



C. Josserand, M. Lefranc & C. Letellier  
Éditeurs

*Poincaré*

---

Résumés des exposés de la 13<sup>e</sup>  
Rencontre du Non-Linéaire  
Paris 2010

---

13 janvier 2010



Institut Henri Poincaré

Non-Linéaire Publications



## RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE

Institut Henri Poincaré, PARIS

10–12 Mars 2010

Nous remercions vivement Cédric Villani, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, pour son aide à l'organisation de ces *Rencontres* ainsi que le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, le Centre National de la Recherche Scientifique, l'Institut Jean le Rond d'Alembert, le Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules (PhLAM), le Complexe de Recherche Interprofessionnel en Aérothermochimie (CORIA) pour leur soutien matériel et financier.

Le comité scientifique est composé de :

Amandine AFTALION	CMAP — Polytechnique
Yacine AMAROUCHÈNE	CPMOH — Bordeaux
Arezki BOUDAUD	RDP — ENS Lyon
Jean-René CHAZOTTES	CPhT — Polytechnique
Silvia DE MONTE	Ecologie & Evolution — ENS Paris
John DUDLEY	FEMTO-ST — Besançon
Sébastien GALTIER	IAS — Orsay
Christophe JOSSERAND	Institut Jean le Rond d'Alembert — Paris 6
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Patrice MEUNIER	IRPHE — Marseille
Thomas PODGORSKI	LSP — Grenoble
Laurette TUCKERMAN	PMMH — ESPCI, Paris

Les *Rencontres annuelles du Non-linéaire* sont organisées par :

Christophe JOSSERAND	Institut Jean le Rond d'Alembert — Paris 6
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Christophe LETELLIER	CORIA — Rouen

Le Colloque *Le non-linéaire, une clé des énergies de demain ?* est organisé par :

François DAVIAUD	CEA Saclay
Christophe JOSSERAND	Institut Jean le Rond d'Alembert — Paris 6
Patrice MEUNIER	IRPHE — Marseille

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

*Non Linéaire Publications*  
Bât. 510, Université de Paris-Sud, 91495 Orsay cedex

Toutes les informations concernant les *Rencontres* sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

[rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr](mailto:rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr)



## Table des matières

<b>Étude des bifurcations d'un circuit RLC non linéaire</b> <i>Mohamed Hédi Amri</i> .....	1
<b>Dynamiques toroïdales non triviales dans un laser spatio-temporel</b> <i>Dalila Amroun Aliane, Christophe Letellier &amp; Luc Pastur</i> .....	7
<b>Formes normales d'observabilité réduites non linéaires</b> <i>Driss Boutat &amp; Gang Zheng</i> .....	13
<b>Fusion bidimensionnelle d'un cristal de pics de ferrofluide</b> <i>François Boyer &amp; Eric Falcon</i> .....	19
<b>Diffusion et adsorption en milieu poreux : profil expérimental et modélisation</b> <i>Pascal Brault, Jean-Marc Bauchère, Christophe Josserand &amp; François James</i> .....	25
<b>Auto-résonance de l'instabilité Raman stimulée due à une non-linéarité d'origine cinétique dans un plasma inhomogène</b> <i>Thomas Chapman, Stefan Hüller, Paul-Edouard Masson-Laborde &amp; Wojciech Rozmus</i> .....	31
<b>Analyse de stabilité d'un modèle multiphase : application à la croissance d'un mélanome</b> <i>Clément Chatelain, Pasquale Ciarletta &amp; Martine Ben Amar</i> .....	37
<b>Bifurcations dans l'espace hyperbolique en relation avec un modèle de perception des structures visuelles par le cortex</b> <i>Pascal Chossat &amp; Olivier Faugeras</i> .....	43
<b>Pluie de solitons dans un laser à fibre</b> <i>Souad Chouli &amp; Philippe Grellu</i> .....	49
<b>Synchronisation de bursts dans des réseaux d'oscillateurs</b> <i>Nathalie Corson, Stefan Balev &amp; M. A. Aziz-Alaoui</i> .....	55
<b>Perturbations non-linéaires optimales dans un écoulement de Couette plan</b> <i>Yohann Duguet, Luca Brandt &amp; Robin B. Larsson</i> .....	61
<b>Les courbes singulières : invariants unidimensionnels des systèmes dynamiques</b> <i>Jean-Marc Ginoux, Robert Gilmore, Timothy Jones, Ubiratan Freitas &amp; Christophe Letellier</i> .....	67
<b>L'Histoire des Oscillations de Relaxation : de Gérard-Lescuyer à Van der Pol</b> <i>Jean-Marc Ginoux &amp; Loïc Petitgirard</i> .....	73
<b>Ondes modulées dans le système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température</b> <i>Raphaël Guillemin, Arnaud Prigent &amp; Innocent Mutabazi</i> .....	79

<b>Une vague auto-similaire pour l'atomisation</b> <i>Jérôme Hoepffner, Ralf Blumenthal &amp; Stéphane Zaleski</i> .....	85
<b>Adhésion d'une plaque mince sur une sphère par capillarité</b> <i>Jérémy Hure, Benoît Roman &amp; José Bico</i> .....	91
<b>Entre les lignes, la véritable contribution d'Otto Rössler à la théorie du chaos</b> <i>Christophe Letellier &amp; Valérie Messenger</i> .....	97
<b>Systèmes minimaux, symétries et ordre unimodal</b> <i>Jean-Marc Malasoma &amp; Christophe Letellier</i> .....	103
<b>Double ionisation d'atomes en champ laser intense : cas du magnésium</b> <i>François Mauger, Cristel Chandre &amp; Turgay Uzer</i> .....	109
<b>Modélisation à retard : dynamique du vecteur et transmission du virus Chikungunya</b> <i>Djamila Moulay &amp; Aziz-Alaoui</i> .....	115
<b>Dynamique des interactions patient-ventilateur durant une assistance ventilatoire nocturne</b> <i>Roomila Naeck, Dounia Bounoiare, Ubiratan S. Freitas, Herinaina Rabarimanantsoa, Adriana Portmann, Florence Portier, Antoine Cuvelier, Jean-François Muir &amp; Christophe Letellier</i> .....	121
<b>Générateur de chaos opto-électronique à double retard pour les télécommunications optiques sécurisées à haut débits</b> <i>Mourad Nourine, Laurent Larger, Yanne Kouomou Chembo, Kirill Volyanskiy &amp; Michael Peil</i> ...	127
<b>Requirements for robust entrainment of weakly forced biological oscillators</b> <i>Benjamin Pfeuty, Quentin Thommen &amp; Marc Lefranc</i> .....	133
<b>Repliement élastocapillaire contrôlé par un impact de goutte</b> <i>Marco Rivetti, Sébastien Neukirch, Christophe Josserand, Basile Audoly &amp; Arnaud Antkowiak</i> ....	139
<b>Des modèles globaux pour les interactions patient-ventilateur en ventilation non invasive</b> <i>Giovani Rodrigues, Luis A. Aguirre, Antoine Cuvelier, Jean-François Muir &amp; Christophe Letellier</i>	145
<b>Observation de structures dissipatives dans le profil transverse d'intensité d'un laser saphir-titane</b> <i>Marco Romanelli, Marc Brunel &amp; Marc Vallet</i> .....	151
<b>La détection de non-linéarité par titrage du bruit : encore une technique dépendant du choix de l'observable.</b> <i>Elise Roulin, Ubiratan Santos Freitas &amp; Christophe Letellier</i> .....	157
<b>Initialisée par Mos, activée par MPF la cascade MAPK dans les ovocytes de <i>Xénope</i></b> <i>Christophe Russo &amp; Ralf Blossey</i> .....	163
<b>Analyse du rôle des conditions aux limites acoustiques non linéaires dans les instabilités de combustion</b> <i>Thierry Schuller, Nicolas Tran, Nicolas Noiray, Daniel Durox, Sébastien Ducruix &amp; Sébastien Candel</i>	167
<b>Trafic de gouttes à une jonction</b> <i>David A. Sessoms, Laurent Courbin, Pascal Panizza &amp; Axelle Amon</i> .....	175

<b>Thermalisation anormale d’ondes unidimensionnelles</b> <i>Pierre Suret, Antonio Picozzi, Hans R. Jauslin &amp; Stéphane Randoux</i> .....	181
<b>Fluctuations hors équilibre d’une interface entre deux fluides visqueux</b> <i>Marine Thiébaud &amp; Thomas Bickel</i> .....	187
<b>Robustesse des horloges circadiennes aux fluctuations d’éclairement :</b> <b>le cas du picoeucaryote <i>Ostreococcus</i></b> <i>Quentin Thommen, Pierre-Emmanuel Morant, Benjamin Pfeuty, Florence Corellou, François-Yves Bouget &amp; Marc Lefranc</i> .....	193
<b>Dynamique de dégazage dans un milieu granulaire immergé : différents aspects</b> <i>Valérie Vidal, Germán Varas &amp; Jean-Christophe Gémard</i> .....	199
<b>« Compressive Sensing » en utilisant le Chaos</b> <i>Lei Yu, Jean-Pierre Barbot Gang Zheng &amp; Hong Sun</i> .....	205
<b>Oscillations d’expression d’un gène auto-régulé :</b> <b>interaction d’un délai de transport avec la réponse transcriptionnelle</b> <i>Jingkui Wang, Quentin Thommen &amp; Marc Lefranc</i> .....	211
<b>Index</b> .....	217



# Étude des bifurcations d'un circuit RLC non linéaire

Mohamed Hédi Amri

CEREP (Centre de Recherche en Productique), Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis, Tunisie  
 mohamed.amri@gmail.com

**Résumé.** Il s'agit d'étudier les phénomènes de bifurcations des solutions périodiques d'un circuit RLC non linéaire en faisant varier l'une des conditions initiales. Ce travail fournit une classification basée sur l'analyse du spectre et la section de Poincaré.

**Abstract.** It is about studying the bifurcation of a nonlinear dynamical system's periodic solutions while making vary one of the initial conditions. This work provides a classification based on the spectral analysis and Poincaré map.

## 1 Introduction

Le circuit RLC série à inductance saturable est le siège d'une panoplie de réponses allant du synchronisme au chaotique [1]. La variation de l'un des paramètres du circuit ou des conditions initiales peut être à l'origine d'un changement qualitatif du comportement de celui-ci. Ce changement pouvant affecter le nombre, le type et la stabilité des réponses n'est autre que le phénomène de *bifurcation* [2]. Dans cet article l'intérêt est porté à l'étude des bifurcations d'un circuit RLC série non linéaire qui, par le choix adéquat des conditions initiales, présente des anomalies de fonctionnement [3]. L'approche, adoptée pour cette étude, est basée sur l'utilisation de la section de Poincaré qui a pour but de diminuer d'une unité la dimension du problème à étudier.

## 2 Approche utilisée

### 2.1 Equations différentielles paramétrées

Soit le système dynamique paramétré non autonome suivant :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \lambda, t) \quad (1)$$

où :

- $X$  : est le vecteur dont les composantes sont les variables d'état,
- $\lambda$  : est le vecteur contenant les paramètres,
- $t$  : le temps,
- $F$  : est une fonction dépendante explicitement du temps.

Une solution du système (1) est notée  $x(\lambda)$ . L'ensemble des solutions  $x(\lambda)$ , pour  $\lambda$  décrivant  $\mathbb{R}^p$ , est appelé branche de solutions. La caractéristique principale de tels systèmes non linéaires est la grande sensibilité du comportement de ses solutions aux valeurs prises par le vecteur paramètre  $\lambda$ . En effet, une variation de  $\lambda$  peut faire passer une des grandeurs caractéristiques par une valeur critique provoquant un changement qualitatif du comportement de la solution. On dit alors que l'ensemble de solutions subit une bifurcation et le paramètre qui a causé cette modification est appelé paramètre de bifurcation [4,5].

## 2.2 La section de Poincaré

La notion de surface de section de Poincaré est utilisée lors de l'étude d'une équation différentielle. Il s'agit d'une surface de l'espace de phase choisie de telle façon qu'elle soit transverse aux trajectoires solutions du système étudié. La discrétisation ainsi réalisée permet d'associer au système différentiel considéré une transformation ponctuelle  $T_\lambda$  souvent appelée *transformation de Poincaré*.

Dans le cas d'une équation différentielle non autonome d'ordre 2, la transformation de Poincaré est générée en échantillonnant la réponse du système aux instants  $t = kT$ ,  $T$  étant la période du signal d'excitation et  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . La suite des points  $X_0, X_1, \dots, X_n$  ainsi construite constitue une trajectoire discrète dans le plan de phase discret  $(x_n, y_n)$ . Dans le cas typique où la solution est de période 1, l'image stroboscopique montre un seul point, par contre dans le cas d'une solution multipériodique, on aboutit à plusieurs points.

## 3 Circuit d'étude

Le système non linéaire d'étude est un circuit RLC série comportant, montées en série et alimentées sous une tension sinusoïdale, une résistance, une capacité et une inductance à noyau de fer saturable (Fig. 1). Ce circuit est régi par une équation différentielle non autonome d'ordre 2. La caractéristique

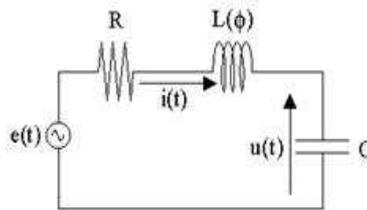


Fig. 1. Circuit RLC série.

(flux, courant) de l'inductance non linéaire est une non linéarité que nous approximations par une fonction cubique. Un tel système est décrit par :

$$Ri + \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) = e(t) \quad (2)$$

où :

- $e(t)$  : une excitation sinusoïdale (en Volts) de pulsation  $\omega$ ,  $e(t) = E_m \sin(\omega \cdot t)$ ,
- $i(t)$  : le courant dans le circuit, en Ampères,
- $\Phi(t)$ , le flux dans l'inductance à l'instant  $t$ , en Webers.

En posant :  $x(t) = \phi(t)$  et  $y(t) = u(t)$ , il vient le système différentiel suivant qui modélise le circuit RLC considéré :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = E_m \sin(\omega t) - R(ax + bx^3) - y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}(ax + bx^3). \end{cases} \quad (3)$$

## 4 Phénomènes de bifurcation et résultats de simulation

### 4.1 Bifurcation pli

Cette bifurcation est schématisée comme suit :

$$\emptyset \Leftrightarrow \text{cycle}(a, k) + \text{cycle}(r, k)$$

où le cycle  $(a, k)$  (respectivement le cycle  $(r, k)$ ) est associé à une solution périodique stable (respectivement instable) de période  $k\tau$  et où  $\emptyset$  signifie l'inexistence des deux cycles avant le point de bifurcation.

Une bifurcation pli provoque l'apparition ou la disparition de deux cycles de même ordre et de stabilités différentes, suite à la variation de l'un des paramètres du circuit  $\lambda = (E_m, \omega)$ . En faisant varier le paramètre  $E_m$  de façon croissante au point a,  $\omega$  restant constant, une variation brusque a eu lieu, saut, donnant naissance à une autre forme de trajectoire différente, point b. Partant de cette dernière trajectoire et diminuant  $E_m$ , au point c, on obtient le même phénomène de saut qui conduit à une solution différente, point d. Les points a et c correspondent à des points de bifurcation nœud-col. La figure 4 montre la succession de deux bifurcations de type pli formant ainsi une structure en lèvres.

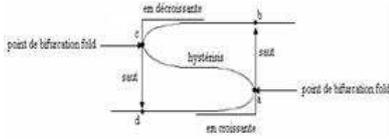


Fig. 2. Structure en lèvres.

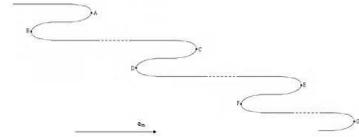


Fig. 3. Succession des points de bifurcation pli.

Les points de bifurcation sont donnés Tab. 1. La succession de ces points de bifurcation pli donne la structure de la Fig. 3. Les caractéristiques du circuit étudié aux points de bifurcation pli sont données Figs. 4.

Tab.1. Les points de bifurcation pli.

Point de bifurcation pli	$e_m$	$x_0$	$y_0$
A	48.92	0.260520	1.021510
B	22.67	0.011060	27.716600
C	129.72	0.102249	43.000380
D	112.96	0.048195	1.231538
E	304.35	-0.024320	-7.831981
F	224.449	0.408210	-4.186064
G	475.72	0.290116	-107.814

On remarque que ces solutions correspondent à des cycles de période 1 vu que la section de Poincaré se réduit à un seul point et le spectre d'amplitude est formé d'un fondamental et de ses surharmoniques.

## 4.2 Bifurcation par doublement de période

Cette bifurcation est schématisée comme suit :

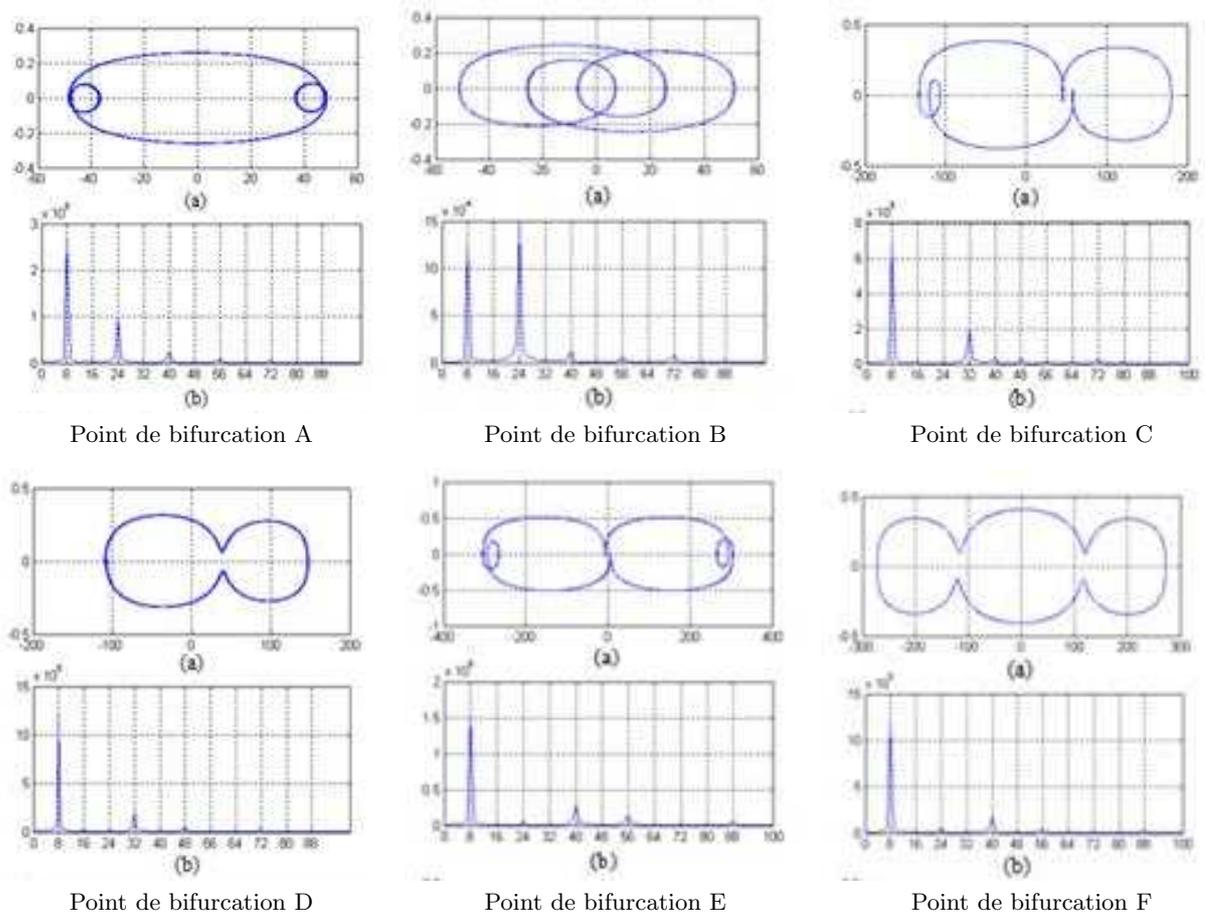
$$\text{cycle}(a, k) \Leftrightarrow \text{cycle}(a, 2 \cdot k) + \text{cycle}(r, k).$$

La succession de ce type de bifurcations de doublement de période conduit à la cascade de Myrberg — ou cascade de doublements de période — (Fig. 5) schématisée par :

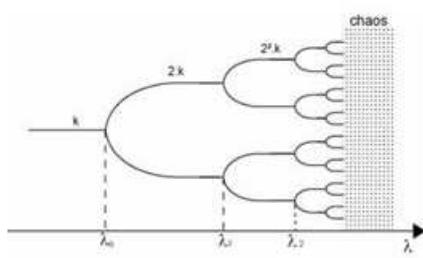
$$\text{cycle}(a, 2^i \cdot k) \Leftrightarrow \text{cycle}(a, 2^{i+1} \cdot k) + \text{cycle}(r, 2^i \cdot k)$$

Lorsque  $i$  tend vers l'infini, un chaos stable, ou instable, pouvant être observé.

La variation de  $e_m$  permet de mettre en évidence des solutions périodiques dont la période double lorsqu'on continue la variation de ce paramètre. Ces phénomènes de doublement de période apparaissent pour des valeurs rapprochées. L'augmentation de la valeur d'amplitude de l'excitation conduit à deux



**Fig. 4.** Les caractéristiques des signaux des tensions et flux aux différents points de bifurcation pli. (a) Espace d'état et (b) Spectre d'amplitude.

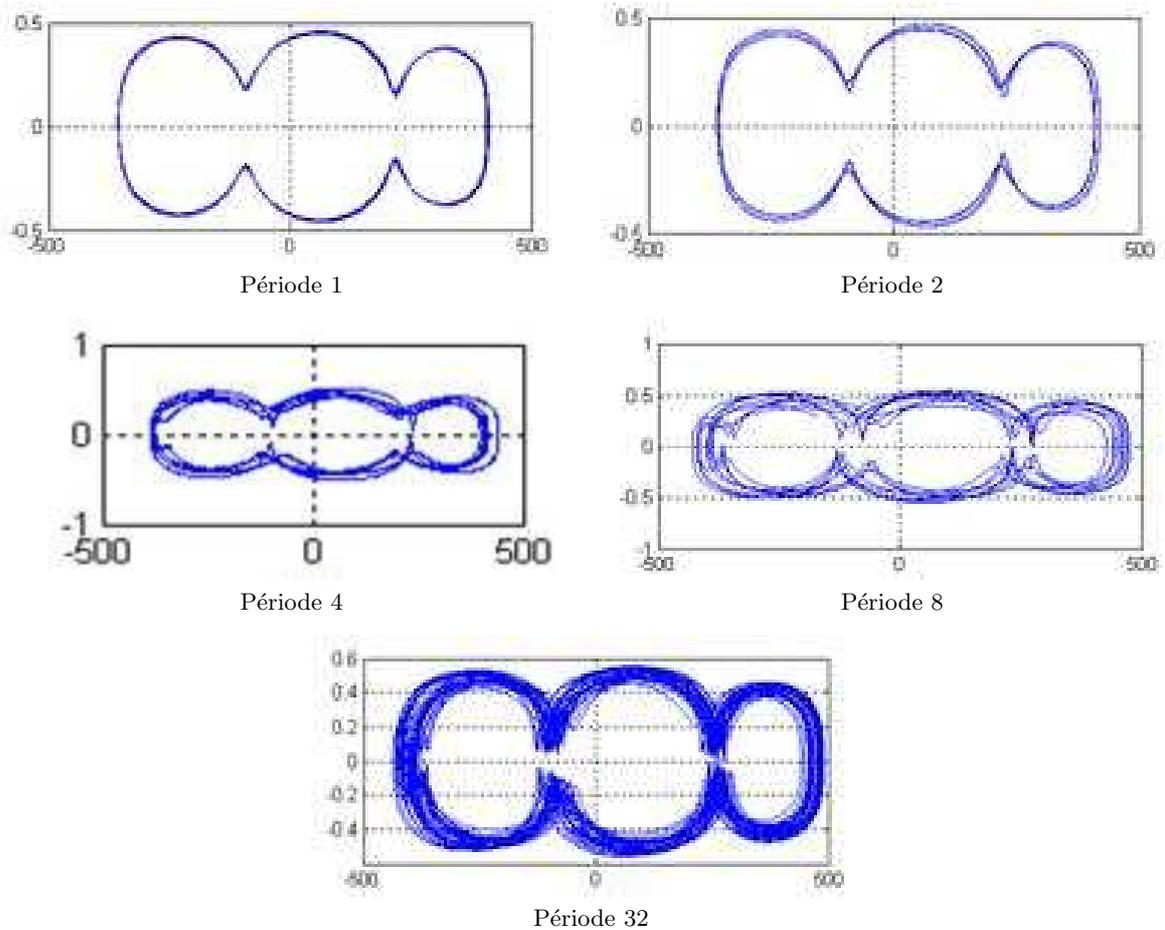


**Fig. 5.** Cascade de Myrberg.

points de bifurcation de type doublement de période du cycle de période 1. Un cycle de période  $2^m$  étant associé à une solution sous-harmonique de pulsation  $\frac{\omega}{2^m}$ , la succession des bifurcations de doublement de période qui apparaissent pour des valeurs du paramètre  $e_m$  de plus en plus rapprochées peut conduire à un comportement chaotique [6]. Les points  $C_n$  des cycles de période  $n$  sont donnés Tab. 2. Les caractéristiques des points cycles de période  $n$  sont données Fig. 6.

**Tab.2.** Les points de bifurcation par doublement de période.

Point de bifurcation par doublement de période	$e_m$	$x_0$	$y_0$
$C_1$	356.91	0.341621	-49.344575
$C_2$	443.75	0.223679	-77.406437
$C_4$	369.0656	0.3209686	-55.405785
$C_8$	395.72	0.279808	-64.260599
$C_{32}$	402.508	0.270258	-66.028420

**Fig. 6.** Caractéristiques des signaux des tensions et flux en différents points.

## 5 Conclusion

L'étude de l'équation différentielle régissant le comportement du circuit RLC à inductance saturable a permis de mettre en évidence la diversité et la non unicité des réponses de celui-ci. Dans cet article une diversité de phénomènes de bifurcations a été élaborée en utilisant les sections de Poincaré.

## Références

1. M. AMRI & M. BENREJEB, Modélisation par approche neuronale des anomalies de fonctionnement d'un circuit RLC non linéaire, *JTEA '06 Hammamet* (2006).
2. H. KHAMMARI, *Sur le comportement complexe des oscillations forcées des systèmes non linéaires soumis à une excitation sinusoïdale*, Thèse de Doctorat, E.N.I.T, Tunis (1999).
3. M. BENREJEB, *Synchronisation des systèmes continus non linéaires en régime forcé*, Thèse de Doctorat Ingénieur, Lille, (1976).
4. J. KRISHNAIAH, C. S. KUMAR & M. A. FARUQI, Modelling and control of chaotic processes through their bifurcation diagrams generated with the help of recurrent neural network models : Part 1 simulation studies, *Journal of Process Control*, **16**, 53-66 (2006).
5. H. KHAMMARI, J. P. CARCASSES & M. BENREJEB, Sur une structure particulière de bifurcations des solutions périodiques d'un circuit RLC série, *JTEA Hammamet*, pp. 224-231 (1997).
6. B. CANNAS, S. CINCOTTI, M. MARCHESI & F. PILO, Learning of Chua's circuit attractors by locally recurrent neural networks, *Chaos, Solitons & Fractals*, **12**, 2109-2115 (2001).

# Dynamiques toroïdales non triviales dans un laser spatio-temporel

Dalila Amroun Aliane<sup>1</sup>, Christophe Letellier<sup>2</sup> & Luc Pastur<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LEQ, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, BP 32, Bab Ezzouar, 16111 Alger

<sup>2</sup> CORIA-UMR 6614, Université de Rouen, BP 12, 76801 St-Etienne du Rouvray cedex

<sup>3</sup> LIMSI-CNRS, Université de Paris Sud, BP 133, Bât 508, 91403 Orsay cedex

amroun\_dalila@yahoo.fr

**Résumé.** La dynamique d'un laser monomode à élargissement homogène est étudiée par l'intermédiaire de portraits de phase, d'applications de premier retour et de diagrammes spatio-temporels. Une route vers le chaos est plus particulièrement décrite, montrant que le chaos suit un scénario de Ruelle-Takens se terminant par une transition vers le chaos selon le scénario de Curry-Yorke (plissements du tore). Les dynamiques toroïdales qui en résultent sont non triviales dans la mesure où les tores  $T^n$  doivent être plongés dans des espaces de dimension au moins  $n + 2$ .

**Abstract.** The dynamics of a homogeneously broadened single-mode laser is investigated by using phase portraits, first-return maps and spatio-temporal diagrams. One particular route to chaos is described in details, showing that the chaotic behavior occurs after a Ruelle-Takens scenario ended by a transition to chaos according to the Curry-Yorke scenario (foldings on the torus). Toroidal dynamics resulting from that road are non trivial in the sense that tori  $T^n$  must be embedded within space whose dimension is at least  $n + 2$ .

## 1 Introduction

L'étude des systèmes spatio-temporels à l'aide des outils de la théorie des systèmes dynamiques non-linéaires n'est pas une tâche aisée : théoriquement, l'espace des phases est de dimension infinie. Néanmoins, lorsque la dynamique peut être plongée dans un espace des phases de « basse » dimension, l'analyse peut être menée à bien et révéler des scénarios très intéressants. De précédents travaux ont montré qu'il était possible de s'affranchir de la difficulté liée à la dépendance spatiale du système dynamique : ainsi nous avons démontré récemment l'existence d'un lien entre la structure des applications de premier retour et l'apparition des défauts sur les diagrammes spatio-temporels dans un laser [1,2,3]. D'autre part, dans un système hydrodynamique spatio-temporel, une intermittence de modes fréquents a été mise en évidence dans une expérience d'écoulement en cavité ouverte grâce à l'utilisation d'une dynamique symbolique [4].

