétique du vide et ρ la densité du fluide. Les équations adimensionnées de la magnétohydrodynamique s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{h} + \mathbf{f}_K \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{h}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{h} \end{cases} \quad (3)$$

où la viscosité cinématique ν et la diffusivité magnétique η sont uniformes. Le processus diffusif est contrôlé par les deux paramètres standards : le nombre de Reynolds cinétique $Re = \Omega_0 L^2 / \nu$ et le nombre de Reynolds magnétique $Rm = \Omega_0 L^2 / \eta$. Le rapport de ces deux nombres, $Pm = Rm / Re = \nu / \eta$, est le nombre de Prandtl magnétique fixé à un dans notre étude ($Pm = 1$). La valeur numérique du champ uniforme extérieur ($H_0 = V^* h_0 \sqrt{\rho/\mu_0}$) doit être fixée par les conditions initiales. Une mesure pratique

du champ est donnée par le nombre de Hartmann : $Ha = \mu_0 H_0 L \sqrt{\sigma/\rho\nu} = (LV^*/\sqrt{\nu\eta})h_0$. On note que l'unité de longueur choisie dans [4] est la demi-hauteur du disque $L/2$, l'unité de vitesse correspondante est $\Omega_0 L/2$, d'où les relations entre leurs nombres de Reynolds magnétique C_Ω et de Hartmann Ha' et les nôtres (Rm, Ha) qui sont données par :

$$C_\Omega = \frac{Rm}{4}, \quad Ha' = \frac{Ha}{2}. \quad (4)$$

La région centrale ($r \ll s_0$) n'est *a priori* pas importante dynamiquement puisque le cisaillement y est nul. On choisit donc pour s_0 une valeur proche de la hauteur du disque, $s_0/L = 2.5$, comme dans [4]. Cette valeur détermine la vitesse azimutale maximale V_{max} atteinte en $r^* = 2^{1/3}s_0$. Une fois la géométrie fixée par (L, R, s_0) , les paramètres de contrôle sont Pm pour le fluide, Re pour l'écoulement et Ha pour l'amplitude du champ magnétique.

2.3 Caractéristiques de la méthode de résolution des équations couplées

La méthode développée et qui ne sera pas détaillée dans cette note, permet de résoudre les équations complètes de la MHD en trois dimensions pour toute géométrie axisymétrique (sphère, cylindre, ellipsoïde,...), qui sont d'un grand intérêt à la fois dans le domaine astrophysique et le domaine expérimental. L'algorithme permet de considérer un domaine de calcul numérique hétérogène composé de matériaux de conductivités électriques différentes. De manière naturelle, les équations sont résolues dans un repère cylindrique ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$) et chaque variable du problème est décomposée en séries de Fourier (cosinus-sinus) dans la direction azimutale \mathbf{e}_θ . A partir d'un problème 3D initial, on obtient ainsi M problèmes 2D couplés (M étant le nombre de modes de Fourier) à résoudre dans un plan méridien de la géométrie considérée. L'approximation de la solution dans le plan méridien est effectuée à l'aide d'éléments finis de Lagrange.

Le champ magnétique dans les régions isolantes est exprimé comme le gradient d'un potentiel scalaire $\mathbf{H}^v = \nabla\phi$ du fait qu'il soit à rotationnel nul. On réduit ainsi le nombre de variables du problème et on se restreint à des domaines géométriques dont le vide est simplement connexe. L'originalité de la méthode repose sur l'emploi d'une technique de pénalisation de type Galerkin discontinu pour imposer les continuités requises par le champ magnétique au niveau des interfaces isolant/conducteur. Il s'agit d'assurer la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} et de la composante normale de $\mu_r \mathbf{H}$.

Les équations de Navier-Stokes sont résolues à l'aide d'un schéma prédicteur-correcteur sous forme rotationnelle optimale pour l'approximation de la pression et l'avancée temporelle est discrétisée au moyen d'un schéma BDF2. La méthode de résolution des équations de Maxwell est détaillée et validée dans [1] et s'est avérée efficace dans le domaine de la dynamo cinématique. Les équations couplées sont résolues de façon alternée en temps.

3 Instabilité magnétorotationnelle (MRI)

Dans un champ magnétique externe uniforme et purement axial, l'écoulement quasi-képlerien $(0, V(r), 0)$ est une solution stationnaire que l'on va perturber par un faible champ azimutal. Le régime à temps courts devrait être décrit par les équations linéarisées et relever de l'instabilité magnétorotationnelle pour une gamme finie de nombres de Hartmann à un nombre de Reynolds magnétique fixé. L'intervalle d'instabilité a été déterminé dans [4] pour des perturbations axisymétriques dans le cas d'un cylindre de rayon infini. La symétrie par rapport à l'équateur ($z \rightarrow -z$) de ces perturbations est primordiale et les auteurs de [5] ont montré que les perturbations magnétiques quadrupolaires (i.e. paires en z) sont plus instables que les perturbations dipolaires (i.e. impaires en z).

On choisit donc la perturbation suivante pour $-0.5 \leq z \leq 0.5$ et $0 \leq r \leq R$:

$$(h_r, h_\theta, h_z) = (0, \cos(\pi z) \sin(\pi r/R), 0) \quad (Q) \quad (5)$$

L'excitation est caractérisée par la plus grande échelle verticale possible dans le cylindre et s'annule en R . Par exemple, pour $Rm = 154$, la plage d'instabilité MRI s'étend de $Ha \simeq 3$ à $Ha \simeq 38$. Nous

études d'abord le cas $Rm = 154$, $Ha = 33.6$, près de la branche à grands Ha avec $R/L = 30$. Les champs magnétique et cinétique fluctuants sont obtenus en soustrayant l'écoulement de base $V(r)$ de u_θ et le champ appliqué H_0 de h_z . La figure 1 (a) montre l'évolution temporelle des énergies magnétique et cinétique fluctuantes jusqu'à $t = 900$ soit 150 tours environ. Comme la perturbation initiale n'est pas un vecteur propre de l'instabilité, elle crée des oscillations faibles d'ondes d'Alfvén qui sont ensuite suivies par le régime MRI de $t = 20$ à $t = 70$. La figure 2 représente la forme des champs fluctuants au temps $t = 25$ (i.e. après 4 tours) pendant la phase linéaire MRI. Ces champs sont semblables à ceux de [4] obtenus en intégrant les équations linéarisées dans un disque de rayon infini et des conditions magnétiques PV. Le régime MRI prend fin à environ $t = 80$ (voir figure 1 a) lorsque la force de Lorentz, croissant de façon exponentielle, devient assez forte pour modifier l'écoulement de base quasi-képlerien.

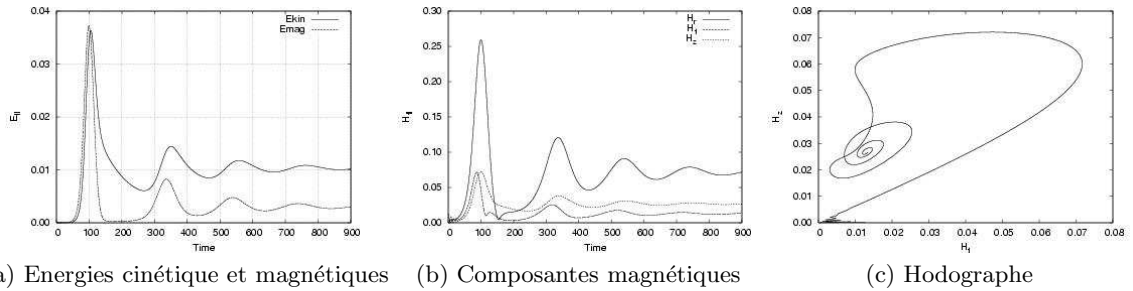


Fig.1. Disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$: (a) Evolution temporelle des énergies cinétique et magnétique fluctuantes; (b) Evolution temporelle des composantes magnétiques fluctuantes (H_r , H_θ , H_z); (c) Hodographe de H_z vs H_θ .

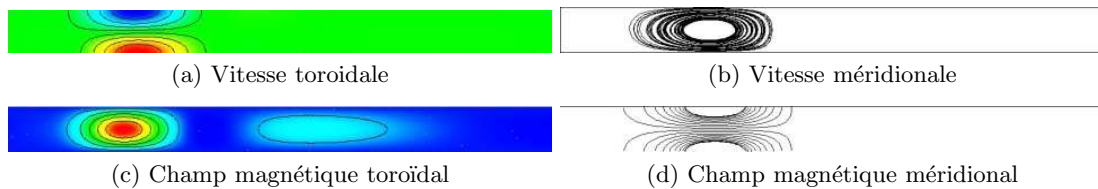


Fig.2. Vecteurs propres dans un disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$ et $t = 25$ pour une vue tronquée $0 \leq r/L \leq 20$ (le calcul est effectué dans un disque $R/L = 30$). L'isovaleur bleue (rouge) est négative (positive).

4 Evolution non linéaire

Le régime non linéaire à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$ est caractérisé par des maxima quasi-simultanés d'énergies cinétique et magnétique fluctuantes d'amplitudes décroissantes (voir figure 1 a). Des hodographes (figure 1 c) traçant une composante du champ magnétique fluctuante en fonction d'une autre (par exemple issues de la figure 1 b) suggèrent que le système évolue à $Rm = 154$ vers un point fixe à temps longs. Aux temps courts, la composante verticale de la force de Lorentz (impair en z) est plus faible que les deux autres composantes (aussi impaires en z) mais elle augmente plus vite et conduit à la brisure de symétrie équatoriale du champ de vitesse. Malgré la force de Lorentz, la symétrie quadrupolaire de l'état MRI est retrouvée à temps longs (voir figure 3) avec un quadrupole inversé (fig. 3 c et d).