En plus de la complication due à l'extension spatiale de ces systèmes dynamiques, la complexité inhérente à la dynamique rend encore plus difficile toute tentative d'analyse. C'est notamment le cas des dynamiques quasi-périodiques qui, si elles sont couramment étudiées par le biais d'applications discrètes [5,6,7], les études de systèmes continus (flots) demeurent rares [8]. L'apparition d'une structure toroïdale fait toujours suite à une série de bifurcations, autrement dit une *route vers le chaos*. L'une des routes les plus connues correspond à une explosion du tore après la troisième bifurcation de Hopf : c'est le scénario de Ruelle et Takens [9]. Parmi les différentes possibilités d'explosion du tore, il y a aussi la déstabilisation d'un tore  $T^2$  par plissement tel que l'ont proposé Curry et Yorke [10]. Citons également la bifurcation globale induisant une explosion d'un tore  $T^2$  suivant un scénario établi par Baptista et Caldas [11] et retrouvé dans une expérience de tube à décharge représentant un système spatio-temporel [12]. Leurs résultats confirment ainsi que l'explosion du tore est aussi une route vers le chaos spatio-temporel.

Dans cette contribution, nous mettons en évidence un nouveau scénario d'explosion du tore impliquant cette fois un tore  $T^3$ . Ce scénario complexe est une composition du scénario de Ruelle et Takens avec un scénario de Curry et Yorke. C'est la première fois à notre connaissance qu'une telle succession de bifurcations est mise en évidence dans un système dynamique, et de surcroît spatio-temporel.

## 2 Modèle d'un laser monomode à élargissement homogène

Le laser monomode à élargissement homogène qui constitue le système dynamique est décrit par les équations de Maxwell-Bloch normalisées avec diffraction dans la direction  $x$  [13,14,15] :

$$\begin{cases} \partial_t e = -\sigma(e - p) + iA\partial_x^2 e \\ \partial_t p = -(1 - i\delta)p + ed \\ \partial_t d = -\gamma(d - r + \frac{1}{2}(ep^* + e^*p)) \end{cases} \quad (1)$$

Les quantités normalisées  $e$ ,  $p$  et  $d$  sont respectivement le champ électrique, la polarisation macroscopique et l'inversion de population. Les paramètres  $\gamma = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$  et  $\sigma = \gamma_{\ell}/2\gamma_{\perp}$  se définissent à partir du taux de relaxation de la polarisation  $\gamma_{\perp}$ , de l'inversion de population  $\gamma_{\parallel}$  et de l'intensité optique  $\gamma_{\ell}$ . Le temps est normalisé par rapport à la durée de vie de la cohérence  $\tau_{\perp} = 1/\gamma_{\perp}$ . Le désaccord de fréquence  $\delta = (\omega - \omega_a)/\gamma_{\perp}$  représente la différence, normalisée, entre la fréquence du champ  $\omega$  et celle de la transition atomique résonante  $\omega_a$ .  $A$  est le paramètre de diffraction, et  $r$  le taux de pompage. L'opérateur différentiel partiel  $\partial/\partial t$  est noté par  $\partial_t$ , et ainsi de suite.

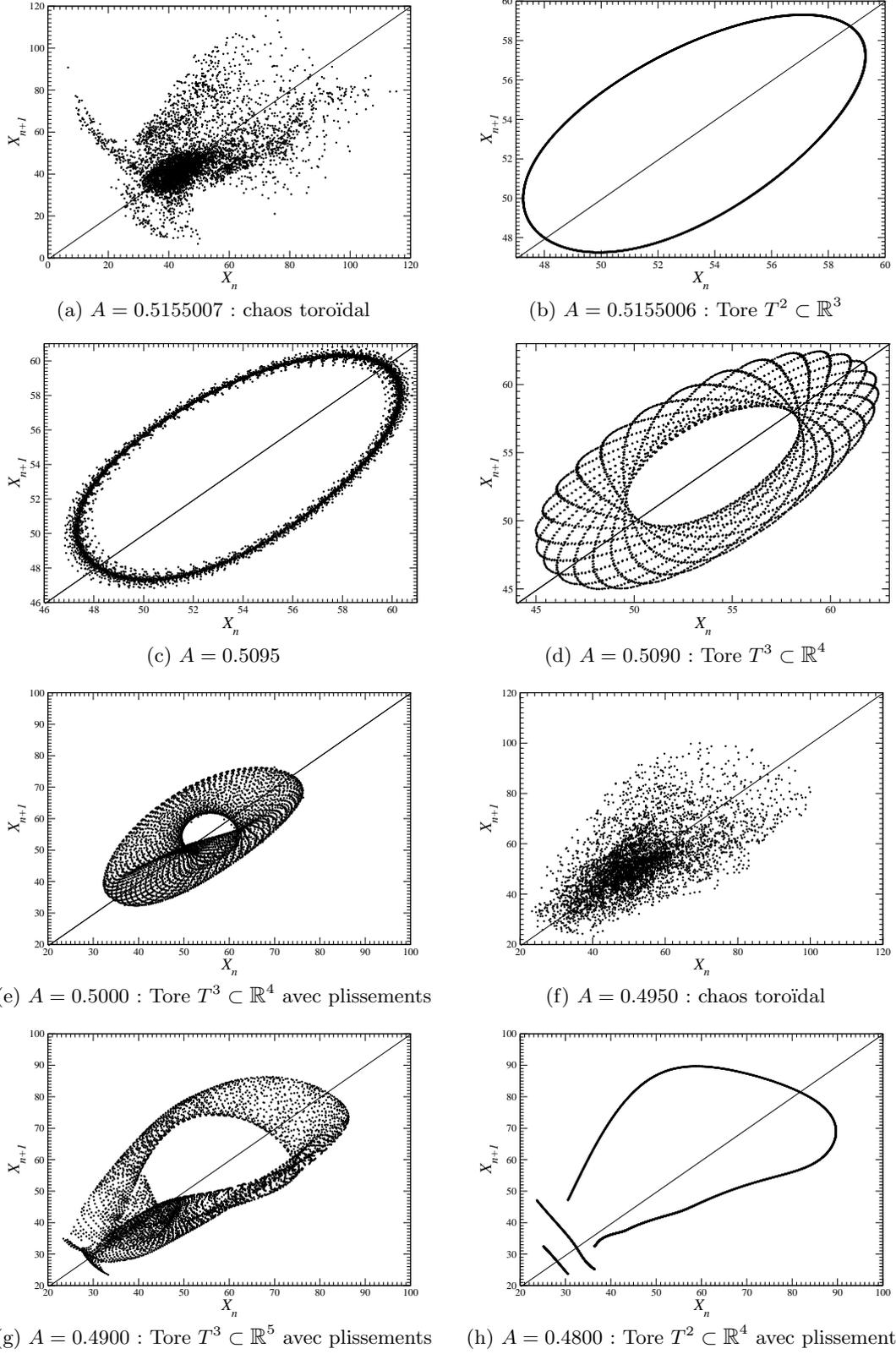
## 3 Dynamiques temporelles toroïdales

Nous avons effectué plusieurs simulations numériques de l'intensité laser dans le temps et l'espace  $x$  pour différentes valeurs du paramètre  $A$ , considéré comme paramètre de bifurcation. Les séries temporelles correspondent à l'intensité laser calculée au point de coordonnée  $x = 0$ . Les portraits de phase sont reconstruits à partir de l'intensité laser en utilisant un plongement différentiel (coordonnées dérivées). Toute section de Poincaré effectuée sur un attracteur est définie dans le plan ( $X = I, Z = \ddot{I}$ ) par  $Y = \dot{I} = 0$  et  $Y < 0$ .

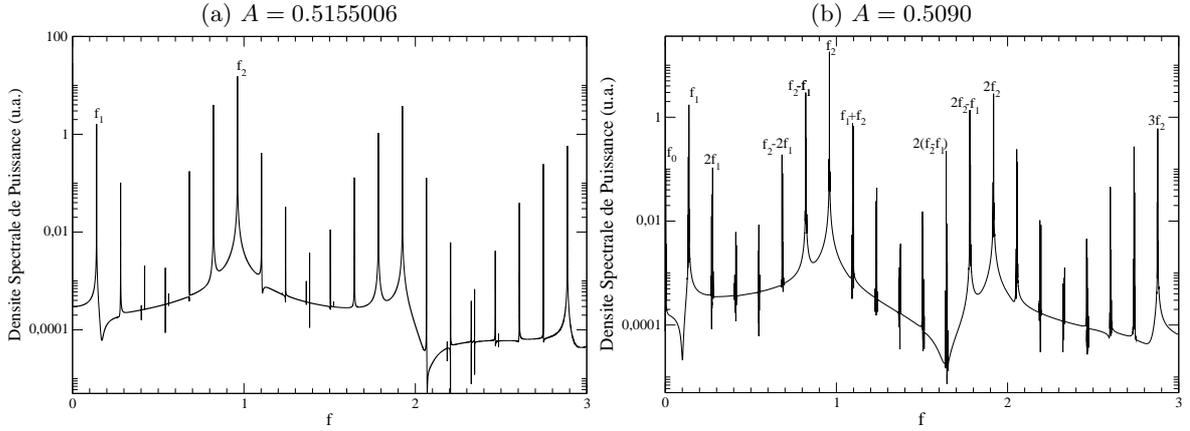
Choisissons de commencer notre étude pour  $A = 0.5155006$  correspondant à l'application de premier retour annulaire (Fig. 1b). Nous avons là une structure typique d'un régime quasi-périodique sur un tore  $T^2$  qui peut être plongé dans un espace  $\mathbb{R}^3$  : classique, ce comportement se structure essentiellement autour de deux fréquences incommensurables (Fig. 2a). Lorsque le paramètre  $A$  est légèrement diminué, une bifurcation de Hopf introduit une troisième fréquence (Fig. 1c & 2b) qui transforme le tore  $T^2$  en un tore  $T^3$  (Fig. 1d) qui doit désormais être plongé dans  $\mathbb{R}^4$  pour une représentation sans auto-intersection de la trajectoire. Pour  $A = 0.5$ , le tore  $T^3$  commence à se plisser (Fig. 1e). Ces plissements se développent suffisamment pour provoquer une explosion du tore autour de  $A = 0.495$  où le comportement devient un chaos toroïdal (Fig. 1f). Lorsque le paramètre  $A$  est encore diminué ( $A = 0.49$ ), la dynamique se restructure autour d'un tore  $T^3$  à la surface suffisamment plissée (Fig. 1g) pour qu'il ne soit plus possible de visualiser sa projection dans une section de Poincaré — tridimensionnelle puisqu'un tore  $T^3$  est plongé dans un espace de dimension au moins égale à 4 — et qui suggère, par conséquent, une dimension de plongement qui pourrait être de 5. Les calculs de dimension de plongements par détection des faux plus proches voisins [16] indiquent systématiquement une dimension inférieure d'une unité à la dimension attendue : cette sous-estimation est probablement due au rapport  $f_1/f_0 \approx 42$  qui interdit de visiter suffisamment la structure pour détection fiable de la dimension de plongement. La superposition de deux trajectoires issues de conditions initiales voisines permet de vérifier l'absence de l'amplification exponentielle de la divergence des trajectoires : la dynamique est donc quasi-périodique pour  $A = 0.49$ . Enfin une bifurcation inverse de Hopf détruit une fréquence pour redonner un tore  $T^2$  (Fig. 1h) ; toutefois, la structure plissée demeure, interdisant une représentation correcte — sans auto-intersection — de ce tore dans  $\mathbb{R}^3$ . C'est pour cette raison qu'il est impossible d'obtenir une application de premier retour à la structure annulaire comme cela avait été le cas pour  $A = 0.5155006$  (Fig. 1b). Le diagramme de bifurcations peut se résumer à :

$$T^2 \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{Hopf}} T^3 \subset \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{plissement}} \text{Chaos} \longrightarrow T^3 \subset \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\text{Hopf}^{-1}} T^2 \subset \mathbb{R}^4,$$

c'est-à-dire à un scénario de Ruelle-Takens où le passage au chaos se fait par plissement comme dans le scénario de Curry-Yorke.



**Fig. 1.** Applications de premier retour à une section de Poincaré  $(X, Z)$  définie par  $Y = 0$  et  $\dot{Y} = Z < 0$ , sur la variable  $X = I$ , pour des valeurs décroissantes de  $A$ . Les autres paramètres sont  $\sigma = 3$ ,  $\gamma = 1$ ,  $r = 30$  et  $\delta = -2$ .



**Fig. 2.** Spectres de Fourier de l'intensité laser pour les régimes quasi-périodiques à 2 (a) puis à 3 fréquences (b). Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

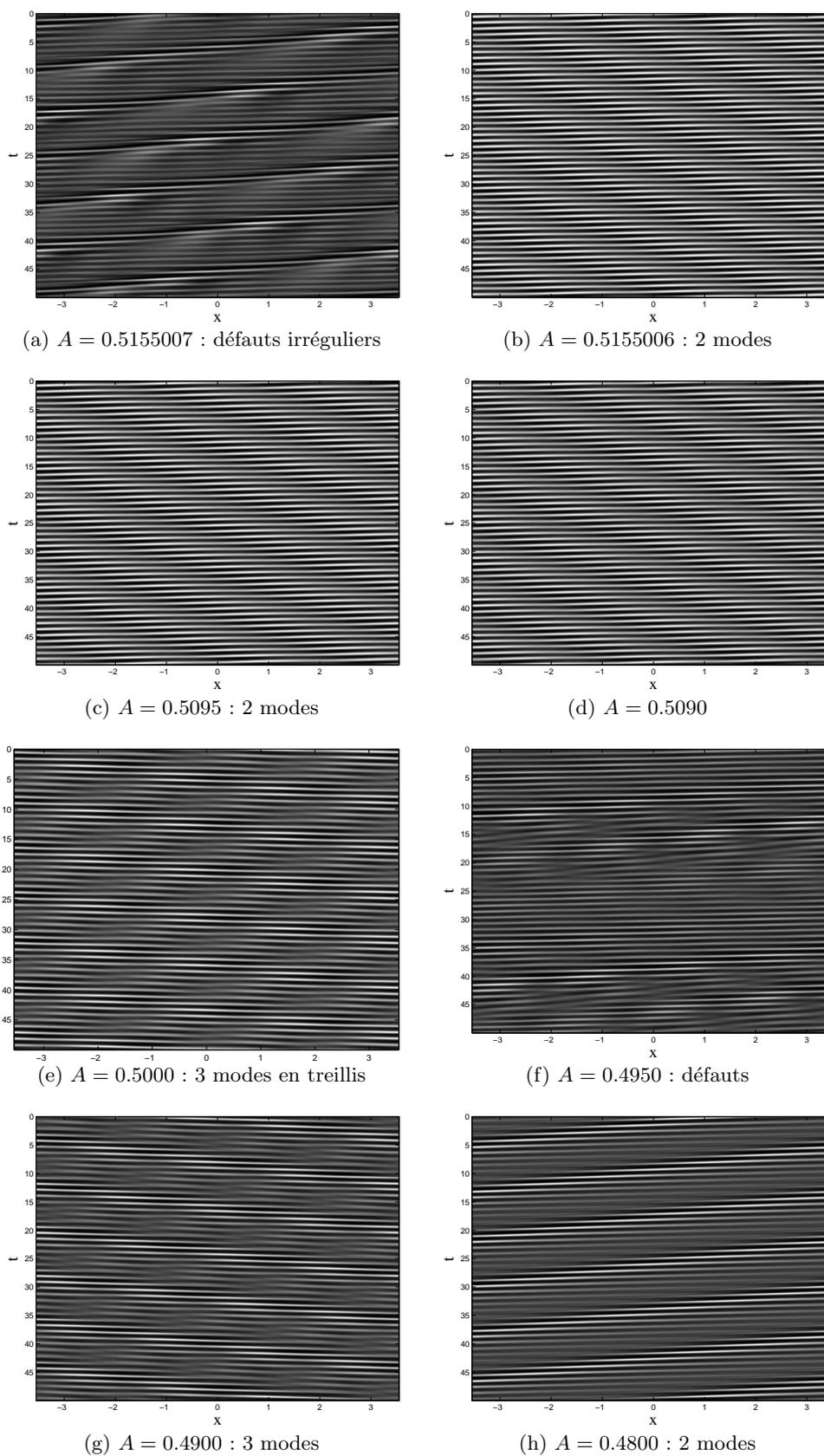
#### 4 Conséquences sur les diagrammes spatio-temporels

Cette succession de régimes dynamiques se traduit par des modifications notables de la structure des diagrammes spatio-temporels. Lorsque le régime est quasi-périodique  $T^2$  ( $A = 0.5155006$ ), le diagramme révèle deux ondulations — deux modes — l'une étant horizontale, l'autre étant selon la seconde bissectrice (Fig. 3b). Une troisième apparaît à peine lors de l'apparition du quasi-périodique  $T^3$  ( $A = 0.509$ , Fig. 3d) en raison du grand rapport sur les fréquences  $\frac{f_1}{f_0} \approx 42$ . Il est intéressant de noter que les plissements se traduisent par une troisième ondulation très visible (Fig. 3e) sur les diagrammes spatio-temporels : toutefois aucun défaut n'est remarqué. Ces derniers n'apparaissent qu'à l'explosion du tore ( $A = 0.495$ ) : leurs localisations dans le diagramme sont irrégulières (Fig. 3f). Lorsque la dynamique redevient quasi-périodique ( $A = 0.49$ ), les créations et annihilations des défauts ont pratiquement disparu : il ne demeure que des créations-annihilations sans perturbation de la structure globale (Fig. 3g). Ces événements apparaissent de manière régulière dans le diagramme. Une fois la dynamique retrouvée sur un régime quasi-périodique  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$  ( $A = 0.48$ ), nous retrouvons un diagramme typique d'un quasi-périodique  $T^2$ , sans aucune signature de la nature quadri-dimensionnelle de la dynamique temporelle.

Le régime quasi-périodique  $T^2 \subset \mathbb{R}^3$  pour  $A = 0.5155006$  précède, lorsque le paramètre  $A$  est augmenté, une autre explosion du tore conduisant à une dynamique chaotique plus raide (Fig. 1a) que celle rencontrée pour  $A = 0.495$  (Fig. 1f) : cette seconde explosion pourrait s'apparenter à ce que l'on rencontre lors du scénario mis en évidence par Baptista et Caldas [11], comme le suggère les deux « bras » sur la partie gauche de l'application de premier retour. Cette explosion pourrait résulter d'une crise de frontière alors que celle apparaissant entre 0.495 et 0.5 serait plutôt du type crise intérieure. La raideur du chaos étant plus grande, le diagramme spatio-temporel présente des défauts survenant de manière beaucoup plus irrégulière (Fig. 1a) que dans le chaos toroïdal observé à  $A = 0.495$ .

#### 5 Conclusion

Nous avons effectué l'analyse dynamique de régimes issus d'un système spatio-temporel, correspondant à un laser monomode à élargissement homogène. À l'aide des portraits de phase, des applications de premier retour et des diagrammes spatio-temporels, des régimes quasi-périodiques complexes à deux et à trois fréquences ont été mis en évidence. Le scénario observé se présente comme une combinaison d'un scénario de type Ruelle-Takens avec un passage au chaos par apparition de repliements qui s'apparente ainsi à un scénario de Curry-Yorke. En conséquence, les dynamiques toroïdales deviennent non triviales et ne sont plus de simples tores  $T^n$  plongés dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  mais des tores  $T^n$  plongés dans des espaces de



**Fig. 3.** Diagrammes spatio-temporels pour des valeurs décroissantes de  $A$ . Les autres paramètres sont identiques à ceux de la Fig. 1.

dimension au moins  $n + 2$ . La première difficulté rencontrée avec ces tores non triviaux réside dans le fait que les sections de Poincaré — ou de manière équivalente, les applications de premier retour — ne soient plus de simples « boucles fermées » sans auto-intersection mais apparaissent avec des segments disjoints.

La difficulté d'interprétation provient d'une structure qui doit être plongée au moins dans un espace de dimension 5. La représentation de ces objets s'apparente à celle d'une bouteille de Klein : comment se représenter une surface qui se connecte à elle-même par l'intérieur ? C'est ce qui se passe dans certaines configurations toroïdales où la trajectoire spirale autour du tore avant de recommencer une nouvelle bouffée de par l'intérieur du tore...

Enfin, les repliements de ces dynamiques toroïdales non triviales semblent n'avoir que peu d'effet — sur l'apparition des défauts — sur les diagrammes spatio-temporels qui ne restent affectés que par les modes actifs. Précisons qu'un régime quasi-périodique est *a priori* associé à un diagramme sans défaut, ou au mieux apparaissant régulièrement, traduisant tout l'intérêt qu'il y a à utiliser simultanément les interprétations temporelles et spatio-temporelles.

## Références

1. D. AMROUN, C. LETELLIER, L. PASTUR, M. BRUNEL, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Spatio-temporal dynamics versus temporal analysis : What can we learn ?, *First International Seminar on Fluid Dynamics and Materials Processing FDMP'2007*, Alger, 2-4 juin (2007).
2. D. AMROUN ALIANE, L. PASTUR, C. LETELLIER, M. BRUNEL, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, A link between spatio-temporal and temporal dynamics of a laser, *Dynamics Days Europe 2008*, Delft, 25-29 août (2008).
3. D. AMROUN ALIANE, L. PASTUR, M. BRUNEL, H. LEBLOND, F. SANCHEZ & C. LETELLIER, Analyse de dynamiques spatio-temporelles d'un laser, *Comptes-Rendus de la 12e Rencontre du Non-Linéaire*, 1-6, Paris, 12-13 Mars 2009.
4. F. LUSSEYRAN, L. PASTUR & C. LETELLIER, Dynamical analysis of an intermittency in an open cavity flow, *Physics of Fluids*, **20**, 114101 (2008)
5. V. S. AFRAIMOVICH & L. P. SHILNIKOV, On invariant two-dimensional tori, their breakdown and stochasticity, *American Mathematical Society Translations (series 2)*, **149**, 201-212 (1991).
6. Z. T. ZHUSUBALIYEV & E. MOSEKILDE, Birth of bilayered torus and torus breakdown in a piecewise-smooth dynamical system, *Physics Letters A*, **351** (3), 167-174 (2006).
7. P. S. DUTTA, S. DE, S. BANERJEE & A. R. ROY, Torus destruction via global bifurcations in a piecewise-smooth, continuous map with square-root nonlinearity, *Physics Letters A*, **373** (48), 4426-4433 2009.
8. C. LETELLIER, V. MESSEGER & R. GILMORE, From quasi-periodicity to toroidal chaos : analogy between the Curry-Yorke map and the van der Pol system, *Physical Review E*, **77** (4), 046203, 2008.
9. D. RUELLE & F. TAKENS, On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, **20**, 167-192 (1971) .
10. J. H. CURRY & J. A. YORKE, The structure of attractors in dynamical systems, *Lecture Notes in Mathematics*, **668**, 48-66 (1978).
11. M. N. BAPTISTA & I. L. CALDAS, Dynamics of the two frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit, *Physics Review E*, **58**, 4413-4420 (1998).
12. C. LETELLIER, A. DINKLAGE, H. EL-NAGGAR, C. WILKE & G. BONHOMME, Experimental evidence for a torus breakdown through a global bifurcation in a glow discharge plasma, *Physics Review E*, **63**, 042702 (2001).
13. P. K. JAKOBSEN, J. V. MOLONEY, A. C. NEWELL & R. INDIK, Space-time dynamics of wide-gain-section lasers, *Physics Review A*, **45**, 8129-8137 (1992).
14. D. AMROUN, *Dynamiques spatio-temporelles d'un laser monomode. Influence des effets spatiaux et des interactions dipôle-dipôle*, Thèse de Doctorat, Université de Rouen (juillet 2004).
15. D. AMROUN, M. BRUNEL, C. LETELLIER, H. LEBLOND & F. SANCHEZ, Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers, *Physica D*, **203**, 185-197 (2005).
16. L. CAO, Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series, *Physica D*, **110** (1 & 2), 43-52 (1997).

# Formes normales d'observabilité réduites non linéaires

Driss Boutat<sup>1</sup> & Gang Zheng<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ENSI de Bourges, Institut PRISME, 10, Boulevard Lahitollé 18020 Bourges Cedex

<sup>2</sup> INRIA Lille-Nord Europe, 40, avenue Halley, 59650 Villeneuve d'Ascq.

driss.boutat@ensi-bourges.fr, gang.zheng@inria.fr

**Résumé.** Dans ce papier on donne une nouvelle forme normale d'observabilité non linéaire adaptée à l'observateur réduit. Puis, on expose les conditions géométriques nécessaires et suffisantes qui permettent de dire si un système non linéaire avec des sorties multiples peut se mettre, à un changement de coordonnées près, sous une telle forme normale. D'une part, Cette forme normale permet d'éviter la redondance des mesures et d'autre part, elle élargit la classe de systèmes dynamiques non linéaires qui admettent un observateur robuste.

**Abstract.** This paper presents a nonlinear canonical form which is used for the design of a reduced order observer. We give sufficient and necessary geometric conditions, which enable to determine whether a special class of nonlinear systems with multi-outputs can be transformed, by a change of coordinate, to the proposed nonlinear canonical form. This normal form can firstly avoid the redundancy of the measurements, and secondly represent a larger class of nonlinear systems for which we can design a more robust observer.

## 1 Introduction

Un observateur est un moyen de mesure "informatique" qui permet de retrouver les états d'un système industriel en ayant un minimum d'informations sur une partie de ces états. Cette information est obtenue à l'aide d'un capteur. Une manière brute d'observer les états d'un système est de dériver numériquement l'information mesurée grâce aux capteurs. L'expérience a montré que cette méthode a l'inconvénient de donner des résultats erronés à cause de l'amplification d'erreurs due, par exemple, à des imperfections de mesures. Pour remédier à ce problème, Luenberger a introduit en 1971 l'observateur comme étant un système dynamique constitué, du modèle du système réel corrigé par la mesure fournie par les capteurs [1].

En 1983 Krener et Isidori ont étudié une forme d'observabilité canonique pour les systèmes avec un capteur [2] et, en 1985, Krener et Respondek ont introduit la forme d'observabilité canonique non linéaires (FCON) pour les systèmes à sorties multiples suivants [3] :

$$\dot{z} = Az + \beta(\bar{y}) \quad (1)$$

$$\bar{y} = Cz \quad (2)$$

où  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  et  $C$  sont les formes de Brunovsky ou compagnons d'observabilité. Sous la forme (1)-(2), on peut appliquer l'observateur robuste suivant :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(\bar{y}) + K(\bar{y} - \hat{y}) \quad (3)$$

de sorte que la dynamique de l'erreur de l'observation  $e = z - \hat{z}$  soit linéaire :

$$\dot{e} = (A - KC)e. \quad (4)$$

Grâce à cette dernière équation, le problème de la mise sous forme FCON s'appelle aussi le problème de linéarisation de l'erreur d'observation. Ce problème revient donc à caractériser les systèmes non linéaires de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5)$$

$$y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (6)$$

qui sont transformables via un changement de coordonnées  $z = \phi(x)$  sous la forme canonique d'observabilité non linéaire (FCON) (1-2).

Depuis quelques années, plusieurs chercheurs se sont intéressés au problème de linéarisation [4-11]. L'observateur de Luenberger [12] permet d'estimer les états inconnus ainsi que les états mesurés (les sorties). Pour éviter la redondance dans les mesures, il a introduit l'observateur réduit. A notre connaissance, jusqu'aujourd'hui, la notion d'observateur réduit n'est jamais introduite pour les systèmes non linéaires. Ce papier est consacré à l'introduction de cette notion pour les systèmes non linéaires. Ceci, d'une part, comme pour les systèmes linéaires, va éviter la redondance des mesures et d'autre part va augmenter la classe des systèmes qui admettent un observateur robuste. Le paragraphe qui suit donnera les notations et une définition d'un observateur réduit. La section 3 donnera les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un difféomorphisme qui permet la mise sous cette forme. La section 4 présentera un exemple académique de la mise sous forme normale réduite.

## 2 Notations et définition

On commencera cette section par une définition d'un observateur réduit. Puis, pour fixer les idées on donnera un exemple. Sans perte de généralité, on considère un système dynamique sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x) \\ \dot{x}_2 = F_2(x) \\ y = x_2 \end{cases} \quad (7)$$

où  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système et  $y = x_2$  est l'état mesuré. On dit aussi que  $y$  est la sortie du système dynamique.

**Définition 1.** On dit qu'un système dynamique de la forme :

$$\dot{\hat{x}}_1 = \tilde{F}_1(\hat{x}_1, x_2) \quad (8)$$

est un observateur réduit du système dynamique (7) si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_1(t) - x_1(t)\| = 0. \quad (9)$$

Rappelons un résultat bien connu pour les systèmes linéaires, c'est-à-dire qu'un système de la forme (7) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \quad (10)$$

où les  $A_{ij}$  sont des matrices. Il est facile de voir [12] qu'un tel système dynamique a pour observateur réduit :

$$\dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}x_2 + K(A_{21}x_1 - A_{21}\hat{x}_1), \quad (11)$$

avec  $A_{21}x_1 = \dot{y} - A_{22}y$ . En effet, l'erreur de l'observation  $e = \hat{x}_1 - x_1$  est régie par la dynamique linéaire suivante :

$$\dot{e} = (A_{11} - KA_{21})e, \quad (12)$$

qui est stabilisable par  $K$ , dès que la paire  $(A_{11}, A_{21})$  est observable.

*Remarque 1.* l'observateur réduit introduit (11) par Luenberger [12] permet d'éviter la redondance dans les mesures. Cependant, la nouvelle sortie  $A_{21}x_1$  peut contenir plus d'informations que ce que l'on a besoin. L'exemple qui suit montre bien ce fait.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \zeta + \vartheta, \dot{x}_2 = x_1, \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{\zeta} &= x_3 + \zeta, \dot{\vartheta} = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ y &= (\zeta^T, \vartheta^T)^T, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix},$$

ce qui montre que pour faire un observateur réduit, on aura uniquement besoin de l'information provenant de l'équation  $\dot{\zeta} = x_3 + \zeta$ . Par la suite, on tiendra compte de ce fait.

### 3 Formes normales d'observabilité non linéaires réduites

Cette section est consacrée à la forme normale d'observabilité réduite et à l'observateur réduit correspondant. On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(y_1)z_r + \rho(y) \\ \dot{\xi} = \alpha_1(y_1)z_r + \alpha_2(y) \\ \dot{\eta} = \mu(z, y) \\ y = (y_1^T, y_2^T)^T = (\xi^T, \eta^T)^T \end{cases} \quad (13)$$

avec

$$\begin{aligned} z &= (z_1, \dots, z_r)^T \in \mathbb{R}^r \\ \beta &= (\beta_1, \dots, \beta_r)^T \in \mathbb{R}^r \\ \rho &= (\rho_1, \dots, \rho_r)^T \in \mathbb{R}^r \\ \eta &= (\eta_1, \dots, \eta_p)^T \in \mathbb{R}^p \\ \xi &\in \mathbb{R}, \alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $z_r = Cz$  avec  $C = (0 \dots 0 \ 0 \ 1)$ .

*Remarque 2.* Puisque, il est supposé que le système (13) est observable, alors  $z_r$  dans (13) doit être mesuré de  $y_1$ , donc on supposera que  $\alpha_1(y) \neq 0$ .

A partir de (13), il vient que si l'on peut mesurer  $y_1$  et  $\dot{y}_1$ , alors on peut mesurer une nouvelle sortie  $Y$  comme étant une fonction de  $y_2$ ,  $y_1$  et de sa dérivée  $\dot{y}_1$  qui est de la forme :

$$Y = \alpha_1^{-1}(y_1)(\dot{y}_1 - \alpha_2(y)) \quad (14)$$

Par conséquent, on a le résultat préliminaire suivant :

**Proposition 1.** *Le système dynamique :*

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(y_1)C\hat{z} + \rho(y) - K(y_1)(Y - C\hat{z}) \quad (15)$$

où  $K(y_1) = -\beta(y_1) + \kappa$  et  $Y$  défini par (14), est un observateur réduit pour le système dynamique (13), si on choisit  $\kappa$  de sorte que la matrice  $(A + \kappa C)$  est Hurwitz.

*Démonstration.* Soit  $e = \hat{z} - z$  l'erreur d'observation. Puisque  $z_r = Cz$ , alors on peut déduire de (13) et de (15) la dynamique de l'erreur comme :

$$\dot{e} = [A + (\beta(y_1) + K(y_1))C]e \quad (16)$$

Puisque pour un système dynamique observable on peut choisir arbitrairement la matrice des gains  $K(y_1)$ , alors si on pose

$$K(y_1) = -\beta(y_1) + \kappa$$

la dynamique de l'erreur devient :

$$\dot{e} = (A + \kappa C)e. \quad (17)$$

Par conséquent, si  $\kappa$  est choisit telle que  $(A + \kappa C)$  est Hurwitz, alors la convergence de  $\hat{z}$  à  $z$  est garantie.

*Remarque 3.* Il est clair de l'expression de  $Y$  en (14) que l'observateur (15) contient explicitement la dérivée  $\dot{y}_1$  de la sortie  $y_1$ . Ce qui est un inconvénient comme il a été signalé dans l'introduction. Pour y remédier, on introduit comme pour les systèmes linéaires l'estimateur algébrique suivant :

$$\zeta = \hat{z} + \Gamma(y_1)$$

où  $\Gamma(y_1) = \int K(y_1)\alpha^{-1}(y_1)dy_1$ . De sorte que l'observateur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = (A + \kappa C)\zeta + \rho(y) - (A + \kappa C)\Gamma(y_1) + K(y_1)\alpha^{-1}(y_1)\alpha_2(y) \\ \hat{z} = \zeta - \Gamma(y_1) \end{cases} \quad (18)$$

La déduction de la forme (18) est évidente, et on omet la démonstration à cause de la limite de place.

## 4 Le changement de coordonnées

Dans cette section, on présentera les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire un système dynamique pour se mettre sous la forme canonique réduite (13). Ceci va concerner la classe de systèmes dynamiques de la forme suivante :

$$\dot{x} = F_1(x, \zeta, \vartheta) = f(x, \zeta, \vartheta) \quad (19)$$

$$\dot{\zeta} = F_{21}(x, \zeta, \vartheta) = \gamma_1(\zeta)H(x) + \gamma_2(\zeta, \vartheta) \quad (20)$$

$$\dot{\vartheta} = F_{22}(x, \zeta, \vartheta) = \varepsilon(x, \zeta, \vartheta) \quad (21)$$

$$y = (\zeta^T, \vartheta^T)^T \quad (22)$$

où  $x \in \mathbb{R}^r$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}$ ,  $\vartheta \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^{p+1}$ ,  $f : \mathbb{R}^{r+p+1} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $H \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont de dimensions convenables. En outre on suppose que le système (19-22) est observable au sens du rang. C'est-à-dire que les 1-formes d'observabilité suivantes :

$$\theta_i = dL_f^{i-1}H$$

for  $1 \leq i \leq r$  sont indépendantes. On note ainsi

$$F = (f^T, F_2^T)^T$$

$$F_2 = (F_{21}^T, F_{22}^T)^T$$

que la décomposition  $F_2$  en  $F_{21}$  and  $F_{22}$  ainsi que la condition d'observabilité impliquent que  $\gamma_1(\zeta) \neq 0$ .

Maintenant, on définit un champ de vecteurs  $\tau_1$  par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_j(\tau_1) = 0, \text{ pour } 1 \leq j \leq r-1 \\ \theta_r(\tau_1) = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Puis, par induction on définit la famille de champs de vecteurs  $\tau_j$  comme suit :

$$\tau_j = [\tau_{j-1}, f] \text{ pour } 2 \leq j \leq r.$$

Comme on va le voir l'existence du difféomorphisme implique nécessairement que les  $\tau_i$  commutent. C'est-à-dire :  $[\tau_i, \tau_j] = 0$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq j \leq r$ . On suppose donc que cette dernière condition est satisfaite, et soient  $\sigma, \nu_1, \dots, \nu_p$  des champs de vecteurs tels que :

- $[\tau_i, \tau_j] = [\tau_i, \sigma] = [\tau_i, \nu_l] = [\sigma, \nu_l] = [\nu_l, \nu_s] = 0$  pour  $1 \leq i, j \leq r$  et  $1 \leq l, s \leq p$ ;
- $d\zeta(\sigma) = 1$  et  $d\vartheta(\sigma) = 0$ ;
- $d\zeta(\nu_j) = 0$  et  $d\vartheta_i(\nu_j) = \delta_i^j$  pour  $1 \leq i, j \leq p$  où  $\delta_i^j$  représentent les symboles de Kronecker.

Posons

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r, d\zeta, d\vartheta_1, \dots, d\vartheta_p)^T$$

et soit  $\Lambda = \theta(\tau_i, \sigma, \nu_j)$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq j \leq p$  l'évaluation de  $\theta$  sur le repère  $(\tau_i, \sigma, \nu_j)$ . On pose

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta,$$

c'est une multi-1 forme différentielle combinaison linéaire  $\theta_i, d\zeta$  et  $d\vartheta_j$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq j \leq p$ . Elle est décomposée en  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$  où  $\omega_2 = (d\zeta, d\vartheta_1, \dots, d\vartheta_p)^T$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Il existe un difféomorphisme  $(z, \xi, \eta) = \phi(x, \zeta, \vartheta)$  qui transforme (19-22) sous la forme canonique réduite (13) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1.  $[\tau_i, \tau_j] = 0$ , for  $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$ ;
2.  $[\tau_r, \bar{F}] = V(y_1)$  est un champs de vecteur qui ne dépend que de  $y_1$  modulo le sous espace vectoriel engendré par  $\{\tau_i, \sigma\}$  pour  $1 \leq i \leq r$ ;
3.  $[\tau_j, F_2] \in \ker \omega_1$  pour  $1 \leq j \leq r - 1$ .

Comme la longueur de l'article ne le permet pas, nous allons omettre la preuve, et donner un exemple pour illustrer ce résultat. Mais la preuve peut être facilement faite par l'adaptation des méthodes utilisées dans [11,5].

*Exemple 1.* On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \vartheta + x_2 x_3, \dot{x}_2 = x_1 + x_3 \zeta - \frac{1}{2} x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 + \zeta, \dot{\zeta} = \alpha(\zeta) x_3, \dot{\vartheta} = \mu(x, \zeta, \vartheta) \\ y &= (\zeta^T, \vartheta^T)^T \end{aligned}$$

Un calcul facile donne le repère d'observabilité comme suit :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= dx_3, \theta_2 = dx_2 + d\zeta, \theta_3 = dx_1 + d\left(x_3 \zeta - \frac{1}{2} x_3^2\right) \\ \tau_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \tau_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \tau_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \sigma = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \nu = \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \end{aligned}$$

Donc il est facile de montrer que :

$$[\tau_3, \bar{F}] = -\zeta \frac{\partial}{\partial x_1} + \zeta \frac{\partial}{\partial x_2} = -\zeta \tau_1 + \zeta \tau_2$$

Ensuite, on pose  $\Lambda = \theta(\tau_1, \tau_2, \sigma, \nu)$  qui nous donne  $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \xi & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . On en déduit :

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta = (dx_1 - x_3 dx_3, dx_2, dx_3, d\zeta, d\vartheta)^T$$

où  $\omega_1 = (dx_1 - x_3 dx_3, dx_2, dx_3)^T$ , qui fournit

$$\omega_1[\tau_1, F] = \omega_1[\tau_2, F] = 0$$

Ainsi toutes les conditions du Théorème 1 sont satisfaites, et le système peut être transmis sous la forme canonique proposée. D'après l'expression de  $\omega$ , on obtient le difféomorphisme suivant :

$$\phi(x) = (z_1, z_2, z_3, \xi, \eta)^T = \left( x_1 - \frac{1}{2}x_3^2, x_2, x_3, \zeta, \vartheta \right)^T$$

D'où la forme normale réduite suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \eta - \xi z_3, \quad \dot{z}_2 = z_1 + \xi z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_2 + \xi, \quad \dot{\xi} = \alpha(\xi)z_3, \quad \dot{\eta} = \mu(z, \xi, \eta) \\ y &= (\xi^T, \eta^T)^T \end{aligned}$$

*Remarque 4.* 1. Le théorème ci-dessus peut être énoncé pour le cas où  $y_1$  est constituée de plusieurs sorties.

2. On peut écrire l'équivalent du théorème pour les systèmes à temps discret.

## 5 conclusion

Dans cette note, on a fait la lumière sur une nouvelle forme d'observabilité qui supporte un observateur réduit. Ce dernier bien connu pour les systèmes linéaires, à notre connaissance, n'a pas encore été exploité pour les systèmes dynamiques non linéaires.

## Références

1. D. G. LEUNBERGER, An itroduction to observers, *IEEE Transactions in Automatics and Control*, AC-IG6, 596-602 (1971).
2. A. J. KRENER & A. ISIDORI, Linearization by output injection and nonlinear observer, *Systems and Control Letters*, **3**, 47-52, (1983).
3. A.J. KRENER & W. RESPONDEK, Nonlinear observer with linearizable error dynamics, *SIAM J. Control and Optimization*, **30**, 197-216 (1985).
4. D. BOUTAT & K. BUSAWON, Extended nonlinear observable canonical form for multi-output dynamical systems, *Proceedings of the IEEE CDC*, 2009.
5. D. BOUTAT, A. BENALI, H. HAMMOURI & K. BUSAWON, New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs, *Automatica*, **45** (10), 2187-2193 (2009).
6. D. NOH, N.H. JO & J.H. SEO, Nonlinear observer design by dynamic observer error linearization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**, (10), 1746-1753 (2004).
7. M. FLIESS & I. KUPKA, A finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **21** (5), 721-728 (1983).
8. M. HOU & A.C. PUGH, Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems, *Systems and Control Letters*, **37**, 1-9 (1999).
9. A. PHELPS, On constructing nonlinear observers, *SIAM J. Control and Optimization*, **29** (3), 516-534 (1991).
10. X. H. XIA & W.B. GAO, Nonlinear observer with linearizable error dynamics, *SIAM Journal Control and Optimization*, **27**, 199-216 (1989).
11. G. ZHENG, D. BOUTAT & J.-P. BARBOT, Single output dependent observability normal form, *SIAM Journal Control and Optimization*, **46**, 2242-2255 (2007).
12. D. G. LUENBERGER, Observing the state of a linear system, *IEEE Transactions on Military Electronics*, **8**, 74-80 (1964).

# Fusion bidimensionnelle d'un cristal de pics de ferrofluide

François Boyer<sup>1</sup> & Eric Falcon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels (IUSTI), Université de Provence, CNRS (UMR 6595), 5 rue Enrico Fermi 13453 Marseille cedex 13, France

<sup>2</sup> Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), Université Paris-Diderot, CNRS (UMR 7057), 10 rue A. Domon et L. Duquet 75013 Paris, France

francois.boyer@polytech.univ-mrs.fr ; eric.falcon@univ-paris-diderot.fr

**Résumé.** Nous présentons l'observation de la transition entre une phase ordonnée (dite solide) et une phase désordonnée (dite liquide) d'un réseau de pics à la surface d'un ferrofluide soumis à des vibrations horizontales sinusoïdales. La transition de fusion se produit pour un déplacement critique des pics dont on montre expérimentalement qu'il suit le critère de Lindemann, pour deux topologies différentes (hexagonale et carrée) et sur une large plage de mailles du réseau. Une phase intermédiaire hexatique entre les phases solide et liquide est également observée et caractérisée par les fonctions de corrélation. Ce système dissipatif hors-équilibre présente de fortes similitudes avec la fusion bidimensionnelle (2D) en physique des solides.

**Abstract.** We report the observation of the transition from an ordered solid-like phase to a disordered liquid-like phase of a lattice of peaks on a ferrofluid surface submitted to horizontal sinusoidal vibrations. The melting transition occurs for a critical peak displacement which is experimentally found to follow the Lindemann criterion, for two different lattice topologies (hexagonal and square) and over a wide range of lattice wavelengths. An intermediate hexatic-like phase between the solid and isotropic liquid phases is also observed and characterized by the correlation functions. This dissipative out-of-equilibrium system exhibits strong similarities with 2D melting in solid-state physics.

## 1 Introduction

La fusion des solides a constitué un important champ de recherche de la physique de la matière condensée depuis plus d'un siècle [1]. En 1910, Lindemann fait l'hypothèse que la fusion se produit lorsque les atomes entrent en collision sous l'effet des vibrations thermiques [2]. Il a ensuite été proposé que le déplacement atomique efficace à la transition de fusion est plutôt donné par une fraction constante (environ 10 %) de la distance interatomique [3]. Le succès prédictif de cette hypothèse, désormais connu comme le critère de Lindemann, a permis le calcul des températures de fusion d'un large éventail de cristaux 3D [4].

Par ailleurs, la fusion d'un solide 2D est un phénomène bien moins compris et la nature de la transition demeure une question ouverte. A la fin des années 60, une théorie de la fusion 2D a été développée par Kosterlitz, Thouless, Halperin, Nelson et Young (KTHNY) [5], mais sa validité reste controversée. Des études numériques ont également montré la validité du critère de Lindemann en 2D [6], et la cohérence avec le scénario KTHNY [7]. Bien que la plupart des observations expérimentales soient conformes au scénario KTHNY, il est généralement assez difficile d'exclure tout autre mécanisme [8]. Par conséquent, la transition de fusion dans des systèmes 2D reste un domaine de recherche actif en physique du solide [9], et dans de nombreux domaines : suspensions colloïdales confinées [10,11], films liquides [12], gaz granulaires [13,14], films magnétiques solides [15], et réseaux de vortex dans les supraconducteurs [16].

Un ferrofluide est une suspension stable de particules magnétiques nanométriques dispersées dans un liquide porteur, pouvant être le siège de phénomènes caractéristiques : écoulement induit par un champ magnétique, instabilités de Rosensweig ou en labyrinthe, lévitation magnétique [17]. L'instabilité de Rosensweig se produit lorsque le champ magnétique appliqué dépasse une valeur critique : la surface libre devient instable et un réseau ordonné hexagonal de pics se développent à la surface. Suivant les travaux de Bragg concernant un assemblage de bulles de savon à la surface d'un liquide [18], on peut considérer

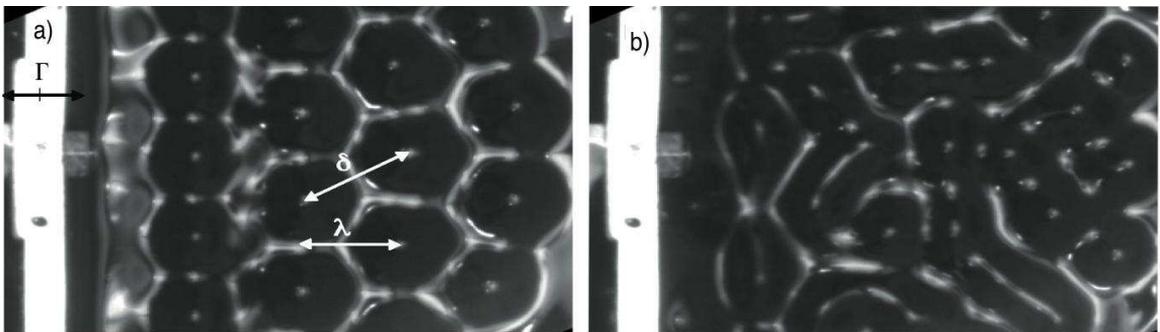
ce réseau comme un analogue macroscopique d'un cristal 2D. On étudiera alors son comportement sous l'effet de vibration sinusoïdales simulant l'effet de l'agitation thermique.

Dans cet article, nous rapportons la première observation d'une transition (fusion) entre une phase ordonnée (solide) et une phase désordonnée (liquide) d'un réseau de pics à la surface d'un ferrofluide soumis à des vibrations sinusoïdales. Nous étudions quel paramètre contrôle la transition et si un critère de Lindemann peut être appliqué. Nous caractérisons les changements structurels lors de cette transition en utilisant des concepts classiques de physique de la matière condensée. Notre système étant dissipatif et hors d'équilibre, la comparaison de nos résultats et de ceux des systèmes à l'équilibre est d'un intérêt primordial [13,14].

## 2 Dispositif expérimental

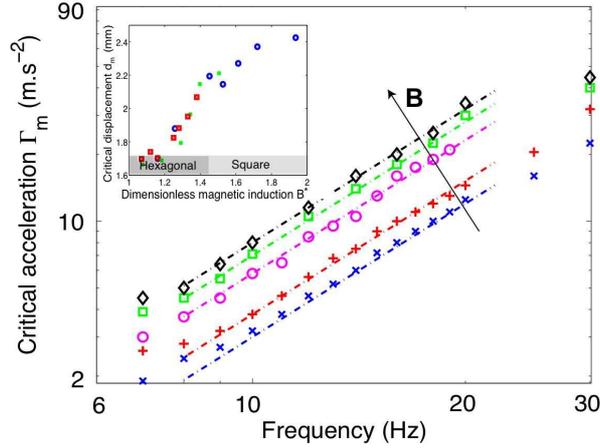
Le dispositif expérimental se compose d'une cuve remplie d'un ferrofluide jusqu'à une profondeur  $h = 2$  cm. Dans le but de discriminer les effets de taille finie et de conditions aux limites, des cuves de forme et de taille différentes sont utilisées : cylindriques i) 20 cm ou ii) 12 cm de diamètre intérieur, et iii) un récipient rectangulaire  $13 \times 9$  cm<sup>2</sup>. Le ferrofluide utilisé est une suspension aqueuse ionique de particules maghémite ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $7.6 \pm 0.36$  nm de diamètre) [19]. Les propriétés de ce fluide magnétique sont : (densité)  $\rho = 1324$  kg.m<sup>-3</sup>, (tension superficielle)  $\gamma = 59 \times 10^{-3}$  N.m<sup>-1</sup>, (susceptibilité magnétique initiale)  $\chi_i = 0,69$ , (aimantation à saturation)  $M_{sat} = 16,9 \times 10^3$  A.m<sup>-1</sup>. La cuve est placée entre deux bobines horizontales coaxiales, générant au niveau de la surface de ferrofluide une induction magnétique verticale, pouvant atteindre 780 G [20].

La formation d'un réseau ordonné de pics de ferrofluide est observée lorsque l'induction magnétique appliquée  $B$  est supérieure à  $B_c = 294 \pm 2$  G. Cette valeur critique est proche de la valeur théorique  $B_c^{th} = 292,3$  G, seuil de l'instabilité de Rosensweig pour le ferrofluide utilisé [20]. Nous notons l'induction magnétique adimensionnée  $B^* = B/B_c$ . Notez qu'une transition du réseau hexagonal vers un réseau carré est observée à  $B^* = 1,45$ . A  $B^*$  fixé, le réseau de pics de ferrofluide est mis en vibration par un piston rectangulaire (9 cm x 4 cm) en PTFE (plongeant perpendiculairement dans le fluide au repos) et actionné parallèlement à la surface par un vibreur électromagnétique. Le déplacement du piston d'amplitude  $a$  et de fréquence  $f$  est alors piloté par une tension sinusoïdale basse fréquence ( $5 \leq f \leq 50$  Hz et  $0,5 \leq a \leq 7$  mm). Son accélération est mesurée à l'aide d'un accéléromètre fixé sur le piston. Une caméra haute résolution située au-dessus de la cuve nous permet d'observer le déplacement  $d$  de chaque pic de ferrofluide (Fig. ref (fig01) pour un cliché typique). Pour les trois cuves utilisées,  $d$  se trouve être une fonction linéaire du déplacement du piston  $a$ , avec un coefficient indépendant de la fréquence  $\alpha = d/a$  : i)  $\alpha = 0,77 \pm 0,04$  ; ii)  $\alpha = 0,85 \pm 0,05$  ; iii)  $\alpha = 0,65 \pm 0,05$ . Étant donné que les vibrations sont sinusoïdales, l'amplitude de l'accélération du piston est alors donnée par  $\Gamma = 4\pi f^2 a = 4\pi f^2 d/\alpha$ .



**Fig. 1.** Vues de dessus du réseau de pics de ferrofluide pour deux amplitudes de vibrations sinusoïdales : (a) phase "solide" hexagonale ( $\Gamma = 3$  m.s<sup>-2</sup>),  $\delta \simeq 15.8$  mm, (b) phase "liquide" ( $\Gamma = 20$  m.s<sup>-2</sup>).  $f = 8$  Hz,  $B^* = 1.2$ .

La figure 1 montre des vues typiques du réseau de pics à la surface du ferrofluide pour deux valeurs de l'accélération du piston  $\Gamma$ , à  $B^*$  fixé. Pour les faibles  $\Gamma$  (Fig. 1a), le réseau vibre à la même fréquence que le piston : chaque pic fluctuant autour de sa position d'équilibre comme le ferait un atome d'un cristal sous l'effet de l'agitation thermique. Lorsque  $\Gamma$  augmente (à fréquence constante), le réseau ordonné se destructure et "fond" : les pics de ferrofluide n'ont plus de position stable et des rangées de pics se mettent à glisser les unes contre les autres. Pour des accélérations encore plus élevées, les déplacements des pics devient complètement aléatoires et deux ou plusieurs pics peuvent fusionner transitoirement lors d'une collision (Fig. 1b). Pour chaque fréquence, on détermine alors l'accélération critique  $\Gamma_m$  pour laquelle les pics n'ont plus de position stable.



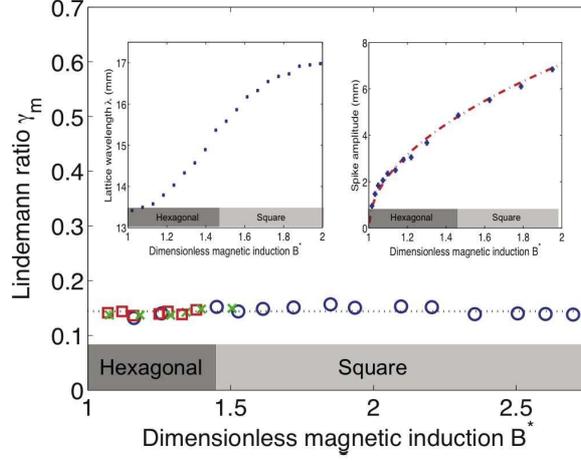
**Fig. 2.** . Accélération critique  $\Gamma_m$  à la transition de fusion en fonction de la fréquence d'excitation  $f$  pour différentes valeurs de l'induction magnétique appliquée  $B^*$  : (x) 1,09, (+) 1,39, (o) 1,52, (□) 1,77 and (◊) 2,03. Droites de pente 2 en pointillés (déplacement constant). Insert : Déplacement critique  $d_m$  en fonction de  $B^*$  pour 3 différentes cuves : (o) i, (x) ii, and (□) iii.

La figure 2 représente l'évolution de  $\Gamma_m$  avec la fréquence de vibration  $f$  (échelle logarithmique) pour cinq différentes valeurs de l'induction magnétique appliquée. On montre que  $\Gamma_m$  évolue comme le carré de la fréquence, c'est-à-dire que la quantité  $\Gamma_m/f^2$  reste constante le long de la transition. Cela signifie alors que l'amplitude du déplacement des pics à la transition  $d_m$  est le paramètre de contrôle pertinent de la fusion :

$$d_m = \frac{\alpha \Gamma_m}{4\pi f^2}. \quad (1)$$

Pour chaque  $B^*$ ,  $d_m$  est calculé à partir des courbes de la figure 2. L'insert de la figure 2 montre la dépendance du déplacement critique  $d_m$  (valeur rms) avec l'induction magnétique adimensionnée  $B^*$ . On trouve que  $d_m$  augmente avec  $B^*$ , de 1.6 mm à 2.6 mm. On note que ces valeurs sont un ordre de grandeur plus faible que la longueur caractéristique du réseau  $\lambda_c = 2\pi\sqrt{\gamma/(\rho g)} \simeq 13.4$  mm au seuil de l'instabilité de Rosensweig [17].

Afin d'établir un critère pour la transition de fusion, la longueur d'onde,  $\lambda$ , et la hauteur des pics,  $h$ , sont mesurées et comparées au déplacement critique,  $d_m$ . La hauteur  $h$  des pics de ferrofluide est mesurée grâce à un fil capacitif [20]. L'insert droit de la figure 3 montre l'évolution de  $h$  avec  $B^*$  : la courbe est bien ajustée par  $\sqrt{B^* - 1}$  (en pointillés) en accord avec de précédents résultats théoriques [21] et expérimentaux [22]. Le déplacement critique,  $d_m(B^*)$  (insert de la figure 2), ne suit clairement pas la même évolution que l'amplitude des pics,  $h(B^*)$ , à la fois qualitativement et quantitativement. Cela signifie que le mécanisme de fusion reste bidimensionnel et n'est pas induit par des ondes de surface devenant supérieur à la hauteur des pics. A  $B^*$  fixé, on détermine la longueur d'onde  $\lambda$  du réseau par la mesure de la distance pic-pic moyenne sur les images expérimentales (Fig. 1). A partir d'arguments



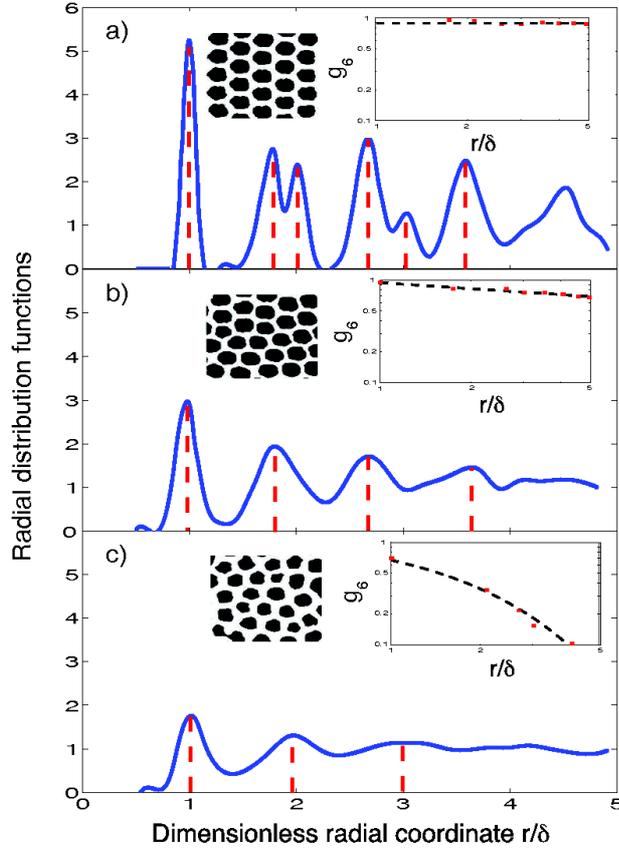
**Fig. 3.** Rapport de Lindemann  $\gamma_m$  en fonction de  $B^*$  pour 3 différentes cuves : (o) i, (x) ii, and ( $\square$ ) iii. Ligne horizontale :  $\gamma_m = 0.14$ . Insert gauche : Longueur d’onde du réseau,  $\lambda$ , en fonction de  $B^*$ . Insert droit : hauteur des pics,  $h$ , en fonction de  $B^*$ . Ajustement par  $\sqrt{B^* - 1}$  (en pointillés).

géométriques, on a  $\lambda = (\sqrt{3}/2)\delta$  pour le réseau hexagonal ( $1 < B^* < 1.45$ ), et  $\lambda = \delta$  pour le réseau carré ( $B^* > 1.45$ ). L’insert gauche de la figure 3 montre alors  $\lambda$  en fonction de  $B^*$ .  $\lambda$  augmente avec  $B^*$ , en accord avec une observation précédente [23]. On définit alors un analogue du rapport de Lindemann,

$$\gamma_m \equiv \frac{d_m(B^*)}{\lambda(B^*)}, \quad (2)$$

comme le rapport entre la valeur rms du déplacement critique des pics,  $d_m$ , et la longueur d’onde du réseau  $\lambda$ . Comme le montre la figure 3,  $\gamma_m$  a une valeur indépendante de  $B^*$ , même à la transition hexagone-carré. On trouve  $\gamma_m = 0,14 \pm 0.02$ , dans la gamme de valeurs (0,1 - 0,2) des solides cristallins 3D [3] et proche de la valeur rapportée pour les liquides granulaires bidimensionnels (0,15) [14]. On note que la définition du rapport de Lindemann à l’aide de la longueur d’onde,  $\lambda$ , au lieu de la distance pic-pic,  $\delta$ , mène à une valeur unique pour les deux topologies observées (hexagonale et carrée).