Ce premier cas d'étude nous a permis de valider notre modèle de l'instabilité MRI en regard de références basées sur l'intégration des équations linéarisées [4,5] mais aussi de démontrer l'importance de la prise en compte du régime non linéaire.

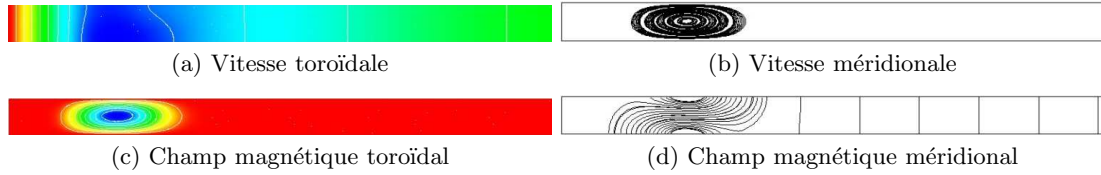


Fig.3. Champs magnétiques fluctuants dans un disque képlerien à $Rm = 154$, $Ha = 33.6$ et $t = 900$ pour une vue tronquée $0 \leq r/L \leq 20$ (le calcul est effectué dans un disque $R/L = 30$). L'isovaleur bleue (rouge) est négative (positive).

5 Vers de plus grands nombres de Reynolds et des conditions aux limites réalistes

Afin de simuler de plus grands nombres de Reynolds magnétiques (avec $Pm = 1$) tout en limitant le temps calcul, nous avons choisi de diminuer le rapport de forme ($R/L = 15$) en vérifiant que les résultats étaient inchangés. Nous nous intéressons maintenant à $Rm = 280 = Re$ et $Ha = 32$ correspondant à la zone médiane d'instabilité MRI où la croissance linéaire doit être la plus rapide. Nous comparons les résultats obtenus selon les conditions aux limites magnétiques PV et VV.

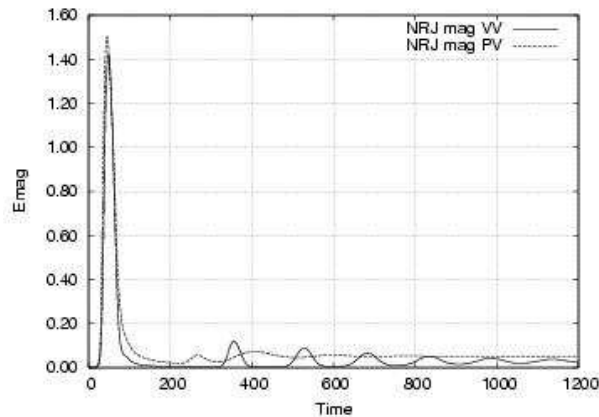


Fig.4. Disque képlerien à $Rm = 280$, $Ha = 32$: évolution temporelle des énergies magnétiques fluctuantes.

L'évolution temporelle des énergies magnétiques fluctuantes dans les cas PV et VV est représentée en figure 4. Elle est très différente suivant les conditions magnétiques. La distribution spatiale des champs à temps courts est similaire dans les deux cas (voir figure 5) et suit une répartition quadrupolaire comme attendu pour la perturbation (5) utilisée. Le taux de croissance de l'instabilité MRI est 0.2 (PV) et 0.19 (VV), ce qui donne un taux de croissance normalisé $\gamma_{\tau_{rot}} = 1.26$ et $\gamma_{\tau_{rot}} = 1.20$ respectivement, en accord avec les résultats de [5]. La croissance se fait donc sur un temps de retournement de l'écoulement. L'écart entre les deux cas se manifeste aux temps intermédiaires : la figure 6 montre à $t = 200$ des symétries différentes (le champ magnétique toroïdal reste pair au cours du temps pour le cas PV alors qu'il peut changer de parité pour le cas VV). A temps longs, la symétrie quadrupolaire est retrouvée pour les deux cas (voir figure 7) mais avec des orientations opposées. On retrouve encore pour $Re = 280$ des états stationnaires. Le travail en cours consiste à augmenter Re dans la configuration VV en vue de comparer avec les régimes chaotiques obtenus dans les calculs locaux à des nombres de Reynolds de l'ordre de 700 [6].

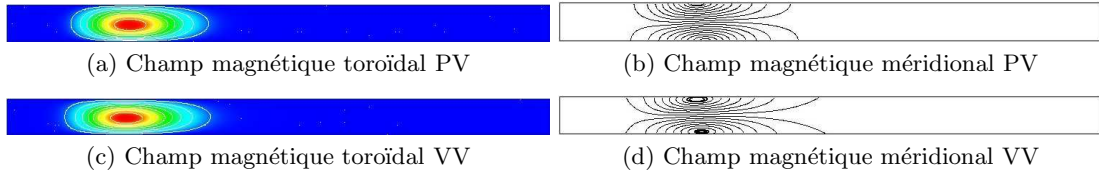


Fig.5. Champ magnétique fluctuant dans un disque képlerien à $Rm = 280$, $Ha = 32$ et $t = 25$ pour $0 \leq r/L \leq 15$: (a-b) PV, (c-d) VV. L'isovaleur bleue (rouge) est négative (positive).

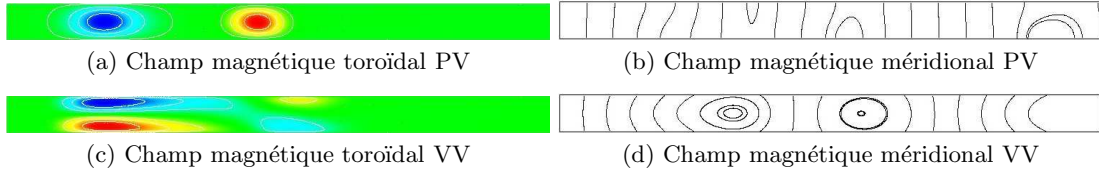


Fig.6. Comme la figure 5 mais à $t = 200$.

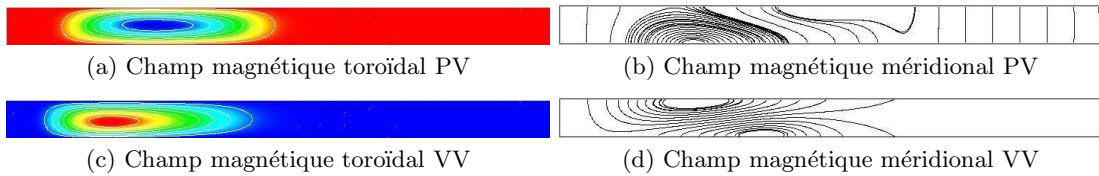


Fig.7. Comme la figure 5 mais à $t = 1200$.

Références

1. J.-L. GUERMOND, R. LAGUERRE, J. LÉORAT & C. NORE, An Interior Penalty Galerkin Method for the MHD equations in heterogeneous domains, *Journal of Computational Physics*, **221**, 349-369, (2007).
2. S. A. BALBUS & J. F. HAWLEY, A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I-Linear analysis, *Astrophysical Journal*, **376**, 214-222, (1991).
3. S. A. BALBUS & J. F. HAWLEY, Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks, *Reviews of Modern Physics*, **70**, 1-53, (1998).
4. L. L. KITCHATINOV & M. V. MAZUR, On the global stability of rotating magnetized disks, *Astronomy & Astrophysics*, **324**, 821-828, (1997).
5. L. L. KITCHATINOV & G. RUDIGER, Seed fields for galactic dynamos by the magnetorotational instability, *Astronomy & Astrophysics*, **424**, 565-570, (2004).
6. A. BRANDENBURG, A. NORDLUND, R. F. STEIN & U. TORKELSSON, Dynamo-generated turbulence and large scale magnetic fields in a Keplerian shear flow, *Astrophysical Journal*, **446**, 741-754, (1995).