Afin de caractériser les changements structuraux lors de la transition de fusion, on calcule les fonctions de corrélation de position et d’orientation à la coordonnée  $r$ , respectivement,  $g(r) = \langle n(r')n(r+r') \rangle / \langle n(r') \rangle^2$ , où  $n$  est la densité en particules (pics), la moyenne étant prise sur la variable spatiale  $r'$ , et  $g_6(r) = \langle \Psi_6^*(r')\Psi_6(r+r') \rangle / g(r)$  où l’étoile représente la conjugaison complexe et  $\Psi_6(r_j) = \langle \exp(i6\theta_{jk}) \rangle_k$  avec  $\theta_{jk}$  l’angle de la liaison entre le pic  $j$  et son voisin  $k$  [8]. Ces fonctions sont moyennées sur 200 images. La figure 4 montre les courbes expérimentales des fonctions de distribution radiales  $g(r)$  pour différentes valeurs du paramètre adimensionné  $\varepsilon = (\gamma - \gamma_m)/\gamma_m$  (écart au seuil). Pour  $\varepsilon < 0$  (avant la fusion), la fonction de distribution radiale  $g(r/\delta)$  est caractéristique d’une structure hexagonale : les positions des premiers pics sont en très bon accord avec les valeurs calculées à partir de considérations géométriques simples  $r/\delta = 1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{7}, 3$  and  $\sqrt{12}$  (en pointillés sur la figure 4a). Pour  $\varepsilon = 0$ , l’ordre de position devient clairement à courte portée même si certains pics caractéristiques restent visibles :  $r/\delta = 1, \sqrt{3}, \sqrt{7}$  and  $\sqrt{12}$  (en pointillés sur la figure 4b). Lorsque  $\varepsilon$  augmente encore, la portée de l’ordre de position devient plus faible, et pour  $\varepsilon = 1$ , seul les pics caractéristique du liquide isotrope sont observés :  $r/\delta = 1, 2$  and  $3$  (en pointillés sur la figure 4c). Ces modifications structurales typiques sont fortement similaires avec les observations issues de simulations numériques de disques infiniment rigides à l’équilibre thermodynamique lors de la transition de phase bidimensionnelle solide-liquide [9]. Nos résultats sont aussi cohérents avec la théorie KTHNY qui prédit l’existence d’une phase hexatique entre les phases cristalline et liquide, caractérisée par un ordre d’orientation à longue portée (décroissance algébrique) et un ordre de position à courte portée [5]. Ainsi, les inserts droits de la figure 4 montrent le paramètre d’ordre d’orientation,  $g_6(r)$ . Légèrement au-dessus de la transition ( $\varepsilon \simeq 0$ ), l’ordre d’orientation à longue portée



**Fig. 4.** Fonctions de distribution radiale  $g(r/\delta)$  pour différents forçage : (a)  $\varepsilon = -0.4$ , (b)  $\varepsilon = 0$ , (c)  $\varepsilon = 1$ .  $B^* = 1.1$ .  $f = 10$  Hz.  $\delta = 15.5$  mm. En pointillés, positions théoriques des maximum de  $g(r)$ . Insert droit : fonctions de corrélation d'orientation  $g_6(r/\delta)$ , en pointillés : (a)  $g_6(r) = 0.89$ , (b)  $g_6(r) \sim r^{-0.20}$ , (c)  $g_6(r) \sim \exp(-r/1.54)$ . Inserts gauches : images caractéristiques (binaires, après seuillage) de la surface du ferrofluide .

(bien ajustée par une décroissance algébrique) est préservé et suggère la présence d'une phase hexatique (Fig. 4b). On note que pour discriminer sans ambiguïté une décroissance exponentielle (et donc un ordre à courte portée) un système plus grand serait rigoureusement nécessaire [13]. Lorsque  $\varepsilon$  augmente, le taux de décroissance augmente fortement, et pour  $\varepsilon = 1$ , l'ordre d'orientation est aussi à courte portée (bien ajustée par une décroissance exponentielle) comme attendu pour une phase liquide isotrope.

### 3 Conclusion

Une phase hexatique entre les phase solide et liquide a aussi été rapportée lors de la fusion 2D de cristaux colloïdaux [10]. Au-delà du bon accord avec la théorie KTHNY, la fusion 2D de ces systèmes dépend aussi bien de l'interaction entre particules que de leur interaction avec leur substrat [11]. Nos résultats suggèrent qu'à la fois le critère de Lindemann et la théorie KTHNY sont applicables dans un système 2D plus complexe, comme un cristal de pics de ferrofluide avec des interactions ferrohydrodynamiques encore mal connues. Une telle transition continue solide-hexatique-liquide est très différente de la transition du premier ordre observée dans les cristaux 3D. Enfin, notre travail met en évidence l'analogie entre la fusion 2D des systèmes à l'équilibre et celle des systèmes stationnaires hors équilibre. Une telle correspondance a déjà été observée dans un fluide granulaire 2D [13], où l'homogénéité spatiale du système d'injection d'énergie vaît été souligné comme le principal facteur de ces similarités avec la dynamique

à l'équilibre [14]. Notre travail suggère que des propriétés similaires à celles des systèmes à l'équilibre peuvent être observées même si l'injection d'énergie n'est pas homogène. Nous pensons que des études complémentaires permettrait d'avoir une description exhaustive de la transition de fusion 2D d'un cristal dissipatif.

*Remerciements* Nous remercions D. Talbot pour la synthèse du ferrofluide, J.-C. Bacri et A. Cebers pour leurs commentaires pertinents, A. Lantheaume et C. Laroche pour l'assistance technique. Ce travail a été financée par ANR Turbonde BLAN07-3-197846. Ces travaux ont été publiés dans *Physical Review Letters* [24].

## Références

1. A. EINSTEIN, *Annalen der Physik* (Leipzig) **327**, 180 (1906) — P. DEBYE, *Annalen der Physik*, (Leipzig) **344**, 789 (1912)
2. F. A. LINDEMANN, *Physik Zeitschrift* **11**, 609 (1910).
3. J. J. GILVARRY, *Physical Review* **102**, 308 (1956).
4. G. GRIMVALL & S. SJODIN, *Physica Scripta*, **10**, 340, (1974) — A. R. UBBELOHDE, *Melting & Crystal Structure* (Clarendon Press, Oxford, 1965).
5. J. M. KOSTERLITZ & D. J. THOULESS, *Journal de Physique C* **5**, L124 (1972) — B. I. HALPERIN & D. R. NELSON, *Physical Review Letters* **41**, 121 (1978) ; A. P. YOUNG, *Physical Review B* **19**, 1855 (1979).
6. X. H. ZHENG & J.C. EARNSHAW, *Europhysics Letters* **41**, 635 (1998).
7. K. CHEN, T. KAPLAN & M. MOSTOLLER, *Physical Review Letters* **74**, 4019 (1995) — K. BINDER, S. SENGUPTA & P. NIELABA, *J. Phys. : Condens. Matter* **14**, 2323 (2002).
8. P. M. CHAIKIN, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
9. F. MOUČKA & I. NEZBEDA, *Physical Review Letters* **94**, 040601(2005).
10. C. A. MURRAY & R. A. WENK, *Physical Review Letters* **62**, 1643 (1989) — K. ZAHN, R. LENKE & G. MARET, *Physical Review Letters* **82**, 2721 (1999) — E. J. STANCIK *et al.*, *Journal of Rheology* **48**, 159 (2004).
11. M. BRUNNER & C. BECHINGER, *Physical Review Letters* **88**, 248302 (2002).
12. J. KLEIN & E. KUMACHEVA, *Physica A* **249**, 206 (1998).
13. J. S. OLAFSEN & J. S. URBACH, *Physical Review Letters* **95**, 098002 (2005) — F. V. REYES & J. S. URBACH, *Physical Review E* **78** 051301 (2008).
14. P. M. REIS, R. A. INGALE & M. D. SHATTUCK, *Physical Review Letters* **96**, 258001 (2006)
15. R. SESHADRI & R. M. WESTERVELT, *Physical Review B* **46**, 5150 (1992).
16. S. SCHEIDL & V. M. VINOKUR, *Physical Review B* **57**, 13800 (1998).
17. R. E. ROSENSWEIG, *Ferrohydrodynamics* (Dover, New York, 1997).
18. L. BRAGG & J. F. NYE, *Proceedings of the Royal Society of London A* **190**, 474 (1947).
19. The ferrofluid synthesis has been performed by the Laboratory LI2C, University Paris 6.
20. F. BOYER & E. FALCON, *Physical Review Letters* **101**, 244502 (2008).
21. A. G. GAILITIS, *Journal of Fluid Mechanics* **82**, 401 (1977).
22. J.-C. BACRI & D. SALIN, *Journal de Physique Lettres* (France) **45**, L-559 (1984).
23. B. ABOU, J.-E. WEISFREID & S. ROUX, *Journal of Fluid Mechanics* **416**, 217 (2000).
24. F. BOYER & E. FALCON, *Physical Review Letters* **103**, 144501 (2009).

## Diffusion et adsorption en milieu poreux : profil expérimental et modélisation

Pascal Brault<sup>1</sup>, Jean-Marc Bauchire<sup>1</sup>, & Christophe Josserand<sup>2</sup> & François James<sup>3</sup>

<sup>1</sup> GREMI, UMR6606 CNRS-Université d'Orléans BP 6744, 45067 Orléans Cedex 2, France

<sup>2</sup> IJLRA, UMR 7190 CNRS-Université Paris 6, F-75005 Paris, France

<sup>3</sup> MAPMO UMR 6628 Université d'Orléans BP 6759, Route de Chartres, 45067 Orléans cedex 2

pascal.brault@univ-orleans.fr, josseran@lmm.jussieu.fr,

francois.james@univ-orleans.fr, jean-marc.bauchire@univ-orleans.fr

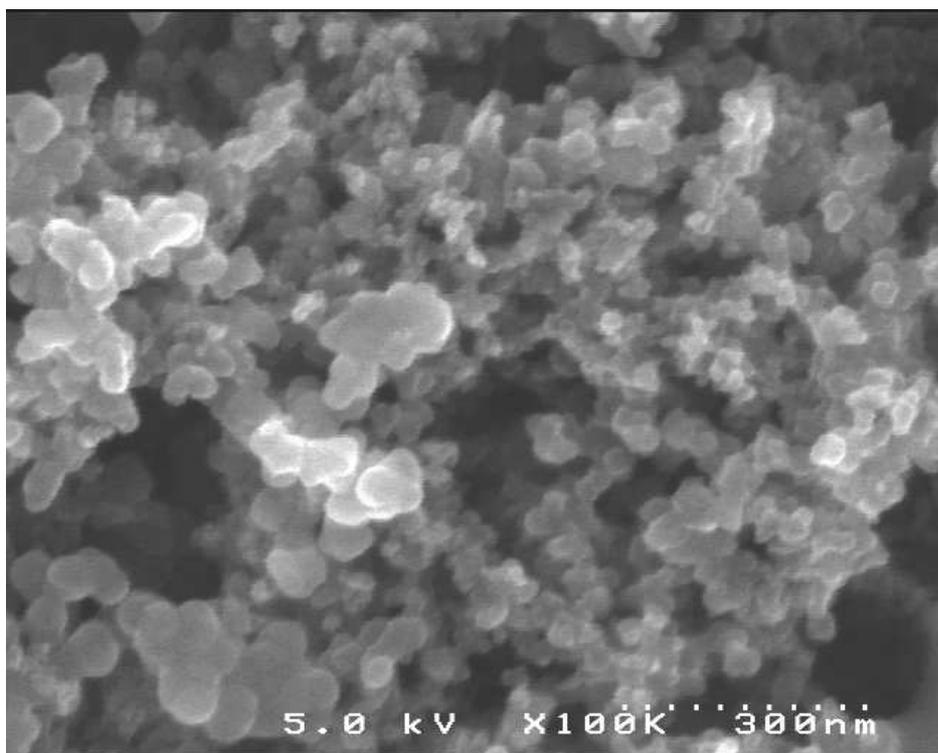
**Résumé.** La projection d'atomes de platine sur un substrat poreux de carbone par pulvérisation plasma permet notamment de réaliser des couches minces catalytiques de grande qualité. La connaissance et le contrôle de la densité de platine adsorbé dans le milieu poreux au cours du temps y sont donc cruciales. A partir des mesures expérimentales donnant le profil de densité d'atomes adsorbés en fonction de la profondeur dans le poreux au cours du temps, nous montrons que le processus de diffusion dans le poreux est super-diffusif. De plus, nous retrouvons ces résultats expérimentaux à partir d'un modèle classique de diffusion poreux-fractal dans laquelle les coefficients dépendent du temps afin de tenir compte de l'adsorption.

**Abstract.** Plasma sputtering deposition of platinum on porous substrates is a relevant way for building catalytic thin films. The knowledge and control of platinum density adsorbed in the porous medium, during deposition, are of primary importance. We show that the experimental concentration depth profiles originate from a superdiffusion phenomenon. Moreover experimental results are well described by a classical porous-fractal diffusion model, for which diffusion coefficient is also time-dependent, but such a model does not include the proper physical mechanisms.

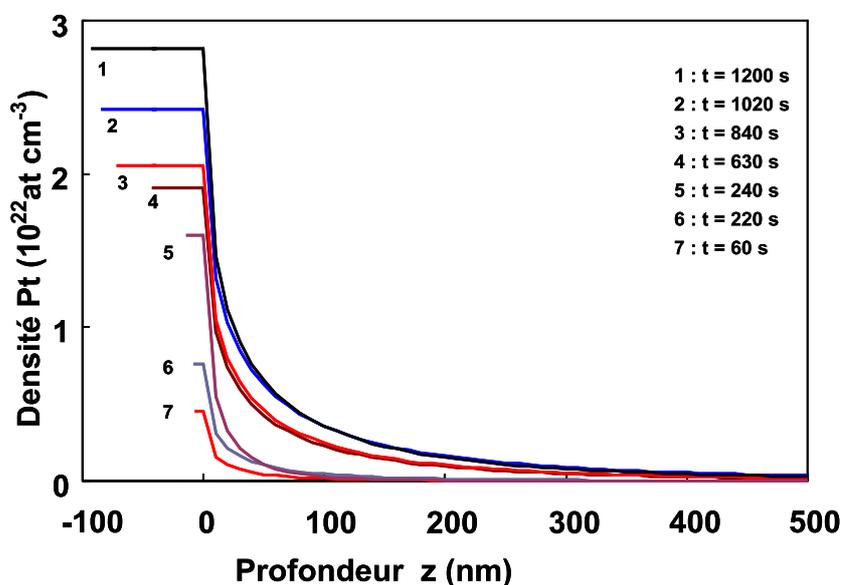
### 1 Introduction

La pulvérisation d'atome sur un substrat poreux est un procédé qui permet d'obtenir des catalyseurs de grande qualité dont l'utilisation chimique peut être cruciale pour optimiser le taux de réaction. Au GREMI des expériences de synthèse d'électrodes de piles à combustible sont réalisées par pulvérisation plasma. Ces électrodes sont constituées d'une couche poreuse composée de grains de carbone de 30 à 100 nm de diamètre, d'épaisseur 20 à 50  $\mu\text{m}$  recouvrant un tissu de carbone. La vapeur de platine produite par la pulvérisation plasma d'une cible de platine se dépose sur la surface du poreux et est également à l'intérieur soit par transport dans l'espace inter-grains de la couche poreuse ou par diffusion gazeuse et/ou surfacique (Fig. 1). Cette dynamique complexe d'adsorption-diffusion-transport dans un milieu poreux conduit à une répartition particulière de la densité d'atomes déposés dans le poreux, illustrée Fig. 2

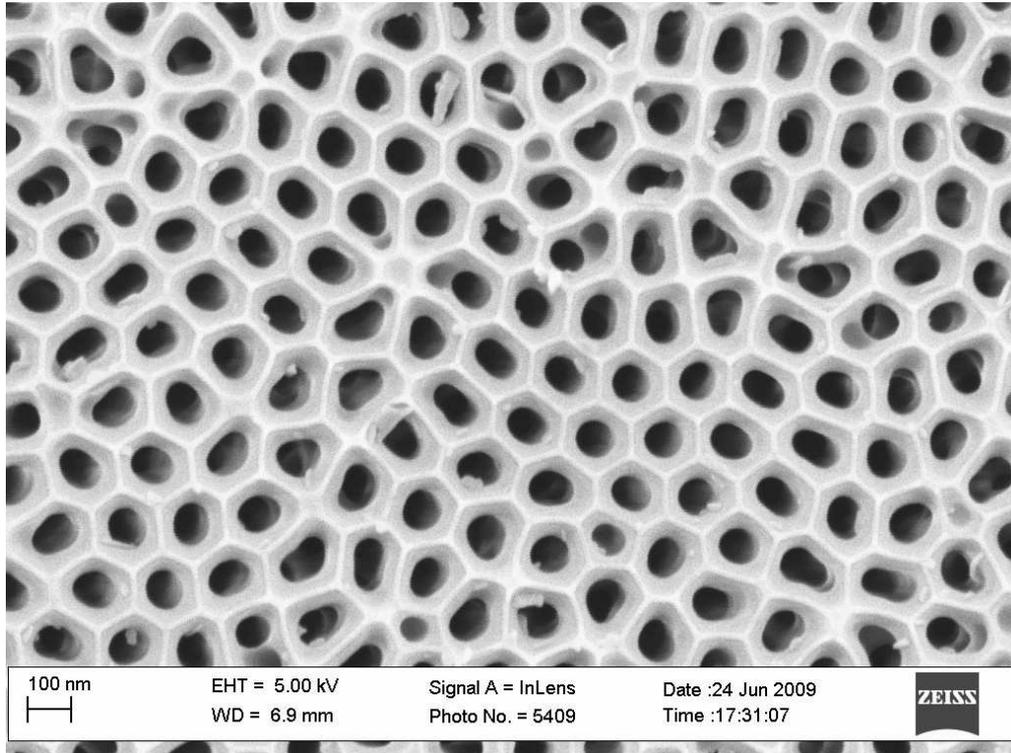
Nous avons également considéré n autre type de substrat poreux : l'oxyde d'aluminium anodisé (template AAO), qui se présente sous forme d'un substrat d'alumine d'épaisseur 60  $\mu\text{m}$  avec un réseau hexagonal de pores cylindriques traversants. Pour notre étude, ils sont de diamètre 90 nm avec une densité de  $4.7 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}$ , ce qui conduit à une porosité de 25 % (Fig. 3). La mesure expérimentale des profils de pénétration dans ces couches est obtenue par Spectroscopie de Rétrodiffusion Rutherford (RBS) [1,2]. Ces spectres peuvent être simulés en considérant des profils de concentration de platine sous forme de fonctions analytiques, les meilleures lissages étant obtenus avec des fonctions gaussiennes étirées [2,3]. La figure 2 montre un exemple de ces profils expérimentaux. On constate qu'ils se décomposent en 2 parties sous la forme :



**Fig. 1.** Cliché de microscopie électronique à balayage (vue de dessus) d'une couche de carbone poreux. Cette couche est un empilement non compact de sphère de carbone de diamètre compris entre 30 et 100 nm. La porosité résultante est de l'ordre de 50 - 60 % (*remerciements D. Cot, IEMM CNRS-ENSCM-Univ. Montpellier II*).



**Fig. 2.** Profils de concentration de Pt à différents temps de dépôts.  $z = 0$  correspond à l'interface géométrique couche poreuse-vide. Les profils de concentration de platine dans les templates AAO sont similaires.



**Fig. 3.** Image de microscopie électronique d'un substrat d'oxyde d'aluminium anodisé avec son réseau hexagonal de pores cylindriques.

$$\rho(z, t) = Z_1(t), \quad -z_0(t) < z \leq 0$$

$$\rho(z, t) = Z_1(t) e^{-\frac{z^{2+\theta}}{Z_2(t)}}, \quad z > 0 \quad (1)$$

avec  $Z_1(t)$  et  $Z_2(t)$  des fonctions du temps. On trouve finalement que les fonctions  $Z_1(t)$  et  $Z_2(t)$  pour les temps longs suivent des lois de puissance :  $Z_1(t) \propto t^m$  et  $Z_2(t) \propto t^p$ . Le paramètre  $\theta$  caractérise la diffusion effective dans le milieu poreux.

## 2 Modèle

La diffusion dans un milieu se modélise par une équation de diffusion généralisée[4,5,6,7] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_0}{z^\theta} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

où le coefficient de diffusion est multiplié par le terme  $(z^\theta)$  afin de modéliser la porosité du milieu. Nous avons montré que les profils expérimentaux peuvent également être solutions de cette équation de diffusion généralisée, moyennant l'introduction d'un coefficient de diffusion dépendant du temps [3] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_0 \frac{t^\gamma}{z^\theta} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (2)$$

Le coefficient de diffusion  $K$  est choisi égal à  $K(z, t) = K_0 \frac{t^\gamma}{z^\theta}$  pour tenir compte du phénomène de dépôt-transport-adsorption dans les pores sur son éventuelle évolution au cours du temps. La présence d'une couche externe en  $z \leq 0$ , évoluant au cours du temps, est également prise en compte par une condition sur le flux, dépendant du temps *a priori* :

$$K_0 \frac{t^\gamma}{z^\theta} \frac{\partial \rho}{\partial z} \sim t^\epsilon, \quad z = 0 \quad (3)$$

de plus, le flux de matière pulvérisée en  $z = -\infty$  est constant. Si l'on cherche une solution auto-similaire de la forme

$$\rho(z, t) = t^\beta f\left(\frac{z}{t^\alpha}\right), \quad (4)$$

alors  $\alpha = \frac{1 + \gamma}{2 + \theta}$  et  $\alpha + \beta = 1 + \epsilon$

Le paramètre  $\theta$  caractérise la "capacité" de diffusion du milieu : pour  $\theta > 0$ , le milieu ralentit la diffusion (sous-diffusion), pour  $\theta < 0$ , il la facilite (super-diffusion). Ici  $\theta$  varie entre -1.0 et -1.8 selon les conditions de dépôts et les matériaux. Les paramètres  $\alpha, \beta, \theta$  dépendent plutôt des conditions de dépôt, alors que les paramètres  $\epsilon, \gamma$  dépendent plutôt du milieu poreux. La solution générale de l'équation (2) s'écrit

$$\rho(z, t) \propto t^\beta \exp\left[-\frac{(1 + \gamma)z^{2+\theta}}{K_0(2 + \theta)^2 t^{1+\gamma}}\right] \quad (5)$$

et on peut donc relier les paramètres à ceux de l'équation (1). En effet, comme  $\alpha = \frac{p}{2 + \theta}$  et  $\beta = m$ , il est alors possible de déterminer la relation entre les exposants expérimentaux  $m, p, \theta$  et les exposants de "diffusion"  $\gamma = p - 1$  et  $\epsilon = \frac{p}{2 + \theta} + m - 2$ . Et donc le profil devient complètement déterminé. Il est ainsi remarquable de pouvoir retrouver les profils expérimentaux d'un problème complexe couplant adsorption, transport et diffusion à l'aide d'une équation de diffusion avec un terme dépendant du temps. Ainsi, le problème de déposition par pulvérisation plasma sur un milieu poreux peut-être interprété comme un processus de diffusion fractale dans un domaine dont les propriétés varient avec le temps!

### 3 Discussion

Trois types de dépôts de Pt ont été réalisés : deux sur le carbone poreux dans deux conditions plasma différentes et un sur le template d'alumine à des temps successifs. Les valeurs des paramètres  $m, p, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \epsilon$  sont rassemblées dans le tableau 1.

**Tab.1.** Exposants des gaussiennes étirées  $m, p, \theta$ , auto-similaires  $\alpha, \beta$ , de diffusion  $\gamma, \epsilon$  pour 3 conditions de dépôt différentes.

Conditions	$m$	$p$	$\theta$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\epsilon$
C1	0.4	0.2	$-\frac{3}{2}$	0.4	0.4	-0.6	-0.2
C2	0.25	0.25	$-\frac{4}{3}$	0.5	0.25	-0.75	-0.25
AAO	0.75	1.25	$-\frac{5}{3}$	3.75	0.75	0.25	4.0

Les différences entre les conditions C1 et C2 sont uniquement dues aux conditions de dépôt : l'énergie cinétique des atomes de platine et le flux des ions d'argon incidents sur la couche poreuse sont plus

élevés dans le cas C1, les couches poreuses de carbone étant identiques. En revanche, la condition AAO présente un support alumine anodisée, mais les conditions de dépôt sont similaires à C1. On remarque que les dépôts C1-C2 conduisent à des valeurs négatives de  $\gamma$  et  $\epsilon$ . Ceci indique d'une part que la diffusion diminue au cours du temps en raison du remplissage, au moins en partie supérieure, des pores. D'autre part, le flux à la frontière  $z = 0$  diminue en raison de la couche qui croît en surface et limite donc l'accès aux pores. En revanche, pour l'alumine anodisée, les exposants  $\gamma$  et  $\epsilon$  sont positifs, ce qui indique d'une part une exaltation de la diffusion, malgré le rétrécissement des pores. D'autre part, l'augmentation du flux peut s'expliquer par une alimentation des pores par la couche superficielle en cours de croissance. Elle se comporte comme un réservoir pour cette diffusion.

Si l'on calcule l'évolution de la masse dans le pore, on s'aperçoit qu'elle croît plus vite qu'une loi linéaire. Dans le même temps, la masse de platine en surface (entre les pores) augmente moins vite qu'une loi linéaire, alors que la masse totale augmente linéairement avec le temps, en raison du flux constant de matière pulvérisée. Les différences entre les deux milieux sont la plus faible porosité et l'absence de tortuosité pour le support AAO. Malgré cette plus faible porosité, on constate que la diffusion est exaltée dans ce dernier cas. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'absence de tortuosité rend le transport dans le pore cylindrique plus efficace que dans l'empilement de sphères, qui pourtant présente une plus forte porosité, mais une plus faible accessibilité. On atteint là les limites du modèle proposé, qui ne tient compte ni de la géométrie du support matériel, ni des processus physiques mis en jeu (couplage transport-adsorption). En effet, le modèle étudié est principalement "descriptif" car il ne permet pas de prédire l'évolution du coefficient de diffusion avec le temps.

Des études complémentaires sont en cours pour tenter de construire un modèle plus complet de la pulvérisation plasma, d'une part en utilisant des simulations en dynamique moléculaire, d'autre part en développant un modèle couplant des équations de transport-diffusion avec des lois d'adsorption non-linéaires [8,9], dans l'esprit de [10].

## 4 Conclusion

Des études expérimentales et de modélisation montrent que la diffusion d'atomes dans un milieu poreux, tortueux ou non, conduit à reconsidérer l'équation de diffusion en introduisant non seulement une dépendance spatiale du coefficient de diffusion, mais aussi une dépendance temporelle. Les exposants de l'évolution des profils de concentration expérimentaux, ainsi que les exposants d'auto-similarité, dépendent des conditions de dépôt de matière dans le milieu poreux alors que les exposants de "diffusion" dépendent de la géométrie du milieu poreux. En particulier on soupçonne un effet important de la tortuosité. Malgré ce bon accord quantitatif, il est nécessaire d'élaborer un modèle qui s'appuie plus directement sur les processus physiques.

## Références

1. P. BRAULT, A. CAILLARD, A. L. THOMANN, J. MATHIAS, C. CHARLES, R. W. BOSWELL, S. ESCRIBANO, J. DURAND & T. SAUVAGE, *Journal Physics D*, **34**, 3419 (2004).
2. A. CAILLARD, P. BRAULT, J. MATHIAS, C. CHARLES, R. W. BOSWELL & T. SAUVAGE, *Surf. Coat. Technol.* **200**, 391 (2005).
3. P. BRAULT, C. JOSSERAND, J. M. BAUCHIRE, A. CAILLARD, C. CHARLES & R. W. BOSWELL, *Physical Review Letters*, **102**, 045901 (2009).
4. L. C. MALACARNE, R. S. MENDES, I. T. PEDRON & E. K. LENZI, *Physical Review E*, **63**, 030101 (2001).
5. I. T. PEDRON, R. S. MENDES, L.C. MALACARNE & E. K. LENZI, *Physical Review E*, **65**, 041108 (2002).
6. C. TSALLIS & E. K. LENZI, *Chemical Physics*, **284**, 341 (2002).
7. B. O'SHAUGHNESSY & I. PROCACCIA, *Physical Review Letters*, **54**, 455 (1985).
8. F. JAMES, M. SEPULVEDA & P. VALENTIN, Statistical thermodynamic models for multicomponent diphasic isothermal equilibria, *Mathematical Models and Methods in Applied Science* **7**, 1-29 (1997).
9. I. LANGMUIR, The adsorption of gases on plane surfaces of glass, mica and platinum, *Journal of the American Chemical Society*, **40**, 1361-1403 (1918).
10. F. JAMES, M. POSTEL & M. SEPÚLVEDA, Numerical comparison between relaxation and nonlinear equilibrium models : Application to chemical engineering, *Physica D*, **138** (3-4), 316-333 (2000).