Matériaux granulaires durs : représentation d'un matériau non-linéaire comme un graphe avec une dynamique linéaire

Nicolas Rivier

Institut de Physique — Université Louis Pasteur, 3, rue de l'Université, 67084 Strasbourg, France
 nick@fresnel.u-strasbg.fr

Résumé. Un matériau granulaire sec est décrit naturellement par un graphe. Deux grains en contact répulsif sont représentés par deux sommets reliés par une arête. Il n'y a pas de forces attractives entre grains et la cohésion de l'empilement est le fait de forces extérieures (la gravité et les bords du silo). Pour les matériaux granulaires secs durs - où la rigidité est beaucoup plus forte que la force appliquée, les forces entre grains, fortement non-linéaires, sont des contraintes géométriques. Elles sont booléennes - si elles s'appliquent, elles ont le même signe, répulsif, scalaires - dans la limite d'une friction tangentielle infinie entre grains, et donc représentées simplement par les arêtes du graphe. Les grains (lisses) roulant sans glisser les uns sur les autres *s'il le peuvent*, constituent les excitations élémentaires. Le matériau granulaire coule alors comme un fluide (sec) ou comme un roulement à billes tri-dimensionnel. Sinon, il est bloqué (« jammed »). Les sommets du graphe représentent les grains, et les arêtes, les contacts booléens. Les circuits de grains en contact sont pairs ou impairs et le matériau est essentiellement discret (il n'a pas de limite continue sans défaut topologique, ni équation constitutive). Ses propriétés physiques sont données par les valeurs et vecteurs propres de la matrice d'adjacence (en fait, de la matrice dynamique, matrice d'adjacence avec la valence de chaque sommet sur la diagonale), donc par l'algèbre linéaire du graphe. Alors que la statique du matériau granulaire est non-linéaire, sa dynamique topologique et son comportement physique générique est donné par une algèbre linéaire, parce que nous avons remplacé les éléments matériels par des objets géométriques, avec une structure de graphe. Un matériau granulaire est donc un *métamatériau*, dont le comportement physique générique est donné par sa structure et non par la chimie ou la dureté de ses constituants. La structure de graphe a trois caractéristiques essentielles : discontinuité (granularité), circuits impairs ("arches") et désordre. Les deux états possibles de la matière granulaire désordonnée, fluide sec [3,4] et solide bloqué fragile [5,6,8,9] résultent directement de la dynamique topologique du graphe : Les éléments responsables du blocage sont les circuits impairs. Sans circuits impairs, le matériau granulaire coule comme un fluide sec ; la rotation d'un grain sur l'autre est une connexion qui est alors pure jauge. Le matériau granulaire de n grains est bloqué par c circuits impairs qui frustrent la rotation sans glisser. La plus petite valeur propre de la matrice dynamique, $4c/n$ est le paramètre d'ordre du solide fragile. La vorticité impaire (le coeur des circuits impairs) forme des boucles fermées (R -boucles) qui ont la taille L du matériau granulaire *désordonné* (alors que dans un empilement cristallin, leur taille est limitée par la période). Le paramètre d'« ordre » $\frac{4c}{n} \sim \frac{1}{L}$ est petit, étendu sur tout le matériau et la transition de blocage (*jamming*) entre fluide sec et solide fragile est du second ordre, avec lois d'échelle. Il s'ensuit que le matériau désordonné a une densité élevée d'états de basses énergies, indépendante de sa taille et de la dimension de l'espace, et donc une capacité calorifique et une entropie suffisantes pour absorber l'énergie libre lors du blocage. De plus, le désordre, avec ses grandes R -boucles, procure le mécanisme de la plasticité des granulaires sous cisaillement : la R -boucle rétrécit en *montant* à travers les contacts des circuits impairs déconnectés l'un après l'autre.

Abstract. Dry granular matter is described naturally by a graph. Two grains in repulsive contact are represented by two vertices connected by an edge. There are no attractive, cohesive forces between grains and the packing is held together by external forces (gravity or boundaries). In hard dry granular materials - in the limit of large stiffness-to-load ratio, the forces between grains are highly nonlinear, but simple geometrical contacts, boolean - they exist or not, with the same sign, i.e. repulsive constraints, scalar - assuming an infinite tangential friction between grains. The elementary excitations are non-slip rotations of one (smooth) grain over the other, if it is permitted. Then, the granular material flows like a (dry) fluid or like a three-dimensional bearing. If not, it is jammed. In the graph, the vertices are the grains, and the edges, the boolean contacts represented by the adjacency matrix. Circuits of grains in contact can be even or odd, and the material is essentially discrete (there is no defect-free continuous limit). Its physical properties are given by the eigenvalues and eigenvectors of the adjacency matrix (strictly, of the dynamical matrix that is the adjacency matrix with the valency of the vertex

on the diagonal), that is by linear algebra of the graph. Thus, whereas the statics is nonlinear, the topological dynamics, and the generic physical behaviour of the granular material is a problem of linear algebra, because we have replaced material elements by geometrical objects, in a structure that is a graph. A granular material is therefore a metamaterial, with generic physical behaviour given by its structure rather than by the chemistry or hardness of its constituents. The graph structure has the essential elements of discreteness (granularity), odd circuits (“arches”) and disorder. There can be no defect-free, continuous model of granular material, no constitutive equation. The two possible states of (disordered) granular matter, dry fluid, and jammed, rigid but fragile solid, are direct results of the topological dynamics of the graph, where the elements responsible for the jammed state are odd circuits, circuits with a odd number of grains in contact. In the absence of odd circuits, the granular material behaves like a dry fluid. Non-slip rotation of a grain on the next is a connection that is pure-gauge. The granular material (n grains) is jammed by the c odd circuit that frustrate the non-slip rotation. The lowest eigenvalue of the dynamical matrix is $4c/n$. The core of odd circuits, odd vorticity forms closed ($R-$) loops, that are large in disordered granular materials of size L . (In ordered materials, their size is limited by the periodicity of the close-packed structure). The disordered granular material, is a fragile, jammed solid stabilized by odd circuits. The “order” parameter $\frac{4c}{n} \sim \frac{1}{L}$ is extended over the entire material, and jamming transition between dry fluid and fragile solid is a second-order, scaling transition. As a consequence, the disordered material has a large density of states with low-eigenvalues, independent of the size of the material and of the space dimension, and thus a large specific heat and entropy available to absorb the free energy of the material upon jamming. Disorder, with large $R-$ loops, provides the mechanism for plasticity of granular material upon shear : the $R-$ loop shrinks, “climbing” by moving across successively broken odd circuits.

1 Représentation d’un matériau granulaire comme un graphe

Dans un matériau granulaire sec dur, où la rigidité est beaucoup plus importante que la force appliquée, les forces entre grains, fortement non-linéaires, sont des contraintes géométriques, des étais (“struts”). Elles sont booléennes (s’appliquant ou non), de même signe répulsif, scalaires (dans la limite d’une friction tangentielle infinie entre grains) et donc représentées simplement par les arêtes du graphe. Les n sommets représentent les grains (lisses), qui, en roulant (d’un angle θ) sans glisser les uns sur les autres en constituent les excitations élémentaires. Chaque arête (ij) est munie d’une énergie potentielle $V = (1/2)k(\theta_i + \theta_j)^2$. La force, toujours répulsive, est nulle si les deux grains en contact roulent l’un sur l’autre sans glisser ($\theta_i + \theta_j = 0$).

2 Matrice d’adjacence \mathbf{A} et dynamique d’un graphe

Le graphe de n sommets a une matrice d’adjacence \mathbf{A} , $A_{ij} = 1$ si les sommets i, j sont reliés par une arête (les grains sont en contact). Soit la matrice diagonale Δ ,

$$\Delta_{ij} = z_i \delta_{ij},$$

avec $z_i = \sum_j A_{ij}$, le degré (valence) du sommet i . On définit la *matrice dynamique* $\mathbf{Q} = \Delta - \mathbf{A}$ du graphe [1], de rang $n - 1$, et de déterminant 0. La matrice \mathbf{Q} est la matrice dynamique d’un système physique sur le graphe, où les sommets sont des particules de même masse m et les arêtes, des ressorts de même raideur k , munis d’une énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}k(x_i - x_j)^2.$$

L’interaction entre deux sommets reliés par une arête peut être répulsive ou attractive. En effet, l’équation du mouvement (Euler-Lagrange)

$$[-\lambda \mathbf{1} + (\Delta - \mathbf{A})]\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{1}$$

est l’équation aux valeurs propres $\lambda = m\omega^2/k$ de la matrice dynamique \mathbf{Q} , reliées aux fréquences ω des modes normaux d’oscillation [2]. La valeur propre la plus basse est 0, avec vecteur propre correspondant $|\mathbf{j}\rangle = (1, 1, 1, \dots, 1)^t$ (matrice de Woodstock, le petit oiseau, ami de Snoopy).

Par contre, la matrice dynamique d'un granulaire dur où les sommets sont des grains de même moment d'inertie et les arêtes, des étais munis d'une énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}k(\theta_i + \theta_j)^2$$

représentant deux grains roulant sans glisser l'un sur l'autre, est $\mathbf{K} = \Delta + \mathbf{A}$. L'interaction a un seul signe. En effet, l'équation du mouvement

$$[-\lambda \mathbf{1} + (\Delta + \mathbf{A})]\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (2)$$

est l'équation aux valeurs propres de la matrice dynamique $\mathbf{K} = 2\Delta - \mathbf{Q}$ [8].

A cause du signe + ou - devant \mathbf{A} , les spectres des valeurs propres de \mathbf{Q} et \mathbf{K} sont essentiellement différents, s'il y a des *circuits impairs* de grains en contact. Avec des circuits pairs seulement, le graphe (de matrice dynamique notée \mathbf{K}^0) est bichromatique — deux couleurs suffisent à colorier le graphe, avec des couleurs différentes pour deux sommets séparés par une arête (grains en contact). \mathbf{K}^0 est changé en

$$\mathbf{K}'^0 = \mathbf{O}\mathbf{K}^0\mathbf{O}^{-1} = \Delta^0 - \mathbf{A}^0 = \mathbf{Q}^0$$

par une transformation unitaire

$$\mathbf{O}(O_{ij}) = (-1)^i \delta_{ij}$$

— qui change le signe des lignes et colonnes impaires. La valeur propre la plus basse de \mathbf{K}^0 est 0, avec comme vecteur propre correspondant

$$|\mathbf{a}\rangle = \mathbf{O}^{-1}|\mathbf{a}\rangle = (1, -1, 1, \dots, -1)^t.$$

Un matériau granulaire avec circuits pairs seulement se comporte comme un roulement à billes, un liquide sec, où les grains roulent sans glisser les uns sur les autres [4,7], et la connection entre deux grains est indépendante du chemin (jauge pure).

3 Circuits impairs, blocage (« jamming »)

La vorticité impaire (le coeur des circuits impairs) forme des boucles fermées (R -boucles) qui ont la taille L du matériau granulaire d'esordonn  (alors que dans un empilement cristallin, leur taille est limitée par la période) [10]. Il suffit de déconnecter une arête par circuit impair, pour obtenir un graphe ne contenant que des circuits pairs. Ce graphe bichromatique est connecté et touche tous les sommets (« spanning »). Il a une matrice d'adjacence \mathbf{A}^0 . Les quelques arêtes fermant chaque circuit impair sont décrites par la matrice \mathbf{A}^* qui n'a pratiquement que des 0 (« sparse »), avec un 1 si et seulement si l'arête sépare deux sommets de même couleur (une par circuit impair). Donc, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^*$, une décomposition de l'ensemble des arêtes réalisée algébriquement par les matrices 'adjacence et dynamique.

Sous transformation \mathbf{O} , $bf A^0$ change de signe, contrairement à \mathbf{A}^* , et \mathbf{K} devient $\mathbf{K}' = \mathbf{Q}^0 + \mathbf{J}^*$, où \mathbf{J}^* est une matrice avec des 0 partout sauf 1 entre deux sommets de même couleur et sur la diagonale correspondante. Le principe variationnel de Rayleigh-Ritz sur

$$\mathbf{K}' = \mathbf{Q}^0 + \mathbf{J}^*$$

alors

$$\mathbf{Q}^0|j\rangle = 0$$

donne une borne supérieure à la valeur propre la plus basse λ_1 de \mathbf{K} ,

$$0 < \lambda_1 \leq \frac{\langle j|\mathbf{K}'|j\rangle}{\langle j|j\rangle} = \frac{\langle a|\mathbf{K}|a\rangle}{\langle a|a\rangle} = \frac{\langle j|\mathbf{J}^*|j\rangle}{\langle j|j\rangle} = \frac{4c}{n} \quad (3)$$

où $c \sim L^{D-1}$ est le nombre de circuits impairs dans le graphe de $n \sim L^D$ sommets et de taille L . En effet, c est donné par l'aire du film tendu sur les R -boucles. Donc,

$$\lambda_1 = \frac{4c}{n} \sim \frac{1}{L}$$

mesure la frustration engendrée par les circuits impairs et diluée dans tout le graphe (comme le vecteur propre $\approx |\mathbf{a}\rangle$ et la déformation) Le matériau granulaire est rigide mais fragile, les contraintes sont concentrées sur quelques « arches ». les circuits impairs, qui s'écroulent en déconnectant une seule de leurs arêtes. Le paramètre d'« ordre » $\frac{4c}{n} \sim \frac{1}{L}$ est petit, étendu sur tout le matériau et la transition de blocage (« jamming ») entre fluide sec et solide fragile est du second ordre, avec lois d'échelle [5,6,8,9].

En poursuivant le procédé de déconnection, on obtient $\sim c$ modes de basses valeurs propres $\sim 1/L$, avec une densité élevée

$$D(\lambda) \sim \frac{c}{\lambda L^D} \sim L^0,$$

indépendante de λ , de la taille du matériau et de la dimension de l'espace [5,6,9]. On déconnecte \mathbf{A}^0 en c « blobs » (sous-graphes bichromatiques) de même taille environ, reliés l'un à l'autre par une arête de \mathbf{A}^* , sur lesquels on construit des fonctions de Bloch [9].

Le désordre joue un rôle essentiel : En imposant des grandes R -boucles, il assure la fragilité du matériau granulaire, et une transition de blocage du second ordre, avec un mécanisme de plasticité (montée de la R -boucle sous cisaillement).

Références

1. N. BIGGS, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, (1974).
2. J. F. SADO, *European Physical Journal E*, **18**, 321 (2005).
3. D. LOHSE, R. RAUHÉ, R. BERGMANN & D. VAN DER MEER, *Nature* **432**, 689 (2004).
4. R. MAHMOUDI-BARAM, H.J. HERRMANN & N. RIVIER, *Physical Review Letters*, **93**, 044301 (2004).
5. C. S. O'HERN, S. A. LANGER, A. J. LIU & S. R. NAGEL, *Physical Review Letters*, **88**, 075507 (2002).
6. M. WYART, S. R. NAGEL & T. A. WITTEN, *Europhysical Letters*, **72**, 486 (2005).
7. N. RIVIER, in *Powder and Grains*, R. Garcia-Rojo, H.J. Herrmann, S. McNamara, eds., Balkema (Leiden), p. 29, (2005).
8. N. RIVIER, *Journal of Non-cryst. Solids*, **352**, 4505 (2006).
9. N. RIVIER, *European Physical Journal E*, à paraître.
10. N. RIVIER, *Philosophical Magazine*, **4**, 859 (1979).

Multiplicité extrême de motifs convectifs

Laurette S. Tuckerman¹ & Katarzyna Borońska²

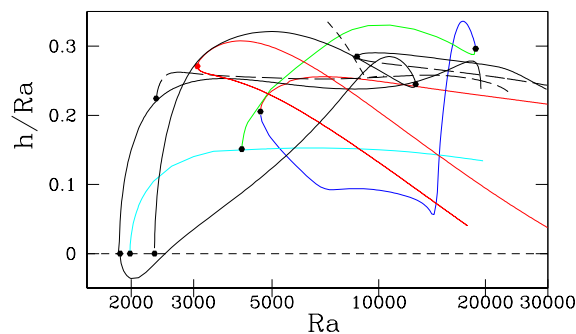
¹ PMMH-CNRS (ESPCI, P6, P7), 10 rue Vauquelin, 75231 Paris

² LIMSI-CNRS, B.P. 133, 91403 Orsay Cedex

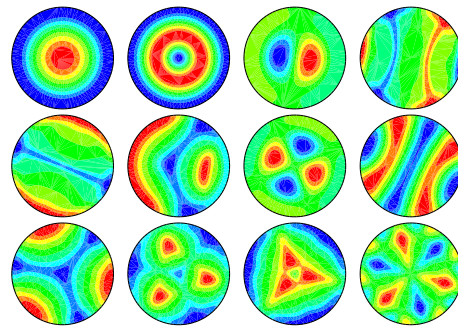
laurette@pmmh.espci.fr

Résumé. Dans un cylindre rempli d'eau ($Pr = 6.7$) et ayant rayon deux fois la hauteur ($\Gamma \equiv R/H = 2$), Hof, Lucas et Mullin [1] ont observé *cinq* motifs distincts différents au même nombre de Rayleigh, $Ra = 14\,200$: deux, trois et quatre rouleaux parallèles, un motif “mercedes” avec trois zones radiales de fluide descendant ou montant, et même un état axisymétrique. Ayant réussi à simuler ces motifs numériquement, nous avons cherché à construire un diagramme de bifurcation complet et, en particulier, de comprendre la relation entre ces motifs et les états créés à partir de l'état conductif, qui doivent obligatoirement être de nature trigonométrique. Le diagramme s'avère extrêmement riche, avec au moins 14 branches d'états stationnaires stables et instables, et au moins 2 branches d'états oscillatoires, liés entre eux par des bifurcations. Ce diagramme représente un compromis entre, d'un côté, les principes physiques régissant la convection dans l'intérieur, tels que la sélection de nombre d'onde, et de l'autre côté, les principes mathématiques de symétrie imposés par les frontières cylindriques du récipient.

Dans un cylindre rempli d'eau ($Pr = 6.7$) et ayant rayon deux fois la hauteur ($\Gamma \equiv R/H = 2$), Hof, Lucas et Mullin [1] ont observé *cinq* motifs distincts différents au même nombre de Rayleigh, $Ra = 14\,200$: deux, trois et quatre rouleaux parallèles, un motif “mercedes” avec trois zones radiales de fluide descendant ou montant, et même un état axisymétrique. Ayant réussi à simuler ces motifs numériquement, nous avons cherché à construire un diagramme de bifurcation complet et, en particulier, de comprendre la relation entre ces motifs et les états créés à partir de l'état conductif, qui doivent obligatoirement être de nature trigonométrique.



(a) Diagramme de bifurcations



1ère rangée : tore, deux tores, dipole, trois rouleaux.

2ème rangée : deux rouleaux, CO, pizza, quatre rouleaux.

3ème rangée : mercedes, trefle, mitsubishi, marguerite.

Non représentés : tore, deux tores et deux rouleaux instables.

Fig.1. Diagramme de bifurcations (gauche) contenant 15 branches stationnaires.

Pour effectuer l'intégration temporelle des équations de Boussinesq, nous avons utilisé un code pseudo-spectral, que nous avons aussi adapté de sorte à calculer les états stationnaires par la méthode de Newton et la stabilité linéaire par la méthode d'Arnoldi [2]. Nous avons initialisé nos simulations avec la même perturbation à des différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra , menant à des différents motifs convectifs. Ceux-ci ont, à leur tour, été utilisés comme conditions initiales pour d'autres simulations temporelles et la continuation des branches.