# Auto-résonance de l'instabilité Raman stimulée due à une non-linéarité d'origine cinétique dans un plasma inhomogène

Thomas Chapman<sup>1</sup>, Stefan Hüller<sup>1</sup>, & Paul-Edouard Masson-Laborde<sup>2</sup> & Wojciech Rozmus<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centre de Physique Théorique, CNRS, École Polytechnique, Palaiseau, France

<sup>2</sup> CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France

<sup>3</sup> University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada

chapman@cpht.polytechnique.fr

**Résumé.** Nous présentons de nouvelles solutions du système à trois ondes couplées décrivant les instabilités paramétriques de diffusion. L'étude analytique et numérique est focalisée sur l'influence de l'effet d'auto-résonance dans un plasma inhomogène, dans le cas où la non-linéarité de l'onde de plasma est dominée par l'interaction onde-électrons (non-linéarité de type cinétique). Dans le contexte de la fusion inertielle par laser, on montre que l'onde plasma électronique peut être verrouillée en phase avec la force pondéromotrice associée au battement entre l'onde laser et l'onde de la lumière rétro-diffusée. Cette solution verrouillée en phase peut donner lieu à une importante croissance séculaire de l'onde plasma, différente de celle habituellement observée. On montre que la croissance de cette onde induit une rupture du verrouillage de phase, qui met fin au développement de l'instabilité.

**Abstract.** New solutions to the coupled three-wave equations describing parametric scattering instabilities are presented. This analytical and numerical study investigates the impact of autoresonance on stimulated Raman scattering in an inhomogenous plasma, where the dominant plasma wave nonlinearity is due to wave-particle interactions (a kinetic-type nonlinearity). Under conditions in the plasma relevant to laser fusion, it is shown that the electron plasma wave may become phase-locked to the beating between a laser pump wave and a back-scattered light wave. This phase-locked solution may grow to a significant amplitude. It is shown that the growth of the electron plasma wave will lead to a break-down of the phase-locking and hence its maximum attainable amplitude is inherently limited.

## 1 Introduction

Stimulated Raman Scattering (SRS) in warm plasmas is a parametrically unstable resonant three-wave interaction, where laser light (the pump wave) scatters off an electron plasma wave (the Langmuir wave), resulting in a second electromagnetic wave (the scattered wave). The understanding of the SRS process is of central importance to the realisation of laser thermonuclear fusion. Through back-scattering of the laser and fast-electron generation, SRS reduces the efficiency of the laser light absorption that heats the plasma corona. This in turn inhibits the necessary ablation and compression processes and may eventually inhibit the ignition of the thermonuclear deuterium-tritium fuel.

In the presence of a nonlinear perturbation such as wave-profile steepening or kinetic effects, the Langmuir wave can be considered as a nonlinear oscillator coupled to the electromagnetic waves [1]. The frequency of a nonlinear oscillator varies with the amplitude of oscillation. Starting from rest, if the system is driven at its linear (constant) frequency, then the amplitude of oscillation will initially increase. However, the oscillator will quickly dephase from the drive and the amplitude will subsequently beat back to a small value. If instead the system is driven at a frequency that also varies, the oscillator may, under certain conditions, phase-lock to the drive and automatically stay resonant, allowing the amplitude to grow well beyond the response to a fixed-frequency drive.

Autoresonance arises in many systems such as driven pendulums [2], electron beams in accelerators [3,4] and superconducting Josephson junctions [5]. Yaakobi *et al.* [1] investigated the phenomenon of autoresonance in the SRS process in a physical regime where the dominant nonlinear frequency shift (NFS) of the oscillation (in this case, in the Langmuir wave equation) arose from thermal and relativistic effects in the plasma. This fluid-type NFS was proportional to the squared Langmuir wave amplitude.

In the following work, we investigate autoresonance in the SRS process in the physical regime where the dominant NFS arises from kinetic effects. This kinetic-type NFS is proportional to the square root of the Langmuir wave amplitude [8].

## 2 The three-wave equations with a kinetic-type nonlinearity

We consider the case where the incident electromagnetic pump wave (forwards-propagating) couples to the Langmuir wave (forwards-propagating) and a back-scattered electromagnetic wave (backwards-propagating) in a plasma with a density that increases linearly in the forwards direction. The SRS process can be described by the following system of quadratically-coupled envelope equations (see e.g. Ref. [6]), relevant to a one-dimensional, weakly non-uniform, stationary, underdense, thermal plasma :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial z}\right) a_0 = -\frac{\omega_p^2}{2\omega_0} a_1 a_L, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - |c_1| \frac{\partial}{\partial z}\right) a_1 = \frac{\omega_p^2}{2\omega_1} a_0 a_L^*, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_L \frac{\partial}{\partial z} + i\beta|a_L|^{1/2} - ic_L \kappa' z\right) a_L = \gamma \omega_0 a_0 a_1^*. \quad (3)$$

We describe each of the three waves in terms of a slowly-varying complex envelope and a quickly-varying phase. The envelopes  $a_0$  and  $a_1$  describe the pump and scattered waves respectively and the Langmuir wave is described by  $a_L = \delta n_e / n_0$  where  $n_0$  is the plasma density before the formation of the Langmuir wave and  $\delta n_e$  is the perturbation of this density.

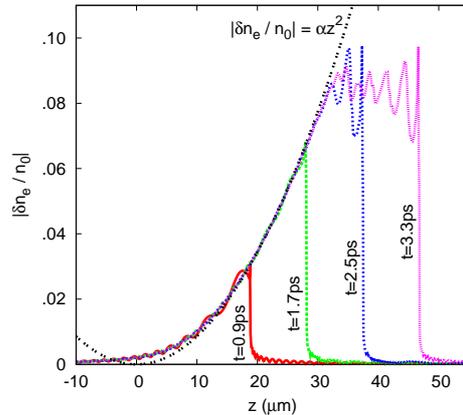
We assume the three-wave resonance condition  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_L$  for the frequencies, while the wave vectors  $k_{0,1,L}$  are slowly varying functions of space  $z$ . The SRS process is relevant in the regime where all frequencies are greater than  $\omega_p/2$ , where the plasma frequency  $\omega_p^2 = \omega_p^2(z) = n_0 e^2 / \epsilon_0 m_e$ , for which  $\epsilon_0$  is the permittivity of free space,  $e$  is the charge of the electron and  $m_e$  is the electron mass. The wave vectors are mismatched according to  $k_0 - k_1 - k_L = \kappa' z$ , where  $\kappa'$  parameterises the spatial inhomogeneity (derived by Liu *et al.* [7]), and act to detune the three waves from resonance either side of  $z = 0$ . The vacuum speed of light is given by  $c$  while the group velocities of the three waves are  $c_{0,1,L}$ . The coupling strength of Langmuir wave to the pump and scattered waves is given by the parameter  $\gamma = (k_L^2 c^2 / 2\omega_L \omega_0) (I_F / n_c m c^3)$  where  $I_F$  is the incident pump wave energy flux and  $n_c$  is the density up to which the pump wave can penetrate (the critical density).

The frequency shift of the Langmuir wave  $-ic_L \kappa' z$  in equation (3) is due to the mismatch in the wave vectors, with the spatial resonance occurring at  $z = 0$ . This study focuses on the kinetic NFS  $i\beta|a_L|^{1/2}$  in equation (3) and its potential to balance the frequency shift due to the wave vector mismatch over a significant distance beyond the resonance point. The strength  $\beta$  of the kinetic NFS is assumed constant in all simulations.

## 3 Analysis using a prescribed ponderomotive drive

We begin this investigation of spatial autoresonance by initially reducing the system of three coupled equations to a single equation describing the Langmuir wave. We prescribe the amplitudes of the electromagnetic waves on the RHS of equation (3) and replace  $\gamma \omega_0 a_0 a_1^*$  with a prescribed ponderomotive drive  $P$ . This allows the investigation of spatial autoresonance to be uncomplicated by effects due to the depletion of the pump wave or growth of the scattered wave. Furthermore, the Langmuir wave is driven by a single frequency meaning SRS may occur only at the resonance point.

For convenience of analysis, we define the characteristics  $t = s - s_*$  and  $z = c_L s$ , where  $s$  is a real variable chosen so that  $s = 0$  at  $z = 0$  and  $s_*$  is a constant. The characteristics are straight lines in the  $(z, t)$ -plane, intercepting the  $z$ -axis at  $s_*$  and bound by  $z_L$  and  $z_R$  (the left and right boundaries of



**Fig. 1.** (Colour online) Solutions to the prescribed ponderomotive drive Langmuir wave equation (4) showing the growth and propagation of the Langmuir wave through a positive plasma density gradient at different times,  $t=0.9, 1.7, 2.5, 3.3$  ps. The equation  $|\delta n_e/n_0| = \alpha z^2$  where  $\alpha = (c_L \kappa'/\beta)^2 = 8 \times 10^{-5} \mu\text{m}^{-2}$  describes the growth of the leading edge of the Langmuir wave, based on the cancellation of the kinetic nonlinear frequency shift and the frequency shift due to the wave vector mismatch.

the plasma respectively). Using the total derivative of  $a_L$ , we may rewrite equation (3) as the ordinary differential equation

$$\frac{da_L}{ds} + i(\beta|a_L|^{1/2} - c_L^2 \kappa' s) a_L = P(s), \quad (4)$$

which is readily solved along these characteristics. Equation (4) must then be solved for a range of values of  $s_*$  with the initial condition  $a_L(z = z_L) = 0$  in order for the space-time dependence of the Langmuir wave equation to be recovered. For  $t < 0$ ,  $P(s) = 0$  and  $a_L$  is undriven. At  $t = 0$ , we switch on the prescribed ponderomotive drive. For  $t \geq 0$ ,  $P(s)$  is assigned a fixed value, uniform throughout the plasma hence  $P(s) = \mu H(s - s_*)$ , where  $\mu$  is a constant and  $H$  is the Heaviside step function.

Following the results of Yaakobi *et al.* [1], we look for solutions to equation (4) characterised by the autoresonant growth of  $a_L$  to high amplitude, where the phase  $\phi_L = \arg(a_L)$  is constant over a region in space (i.e. where  $a_L$  is phase locked to  $P$ ). We also expect solutions characterised by  $\phi_L$  changing rapidly and  $a_L$  oscillating around a constant value. In Fig. 1, we present a solution to equation (4), showing the propagation and evolution of  $a_L$  through space and time. For consistency, the values of  $\beta$  and  $P$  were chosen to be in agreement with the parameters used in section 4 ( $P$  is in this case real and negative due to the locked phases  $\phi_0 = \arg(a_0) \approx 0$  and  $\phi_1 = \arg(a_1) \approx -\pi$ , calculated in section 4). The solution is autoresonant with a growing wave front closely following the curve

$$|a_L| = (c_L \kappa'/\beta)^2 z^2 \quad \text{or} \quad \beta |a_L|^{1/2} = c_L^2 \kappa' s \quad (5)$$

for  $z, s > 0$ , indicating a cancellation of the kinetic NFS and the frequency shift due to the plasma inhomogeneity. The phase  $\phi_L \approx \pi/2$  throughout the region behind the wave front. Behind the wave front,  $a_L$  is steady in space and time but for small fluctuations.

The solutions presented by Yaakobi *et al.* [1] for the growth of the Langmuir wave in a regime where the dominant NFS is of a fluid type displayed a pronounced threshold phenomenon. In this case, the Langmuir wave was observed to dephase quickly from the drive when driven below threshold. When driven above this threshold, however, the phase-locking of the Langmuir wave to the drive continued indefinitely, allowing the Langmuir wave to grow arbitrarily high if pump depletion effects were not introduced. This behaviour was explained by Fajans and Frièdland [2] by drawing analogy to a driven pendulum and considering the formation of pseudo-potential wells that act to trap the phase of the pendulum, leading to small oscillations of  $\phi_L$  around a constant value. A similar analysis of these pseudo-potential wells where a kinetic NFS replaces the fluid NFS may be performed. By substituting  $a_L = |a_L| \exp(i\phi_L)$  into equation

(4), we may write

$$\frac{dI}{ds} = -2I^{1/2}|P|\cos(\phi_L), \quad (6)$$

$$\frac{d\phi_L}{ds} = c_L^2\kappa's - \beta I^{1/4} + I^{-1/2}|P|\sin(\phi_L), \quad (7)$$

where  $I = a_L^2$  is the action of the system. From solutions to equation (4), we observe the phase to be locked at  $\phi_L \approx \pi/2$  as the system passes through resonance at  $s = 0$ . For the system to remain autoresonant and for the drive  $P$  to be effectively coupled to  $I$ , the phase must remain locked at this value. We separate  $I$  into the slowly-varying average action  $I_0$  and a perturbation  $\Delta$ , where  $I = I_0 - \Delta$ . Since  $\phi_L$  is constant during autoresonance, we may set its derivative in equation (7) to zero and using the average action write

$$0 \approx c_L^2\kappa's - \beta I_0^{1/4} + I_0^{-1/2}|P|. \quad (8)$$

Differentiating this expression and solving for  $I_0$ , we find

$$\frac{dI_0}{ds} = \frac{c_L^2\kappa'}{M}, \quad (9)$$

where the slowly-varying parameter  $M = M(s)$  is

$$M = \frac{|P|}{2I_0^{3/2}} + \frac{\beta}{4I_0^{3/4}}. \quad (10)$$

We now expand equations (6) and (7) around the instantaneous value of the average action  $I_0$  by substituting equation (9) into equation (6) and equation (8) into equation (7). To lowest order, we find

$$\frac{d\Delta}{ds} = 2I_0^{1/2}|P|\cos(\phi_L) + \frac{c_L^2\kappa'}{M}, \quad (11)$$

$$\frac{d\phi_L}{ds} = \Delta M. \quad (12)$$

Equations (11) and (12) form a Hamiltonian system  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Delta, \phi_L, s)$  where

$$\mathcal{H} = \frac{M\Delta^2}{2} - \left( 2I_0^{1/2}|P|\sin(\phi_L) + \frac{c_L^2\kappa'}{M}\phi_L \right) = \frac{1}{2M} \left( \frac{d\phi_L}{ds} \right)^2 + V(\phi_L). \quad (13)$$

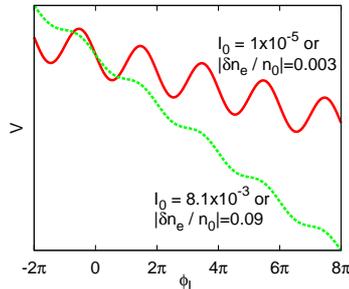
We may interpret equation (13) as a Hamiltonian governing the behaviour of a pseudoparticle at  $s \approx 0$  that describes the phase  $\phi_L$  of the Langmuir wave. This pseudoparticle has a slowly-varying effective mass  $M$  and travels through a potential  $V$  that varies with  $\phi_L$ . The potential  $V = V_{lin} + V_{osc}$  is a sum of two terms: a linear term  $V_{lin} = -(c_L^2\kappa'/M)\phi_L$  and a series of potential wells  $V_{osc} = -2I_0^{1/2}|P|\sin(\phi_L)$ . Under the condition that  $M$  varies slowly, these wells may be significant and can act to trap the pseudoparticle provided that

$$\left| \frac{dV_{osc}}{d\phi_L} \right| > \left| \frac{dV_{lin}}{d\phi_L} \right|, \quad (14)$$

for a range of values of  $\phi_L$  within the period of  $V_{osc}$ . In this case, the slope of  $V_{lin}$  is small enough that the oscillation of  $V_{osc}$  causes an overall oscillation in the sign of the gradient of  $V$ . This will be true while

$$2I_0^{1/2}|P| > c_L^2\kappa'/M. \quad (15)$$

Since we have assumed that the system is initially autoresonant, we begin with the pseudoparticle trapped in  $V$  and  $\phi_L$  performing small oscillations around  $\pi/2$ . Initially, the average action  $I_0$  grows according to  $I_0 \approx |a_L|^2 \propto s^4$ . However, as  $I_0$  increases, we see from equation (10) that  $M$  decreases quickly and that the RHS of equation (15) increases faster than the LHS of equation (15). This results in a weakening of the pseudoparticle trapping and the eventual loss of autoresonance, shown in Fig. 2.



**Fig. 2.** (Colour online) The potential  $V = -(c_L^2 \kappa' / M) \phi_L - 2I_0^{1/2} |P| \sin(\phi_L)$  shown at  $I_0 = 1 \times 10^{-5}$  (solid red line) and  $I_0 = 8.1 \times 10^{-3}$  (dashed green line) corresponding to  $z \approx 0 \mu\text{m}$  and  $z \approx 35 \mu\text{m}$  in Fig. 1 respectively. All parameters used to calculate  $V$  other than  $I_0$  are identical in the two cases. The potential wells are capable of trapping the phase of the Langmuir wave  $\phi_L$  while  $2I_0^{1/2} |P| > c_L^2 \kappa' / M$ . The potential wells become less significant and eventually disappear as the average action  $I_0$  increases, ending the autoresonant region in space. For clarity,  $V$  has been increased by a factor of 100 for  $I_0 = 1 \times 10^{-5}$  (solid red line).

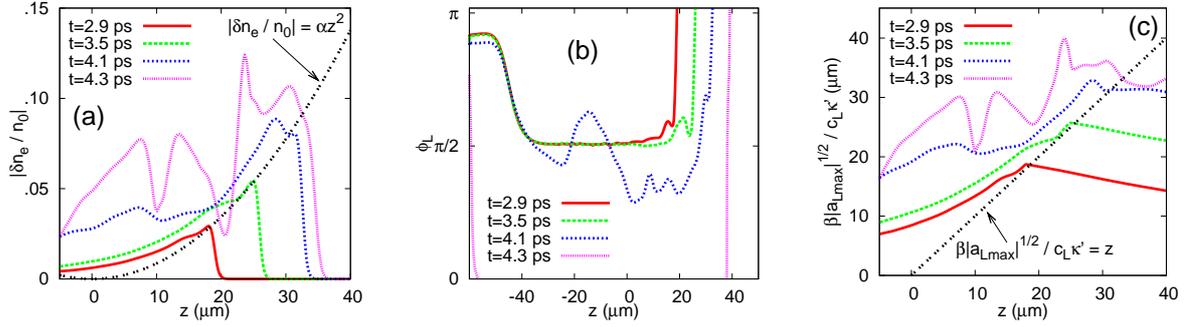
The sharp threshold behaviour of autoresonance arising from a fluid NFS found by Yaakobi *et al.* [1] is not observed in the kinetic case. Regardless of the parameters chosen, autoresonance where the dominant NFS is kinetic will always eventually be lost as  $s$  (or  $z$ ), and consequently  $I_0$ , increases. In Fig. 1, we observe this breakdown of phase-locking and the resulting plateau of the amplitude at  $|\delta n_e / n_0| = 0.09$ . From equation (15), it is clear that this maximum amplitude increases with the magnitude of both  $\beta$  and  $P$ . However, due to the  $\beta^{-2}$  dependence of the Langmuir wave amplitude in equation (5), the wave front will grow more slowly in space as  $\beta$  is increased and require a longer distance to reach a plateau. Equation (15) may be solved for  $I_0$ , and using unchanged parameters, we find a predicted maximum amplitude  $|\delta n_e / n_0| = 0.06$ . This is lower than the actual maximum reached in the solutions shown in Fig. 1 since the growth of  $\phi_L$  will still be slow for a short distance in space after the initial loss of the potential wells, resulting in a continued increase in  $|\delta n_e / n_0|$ .

#### 4 Three-wave coupling code with a positive density gradient

Using a finite difference method, we numerically solve the space-time dependent system of equations (1-3) between the boundaries  $z_L$  and  $z_R$ . At  $z_R$ , we seed the system by injecting a back-scattered wave from a noise source (here, we use a Langevin equation) with a broad frequency spectrum, allowing SRS to occur at all points in the plasma. At  $z_L$ , a pump wave is injected after ensuring that the injected back-scattered wave has propagated throughout the plasma. To better approximate the physical situation, we include a nonlinear Landau damping term  $\nu = 0.03\omega_p[1 + \beta|a_{Lmax}|^{1/2}(t/\tau)]^{-1}$  in equation (3), where  $\tau$  is the time for resonant trapped electrons to bounce across the potential well of the wave and  $a_{Lmax}$  is the maximum local value of the Langmuir wave which propagates at the phase velocity  $c_{ph} \equiv \omega_L / k_L$ .

In Fig. 3 we present solutions to equations (1-3), assuming a peak pump wave intensity  $I_F = 5 \times 10^{15} \text{ W/cm}^2$  with wavelength  $\lambda_0 = 2\pi c / \omega_0 = 351 \text{ nm}$ , and an injected back-scattered wave at an average thermal level corresponding to an intensity of approximately  $5 \times 10^4 \text{ W/cm}^2$ . The inhomogeneity parameter  $\kappa' = 4.4 \times 10^7 \text{ cm}^{-2}$ . The wave vector of the Langmuir wave  $k_L$  and the Debye length  $\lambda_{De}$  are such that the plasma parameter  $k_L \lambda_{De}(z=0) \simeq 0.34$  is in a typically “kinetic” regime.

In Fig. 3(a),  $a_L = \delta n_e / n_0$  is shown as a function of  $z$  at a range of times showing the evolution of the Langmuir wave. We find that the leading edge of the Langmuir wave front follows the relation found using a prescribed ponderomotive drive given in equation (5). In Fig. 3(b), the phase is observed to be locked at  $\phi_L \approx \pi/2$  over a distance that increases with the same speed that the wave front of  $a_L$  propagates. The significant deviation of the phase from this value occurs simultaneously to the collapse of the steady form of the Langmuir wave front. In Fig. 3(c), the effective cancellation between the kinetic NFS and the



**Fig. 3.** (Colour online) Solutions to the three-wave equations (1-3). (a) the growth and propagation of the Langmuir wave is shown at different times,  $t=2.9, 3.5, 4.1, 4.3$  ps. The equation  $|\delta n_e/n_0| = \alpha z^2$  where  $\alpha = (c_L \kappa'/\beta)^2 = 8 \times 10^{-5} \mu\text{m}^{-2}$  describes the growth of the leading edge of the Langmuir wave, based on the cancellation of the kinetic nonlinear frequency shift and the frequency shift due to the wave vector mismatch. (b) the phase  $\phi_L$  associated with the Langmuir wave. (c) the magnitude of the kinetic NFS term in the wave equation of the Langmuir wave (normalised to the term describing the frequency shift due to the wave vector mismatch)

shift due to the spatial inhomogeneity may be seen. The cancellation is total only for a short distance in space at the leading edge of the Langmuir wave growth.

## 5 Conclusion

Under conditions relevant to laser fusion experiments, the autoresonant SRS-driven Langmuir wave obtained by solving the three-wave equations has a slowly-changing form with a wave front that grows according to  $|\delta n_e/n_0| = \alpha z^2$ , where  $\alpha = (c_L \kappa'/\beta)^2$ . When the pump wave passes through a positive density gradient, the autoresonant growth will begin at the three-wave resonance point and continue until the growing amplitude of the Langmuir wave causes a break-down in the phase-locking of the Langmuir wave to the pump and back-scattered waves. This loss of autoresonance is inevitable and is a property of the form of the kinetic nonlinear frequency shift. Due to the inherent limit on the maximum Langmuir wave amplitude that can be reached in this way, the length in space over which autoresonance may occur is also limited.

## Références

1. O. YAAKOBI, L. FRIEDLAND, R. R. LINDBERG, A. E. CHARMAN, G. PENN & J. S. WURTELE, Spatially autoresonant stimulated Raman scattering in nonuniform plasmas, *Physics of Plasmas*, **15**, 032105 (2008)
2. J. FAJANS & L. FRIEDLAND, Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators, *American Journal of Physics*, **69**, 1096 (2001).
3. E. M. MCMILLAN, The Synchrotron — A Proposed High Energy Particle Accelerator, *Physical Review E*, **68**, 143 (1945).
4. V. I. VEKSLER, *J. Phys. (U.S.S.R.)* **9**, 153 (1945).
5. O. NAAMAN, J. AUMENTADO, L. FRIEDLAND, J. S. WURTELE & I. SIDDIQI, Phase-locking transition in a chirped superconducting Josephson resonator, *Physical Review Letters*, **101**, 117005 (2008).
6. D. FORSLUND, J. KINDEL & E. LINDMAN, Theory of stimulated scattering processes in laser-irradiated plasmas, *Physics of Fluids*, **18**, 1002 (1975).
7. C. S. LIU, M. N. ROSENBLUTH & R. B. WHITE, Parametric scattering instabilities in inhomogenous plasmas, *Physical Review Letters*, **31**, 697 (1973).
8. G. J. MORALES & T. M. O'NEIL, Nonlinear frequency shift of an electron plasma wave, *Physical Review Letters*, **28**, 417 (1972).

# Analyse de stabilité d'un modèle multiphase : application à la croissance d'un mélanome

Clément Chatelain<sup>1</sup>, Pasquale Ciarletta<sup>1</sup> & Martine Ben Amar<sup>1</sup>

Laboratoire de Physique Statistique, École Normale supérieure  
 clement.chatelain@lps.ens.fr

**Résumé.** Un modèle typique simplifié de mélange à deux phases est utilisé pour décrire la croissance en deux dimensions d'une tumeur avasculaire de type mélanome. Les conditions d'apparition d'instabilités de contour sont étudiées numériquement pour une croissance en front plan et une croissance radiale. Une étude analytique de la stabilité d'un front plan aux courtes et grandes longueurs d'ondes met évidence la possibilité d'apparition d'instabilités pour certaines valeurs des paramètres du modèle.

**Abstract.** A simple two-phase model is used to describe the two dimensional growth of an avascular tumor of melanoma type. Numerical methods are used to investigate the condition of development of instabilities at the tumor border, both in a planar and radial geometry. Analytical study of the stability of a planar front indicates the asymptotic behavior in the short and long wave length limit and the influence of the model parameters.

## 1 Introduction

Les mélanomes sont des cancers de la peau apparaissant dans l'épiderme et caractérisés par une prolifération anormale des cellules responsables de la pigmentation, les mélanocytes, au détriment des autres types cellulaires constituant l'épiderme (principalement des kératinocytes) [1]. Ce dérèglement se traduit par un envahissement du tissu sain et par le développement d'une tache visible à la surface de la peau, dont la forme, la taille et la vitesse de développement aident les dermatologues à en pronostiquer la dangerosité [2]. Des irrégularités de contour et un écart à la symétrie circulaire sont notamment interprétés comme les signes d'une tumeur agressive. Si la perturbation de l'homéostasie du tissu a des origines génétiques (mutation et changement de comportement d'un groupe de cellules), il a été montré théoriquement [4,5] et *in vitro* [3] que les interactions mécaniques entre les différents constituants du tissu jouent également un rôle important lors du développement tumoral. Nous sommes intéressés ici par le rôle de ces interactions dans l'apparition d'instabilités de contour lors de la croissance de la tumeur.

## 2 Modèle

La théorie des mélanges a été utilisée avec succès ces dernières années pour décrire plusieurs problèmes concernant la croissance de tumeurs [5]. On considère un système simplifié d'un mélange à deux phases, une phase constituée des cellules proliférant et d'une phase liquide dans lequel les nutriments nécessaires à la survie et à la multiplication des cellules diffusent. On notera  $\phi_c$  et  $\mathbf{v}_c$ ,  $\phi_l$  et  $\mathbf{v}_l$  leurs fractions volumiques et vitesses respectives et  $n$  la concentration en nutriment dans la phase liquide. Le mélange est supposé saturé ( $\phi_c + \phi_l = 1$ ) et la conservation de la masse donne dans chaque phase :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi_c) + \nabla \cdot (\rho\phi_c\mathbf{v}_c) = \rho\Gamma \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi_l) + \nabla \cdot (\rho\phi_l\mathbf{v}_l) = -\rho\Gamma \quad (2)$$

Avec  $\rho$  la masse volumique qui peut être considérée égale à celle de l'eau pour les deux phases.  $\Gamma$  représente le taux de transformation de liquide en cellule, dû à la compétition entre croissance cellulaire

dépendant de la concentration locale en nutriments, et mort cellulaire. On choisit un modèle simple pour  $\gamma$  proportionnel au taux de cellules tumorales

$$\Gamma = \gamma\phi_c n - \delta\phi_c \quad (3)$$

Le transport des nutriments dans la phase liquide est gouvernée par l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\phi_l \mathbf{v}_l) = D_n \nabla^2 n - \delta_n \phi_c n \quad (4)$$

Dans laquelle les termes de droite représentent la diffusion des nutriments et leur consommation par les cellules. En pratique les vitesses observées pour de tels systèmes sont très faibles et les nutriments sont des molécules de petite taille, donc avec un large coefficient de diffusion, et on peut négliger le terme d'advection pour cette équation de transport.