Le diagramme, montré dans la figure 1, s'avère extrêmement riche, avec au moins 15 branches d'états stationnaires stables et instables, et au moins 2 branches d'états oscillants, liés entre eux par des bifurcations. Ce diagramme représente un compromis entre, d'un côté, les principes physiques régissant la convection dans l'intérieur, tels que la sélection de nombre d'onde, et de l'autre côté, les principes mathématiques de symétrie imposés par les frontières cylindriques du récipient.

Dans la figure 2, nous montrons les premières bifurcations à partir de l'état conductif. Ces bifurcations sont forcément vers des états trigonométriques. Pour notre rapport d'aspect, $\Gamma = 2$ et avec des parois latérales isolantes, les quatre premiers seuils sont ($m = 1, Ra = 1828$), ($m = 2, Ra = 1849$), ($m = 0, Ra = 1861.5$), et ($m = 3, Ra = 1985$). Seulement la première branche ($m = 1, Ra = 1828$) peut être stable près du seuil.

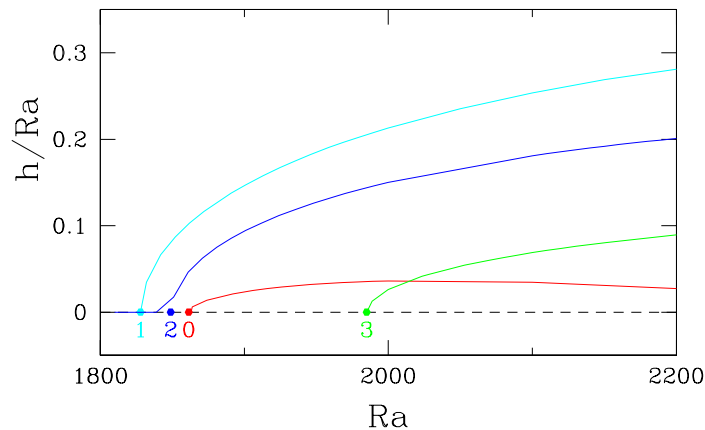


Fig.2. Premières bifurcations à partir de l'état conductif.

Afin d'éclaircir le diagramme 1, nous montrons des diagrammes partiels, certains liés avec les premières bifurcations. Le plus esthétique, montré dans la figure 3, est celui issu de la bifurcation primaire ayant $m = 3$. Quatre branches différentes y appartiennent, nommées **Marguerite**, **Mitsubishi**, **Trèfle** et **Mercedes**. Nous montrons ensuite les branches issues de la bifurcation primaire ayant $m = 2$. Ce diagramme, montré dans la figure 4, contient deux branches, nommées **Pizza** et **Quatre rouleaux**. Les branches axisymétriques sont montrées dans la figure 5.

Références

1. B. HOF, G. J. LUCAS & T. MULLIN, Flow state multiplicity in convection, *Physics of Fluids*, **11**, 2815–2817 (1999).
2. C.K. MAMUN & L.S. TUCKERMAN, Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow, *Physics of Fluids*, **7**, 80–91 (1995).

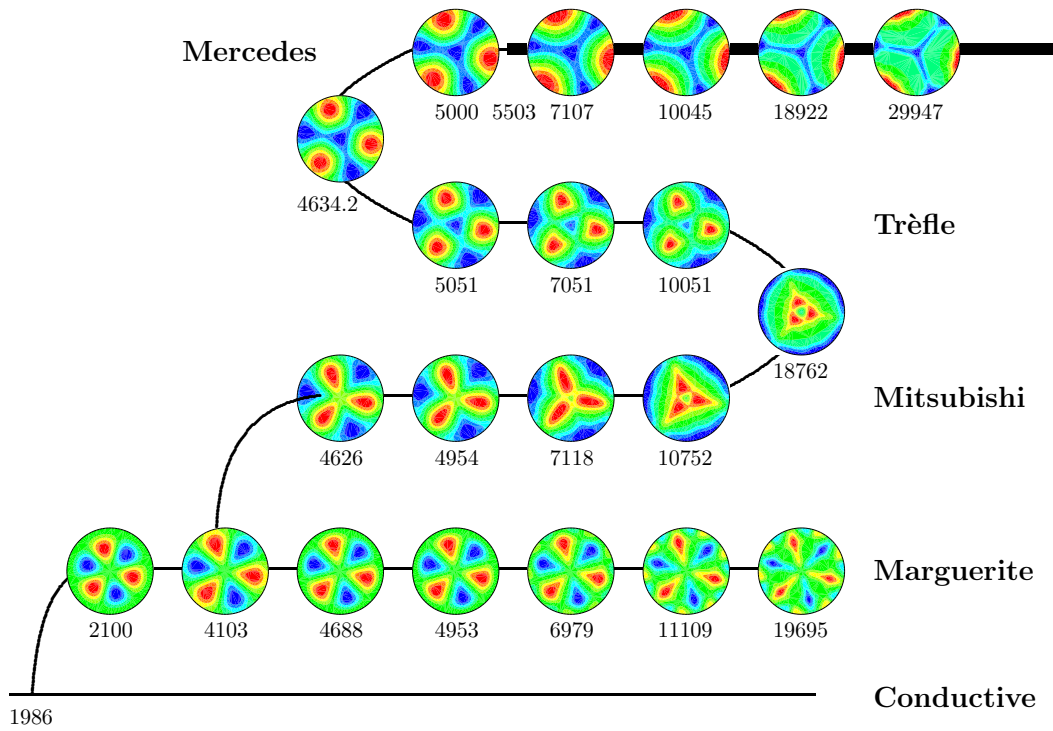


Fig.3. Diagramme de bifurcation partiel et schématique des branches ayant une symétrie de rotation d'ordre trois. La branche **Conductive** devient instable à $Ra = 1986$ vers un mode propre trigonométrique $m = 3$. La branche que nous avons nommé **Marguerite** est créée à cette bifurcation et subit une bifurcation à $Ra = 4103$ qui brise la symétrie entre le fluide chaud montant et le fluide froid descendant, ce qui mène à la branche **Mitsubishi**. Des bifurcations noeud-col à $Ra = 18762$ et à $Ra = 4634.2$ relie celle-ci aux branches **Trèfle** et **Mercedes**. Seulement la branche **Mercedes** est stable, et ceci que à partir de $Ra \geq 5503$, comme le montre le trait plein.

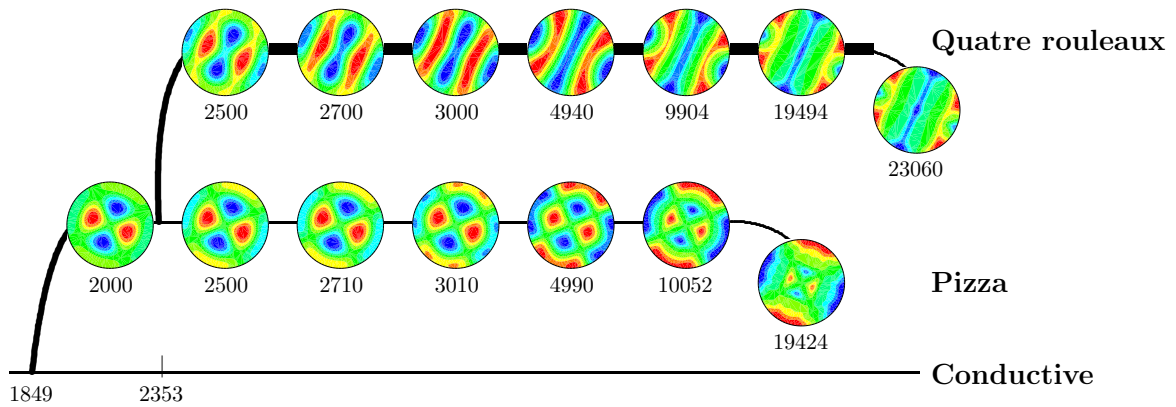


Fig.4. Diagramme de bifurcation partiel et schématique des branches issues de la bifurcation primaire ayant $m = 2$. La branche **Pizza** est créée à la bifurcation de fourche primaire à $Ra = 1849$ et existe jusqu'à $Ra \leq 19450$, où elle termine à une bifurcation noeud-col. Elle est stable pour $1878.6 \leq Ra \leq 2353$. A $Ra = 2353$, la branche pizza subit une bifurcation secondaire qui brise la symétrie entre le fluide chaud ascendant et le fluide froid descendant, menant à l'état ayant **Quatre rouleaux**. Cette branche termine à une bifurcation noeud-col à $Ra \approx 23060$. Elle est stable pour $Ra \leq 22638$.

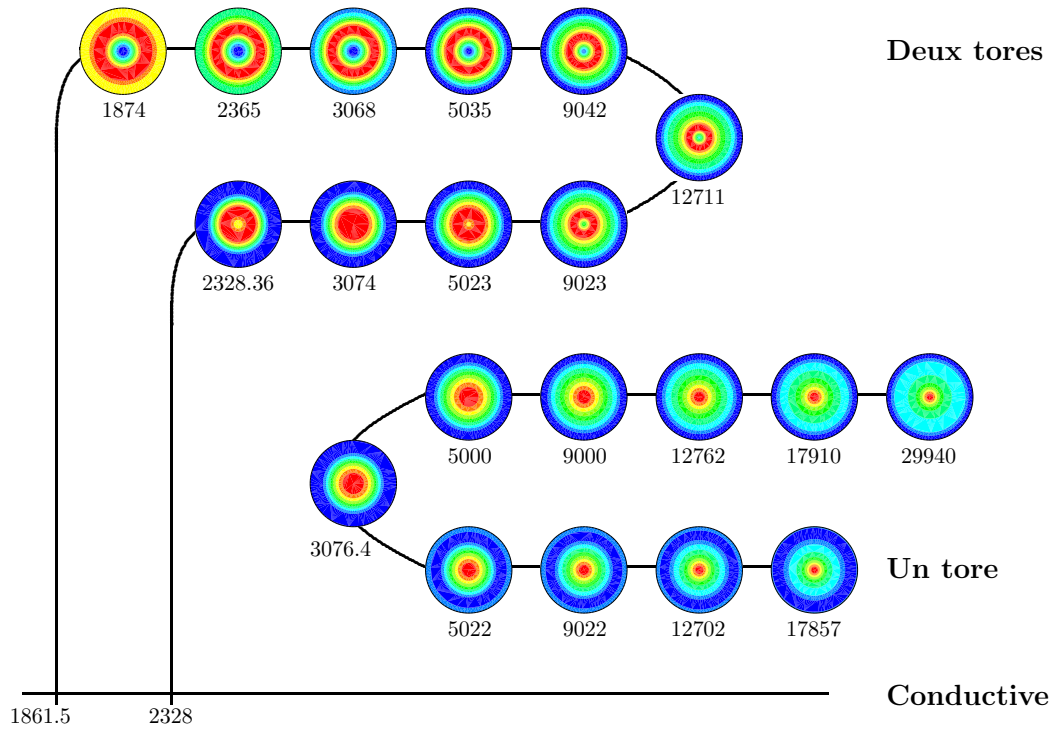


Fig.5. Diagramme de bifurcation partiel et schématique des branches axisymétriques ($m = 0$). Les deux branches supérieures résultent de deux bifurcations de fourche à partir de la branche conductive à $Ra = 1861.5$ et $Ra = 2328$. Certains de ces états contiennent deux rouleaux convectifs toroidaux (**Deux tores**). Ces deux branches se rencontrent et disparaissent à une bifurcation noeud-col à $Ra = 12711$. Deux autres branches sont issues d'une bifurcation noeud-col à $Ra = 3076.4$. Ces états contiennent un rouleau toroidal (**Un tore**). La branche supérieure est stable pour $Ra \geq 4917$ et existe au moins jusqu'à $Ra = 29940$, tandis que la branche inférieure est instable et ne peut être calculée plus loin que $Ra = 17857$.

Classification des langues chaotiques d'un laser de fibre dopée erbium par analyse topologique

Javier Used & Juan Carlos Martín

Dpto. Física Aplicada — Universidad de Zaragoza — C/Pedro Cerbuna, 12 — E50009 Zaragoza, Espagne
jcmartin@unizar.es

Résumé. Nous présentons la caractérisation par analyse topologique du comportement chaotique d'un anneau laser de fibre dopée erbium dont la puissance de pompage est modulée selon un profil sinusoïde. L'étude a été réalisée sur des séries temporelles expérimentaux aussi que numériques, pour la plage 1 - 20 KHz de fréquence de modulation de la puissance de pompage. L'accord entre les mesures et les calculs est qualitativement acceptable : tous les deux fournissent des ensembles de langues chaotiques qui se ressemblent. À plusieurs d'elles, les schémas d'attracteur chaotique (gabarits) expérimentaux et théoriques coïncident. Néanmoins, les structures caractéristiques de certains attracteurs expérimentaux ne sont pas trouvées sur les résultats numériques. Il s'agit de gabarits spécialement intéressantes parce qu'ils n'avaient pas été rapportés associés à d'autres séries temporelles expérimentaux (à notre connaissance).

Abstract. We present the characterisation by topological analysis of the chaotic behaviour of an erbium-doped fibre ring laser with sine-wave pump power modulation. The study has been carried out both on experimental and numerical time series for pump modulation frequencies within the 1 - 20 KHz range. Agreement between measurements and calculations is qualitatively acceptable : both of them provide similar sets of chaotic regions. In several cases, experimental and theoretical chaotic attractor schemes (templates) match. However, the characteristic structures of certain experimental attractors are not found numerically. It deals with especially interesting templates because they had not been reported associated to any experimental time series (to our knowledge).

1 Introduction

Les lasers de fibre dopée erbium (LFDE) ont été l'objet de nombreuses études, spécialement à cause de leurs potentielles applications comme source pour la troisième fenêtre de télécommunications, grâce à leurs propriétés spectroscopiques. Mais aussi du point de vue de la dynamique non-linéaire ces lasers présentent un grand intérêt, puisqu'ils peuvent montrer une riche variété de phénomènes non-linéaires comme autopsulation, multistabilité ou chaos [1-3]. En plus, leur simple maniabilité et le prix modéré de ses composants font d'eux des dispositifs attirants pour la recherche de plusieurs applications du chaos : contrôle du chaos, synchronisation de l'émission de deux lasers chaotiques [4] ou communication avec le chaos [5]. L'optimisation et l'éventuel intérêt pratique de ces applications dépend de la connaissance des propriétés du chaos généré par les LFDEs. Un des plus puissants outils de caractérisation du chaos c'est l'analyse topologique [6,7] : cette technique permet d'obtenir information sur l'attracteur chaotique beaucoup plus détaillé que celle fourni par d'autres paramètres (dimension fractale, exposants de Liapounov...), puisque l'analyse topologique révèle la structure de l'attracteur, laquelle peut toujours se décrire au moyen d'un gabarit. À présent, l'analyse topologique peut être appliquée aux systèmes avec trois variables dynamiques, comme c'est le cas des LFDEs, traitables comme lasers monomode.

Bien que cette technique a été déjà appliquée avec succès à plusieurs systèmes, son développement continue parce que quelques questions demeurent ouvertes. Par exemple, l'évolution du gabarit à mesure que l'on varie un certain paramètre de contrôle, liée à l'apparition ou disparition des orbites périodiques instables qui composent le spectre d'orbites de l'attracteur, n'a été étudié expérimentalement que très rarement [8]. D'un autre côté, jusqu'au moment seulement des gabarits qui suivent quelques schèmes très définis (fer à cheval, fer à cheval inversé et gâteau roulé) ont été trouvés sur un système expérimental. C'est intéressant de compter sur des nouvelles observations expérimentaux de gabarits afin de vérifier si

ce réduit nombre de schèmes augmente puisque, tandis que ce nombre soit limité, le soupçon existera d'une possible raison fondamentale qui interdit l'existence de certains gabarits. Alors, si l'étude du chaos d'un LFDE est attirante par soi-même, la méthode suivie est aussi intéressante puisque les résultats tirés peuvent contribuer au développement de la propre méthode.

Nous présentons des résultats expérimentaux des gabarits déduits à partir du signal chaotique d'un anneau LFDE dont le pompage P_p est modulé selon la fonction $P_p(t) = P_0(1 + m\cos(2\pi ft))$. P_0 , m et f représentent la puissance moyenne de pompe, le taux de modulation et la fréquence de modulation, respectivement. En balayant la fréquence f , on a observé des différentes langues chaotiques et, la plupart des cas, on a obtenu le gabarit correspondant à chaque condition de travail. Non seulement les schèmes avant mentionnés ont été trouvés, mais aussi des nouveaux schèmes. D'un autre côté, nous aussi présentons la série de gabarits tirés du signal chaotique calculé selon un modèle d'anneau LFDE [2] en considérant les mêmes conditions de modulation que les expérimentaux. Compte tenu de l'incertitude sur plusieurs paramètres à inclure dans le modèle, on trouve un accord acceptable entre les résultats expérimentaux et les calculs.

2 Description expérimentale, analyse et résultats

La Figure 1 représente un schéma du dispositif expérimental utilisée. L'anneau est composé d'un multiplexeur à travers duquel le pompage est introduit dans la cavité laser, une fibre dopée erbium, un filtre pour syntoniser la longueur d'onde laser désirée, un isolateur qui ne permet qu'un sens de circulation de la radiation laser et un coupleur qui permet de tirer à l'extérieur un pourcentage de la puissance laser de la cavité. Le laser de pompage est modulé avec un générateur et le signal laser est détecté avec une photo-diode PIN connectée à un amplificateur logarithmique dont la sortie est enregistrée par un oscilloscope. Pour chaque condition de modulation, on enregistre une série temporelle qui contient environ 10^4 périodes. Les balayages de la fréquence de modulation révèlent l'existence de nombreuses langues chaotiques séparées par régions où le comportement est périodique (Fig. 2). Il convient de souligner que la localisation des langues chaotiques dépend du sens de balayage du paramètre de contrôle, à cause de la multistabilité du système [2]. Les résultats montrés ici correspondent au sens ascendant du balayage.