On suppose le système sans force extérieure, ce qui impose la relation sur les vitesses

$$\mathbf{v}_l \phi_l + \mathbf{v}_c \phi_c = 0 \quad (5)$$

On modélise la phase cellule par un fluide élastique dont le tenseur des contraintes est donné par l'équation constitutive

$$\tilde{\mathbf{T}}_c = (-\phi_c p - \Sigma(\phi_c)) \mathbf{I} \quad (6)$$

où  $p$  est la pression hydrostatique du liquide interstitiel et  $\Sigma$  est une fonction phénoménologique décrivant l'interaction des cellules. Un comportement généralement assumé pour ce type de modèle est une interaction attractive pour des cellules à une distance moyenne et qui devient ensuite répulsive et diverge lorsque les cellules se rapprochent. On choisit donc pour notre modèle simple une fonction satisfaisant ces caractéristiques

$$\Sigma(\phi_c) = \chi \frac{\phi_c^m (\phi_c - \phi_{ext})}{1 - \phi_c} \quad (7)$$

On n'introduit de viscosité pour aucune des deux phases dans le cadre de ce modèle simplifié. La force d'interaction entre les deux phases est de type friction visqueuse

$$\mathbf{f}_{lc} = -\mathbf{f}_{cl} = M(\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_c) \quad (8)$$

avec  $M > 0$ . Le système étant très dissipatif, l'impulsion dans les deux phases est négligeable et l'équilibre des forces pour la phase cellule avec Eq.5 donne alors une loi de Darcy pour les vitesses [6]

$$\mathbf{v}_c = -\frac{(1 - \phi_c)^2}{M} \nabla \Sigma \quad (9)$$

Nous utiliserons par la suite un potentiel des vitesses  $W(\phi)$  défini par  $\mathbf{v}_c = -\nabla W = -W_\phi \nabla \phi$ . Les équations de notre système peuvent alors être réécrites en fonction des variables adimensionnées

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\delta_n}{D_n}} x \quad \bar{t} = \delta_n t \quad \bar{n} = \frac{n}{n_{ext}} \quad \bar{\Sigma} = \frac{1}{\chi} \Sigma \quad (10)$$

où  $n_{ext}$  est la concentration en nutriment à l'extérieur de la tumeur. En négligeant le terme d'advection dans l'équation de transport des nutriments les équations du système deviennent alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\phi \bar{\mathbf{v}}) = \bar{\gamma} \phi \bar{n} - \bar{\delta} \phi \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \bar{t}} = \bar{\nabla}^2 \bar{n} - \phi_c n \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = -\bar{D}(1 - \phi)^2 \bar{\nabla} \bar{\Sigma} \quad (13)$$

où on a enlevé les indices pour la fraction volumique et la vitesse de la phase cellule. Par la suite on ne considérera que les variables et coefficients adimensionnés dont on omettra les barres. On considère des conditions aux limites définies à la frontière de la tumeur

$$n(\mathbf{x}_{inter}) = 1 \quad \phi(\mathbf{x}_{inter}) = \phi_{ext} \quad (14)$$

Avec la forme de  $\Sigma$  choisie, la dernière condition assure une frontière sans contrainte. L'évolution de cette frontière est donnée par continuité de la vitesse de la phase cellule et la normale  $\mathbf{n}$  à la frontière

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}_{inter}}{dt} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_{inter}) \quad (15)$$

### 3 Méthode numérique

Les Eqs.11,12,13 sont discrétisées en utilisant une méthode de différence finie similaire à celle de [7,8] où les vitesses sont définies sur les bords de maille. La frontière de la tumeur est initialement discrétisée par  $N$  marqueurs listés dont l'évolution est donnée par une estimation de leur vitesse  $v$  locale, déterminée par la méthode des marqueurs de surface [7,8]. Pour éviter des erreurs dues à la discrétisation lors de la croissance de la frontière, un nouveau marqueur est introduit entre deux marqueurs voisins si leur distance devient plus grande que  $a\delta x$  où  $\delta x$  est la taille de maille et  $a = 0.25$  dans les simulations, ce qui assure d'avoir un nombre minimum de marqueurs par maille. Les Eqs.11,12,13 sont résolues uniquement à l'intérieur de la frontière et les conditions aux limites sont données à cette frontière par les Eqs.14

Pour certains paramètres on trouve numériquement la possibilité de développement d'instabilités dans le cas d'une croissance plane (Fig. 3) et d'une croissance radiale (Fig. 1). Cependant ces instabilités saturent à une certaine taille, ce qui est peut être dû à la méthode numérique utilisée [8].

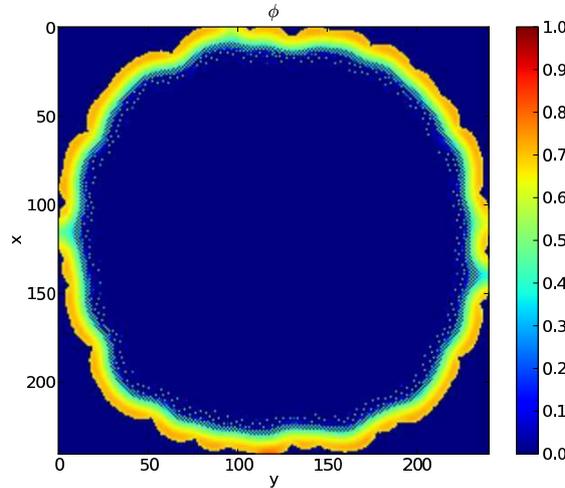


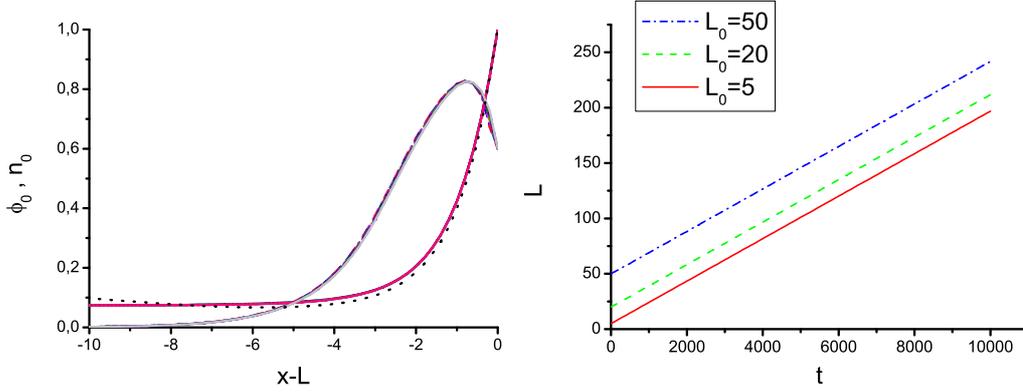
Fig. 1. Instabilité de contour pour une croissance radiale.  $\gamma = 0.05$ ,  $\delta = 0.02$ ,  $D = 0.2$  et  $\phi_{ext} = 0.6$

## 4 Front plan

### 4.1 Onde progressive

On considère ici un front plan orthogonal à l'axe des  $x$ , invariant selon  $y$ . La simulation numérique du système d'équations Eqs.11,12,13 à partir d'une condition initiale symétrique par rapport à  $x = 0$  et

à support fini présente des solutions de type onde progressive de vitesse  $U$  constante (Fig. 2). Le type d'onde obtenu ne semble pas dépendre de la forme de la condition initiale pour ce modèle (Fig. 2 droite). On remarque que pour des modèles plus élaborés [9], il a été montré que la taille des solutions sature après une croissance initiale. Cette différence peut être sûrement expliquée par la simplicité du modèle envisagé ici. La recherche de solutions de type onde plane progressive avec  $\phi(x, t) = \phi_0(z = x - Ut)$  et



**Fig. 2.** Gauche : Profils de  $\phi_0$  et  $n_0$  (profil monotone) dans le référentiel mobile associé à la frontière de la tumeur aux temps  $t = 10^3, 2.10^3 \dots, 10^4$ . Approximation WKB de  $n$  établi à partir du profil numérique de  $\phi_0$  (courbe noire en traits). Droite : Evolution de la position de la frontière de la tumeur  $L(t)$  pour trois différentes taille initiale.  $m = 3, \gamma = 0.05, \delta = 0.02, D = 0.2$  et  $\phi_{ext} = 0.6$

$n(x, t) = n_0(z = x - Ut)$  donne alors le système d'équations

$$((v - U)\phi_0)' = \gamma\phi_0 n_0 - \delta\phi_0 \quad (16)$$

$$n_0'' + Un_0' + \phi_0 n_0 = 0 \quad (17)$$

où les indices ' indiquent la dérivée par rapport à  $z$ . L'étude du comportement asymptotique en  $-\infty$  donne notamment  $\phi_0(z) \rightarrow 0$ , indiquant la présence d'un coeur nécrotique, ce qui est en accord avec nos solutions numériques où nous trouvons une décroissance exponentielle de  $n_0$  et  $\phi_0$ . Une solution approchée pour  $n_0$  peut être trouvée en utilisant une approximation WKB donnant

$$n_0(z) = n_0(L) \left( \frac{\phi_0(L) + U^2/4}{\phi_0(z) + U^2/4} \right)^{1/4} e^{-\frac{U}{2}(z-L) + S(z)} \quad (18)$$

où  $\phi_0$  est traité comme un champs extérieur et avec  $S(z) = -\int_z^L \sqrt{U^2/4 + \phi(z')} dz'$ . Cette approximation est valide normalement pour  $(U^2/4 + \phi) \gg 1$ , ce qui n'est pas ce qui est observé dans nos simulations. Elle donne néanmoins des solutions très proche de nos résultats numériques et semble donc permettre une bonne estimation de la pénétration des nutriments dans la tumeur (Fig. 2 gauche).

## 4.2 Analyse de stabilité aux grandes longueurs d'onde

Nous sommes intéressés à connaître les conditions d'apparition d'instabilités sur la frontière de la tumeur. On étudie ici la stabilité de la solution en onde plane progressive à une perturbation selon  $y$  de la forme [10]

$$x_{inter} = L_0 + \epsilon e^{\lambda t} \cos(\kappa y) \quad (19)$$

$$\phi(x, t) = \phi_0(z) + \epsilon f(z) e^{\lambda t} \cos(\kappa y) \quad (20)$$

$$n(x, t) = n_0(z) + \epsilon g(z) e^{\lambda t} \cos(\kappa y) \quad (21)$$

A l'ordre  $\epsilon$  les équations du système donnent

$$\lambda f + \kappa^2 D\phi_0 W_\phi f - D(\phi_0 W_\phi f)'' = \gamma(\phi_0 g + n_0 f) + Uf' - \delta f \quad (22)$$

$$\lambda g + (\phi_0 g + n_0 f) = g'' - \kappa^2 g + Ug' \quad (23)$$

et les conditions aux limites

$$f(L) = -\phi'_0(L) \quad g(L) = -n'_0(L) \quad DW_\phi(\phi''_0 + f') = -\lambda \quad (24)$$

Pour  $\kappa = 0$  (une simple translation), une solution du problème est donné par  $f_0(z) = -\phi_0(z)$  et  $g(z) = -n_0(z)$ . On étudie alors de manière asymptotique le comportement aux grandes longueurs d'onde

$$\lambda = \lambda_1 \kappa^2 + O(\kappa^4) \quad f = f_0 + f_1 \kappa^2 + O(\kappa^4) \quad g = g_0 + g_1 \kappa^2 + O(\kappa^4) \quad (25)$$

Eqs.22,23 donnent alors à l'ordre  $\kappa^2$

$$\lambda_1 f_0 + \phi_0 V_0 - D(\phi_0 W_\phi f_1)'' = \gamma(\phi_0 g_1 + n_0 f_1) + Uf'_1 - \delta f_1 \quad (26)$$

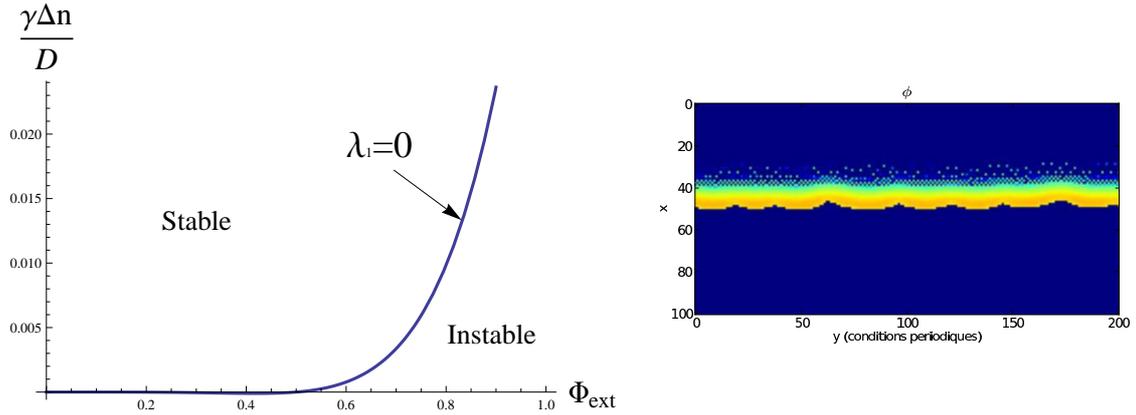
$$\lambda_1 g_0 + (\phi_0 g_1 + n_0 f_1) = g''_1 - g_0 + Ug'_1 \quad (27)$$

En intégrant ces équations entre  $-\infty$  et 0, en utilisant les conditions aux limites (Eq.24) et la décroissance de la perturbation en  $-\infty$  on obtient

$$\lambda_1 = \frac{1}{\gamma \Delta n_0} \left( \int_{-\infty}^L V_0 \phi_0 dx - \gamma \Delta n + \delta \int_{-\infty}^L f_1 \right) \quad (28)$$

où  $\Delta n = 1 - n_0(-\infty)$  est la différence de concentration en nutriment entre l'extérieur de la tumeur et son centre. En supposant alors le terme en  $\delta$  négligeable, on voit que la stabilité des grandes longueurs d'onde dépend de la valeur de l'intégrale de  $V_0 \phi_0$  par rapport à  $\gamma \Delta n$ . Avec une vitesse donnée par une loi de Darcy (Eq.13) cette intégrale a une forme explicite et permet d'obtenir un diagramme de stabilité approché (Fig. 3)

$$\int_{-\infty}^L V_0 \phi_0 dx = D \int_0^{\phi_{ext}} (1 - 4\phi + 3\phi^2) \Sigma(\phi) d\phi \quad (29)$$



**Fig. 3.** Haut : Diagramme de stabilité pour des perturbations à grande longueur d'onde pour notre forme particulière de  $\Sigma$  avec  $m = 3$ . Bas : Perturbation développée sur un front plan en croissance selon  $x$ .  $\delta = 0.02$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $D = 0.2$ ,  $\phi_{ext} = 0.6$  et  $m = 3$

Pour différentes tailles initiales de tumeur, nous avons observé numériquement le même scénario de déstabilisation, les instabilités se développent jusqu'à une certaine taille et saturent ensuite. On remarque

qu'il a été possible d'observer ces instabilités pour des paramètres au delà de la ligne  $\lambda_1 = 0$  dans la zone stable du diagramme de stabilité approché (Fig. 3). Il convient cependant de remarquer qu'il s'agit ici d'une étude asymptotique pour des grandes longueurs d'onde qui ne garantit pas la stabilité pour des longueurs d'onde intermédiaires comme cela semble être le cas Fig. 3.

### 4.3 Analyse de stabilité des courtes longueurs d'onde

On utilise ici une approximation WKB pour trouver une solution approchée  $f(x) = p(x)e^{\kappa S(x)}$  à l'Eq.22 dans le cas  $\kappa \gg 1$ . Les conditions aux limites (Eq.24) suggèrent de considérer  $\lambda = \Theta(\kappa)$ . Pour la forme considérée de  $\Sigma$  et les profils obtenus numériquement,  $\phi_0 W_\phi$  s'annule en un seul point que l'on définit ici comme  $z = 0$ . Une condition nécessaire de validité de l'approximation WKB de l'Eq.22 est  $|\phi_0 W_\phi| \gg 1/\kappa$ . Le zéro de la fonction  $W_\phi = (1 - \phi)^2 \Sigma'(\phi)$  étant d'ordre un, cette condition de validité s'écrit  $|\kappa x| \gg 1$ . On appelle I et III les domaines de validité de l'approximation WKB avec respectivement  $z < 0$  et  $z > 0$ . Les solutions approchées dans ces domaines s'écrivent

$$f(z) = e^{\kappa z} p^+(z) + e^{-\kappa z} p^-(z) \quad (30)$$

$$p^\pm(z) = A^\pm \frac{\phi_0(c)W_\phi(c)}{\phi_0(z)W_\phi(z)} \exp \left[ \frac{U \mp \lambda/\kappa}{2D} \int_z^c \frac{dz'}{\phi_0(z')W_\phi(z')} \right] \quad (31)$$

où on choisit  $c = -1$  pour I et  $c = L$  pour III. Pour  $|x| \ll 1$  il est possible de résoudre analytiquement une équation approchée d'Eq.22, donnant un polynôme de Legendre généralisé comme solution. Cette solution a un domaine de validité commun avec celle des deux approximations WKB ( $1/\kappa \ll |x| \ll 1$ ). Un accord asymptotique entre les solutions dans ces deux domaines impose une relation de proportionnalité entre les coefficients  $A_I^\pm$  et  $A_{III}^\pm$ . La décroissance de la perturbation en  $-\infty$  imposant de prendre  $A_I^- = 0$ , on a alors  $A_{III}^- = 0$ . Les conditions aux limites en  $x = L$  donnent alors à l'ordre dominant en  $\kappa$

$$\lambda = -DW_\phi(\phi(L))\kappa e^{\kappa L} A_{III}^+(L) = DW_\phi(\phi(L))\kappa \phi_0'(L) < 0 \quad (32)$$

Semblant indiquer une stabilité du front plan par rapport aux perturbations à courte longueur d'onde. L'analyse du cas limite  $\lambda = 0$  semble indiquer une sélection d'une unique longueur d'onde pour certaines solutions  $\phi_0$ .

## Références

1. C. PROST-SQUARCIONI, M. HELLER & S. FRAITAG, Histologie et hysophisiologie de la peau et de ses annexes, *Ann. Dermatol. Venereol*, **132**, 8S5-48 (2005).
2. W.H. CLARK, D.E. ELDER, D.T. GUERRY, M.N. EPSTEIN, M.H. GREENE & A. VAN HORN, A study of tumor progression : the precursor lesions of superficial spreading and nodular melanoma, *Hum. Pathol.*, **15**, 1147-1165 (1984).
3. T. CLARK, P. A. NETTI, L. L. MUNN, Y. BOUCHER & R. K. JAIN, Solid stress generated by spheroid growth estimated using linear poroelasticity model, *Microvascular Researches*, **66**, 204-212 (2003).
4. M. SARNTINORANONT, F. ROONEY & M. FERRARI, Interstitial stress and fluid pressure within a growing tumor, *Annals of Biomedical Engineering*, **31**, 327-335 (2003).
5. S. ASTANIN & L. PREZIOSI, Multiphase models of tumor growth, *Selected Topics in Cancer Modeling*, Birkhäuser Boston, 1-31 (2008).
6. L. PREZIOSI & A. FARINA, On Darcy's law for growing porous media, *International Journal in Non-Linear Mechanics*, **37**, 485-491 (2002).
7. F. H. HARLOW & J. E. WELCH, Numerical calculation fo time-dependant viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, **8**, 2182 (1965).
8. S. CHEN, D. B. JOHNSON, P. E. RAAD & D. FADDA, The surface marker and micro cell method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **25**, 749-778 (1997)
9. H. BYRNE & L. PREZIOSI, Modelling solid tumor growth using the theory of mixture, *Mathematical Medicine and Biology*, **20**, 341-366 (2003)
10. P. CIARLETTA, L. FORET & M. BEN AMAR, The radial growth phase of malignant melanoma : multiphase modeling, numerical simulations and linear stability analysis, A paraître

# Bifurcations dans l'espace hyperbolique en relation avec un modèle de perception des structures visuelles par le cortex

Pascal Chossat<sup>1</sup> & Olivier Faugeras<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire J-A Dieudonné, UMR CNRS 6618, UNSA, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02

<sup>2</sup> Laboratoire NeuroMathComp, INRIA/ENS Paris/CNRS, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France

pascal.chossat@unice.fr

**Résumé.** Il est expérimentalement établi qu'une correspondance existe entre la localisation de petites portions d'image dans le champ visuel et de petits domaines (de l'ordre de  $1 \text{ mm}^2$  chez les primates) à la surface de l'aire nommée V1 dans le cortex visuel. Ces petites portions du cortex visuel sont nommées hypercolonnes. Elles sont composées d'un ensemble de neurones interconnectés (quelques dizaines de milliers). Ces neurones réagissent sélectivement aux propriétés géométriques de l'image locale correspondant à l'hypercolonne : contours, texture, contraste, etc. Nous proposons un modèle fonctionnel de ces hypercolonnes basé sur la notion de tenseur de structure, bien connu dans le traitement d'image. Ceci revient à supposer que le potentiel de membrane moyenné  $V$  dans chaque hypercolonne est fonction du tenseur de structure (et du temps). De façon naturelle les équations pour  $V$ , du type Wilson-Cowan (donc non linéaires), sont invariantes par le groupe des isométries de l'espace  $H$  des tenseurs de structure qui se trouve être un espace hyperbolique. Une activité spontanée de l'hypercolonne sera observable si ces équations présentent une bifurcation à partir de l'état de repos. Ceci se traduira par l'apparition de motifs résultant de la brisure spontanée de l'invariance par le groupe des isométries de  $H$ . L'intérêt de cette observation est qu'elle est susceptible de vérification expérimentale. Cependant la bifurcation de structures dans l'espace hyperbolique (ou dans le plan hyperbolique pour simplifier un peu), est un problème très complexe pour lequel nous n'avons obtenu à ce jour que des résultats préliminaires.

**Abstract.** It has been experimentally observed that a correspondence exists between localized areas in the visual field and small areas (about  $1 \text{ mm}^2$  in primates) on the surface of the visual cortex. These areas are called hypercolumns. They consist of interconnected neurons (few tens of thousands) which are selectively sensitive to the geometric properties of the local image corresponding to the hypercolumn : edges, texture, contrast, etc. We propose a new functional model for these hypercolumns, which is based on the notion of structure tensor, a classical concept in image processing. This supposes that the averaged membrane potential  $V$  in each hypercolumn depends upon the structure tensor (and time). The equations for  $V$  are nonlinear (of Wilson-Cowan type) and it is natural to assume that they are invariant under the isometric transformations in the space  $H$  of structure tensors which turns out to have a hyperbolic Riemannian structure. A spontaneous activity of the hypercolumn may be observable when a bifurcation occurs from the state of rest, suggesting a way to verify experimentally the validity of the model. This will lead to the formation of a pattern in  $H$ . However the problem of pattern formation in a hyperbolic space is a difficult task and we only have preliminary results to show so far.

## 1 Introduction

La perception des images, quelle soit artificielle ou biologique, suppose l'extraction à partir des images formées sur la rétine d'un certain nombre de propriétés telles que la texture, les bords, les "coins", ceci à diverses échelles spatio-temporelles. Ces caractéristiques de l'image dépendent des variations locales de l'intensité du signal et conduisent donc de façon naturelle à les représenter à l'aide des dérivées de cette intensité. Ce point de vue a conduit à la construction d'algorithmes pour le traitement d'image et à l'introduction du concept de *tenseur de structure* dont on donnera une définition précise dans le paragraphe suivant (voir bibliographie dans [2]), mais qu'on peut définir rapidement comme la matrice des moments du second ordre construits à partir de ces dérivées. D'autre part il y a de forts indices que le système visuel neuronal de nombreuses espèces animales est capable de représenter des quantités liées aux dérivées du signal (voir [1]). Ces variations étant locales par nature on peut admettre que les hypercolonnes du

cortex visuel, qui sont des assemblages de quelques milliers à dizaines de milliers de neurones associés à des zones d'aire limitée du champ rétinien, sont sensibles à ces dérivées, et que le potentiel de membrane moyenné des hypercolonnes est en fait une fonction du tenseur de structure correspondant à ces petites portions d'image. Bien entendu une intégration de l'image globale suppose aussi des connexions "longue distance" entre les hypercolonnes, nous n'aborderons pas cette question ici. La réponse de l'hypercolonne à un signal est un processus non linéaire et peut être représenté par une équation intégral-différentielle pour le potentiel de membrane moyen dans l'hypercolonne, où la nonlinéarité apparaît comme un terme de saturation (typiquement une sigmoïde). Ici les variables d'espace sont en fait les éléments de l'espace des tenseurs de structure et il est naturel de supposer que les équations sont invariantes par les changements de coordonnées dans cet espace qui respectent les "distances" (isométries). Il semble en effet raisonnable de supposer que les représentations des propriétés des images sont robustes par changement de coordonnées. Cependant l'espace des tenseurs n'est pas euclidien. On verra au paragraphe suivant qu'il possède une structure d'espace riemannien hyperbolique. Par conséquent on va supposer que ces équations sont invariantes par l'action du groupe des isométries d'un espace hyperbolique que l'on caractérisera.

D'autre part, en l'absence de signal extérieur, le système peut être auto-excité par bifurcation à partir de l'état de repos. Dans ce cas la question est de comprendre, voire même de prédire le type de motifs spatio-temporels qui peuvent spontanément apparaître dans l'espace des tenseurs de structure. On est donc en présence d'un problème de *brisure spontanée de symétrie* dans un contexte non euclidien. L'intérêt de cette remarque d'un point de vue neurologique est que cela fournirait, en principe en tous cas, un moyen de tester expérimentalement la validité des hypothèses émises ci-dessus.

Dans cet article nous présentons des résultats préliminaires exposés en détail dans [2] sur ce problème fortement non trivial.

## 2 Présentation du modèle

### 2.1 Le tenseur de structure comme représentation des bords et de la texture des images

Soit  $g_{\sigma_1}(t)$  la gaussienne de moyenne 0 et variance  $\sigma_1^2$ ,  $Dg_{\sigma_1}(t)$  sa dérivée par rapport à  $t$ . On obtient des estimations  $I_x^{\sigma_1}$ ,  $I_y^{\sigma_1}$  des dérivées partielles  $I_x$  and  $I_y$  de  $I$  par convolution de  $I$  avec  $Dg_{\sigma_1}(x)$  et  $Dg_{\sigma_1}(y)$ . On calcule alors les moyennes  $\langle (I_x^{\sigma_1})^2 \rangle_{\sigma_2}$ ,  $\langle (I_y^{\sigma_1})^2 \rangle_{\sigma_2}$  et  $\langle I_x^{\sigma_1} I_y^{\sigma_1} \rangle_{\sigma_2}$  des trois quantités  $(I_x^{\sigma_1})^2$ ,  $(I_y^{\sigma_1})^2$  et  $I_x^{\sigma_1} I_y^{\sigma_1}$  dans un voisinage du point  $(x, y)$ . On forme ensuite la matrice  $\mathcal{T}$  définie par :

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \langle (I_x^{\sigma_1})^2 \rangle_{\sigma_2} & \langle I_x^{\sigma_1} I_y^{\sigma_1} \rangle_{\sigma_2} \\ \langle I_x^{\sigma_1} I_y^{\sigma_1} \rangle_{\sigma_2} & \langle (I_y^{\sigma_1})^2 \rangle_{\sigma_2} \end{bmatrix},$$

Cette matrice symétrique est aussi définie positive. On l'appelle tenseur de structure au point  $(x, y)$ . On notera que cette définition implique deux échelles spatiales : la 1ère définie par  $\sigma_1$  est celle à laquelle les dérivées de l'image sont estimées, la seconde, définie par  $\sigma_2$ , est celle à laquelle les moyennes de ces quantités estimées sont calculées.

Remarquons que l'espace des tenseurs de structure s'identifie à celui des formes quadratiques définies positives  $\mathcal{H}$ , dans lequel les changements de coordonnées sont donnés par l'expression

$$\mathcal{T}' = {}^t S \mathcal{T} S$$

pour toute matrice inversible  $S$ . Le groupe linéaire  $GL(2, \mathbb{R})$  agit donc naturellement dans  $\mathcal{H}$ .

Les valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$  de  $\mathcal{T}$  caractérisent l'organisation locale des variations de l'intensité de l'image. Par exemple  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  indique un contraste important dans la direction propre de  $\lambda_1$ , tandis que  $\lambda_1 \simeq \lambda_2$  indique soit une distribution relativement isotrope des bordures à l'échelle définie par  $\sigma_2$  si les valeurs propres sont grandes, soit l'absence de bordures si les valeurs propres sont proches de 0. On suppose à présent, c'est une hypothèse fondamentale de notre modèle, que le potentiel de membrane moyenné dans l'hypercolonne est une fonction  $V(\mathcal{T}, \tau)$  du tenseur de structure  $\mathcal{T}$  et du temps  $\tau$ . Typiquement  $V(\mathcal{T}, \tau)$  sera grand si la valeur  $\mathcal{T}$  correspond aux valeurs de l'intensité dans le champ récepteur de la

colonne et faible dans le cas contraire. L'évolution temporelle de  $V$  est gouvernée par une équation du type Wilson and Cowan :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}(\mathcal{T}, \tau) = -\alpha V(\mathcal{T}, \tau) + \int_{\mathcal{H}} w(\mathcal{T}, \mathcal{T}') S(V(\mathcal{T}', \tau)) d\mathcal{T}' + I(\mathcal{T}, \tau) \quad (1)$$

où l'intégrale est prise sur l'espace des tenseurs de structure  $\mathcal{H}$ . Le coefficient positif  $\alpha$  peut être normalisé à 1 par un choix de l'échelle de temps, ce que l'on supposera par la suite. La fonction  $S$  est une sigmoïde qu'on peut normaliser sous la forme d'une fonction impaire

$$S(x) = \frac{1 - e^{-\mu x}}{2(1 + e^{-\mu x})} \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

où  $\mu$  est un coefficient qui gouverne la raideur de  $S$ . La fonction de "connectivité"  $w(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$  exprime la façon dont les neurones représentant la valeur  $\mathcal{T}$  excitent (resp. inhibent) les neurones représentant  $\mathcal{T}'$  lorsque la distance  $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$  est petite (resp. grande). Donc  $w(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = g(d(\mathcal{T}, \mathcal{T}'))$  où  $g$  est une fonction du type "chapeau mexicain" (typiquement une différence de deux gaussiennes). Admettant pour l'instant l'existence de cette distance dans  $\mathcal{H}$  invariante par le groupe  $GL(2, \mathbb{R})$ , il est alors facile de vérifier que l'équation (1) est invariante par les transformations de la forme  $g \cdot V(\mathcal{T}) = V({}^t g \mathcal{T} g)$  pour tout  $g \in GL(2, \mathbb{R})$ . Enfin,  $I$  est un terme représentant le signal d'entrée.