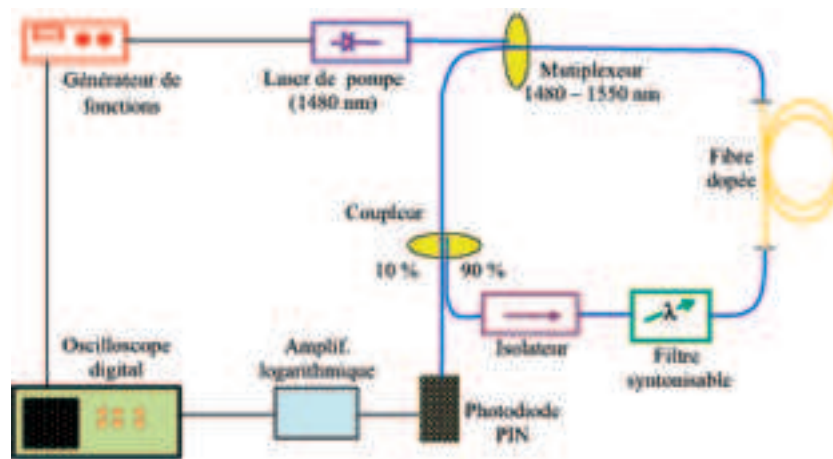


Fig.1. Dispositif expérimental. En bleu : fibre passive ; en noir : connexions électriques

Le procédé habituel de l'analyse topologique [6,7] est appliqué aux séries temporelles chaotiques trouvées : des orbites périodiques instables (OPIs) sont cherchées sur elle, on compte les *linking numbers*

entre chaque couple d'orbites aussi que les *self linking numbers* propres de chaque orbite et, si le nombre de *linking numbers* déterminés suffit, le gabarit correspondant est obtenu. Malheureusement, accomplir le dernier étage n'est toujours possible parce que soit que l'on n'a pas trouvé assez d'OPIs, soit que beaucoup des croisements entre elles ne sont pas nettes à cause du bruit, il n'y a pas de linking numbers certaines pour déterminer un gabarit unique. C'est pour ça que l'on donne plusieurs résultats possibles dans quelques cas.

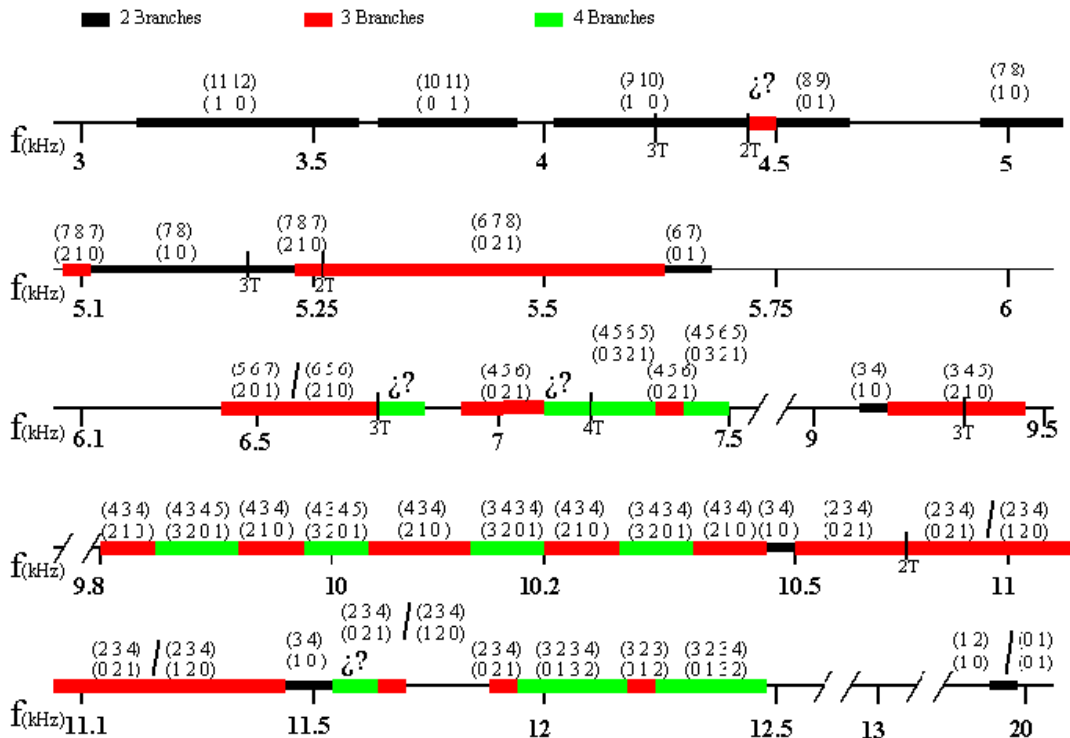


Fig.2. Gabarits expérimentaux obtenus après un balayage ascendant de la fréquence de modulation. Sur chaque région chaotique, on signale les gabarits les plus simples compatibles avec les *linking numbers* détectés (on donne les éléments de la diagonale de la matrice gabarit (au dessus) et la matrice d'insertion (au dessous)). Le point d'interrogation est mis sur les régions où il y a plus de deux gabarits du même nombre de branches, compatibles avec les *linking numbers*. $P_p = 43 \text{ mW}$; $m = 0.71$. Longueur d'onde du signal laser : 1532 nm

Sur la Figure 2, on peut apprécier que, pour les fréquences de modulation inférieures à 4.8 KHz, il y a plusieurs langues chaotiques caractérisées par des gabarits à deux branches. À la région chaotique comprise entre 4.9 KHz et 5.7 KHz, on observe la séquence de gabarits fer à cheval inversé - gâteau roulé - fer à cheval, déjà décrite en [6-9], mais avec deux séries temporelles enregistrées (qui correspondent à $f=5.1 \text{ KHz}$ et $f=5.25 \text{ KHz}$) lesquelles semblent accorder avec un gabarit à trois branches qui ne suivit pas le schème "gâteau roulé". La région comprise entre $f=6.45 \text{ KHz}$ et $f=7.5 \text{ KHz}$ contient les cas les plus difficiles à analyser : de $f=6.45 \text{ KHz}$ à $f=6.7 \text{ KHz}$, nous trouvons deux possibles solutions compatibles avec les croisements des orbites identifiées; de $f=6.7 \text{ KHz}$ à $f=6.9 \text{ KHz}$, on ne trouve pas de gabarits à trois branches et, par contre, on trouve plusieurs gabarits à quatre branches comme solutions possibles; à la fin, de $f=6.9 \text{ KHz}$ à $f=7.5 \text{ KHz}$, nous trouvons des séries qui suivent un gabarit à trois branches "gâteau roulé" et d'autres qui suivent un gabarit à quatre branches dont la structure n'est pas de "gâteau roulé". La région limitée par $f=9.1 \text{ KHz}$ et $f=9.4 \text{ KHz}$ présente aussi un "gâteau roulé" dont la particularité c'est que sa branche centrale a une torsion pair (alors, il s'agit d'un "gâteau roulé inversé"). De $f=9.8 \text{ KHz}$ à $f=12.4 \text{ KHz}$, les résultats trouvés sont très variés : il y a des "fers à cheval", des gabarits à

trois branches (quelques-uns sont des "gâteaux roulés", quelques autres ne le sont pas), des gabarits à quatre branches et, aussi, des cas où on n'a pas été possible de déterminer le gabarit. La dernière langue chaotique apparaît à $f=19.8$ KHz. Le maigre nombre d'orbites détectées ne permet pas la détermination de son gabarit.

3 Modèle et résultats des calculs

Pour le traitement du comportement dynamique d'un anneau LFDE, le modèle employé [2] consiste à un système non-autonome de deux équations couplées qui décrivent l'évolution des deux variables dynamiques choisies (en plus de la phase de la modulation), à savoir, le taux de population du niveau supérieur de la transition laser (N) et la puissance laser (P_l) :

$$dN/dt = S_1(t) - S_2(t)N + S_3P_l - S_4NP_l \quad (1)$$

$$dP_l/dt = (R_1 + R_2N)P_l \quad (2)$$

où S_3 , S_4 , R_1 et R_2 sont constants tandis que $S_1(t)$ et $S_2(t)$ dépendent linéairement de $P_p(t)$. Toutes ces paramètres, caractéristiques de chaque LFDE, peuvent s'exprimer en fonction de paramètres physiques (coefficient d'absorption de la fibre dopée, pertes de la cavité, concentration d'erbium, etc) et ils peuvent être déterminés au labo, quand-même approximativement [10]. Les conditions de modulation employées à l'expérience sont simulées avec ce modèle et pour chacune on obtient aussi une série temporelle. Si la série est chaotique, on l'applique la technique d'analyse topologique afin de déterminer le gabarit correspondant. La Figure 3 montre les résultats obtenus.

On peut observer que le résultat des calculs est une série de langues chaotiques semblable qualitativement à la série expérimentale : aux deux séries, dans la région $f < 4.9$ KHz, on obtient plusieurs langues chaotiques caractérisées par des gabarits à deux branches et, de 4.9 KHz à 12.5 KHz (expérimental) ou de 5.1 KHz à 11.2 KHz (théorique) on peut trouver des régions plus complexes, dont leurs gabarits présentent deux, trois ou quatre branches. Néanmoins, on observe aussi quelques différences. Une d'elles doit être souligné : dans tous les cas théoriques analysés, si le gabarit obtenu présente plus de deux branches, une des possibles solutions est un "gâteau roulé", pendant que sur certaines séries expérimentaux on a observé des structures hors du schéma "gâteau roulé". À présent nous ne savons pas si le modèle peut générer une série temporelle chaotique dont son gabarit ne suive pas le schéma "gâteau roulé". C'est possible que certains gabarits n'aient pas été obtenus théoriquement à cause du choix des paramètres S et R . Mais, d'un autre côté, les séries chaotiques théoriques analysés sont assez nombreuses, ce qui fait soupçonner que le modèle n'explique pas l'apparition de gabarits dont la structure ne soit pas de "gâteau roulé". Afin de trouver un accord meilleur entre les calculs et les mesures, notre programme de travail futur contient l'étude de quelques modifications du modèle.