## 2.2 Géométrie de $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$  est l'ensemble des matrices

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}, \quad a > 0, \quad ab - c^2 > 0 \quad (3)$$

C'est donc un cône solide ouvert et l'on peut montrer que c'est une variété riemannienne de dimension 3 pour laquelle la distance est définie de la façon suivante [4].

$$d(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = \|\log \mathcal{T}_1^{-1} \mathcal{T}_2\|_F = \left( \sum_{i=1,2} \log^2 \lambda_i \right)^{1/2}, \quad (4)$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{T}_1^{-1} \mathcal{T}_2$  (dont on vérifie qu'elle est symétrique, définie positive).

Remarquons que l'on peut aussi écrire  $\mathcal{T} = \xi \tilde{\mathcal{T}}$  où  $\xi > 0$  et  $\det(\tilde{\mathcal{T}}) = 1$ . Par conséquent  $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_0 \times \mathbb{R}^+$  où  $\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{T} \in \mathcal{H} / \det(\mathcal{T}) = 1\}$ . Mais  $\mathcal{H}_0$  est un feuillet d'hyperboloïde qui n'est autre que le *plan hyperbolique* de courbure  $-1$ . De plus, l'action de  $GL(2, \mathbb{R})$  se décompose en un produit direct du groupe des homothéties le long de la composante  $\mathbb{R}^+$  et du groupe d'isométries du plan hyperbolique.

Dans la suite on va simplifier notre analyse en cherchant des solutions de (1) qui sont invariantes par l'action du groupe des homothéties  $\mathbb{R}^*$ , c'est-à-dire restreintes à  $\mathcal{H}_0$ . L'invariance de l'équation par  $GL(2, \mathbb{R})$  entraîne que l'on peut effectivement restreindre l'analyse à ces solutions. En effet, écrivons (1) sous la forme d'une équation fonctionnelle

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = F(V).$$

L'invariance par l'action de  $GL(2, \mathbb{R})$  se traduit par l'équivariance de l'opérateur (non linéaire)  $F : F(g \cdot V) = g \cdot F(V)$ ,  $g \in GL(2, \mathbb{R})$ ,  $V \in \mathcal{H}$ . Si  $\xi \cdot V = V$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^*$ , on a donc aussi  $\xi \cdot F(V) = F(V)$ .

### 2.3 Analyse dans $\mathcal{H}_0$

Pour une raison de commodité on commence par identifier  $\mathcal{H}_0$  avec le disque de Poincaré  $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  par le changement de variables (où  $z = z_1 + iz_2 \in D$ )

$$\begin{cases} a = \frac{(1+z_1)^2 + z_2^2}{1-z_1^2 - z_2^2} \\ b = \frac{(1-z_1)^2 + z_2^2}{1-z_1^2 - z_2^2} \\ c = \frac{2z_2}{1-z_1^2 - z_2^2} \end{cases}$$

La distance hyperbolique dans  $D$  est définie par

$$d_1(z, z') = \operatorname{argth} \frac{|z - z'|}{|1 - \bar{z}z'|}.$$

On peut montrer que si  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  sont dans  $\mathcal{H}_0$ , la géodésique qui les joint est dans  $\mathcal{H}_0$  et la distance  $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = d_1(z, z')$ . Le groupe des isométries directes de  $D$  est le groupe spécial unitaire  $SU(1, 1)$  des matrices de la forme

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2$$

qui agit dans  $D$  par les transformations homographiques  $g \cdot z = (\alpha z + \beta) / (\bar{\beta} z + \bar{\alpha})$ ,  $z \in D$ . Chaque élément de ce groupe se décompose en un produit  $g = r_\varphi \cdot a_t \cdot n_s$  où

$$r_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix}, \quad a_t = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}, \quad n_s = \begin{bmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{bmatrix}$$

Afin de procéder à une analyse de Fourier dans  $D$ , Helgason [3] a introduit des fonctions d'onde élémentaires  $e_{\lambda, b}$  qui sont définies de la façon suivante. Si  $b$  désigne un point du cercle unité  $\partial D$ , notons  $\langle z, b \rangle$  la distance (algébrique) à l'origine de l'unique cercle euclidien tangent à  $\partial D$  en  $b$  et passant par  $z$ . Ce cercle est un *horocycle*, et si  $b = 1$  c'est l'orbite de  $z$  par l'action du groupe  $N = \{n_s, s \in \mathbb{R}\}$ . On pose

$$e_{\lambda, b} = e^{(i\lambda+1)\langle z, b \rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Alors  $e_{\lambda, b}$  est une fonction propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami de  $D$  pour la valeur propre  $-\lambda^2 - 1$ . Ces fonctions élémentaires jouent un rôle capital dans l'analyse de Fourier dans  $D$  et dans l'étude du spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami pour les surfaces de Riemann hyperboliques (dont le plan hyperbolique est le revêtement universel). Nous les utiliserons d'une façon plus élémentaire.

### 3 Bifurcation d'ondes planes dans $\mathcal{H}_0$ pour l'équation (1)

Dans ce paragraphe on considère l'équation (1) restreinte à  $\mathcal{H}_0 \simeq D$  et on suppose que le terme d'entrée  $I = 0$ , de sorte que  $V = 0$  est une solution. Lorsque le terme intégral est assez petit, le terme d'amortissement  $-V$  est dominant et cette solution "de base" est stable. On s'intéresse à la bifurcation de nouvelles solutions à partir de cet état de base.

Par construction les fonctions  $e_{\lambda, b}$  sont invariantes par l'action du groupe  $N_b = r_b \cdot N \cdot r_{-b}$  où  $r_b$  est la rotation qui fait passer du point 1 au point  $b$  sur le bord du disque de Poincaré  $\partial D$ . Par rotation on se ramène au cas où  $b = 1$ . On va à présent restreindre encore notre étude en ne considérant que des solutions de (1) qui sont à la fois invariantes par l'action du groupe  $N$  et par un sous groupe discret du groupe à un paramètre  $A = \{a_t, t \in \mathbb{R}\}$  (donc périodiques par rapport à l'action de  $A$ ). Les fonctions d'onde élémentaires qui satisfont à ces conditions sont celles pour lesquelles  $b = 1$  et  $\lambda = \alpha + i$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

ce qui correspond à des valeurs propres de  $\Delta$  complexes  $-\alpha^2 - 2i\alpha$ . Ces solutions sont invariantes par l'action du sous-groupe  $N \times \frac{2\pi}{\alpha}Z$  de  $SU(1,1)$ , par conséquent on peut restreindre l'analyse aux fonctions qui possèdent cette propriété du fait de l'invariance de (1) par  $SU(1,1)$ . Ceci revient à chercher les solutions de l'équation projetée dans l'espace quotient  $D/(N \times \frac{2\pi}{\alpha}Z)$ , or cet espace est isomorphe à  $S^1$ . Par conséquent on s'attend à ce que le spectre de l'opérateur intégral linéarisé soit constitué de valeurs propres de multiplicité finie, ce qui permettra de traiter "classiquement" le problème de bifurcation.

### 3.1 Etude linéaire

L'équation (1) linéarisée dans  $D$  en  $V = 0$  s'écrit

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}(z, \tau) = -V(z, \tau) + \mu \int_D w(z, z')V(z', \tau)dm(z') \quad (5)$$

où  $\mu = S'_0(0)$  est notre paramètre de bifurcation et  $dm(z) = (1 - |z|^2)^{-2} dzd\bar{z}$  (mesure hyperbolique dans  $D$ ). On se place dans les *coordonnées horocycliques*, c'est-à-dire qu'on pose  $z = n_s \cdot a_t \cdot O$ . Compte tenu de la condition d'invariance par  $N \times \frac{2\pi}{\alpha}Z$  on cherche  $V(n_s \cdot a_t \cdot O, \tau) = e^{\sigma\tau}\tilde{V}(a_t)$ . Après quelques calculs on peut réécrire l'équation ci-dessus sous la forme réduite

$$\sigma\tilde{V} = -\tilde{V} + \mu\tilde{w} \star \tilde{V}$$

où

$$\tilde{w}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} w(a_\xi \cdot O, n_x \cdot O)dx.$$

On applique la transformée de Fourier de Helgason [3]

$$\hat{h}(\lambda, b) = \int_D h(z)e^{(-i\lambda+1)\langle z, b \rangle} dm(z)$$

ce qui, en cherchant des solutions de périodicité  $2\pi/\alpha$  en la coordonnée  $t$ , revient à résoudre

$$\sigma(\alpha) = -1 + \mu\hat{w}(\alpha)$$

où  $\hat{w}$  est la transformée de Fourier de  $\tilde{w}$ . Les calculs effectués pour différents types de fonction de connectivité  $w$  (mais toujours "chapeau mexicain") montrent que les valeurs propres  $\sigma$  sont complexes en général et que la condition  $\Re\sigma = 0$  définit une courbe  $\mu(\alpha)$  qui présente un minimum pour une valeur non nulle de  $\alpha$ . On a donc une valeur critique  $\mu_c$  qui correspond à une bifurcation de Hopf ( $\Im\sigma \neq 0$ ).

### 3.2 Calcul des bifurcations

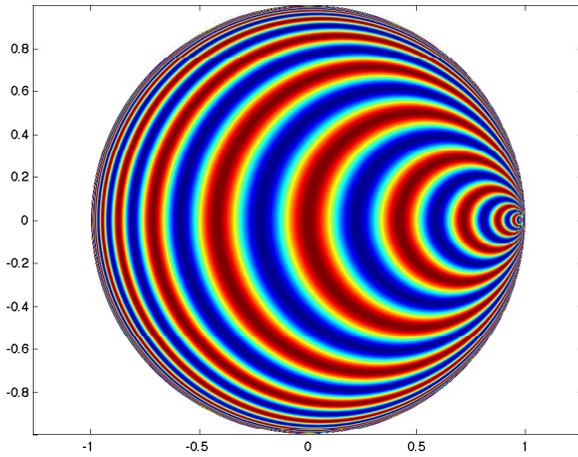
Le calcul des solutions bifurquées est classique et n'est pas détaillé ici (voir [2]). Au premier ordre, les solutions s'écrivent

$$V_0(\tau) = \varepsilon \left[ e^{i(\omega\tau+\varphi)} e_{\alpha_c+i, b} + e^{-i(\omega\tau+\varphi)} \overline{e_{\alpha_c+i, b}} \right]$$

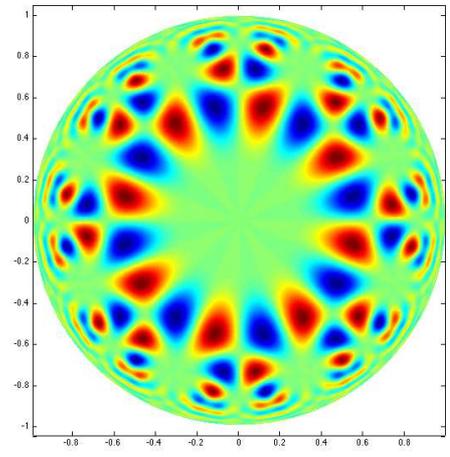
où  $\alpha_c$  est la valeur de  $\alpha$  pour laquelle  $\mu(\alpha)$  est minimum et  $\varphi$  est une phase arbitraire. La valeur de  $b$  est également arbitraire ce qui correspond à l'invariance des équations par rotations.

Ces solutions apparaissent comme des *ondes progressives* émises depuis le point  $b$  ("l'infini") dont la Fig. 1 donne un instantané dans le cas où  $b = 1$ .

Les solutions calculées dans ce travail ont le mérite d'exister mais il n'y a pas de relation évidente entre leur structure et le type de motifs bifurqués qu'on attendrait dans ce problème. D'une part il serait naturel de trouver des structures stationnaires et non dépendant du temps, d'autre part ces ondes périodiques ne sont pas des structures locales. Elles sont en fait analogues à des structures en bandes périodiques ("stripes") dans le cas euclidien. En fait, de nombreuses autres structures spatialement périodiques mais



**Fig. 1.** Ondes progressives émises depuis le point  $b$  ( $b = 1$ ).



**Fig. 2.** Solutions invariantes par pavage octogonal du disque de Poincaré.

temporellement stationnaires, associées à des pavages du plan hyperbolique, pourraient également bifurquer. Une étude de telles solutions est en cours, ainsi que la prise en compte du problème 3d (c'est-à-dire dans  $\mathcal{H} \simeq D \times \mathbb{R}^+$ ). Il faut toutefois noter que le problème de la bifurcation de structures spatialement périodiques dans le plan hyperbolique ou dans  $\mathcal{H}$  est considérablement plus compliquée que dans le cas euclidien en raison de la difficulté à calculer les fonctions propres mais aussi de la diversité "infinie" des pavages périodiques hyperboliques. Il est possible aussi que les solutions sélectionnées par les nonlinéarités de ce problème soient en fait beaucoup plus complexes (pavages aperiodiques).

Une approche préliminaire et un exemple pour le cas spatialement périodique sont développés dans [2]. L'exemple est celui du pavage de  $D$  par un octogone. Le sous-groupe discret de  $SU(1, 1)$  qui engendre ce pavage est un groupe fuchsien qui possède 4 générateurs  $g_j$ ,  $j = 0, \dots, 4$ . Le générateur  $g_0$  est un "boost" (un élément du groupe de transformations hyperboliques  $A$ , les trois autres étant obtenus par rotation de  $g_0$  d'angles  $j\pi/4$  ( $j = 1, 2, 3$ )). La Fig. 2 montre un exemple de "pattern" pour des solutions invariantes par ce pavage octogonal du disque de Poincaré.

## Références

1. LM CHALUPA & J WERNER, (Editors), *The visual neurosciences*, MIT Press (2004).
2. P. CHOSSAT & O. FAUGERAS, Hyperbolic Planforms in Relation to Visual Edges and Textures Perception, *PLoS Computational Biology*, **5** (12), e10000625 (2009).
3. S HELGASON, *Groups and geometric analysis*, Pure and Applied Mathematics series **113**, Academic Press (1984).
4. M MOAKHER, A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **26**, 735–747 (2005).

# Pluie de solitons dans un laser à fibre

Souad Chouli & Philippe Grellu

Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne ICB UMR 5209 CNRS, Université de Bourgogne, BP 47870  
21078 Dijon Cedex, France

Souad.Chouli@u-bourgogne.fr

**Résumé.** Nous présentons les résultats expérimentaux d'une nouvelle variété de dynamique observée dans un laser impulsif à blocage de modes passif. Cette situation correspond à une coexistence de plusieurs solitons et d'un fond quasi-continu dans la cavité. A partir des fluctuations du fond continu, des solitons isolés se forment spontanément, et dérivent à une vitesse quasi-constante jusqu'à rejoindre une phase condensée. Cette phase condensée se compose de plusieurs solitons liés qui se propagent à l'intérieur de la cavité. L'ensemble du processus dynamique, que nous avons dénommé *pluie de solitons*, peut être indéfiniment reproduit d'une façon quasi-stationnaire. Les caractéristiques de la pluie de solitons telles que le nombre de solitons qui dérivent ainsi que la vitesse de dérive peuvent être ajustés en fonction des paramètres de cavité comme la puissance de pompage et la polarisation. Nous avons montré aussi la possibilité de contrôler le déclenchement de la pluie de solitons via l'injection d'un laser continu externe.

**Abstract.** In this work we present the experimental results of a new dynamics observed in a mode-locked laser. Several solitons coexist with a quasi-continuous background in the cavity. From the background fluctuations, isolated solitons can appear spontaneously, and drift at almost constant speed until they reach a condensed phase. The condensed phase comprises several bound solitons and propagates inside the cavity. This dynamical process which we named *Rain of Solitons* can be reproduced on a quasi-stationary fashion. The characteristics of the *rain of solitons* such as the number of solitons in the rain and their drift velocity can be adjusted along the tuning of the parameters of cavity such as the pumping power and the polarization controls. We also showed the possibility to trigger or stop the *rain of solitons* by the injection of a continuous laser.

## 1 Introduction

L'étude des solitons dissipatifs dans un laser à blocage de modes révèle des dynamiques variées et éventuellement complexes, en particulier pour les régimes multi-impulsionnels. Les premiers travaux théoriques [1,2] et expérimentaux ont concerné la dynamique d'un petit nombre de solitons en interaction, par exemple les états liés stables, ou molécules de solitons [3], les collisions de solitons [4,5,6], les vibrations de paires de solitons [7]. Avec plusieurs dizaines ou centaines de solitons en interactions, des comportements collectifs complexes se sont manifestés [8,9,10], comme la dynamique révélée dans cette étude [11]. Nous avons repéré cette dynamique dans une gamme de paramètres de cavité où des solitons temporels coexistent avec un fond quasi-continu. Des solitons isolés peuvent se former spontanément à partir des fluctuations du fond continu et se mettent à dériver à une vitesse quasiment constante jusqu'à rejoindre une phase condensée. Cette phase condensée se compose de plusieurs solitons liés et se propage également à l'intérieur de la cavité. Le flux de solitons peut être ajusté en fonction des paramètres de cavité, et peut être déclenché par une faible puissance d'un laser continu externe.

Le dispositif expérimental utilisé dans cette étude est une cavité laser unidirectionnelle totalement fibrée (figure 1). Elle délivre des impulsions de type solitons dissipatifs au moyen d'un blocage de modes fondé sur une absorption saturable effective obtenue par l'évolution non linéaire de la polarisation. La cavité se compose [11] d'une fibre amplificatrice dopée erbium (EDF, dispersion normale  $D = -12$  ps/nm/km) pompée par deux diodes lasers (puissance maximale de pompage : 800mW), d'un séparateur de polarisation qui est l'élément discriminant nécessaire au blocage de modes par évolution non-linéaire de polarisation, des contrôleurs de polarisation CP1 et CP2 qui nous permettent de modifier les conditions de

blochage de modes via la variation de leurs angles  $\theta_i$ , des coupleurs permettant de récupérer ou d'injecter un signal laser et d'une fibre compensatrice DCF ( $D=-91\text{ps/nm/km}$ ). La dispersion chromatique moyenne de la cavité est anormale et vaut  $5\text{ps/nm/km}$ .

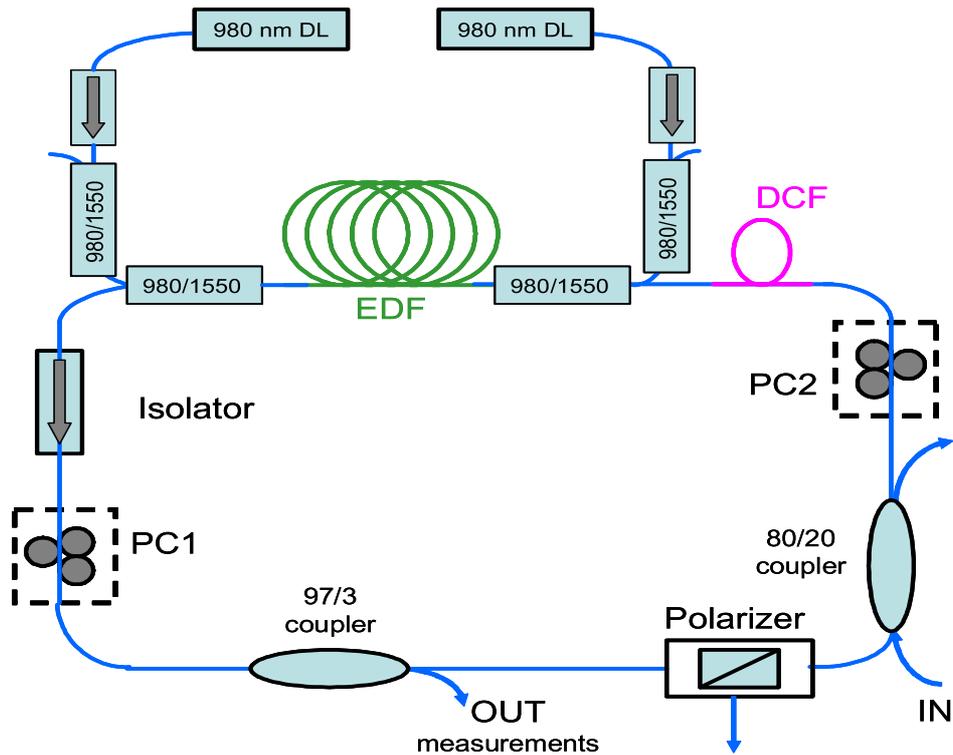
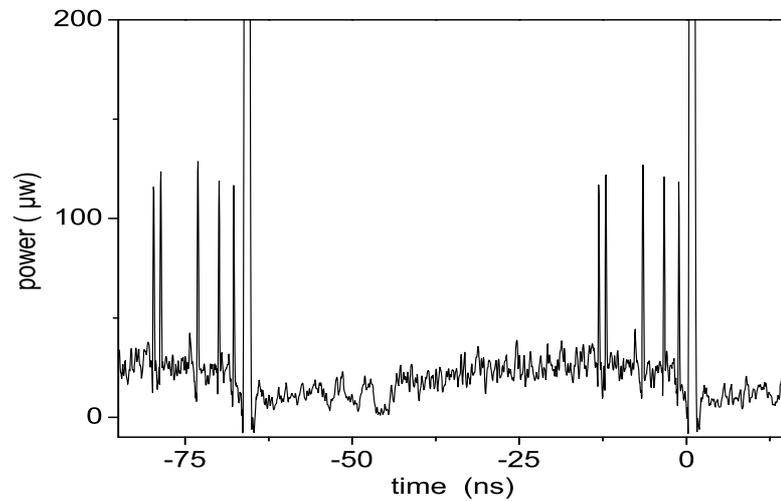


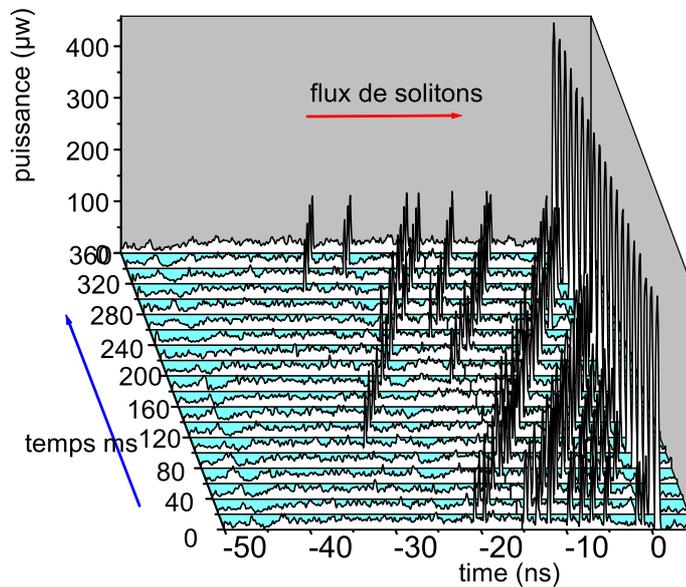
Fig. 1. Dispositif expérimental : laser à fibre à modes bloqués.

## 2 Observation et contrôle de la pluie de solitons

Il s'agit d'une nouvelle dynamique, repérée dans une gamme de paramètres de la cavité où des impulsions solitons peuvent coexister avec un fond quasi-continu. Cela correspond donc à un fonctionnement intermédiaire entre le blocage de modes parfait, qui doit filtrer efficacement les composantes continues, et le fonctionnement en régime continu du laser. On remarque sur la figure 2a qui représente l'évolution temporelle visualisée à partir de la sortie laser, un pic de grande amplitude que nous avons attribué à l'existence d'une *phase condensée* de solitons. En effet, il correspond à un groupe indiscernable de solitons liés, dont les positions fluctuent sans cesse de façon analogue au comportement d'un liquide. A gauche de ce pic, nous observons des solitons relativement isolés et en nombre discret sur un fond continu possédant des fluctuations. A partir du fond continu et de ses fluctuations, les solitons surgissent spontanément et dérivent à une vitesse constante, jusqu'à fusionner avec la phase condensée. Une représentation stroboscopique est présentée Fig. 2b. Nous avons ainsi appelé cette nouvelle dynamique *pluie de solitons* par analogie avec la pluie de gouttelettes (les solitons) qui se forment à partir d'un nuage (le fond quasi-continu et ses fluctuations).



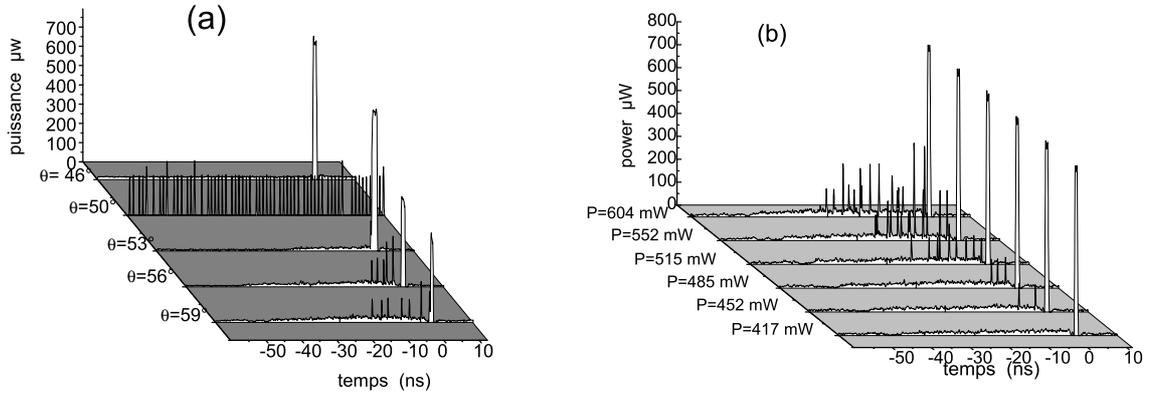
(a) Enregistrement avec un détecteur rapide et un oscilloscope temps réel Lecroy SDA6020 de 6 GHz de bande passante. L'échelle verticale est dilatée de manière à montrer la coexistence du fond quasi-continu, de ses importantes fluctuations et des solitons dans la cavité. Le pic correspondant à la phase condensée apparaît donc tronqué. Le temps de parcours de la cavité est de 65 ns, expliquant cette apparente périodicité du signal



(b) Dynamique de la pluie de solitons. L'apparition des solitons depuis le fond continu ainsi que leur dérive à vitesse constante sont clairement manifestes.

**Fig. 2.** Description temporelle de la dynamique de la pluie de solitons

D'une manière générale, les différentes dynamiques obtenues dans cette cavité dépendent de la puissance de pompage et des conditions de blocage de mode repérées par l'angle  $\theta$  du contrôleur de polarisation principal. Sur la figure 3a, la puissance de pompage est fixée à 417 mW, et l'angle du contrôleur de polarisation varie. Pour  $\theta=46^\circ$ , le blocage de modes du laser est particulièrement stable et produit un groupe de 40 solitons, puis pour  $\theta=50^\circ$ , le laser produit un régime où 50 solitons irrégulièrement espacés remplissant la cavité, c'est un régime proche du blocage de modes harmonique. Ensuite à  $\theta=53^\circ$ , un groupe de solitons est obtenu à nouveau, cependant nous observons cette fois la coexistence des solitons avec un fond continu. Ce dernier augmente progressivement avec l'augmentation de  $\theta$  jusqu'à  $59^\circ$ . La pluie de solitons apparaît vers  $\theta=56^\circ$ . D'autre part, si l'on fixe  $\theta=53^\circ$  (figure 3b), une augmentation de la puissance de pompage augmente le fond continu, jusqu'à ce que le niveau de ses fluctuations soit suffisant pour déclencher la pluie de solitons, et par la suite c'est le nombre de solitons formant cette pluie qui augmente avec la puissance de pompage.



(a) Influence de l'orientation du contrôleur de polarisation (PC2) La puissance de pompage est fixée à 417 mW.

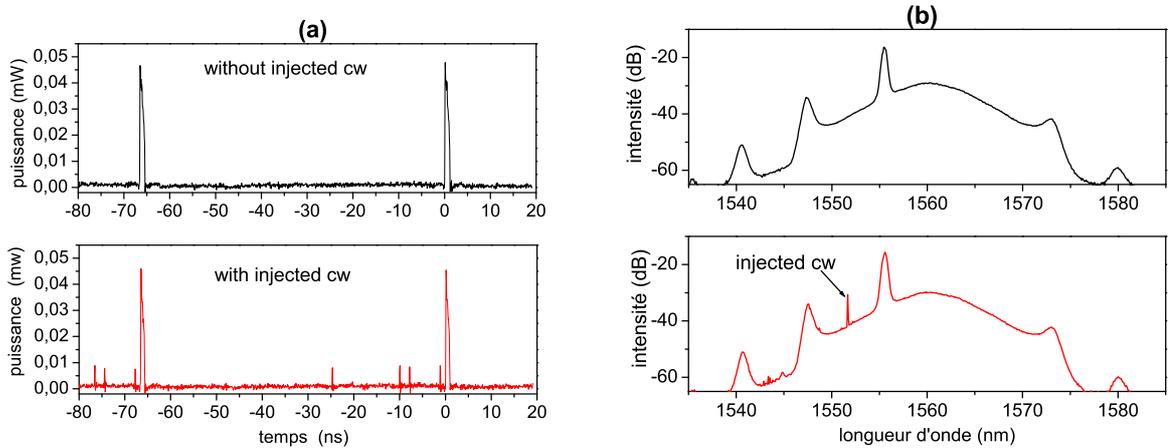
(b) Influence de la puissance de pompe sur la pluie de solitons. L'angle du contrôleur de polarisation est fixé à  $53^\circ$ .