4 Conclusion

L'analyse des séries temporelles générées par un anneau LFDE fournit une étendue ensemble de régions chaotiques dont les structures de leurs attracteurs sont très variées. Le modèle théorique employé reproduit acceptablement la série de langues chaotiques expérimentalement observé. Néanmoins, certains structures caractéristiques des attracteurs chaotiques expérimentales n'ont pas apparus dans les résultats théoriques. Un but de notre travail futur sera d'essayer de trouver ces résultats, soit avec un autre choix des paramètres du modèle, soit avec un autre modèle.

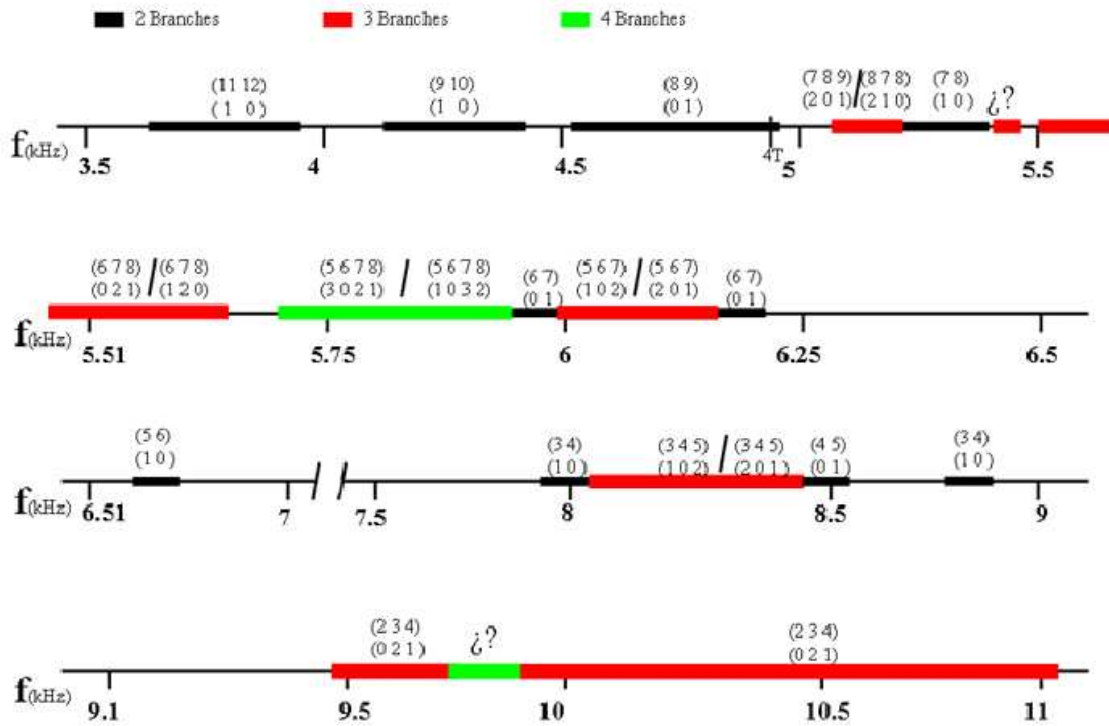


Fig.3. Gabarits théoriques obtenus après un balayage ascendant de la fréquence de modulation. Sur chaque région chaotique, on signale les gabarits les plus simples compatibles avec les *linking numbers* détectés (on donne les éléments de la diagonale de la matrice gabarit (au dessus) et la matrice d'insertion (au dessous)). Le point d'interrogation est mis sur les régions où il y a plus de deux gabarits du même nombre de branches, compatibles avec les *linking numbers*. $P_p = 43$ mW; $m = 0.71$. Longueur d'onde du signal laser : 1532 nm

Références

1. L.G. LUO, P.J. TEE & P.L. CHU, Bistability of erbium-doped fiber laser, *Optic Communications*, **146** (1-6), 151-157 (1998).
2. I.J.SOLA, J.C. MARTÍN & J.M. ÁLVAREZ, Nonlinear response of a unidirectional erbium-doped fiber ring laser to a sinusoidally modulated pump power, *Optic Communications*, **212** (4), 359-369 (2002).
3. L.G. LUO & P.L. CHU, Self-pulsation and bistability in a cw pumped erbium-doped fiber resonator system, *Optic Communications*, **135** (1-3), 116-120 (1997).
4. S. KIM, B. LEE & D.H. KIM, Experiments on chaos synchronization in two separate erbium-doped fiber lasers, *IEEE Phot. Tech. Letters*, **13** (4), 290-292 (2001).
5. L.G. LUO, P.L. CHY & H.F. LIU, 1-GHz optical communication system using chaos in erbium-doped fiber lasers, *IEEE Phot. Tech. Letters*, **12** (3), 269-271 (2000).
6. R. GILMORE & M. LEFRANC, *The Topology of Chaos* John Wiley and Sons, New York (2002)
7. R. GILMORE, Topological Analysis of Chaotic Dynamical Systems, *Reviews of Modern Physics*, **70** (4), 1455-1529 (1998).
8. G. BOULANT, M. LEFRANC, S. BIELAWSKI & D. DÉROZIER, A nonhorseshoe template in a chaotic laser model, *International Journal Bifurcations & Chaos*, **8** (5), 965-975 (1998).
9. G. BOULANT, J.PLUMECOQ, S. BIELAWSKI, D. DÉROZIER & M. LEFRANC, Model validation and symbolic dynamics of chaotic lasers using template analysis, *Proceedings of the 4th Experimental Chaos Conference*, 121-126 World Scientific, Singapore(1998).
10. I.J. SOLA, J.C. MARTÍN & J.M. ALVAREZ, 980 and 1480 nm EDF characterisation by ring tunable laser dynamic study, *Optic Communications*, **203** (3-6), 349-358 (2002).

Index

- Abcha Nizar, 1
Achour Linda, 161
Ajendouz Adbelilah, 167
Audoly Basile, 25, 155
- Beltrame Philippe, 19
Berhanu Michaël, 7
Borońska Katarzyna, 183
Bortolozzo Umberto, 79
Brunet Philippe, 13
- Chembo Yanne, 109
Chossat Pascal, 19
Citrin David, 121
Claire Nicolas, 167
Clauvelin Nicolas , 25
Cloy Christophe, 103
Crumeyrolle Olivier, 29
Cuvelier Antoine, 161
- Dalle Christophe, 49
Dauxois Thierry, 125
Deegan Robert D., 13
Deschamps Julien, 143
Dinda P. T., 85
Divoux Thibaut, 31
Doveil Fabrice, 167
Dudley John, 37
Duprat Camille, 43
- Eggers Jens, 13
Eggleton Benjamin J., 37
El Moussati Ali, 49
Erneux Thomas, 109
Escarguel Alexandre, 167
Ezerksy Alexander, 1
- Faure Thierry, 137
Fauve Stéphane, 7
Finot Christophe, 97
Freitas Ubiratan Santos, 55
- Géminard Jean-Christophe, 31
Gallet Basile, 7
Garnier Nicolas, 125
Genty Goery, 37
- Georgelin Marc, 143
Gilmore Robert, 67, 115
Ginoux Jean-Marc, 61
Giorgiutti-Dauphiné Frédérique, 43
Grelu Philippe, 85
Guenot Amélie, 97
Guermond Jean-Luc, 173
Guillerm Raphaël, 73
Guyenne Philippe, 155
- Haudin Florence, 79
- Jacquot Maxime, 109
Jaeger Steve, 167
Jamin Timothée, 155
- Kamagaté Aladji, 85
Kelai Faycal, 91
Kibler Bertrand, 97
- Léorat Jacques, 173
Lagrange Romain, 103
Larger Laurent, 109
Le Bars Michael, 155
Le Berre Martine, 155
Le Gal Patrice, 155
Lefranc Marc, 131
Lemaire François, 131
Lepiller Valérie, 73
Letellier Christophe, 55, 67, 115, 137, 161
Locquet Alexandre, 121
Lorang Li, 149
Lusseyran François, 137
- Martín Juan Carlos, 187
Melo Francisco, 31
Mercier Matthieu, 125
Meunier Patrice, 103
Millot Guy, 97
Morant Pierre-Emmanuel, 131
Mordant Nicolas, 7
Moroz Irene, 67
Muir Jean-François, 161
Mutabazi Innocent, 1, 73, 91
- Nadal François, 103

- Nana L., 1
Neukirch Sébastien, 25
Nore Caroline, 173
- Parent Benjamin, 131
Pastur Luc, 137
Peil Michael, 109
Pierre Thiéry, 167
Pocheau Alain, 143
Podvin Bérengère, 149
Pomeau Yves, 155
Prigent Arnaud, 73
- Rabarimanantsoa Herinaina, 161
Rebont Cyril, 167
Residori Stefania, 79
- Ribeiro Adolfo, 173
Rivier Nicolas, 179
Rontani Damien, 121
Rossetto Bruno, 61
Roulin Elise, 55
Ruyer-Quil C., 43
- Sciamanna Marc, 121
- Thommen Quentin, 131
Tuckerman Laurette S., 183
- Used Javier, 187
- Vandermoere Constant, 131
Vidal Valérie, 31