**Fig. 3.** Influence des paramètres de la cavité sur le fonctionnement dynamique du laser.

La pluie de solitons apparaît au dessus d'un certain seuil de fluctuations du fond continu, qui dépend également des réglages des contrôleurs de polarisation. En se plaçant au voisinage de ce seuil, sur la base d'une variation fine du fond continu, nous devrions pouvoir déclencher ou arrêter la pluie de solitons. Nous avons démontré cette possibilité en injectant à l'intérieur de la cavité un signal laser continu externe. Le régime est d'abord ajusté près du seuil de la pluie de solitons (figure 4a, c), le laser d'injection étant à l'état *off* (éteint). Immédiatement après la mise en marche du laser d'injection, la pluie de solitons démarre et elle se maintient tant que le laser d'injection est en marche (figure 4b, d). Nous visualisons sur le spectre optique qu'une puissance d'injection faible ( $10\mu\text{W}$ ), est suffisante pour déclencher la pluie de solitons. Lorsque le laser passe à l'état *off*, la pluie de solitons s'arrête presque immédiatement une fois que les solitons isolés créés auparavant finissent de dériver jusqu'à la phase condensée.

### 3 Discussion

Les battements d'un grand nombre de composantes spectrales du fond continu produisent d'importantes fluctuations qui - lorsqu'elles excèdent un certain niveau - peuvent donner naissance à des solitons stables. Ces composantes du fond continu peuvent être alimentées par des mécanismes divers, comme



(a) Evolution temporelle du signal, sans (figure du haut) et avec (figure du bas) injection.

(b) Spectre optique correspondant.

**Fig. 4.** Démonstration du contrôle de la pluie de solitons par un laser d'injection continu.

l'amplification de l'émission spontanée ou bien le rayonnement d'ondes dispersives à partir des solitons eux-mêmes, perturbés par le caractère discontinu de la propagation en cavité [12,13]. Cependant, nous remarquons que les composantes du fond continu occupent principalement une partie spécifique du spectre (1556.5 à 1557 nm). Il doit être possible de comprendre la coexistence du fond continu et des impulsions dans une cavité laser à blocage de modes, en utilisant les modèles de propagation non-linéaires d'ordre supérieur, comme l'équation Ginzburg-Landau cubique-quintique (CGLE), qui a été utilisée avec succès pour modéliser de nombreuses dynamiques de solitons dissipatifs [3,4,5,6,7,8]. En effet, l'équations CGLE admet notamment des solutions de coexistence entre un fond continu et les solitons, bien que certaines de ces solutions ne soient pas stables [14].

## 4 Conclusion

Les lasers à blocage de modes qui fonctionnent avec un grand nombre d'impulsions par tour de cavité peuvent révéler des comportements collectifs surprenants, comme celui découvert ici. La dynamique de la pluie de solitons est caractérisée par la coexistence d'un fond quasi continu avec un groupe de plusieurs dizaines de solitons liés en une phase condensée. Quand le niveau du fond est suffisamment élevé, des solitons isolés peuvent surgir spontanément de ses fluctuations, ils dérivent à une vitesse constante jusqu'à ce qu'ils rejoignent la phase condensée. Ce processus peut être indéfiniment reproduit d'une façon quasi-stationnaire. Il est aussi possible de contrôler le déclenchement de la pluie de solitons via l'injection d'un laser continu externe. La découverte de cette nouvelle dynamique de solitons, obtenue dans une cavité laser qui fonctionne dans un régime de blocage de modes faiblement discriminant, à savoir quand des ondes quasi-continues et le bruit du fond ne sont pas efficacement filtrés, est aussi intéressant dans le contexte actuel des études de l'autodémarrage et de la stabilité des techniques de blocages de modes passives.

## Références

1. N. AKHMEDIEV, A. ANKIEWICZ & J. M. SOTO-CRESPO, Multisoliton of the complex Ginzburg-Landau equation, *Physical Review Letters*, **79**, 4046-4051, (1997).
2. N. AKHMEDIEV, A. ANKIEWICZ & J. M. SOTO-CRESPO, Stable soliton pairs in optical transmission lines and fiber lasers, *Journal of the Optical Society of America B*, **15** (1), 515, (1998).
3. PH. GRELU & J. M. SOTO-CRESPO, Temporal soliton molecules in mode-locked lasers : collisions, pulsations and vibrations, in *Dissipative Solitons : from optics to biology and medicine*, N. Akhmediev & A. Ankiewicz, eds. (Springer-Verlag, Berlin, 2008).
4. J. M. SOTO-CRESPO, M. GRAPINET, PH. GRELU & N. AKHMEDIEV, Bifurcations and multiple-period soliton pulsations in a passively mode-locked fiber laser, *Physical Review E*, **70** (6), 066612, (2004).
5. PH. GRELU & N. AKHMEDIEV, Group interactions of dissipative solitons in a laser cavity : the case of 2+1, *Optics Express*, **12** (14), 3184-3189, (2004).
6. M. OLIVIER, V. ROY, M. PICHÉ & F. BABIN, Pulse collisions in the stretched-pulse fiber laser, *Optics Letters*, **29** (13), 1461-1463, (2004)
7. M. GRAPINET & PH. GRELU, Vibrating solitons pairs in a mode-locked laser cavity, *Optics Letters*, **31** (14), 2115-2117, (2006).
8. J. M. SOTO-CRESPO, PH. GRELU, N. AKHMEDIEV & N. DEVINE, Soliton complexes in dissipative systems : vibrating, shaking and mixed soliton pairs, *Physical Review E*, **75** (1), 016613, (2007).
9. A. HABOUCHA, H. LEBLOND, M. SALH, A. KOMAROV & F. SANCHEZ, Analysis of soliton pattern formation in passively mode-locked of fiber lasers, *Physical Review A*, **78** (4), 043806, (2008).
10. F. AMRANI, A. HABOUCHA, M. SALHI, H. LEBLOND, A. KOMAROV & F. SANCHEZ, Dissipative solitons compounds in a fiber laser — Analogy with the states of matter, *Applied Physics B*, (2009)
11. S. CHOULI & PH. GRELU, Rains of solitons in a fiber laser *Optics Express*, **17** (14), 11776-11781, (2009)
12. J.M.SOTO-CRISPO, N. AKHMEDIEV, PH. GRELU & F. BELHACHE, Quantized separations of phase-locked soliton pairs in fiber lasers, *Optics Letters*, **28**, 2739 (2003).
13. J. P. GORDON, Dispersive perturbations of solitons of the nonlinear Schrödinger equation, *Journal of the Optical Society of America B*, **9**, 91-97 (1992).
14. J.M.SOTO-CRESPO, N. AKHMEDIEV & G. TOWN, Continuous-wave versus pulse regime in a passively mode-locked laser with a fast saturable absorber, *Journal of the Optical Society of America B*, **19**, 234 (2002).

# Synchronisation de bursts dans des réseaux d'oscillateurs

Nathalie Corson<sup>1</sup> & Stefan Balev<sup>2</sup> & M. A. Aziz-Alaoui<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMAH, Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, BP540, 76058 Le Havre Cedex

<sup>2</sup> LITIS, Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, BP540, 76058 Le Havre Cedex

nathalie.corson@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Au sein de nombreux réseaux d'interaction, des phénomènes de synchronisation peuvent être détectés. Il est ainsi fréquent d'étudier le cas de la synchronisation complète, qui signifie que les constituants du réseau ont le même état au même moment. Cependant, dans le cas de réseaux constitués de modèles neuronaux couplés par des fonctions synaptiques non-linéaires, l'apparition de la synchronisation complète impose à la topologie du réseau des conditions très restrictives et biologiquement peu réalistes. Il est donc justifié de s'intéresser à d'autres types de synchronisation, telle que la *synchronisation de bursts*. Dans ce travail, nous proposons un algorithme qui permet de détecter la synchronisation de bursts au sein de différents réseaux. Cet algorithme est ensuite appliqué à des réseaux de différentes tailles et topologies.

**Abstract.** Interaction networks often exhibit synchronisation phenomena. Complete synchronization, which means sharing the same behaviour at the same time, is frequently studied. However, in the case of networks composed of neuronal models linked together with non-linear coupling functions modelling chemical synapses, the emergence of complete synchronization requires very restrictive and biologically non-realistic network topologies. That is why it is interesting to study different kinds of synchronization, such as *burst synchronization*. In this work we propose an algorithm which detects burst synchronization within different networks. The algorithm is applied to networks of different sizes and topologies.

## 1 Introduction

En 1952, A.L. Hodgkin et A.F. Huxley décrivent la cinétique des mécanismes ioniques au sein d'un neurone par un système de quatre équations différentielles ordinaires autonomes [8]. Ce système a été par la suite simplifié et généralisé, voir par exemple [5,6,7]. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'un des systèmes résultant de ces modifications, le système de Hindmarsh-Rose (1).

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 - x^3 - z + I \\ \dot{y} = 1 - dx^2 - y \\ \dot{z} = \epsilon(b(x - x_c) - z) \end{cases} \quad (1)$$

Dans ce système,  $x$  correspond au potentiel de membrane d'un neurone,  $y$  décrit les échanges d'ions à travers la membrane par des canaux rapides, tandis que  $z$  décrit les échanges d'ions à travers la membrane par des canaux lents. Les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $d$  sont des constantes déterminées expérimentalement,  $I$  est le courant que l'on applique au neurone pour le stimuler,  $\epsilon$  représente la différence d'échelle de temps entre la dynamique rapide et la dynamique lente et  $x_c$  est la première coordonnée du point d'équilibre le plus à gauche du système lorsque  $z = 0$  et  $I = 0$ .

Ce modèle permet de reproduire différents comportements caractéristiques des neurones, tels que l'émission de potentiels d'action, aussi appelés *spikes* ou encore d'oscillations en salves, aussi appelées *bursts*. Le *bursting* correspond à des poussées de potentiel d'action séparées les unes des autres par des périodes lentes. C'est à ce comportement particulier que nous nous intéressons dans ce travail.

Nous considérons des oscillateurs de type Hindmarsh-Rose connectés en réseau avec matrice d'adjacence  $\{c_{ij}\}$  (1). Les neurones sont couplés par des fonctions non-linéaires (2) (voir [1]), modélisant les

synapses chimiques qui permettent la transmission de l'influx nerveux entre les neurones.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = ax_i^2 - x_i^3 + y_i - z_i - \sum_{j=1}^n c_{ij}h(x_i, x_j) \\ \dot{y}_i = (a + \alpha)x_i^2 - y_i \\ \dot{z}_i = \epsilon(bx_i + c - z_i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$h(x_i, x_j) = g_{\text{syn}}^{(n)} \frac{(x_i - V)}{1 + \exp(-\lambda(x_j - \Theta))} \quad (3)$$

Le paramètre  $\Theta$  représente le seuil synaptique. C'est le seuil du potentiel de membrane au-delà duquel la synapse s'active. Le paramètre  $\lambda$  contrôle la pente de la fonction sigmoïde  $h$ . Plus  $\lambda$  est grand et plus on approche de la fonction de Heaviside. Le paramètre  $V$  est le seuil qui rend la synapse inhibitrice ou excitatrice. Enfin,  $g_{\text{syn}}^{(n)}$  est la force de couplage synaptique.

Dans un premier temps, nous avons étudié le phénomène de synchronisation complète au sein de tels réseaux [2,3]. Dans ce travail nous nous intéressons à un autre type de synchronisation, la *synchronisation de bursts*. Ce type de synchronisation semble biologiquement plus réaliste car il ne prend en compte ni l'amplitude des spikes qui composent les bursts, ni la durée de ces bursts. Il est en effet biologiquement peu probable que deux neurones émettent des spikes et des bursts identiques. Par ailleurs, la synchronisation complète impose au réseau des caractéristiques très restrictives. En effet, elle ne peut avoir lieu que si les noeuds du réseau reçoivent tous le même nombre de signaux entrants [1]. Ces conditions n'étant pas nécessaires à l'apparition de la synchronisation de bursts, cela rend cette dernière d'autant plus intéressante à étudier. Le phénomène de synchronisation de bursts fait l'objet de nombreuses recherches récentes, on peut citer par exemple [10,11].

## 2 Synchronisation des bursts

Les noeuds d'un réseau présentent de la synchronisation de bursts lorsque leurs périodes rapides débutent toutes au même moment. Contrairement à la synchronisation complète, la synchronisation de bursts n'est pas facile à détecter numériquement. Même la distinction entre périodes rapides et périodes lentes d'un neurone pose des problèmes car elle nécessite à trouver des seuils appropriés qui changent de manière imprévisible avec le moindre changement des paramètres des neurones ou du réseau. Dans cette partie, nous proposons un algorithme de détection de la synchronisation de bursts au sein d'un réseau. Cet algorithme peut être décomposé en quatre étapes principales. En effet, pour détecter le phénomène de synchronisation de bursts, il est nécessaire de détecter les groupes de bursts associés, ce qui impose la détection des débuts de bursts et enfin, les bursts ne peuvent être localisés que si les spikes l'ont été au préalable.

La première étape de cet algorithme est donc la localisation des spikes, obtenue par la recherche des maxima locaux des séries temporelles au-delà d'un certain seuil.

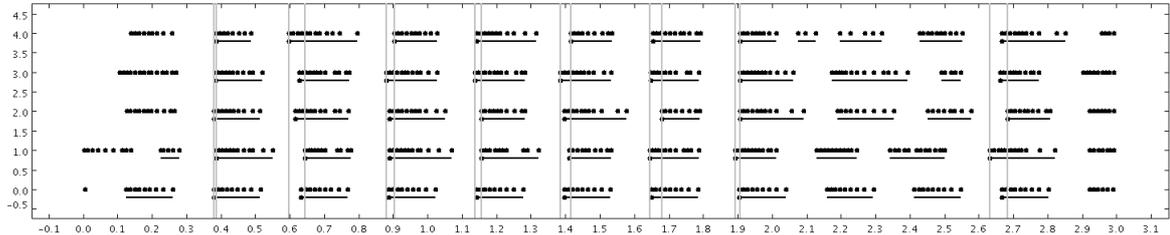
Les spikes étant localisés, il faut détecter les bursts et plus précisément leurs débuts. Nous considérons que le début d'un burst correspond à l'émission de son premier spike, c'est-à-dire le spike précédé par une période lente. Pour cela, nous listons toutes les distances inter-spikes et nous les séparons avec la méthode de *k-means clustering* en deux groupes : distances « courtes » que nous considérerons comme inter-spikes et distances « longues » que nous considérerons comme inter-bursts, voir [9]. Comme il n'est pas aisé de décider arbitrairement de cette limite, nous utilisons une méthode de clustering. La méthode de *k-means* est une méthode classique de clustering qui permet de séparer  $n$  observations en  $k$  groupes. Nous obtenons donc deux groupes de distances : les distances inter-spikes et inter-bursts. Cela nous permet ainsi de déterminer les premiers spikes des bursts. Afin de s'assurer de la présence claire de bursts émis par les neurones, nous calculons, dans chacun des cas, le ratio entre la plus courte distance inter-bursts et la plus longue distance inter-spikes. Si celui-ci est proche de 1, alors on peut considérer que la différence entre la plus grande distance inter-spikes et la plus petite distance inter-bursts n'est pas significative, ainsi, les spikes émis par le neurone ne sont pas clairement organisés en bursts. Si ce ratio est significativement supérieur à 1, alors nous pouvons considérer que les bursts peuvent être clairement identifiés.

L'étape suivante consiste en la détection des groupes de bursts associés. Considérons un burst  $b_1$  émis par un premier neurone et un burst  $b_2$  émis par un second. On dit que  $b_1$  et  $b_2$  sont associés si  $b_1$  est le burst du premier neurone le plus proche de  $b_2$  et  $b_2$  est le burst du second neurone le plus proche de  $b_1$ . Dans le cas de  $n$  neurones, on dit que les bursts  $b_1, \dots, b_n$  ( $b_i$  étant un burst émis par le neurone  $i$ ) font partie d'un même groupe de bursts associés si chaque paire de bursts  $(b_i, b_j)$  est associée.

Afin de parler de synchronisation de bursts, il faut s'assurer que chacun des bursts des neurones d'un réseau admet un burst associé émis par tous les autres neurones du réseau. Il est donc intéressant de regarder, au niveau du réseau, le nombre total de bursts présents pour un intervalle de temps suffisamment long, le nombre de bursts qui admettent des équivalents émis par tous les autres neurones, mais surtout le ratio entre ces deux quantités.

Même si tous les bursts ont des équivalents émis par les autres neurones, cela ne signifie pas que les bursts sont synchronisés car on ne précise pas s'ils débutent au même moment. Il nous faut alors nous intéresser à la valeur de la durée entre les débuts des bursts associés. Pour ce faire, nous mesurons la différence de temps entre l'émission des bursts associés émis par les différents neurones du réseau. Plus cette différence sera importante, moins les bursts seront synchronisés. C'est pourquoi, dans un réseau de  $n$  neurones, pour chaque  $n$ -uplet de bursts alignés, nous regardons la distance entre les deux débuts de bursts les plus éloignés. Cette mesure étant effectuée autant de fois qu'il y a de bursts émis, nous prenons la moyenne de toutes ces mesures.

La figure 1 illustre le fonctionnement de notre algorithme. Chaque maximum local d'un neurone est visualisé par un point sur la ligne horizontale correspondant à son numéro. Chaque point correspond donc à un spike. Les segments sous les points représentent les bursts détectés par l'algorithme de  $k$ -means clustering. Si le burst appartient à un groupe de bursts alignés, un point apparaît au début de son segment. Finalement, les couples de lignes grises verticales représentent la distance entre les deux bursts les plus éloignés dans chaque groupe de bursts associés.



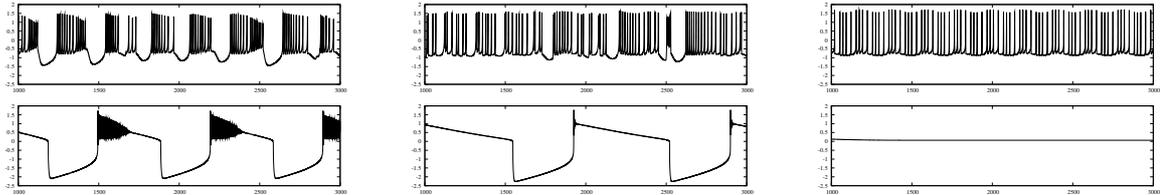
**Fig. 1.** Exemple de motifs temporels de bursts dans un réseau de 5 neurones. L'abscisse représente le temps et l'ordonnée le numéro de neurone.

### 3 Topologie du réseau

Pour que la synchronisation de deux noeuds d'un réseau soit possible, il faut que l'un d'eux soit influencé directement ou indirectement par l'autre, ou bien que tous les deux soient influencés par un troisième noeud. Au niveau du réseau cela implique qu'une condition nécessaire de synchronisation d'un réseau est l'existence d'au moins un noeud « racine » à partir duquel on peut atteindre tous les autres. Autrement dit, le réseau doit posséder un arbre couvrant orienté. Remarquons que c'est une condition nécessaire de synchronisation, quel que soit son type (complète, de bursts ou autre).

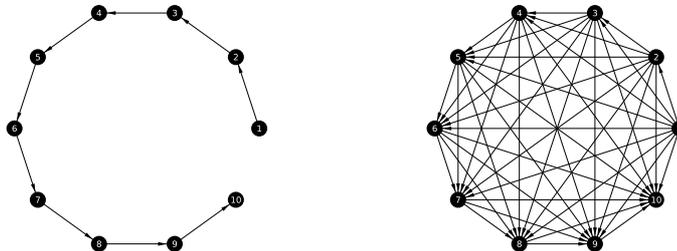
Une deuxième condition que nous avons imposée est l'absence de cycles dans le réseau. En effet, la présence de cycles peut modifier de manière significative le comportement individuel des neurones au point de faire disparaître le phénomène de bursting pour certains intervalles de la force de couplage. Pour illustrer ce fait, prenons le cas le plus simple de cycle, deux neurones avec un couplage bidirectionnel (un lien bidirectionnel entre  $a$  et  $b$  est équivalent à deux liens unidirectionnels de  $a$  à  $b$  et de  $b$  à  $a$  et

donc d'un cycle de longueur 2). La figure 2 montre qu'avec l'augmentation de la force de couplage, le comportement de bursting se transforme progressivement en spiking. A partir du moment où l'on observe une synchronisation complète, le bursting revient mais sous une forme différente pour disparaître à nouveau pour des très grandes forces de couplage. Une simulation similaire avec la présence de cycles plus longs montre que le comportement individuel peut être encore plus perturbé. Nos expériences numériques montrent, en l'absence de cycles, que le comportement de bursting est beaucoup plus stable.



**Fig. 2.** Série temporelle  $(t, x)$  d'un neurone couplé bidirectionnellement avec un autre avec force de couplage (de gauche à droite et de haut en bas) 0.1, 0.5, 1.0, 1.3, 2.0 et 3.0.

Nous nous sommes intéressés à deux topologies de réseaux qui vérifient les deux conditions précédentes et qui permettent de construire facilement des réseaux de taille différente mais de caractéristiques communes. Notons que la génération et la manipulation des graphes se fait grâce à la bibliothèque *GraphStream* développée au LITIS [4]. Le premier type de réseau étudié est une chaîne. Une chaîne de  $n$  noeuds est un réseau dans lequel le neurone  $i$  n'envoie de signal qu'au neurone  $i + 1$ . Le deuxième type est un réseau complet orienté dans lequel le neurone  $i$  reçoit des signaux des neurones  $1, \dots, i - 1$ . La figure 3 donne des exemples de ces types de réseaux.



**Fig. 3.** Exemple de réseau en chaîne (gauche) et de réseau complet orienté (droite) de 10 noeuds.

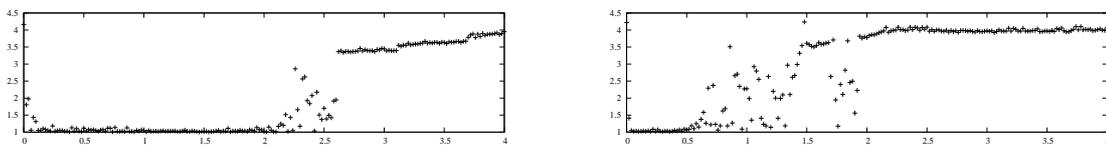
## 4 Résultats numériques

Nous avons appliqué l'algorithme de détection de synchronisation de bursts présenté dans la section 2 sur des réseaux de différentes tailles de deux topologies que nous avons choisies. Nous nous sommes intéressés aux valeurs de la force de couplage  $g_{\text{syn}}^{(n)}$  pour lesquelles la synchronisation de bursts apparaît. Rappelons que trois conditions doivent être vérifiées pour avoir synchronisation de bursts. Premièrement, les neurones doivent avoir un comportement de bursting clairement exprimé, c'est-à-dire le ratio entre la plus petite distance inter-bursts et la plus grande distance inter-spikes doit être suffisamment grand. L'évolution de ce ratio est illustrée sur la figure 4a. Pour des raisons de clarté, nous ne représentons que le dernier neurone d'un réseau de 20 neurones. Nous pouvons constater qu'à partir d'une certaine force de couplage ce ratio se stabilise. Pour les autres neurones la courbe est similaire, mais plus le neurone est proche du premier noeud, plus le point de stabilisation est décalé à gauche. La force de couplage nécessaire

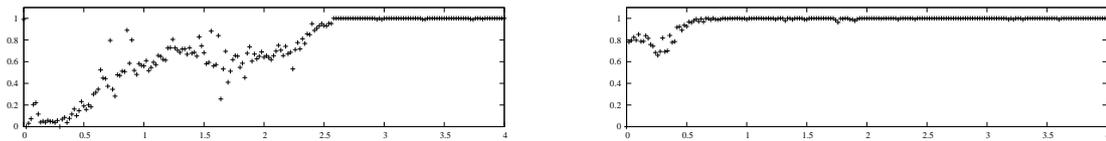
est moins importante dans un réseau complet que dans un réseau en chaîne car le degré entrant du noeud  $i$  dans un réseau complet est  $i - 1$ , alors que ce degré est seulement 1 dans un réseau en chaîne.

La seconde condition est que tous les bursts doivent appartenir à des groupes de bursts associés. L'indicateur de cette condition est le ratio entre le nombre de bursts associés et le nombre total de bursts dans le réseau. L'évolution de ce ratio en fonction de la force de couplage est illustrée sur la figure 4b. À nouveau, nous remarquons l'existence d'un seuil à partir duquel ce ratio devient 1 ce qui signifie que tous les bursts sont associés en groupes.

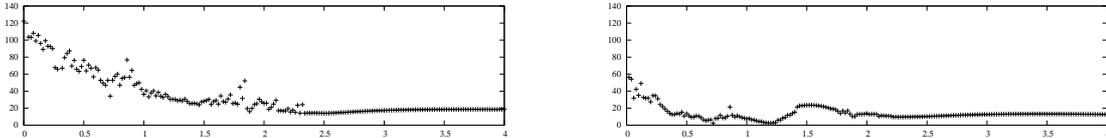
La dernière condition de synchronisation de bursts est que tous les bursts dans un groupe doivent commencer en même temps, autrement dit le décalage dans le temps entre le premier et le dernier burst dans un groupe doit être suffisamment petit. La figure 4c montre que, comme les autres indicateurs, celui-ci se stabilise à partir d'une certaine force de couplage.



(a) Rapport entre la plus petite distance inter-bursts et la plus grande distance inter-spikes du dernier neurone du réseau.



(b) Rapport entre le nombre de bursts associés et le nombre total de bursts.



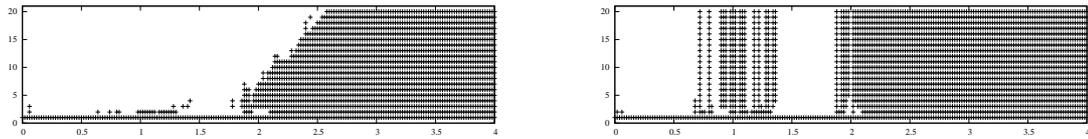
(c) Moyenne du décalage entre le premier et le dernier burst dans un groupe de bursts associés.

**Fig. 4.** Trois indicateurs de synchronisation de bursts en fonction de la force de couplage. Les résultats présentés sont sur un réseau de taille 20 de topologie chaîne (gauche) et graphe complet orienté (droite).

En réunissant les trois conditions précédentes, nous pouvons déterminer les forces de couplage pour lesquelles la synchronisation de bursts apparaît. La figure 5 récapitule ces résultats. Nous pouvons constater que pour le cas de réseaux en chaîne la force de couplage nécessaire pour obtenir synchronisation de bursts croît linéairement avec la taille du réseau. Pour les réseaux complets orientés cette force ne dépend pas de la taille du réseau. Par ailleurs, il est intéressant de noter que dans ce dernier cas, on peut observer un phénomène de désynchronisation. En effet, avant que la synchronisation de bursts ne se stabilise au-delà d'une certaine force de couplage, il existe des valeurs de cette force pour laquelle le réseau présente un phénomène de synchronisation de bursts et d'autres pour lesquelles cette synchronisation disparaît.

## 5 Conclusion et perspectives

Ainsi, nous avons développé un algorithme de détection de la synchronisation de bursts pouvant s'appliquer à des réseaux de différentes topologies dont les noeuds sont des systèmes dynamiques et les arêtes des fonctions de couplage. Dans ce travail, nous avons présenté le cas de réseaux composés de modèles



**Fig. 5.** L'abscisse représente la force de couplage et l'ordonnée la taille du réseau. Chaque point indique la présence de synchronisation de bursts pour la force de couplage et la taille de réseau correspondantes (gauche : réseau en chaîne, droite : réseau complet orienté).

neuronaux de Hindmarsh-Rose couplés par des fonctions non-linéaires modélisant des synapses chimiques. Les expériences numériques réalisées pour des réseaux de topologie chaîne ou complet unidirectionnel nous ont permis à formuler l'hypothèse selon laquelle la force de couplage nécessaire pour la synchronisation de bursts dans un réseau dépend linéairement de son diamètre. En effet, le diamètre d'un réseau de taille  $n$  est  $n - 1$  dans le cas de chaîne et 1 dans le cas de réseau complet orienté. Ceci est en parfait accord avec la figure 5. Cette hypothèse reste à être confirmée (ou démentie) par d'autres expériences numériques et justifiée par des outils mathématiques théoriques.

## Références

1. I. BELYKH, E. DE LANGE & M. HASLER, Synchronization of bursting neurons : What matters in the network topology, *Physical Review Letters*, **94** (18), 188101, (2005).
2. N. CORSON & M. A. AZIZ-ALAOUI, Complex emergent properties in synchronized neuronal oscillations, in *From System Complexity to Emergent Properties*, (Springer-Verlag), Eds. M. A. Aziz-Alaoui & Cyrille Bertelle, pp. 243-259, (2009).
3. N. CORSON, *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité*, Thèse de l'Université du Havre, (2009).
4. A. DUTOT, F. GUINAND, D. OLIVIER, Y. PIGNÉ, *GraphStream : A Tool for bridging the gap between Complex Systems and Dynamic Graphs*, EPNACS : Emergent Properties in Natural and Artificial Complex Systems, (2007). <http://graphstream.sourceforge.net/>
5. R. FITZHUGH, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophysical Journal*, **1**, 445-466 (1961).
6. J. L. HINDMARSH & R. M. ROSE, A model of the nerve impulse using two first-order differential equations, *Nature*, **296**, 162-164 (1982).
7. J. L. HINDMARSH & R. M. ROSE, A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations, *Proceedings of the Royal Society of London B*, **221**, 87-102 (1984).
8. A. L. HODGKIN & A. F. HUXLEY, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *Journal of Physiology*, **117**, 500-544 (1952).
9. J. B. MACQUEEN, Some methods for classification and analysis of multivariate observations, *Proceedings of 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, University of California Press), **1**, 281-297 (1967).
10. X. SHI & Q. LU, Burst synchronization of electrically and chemically coupled map-based neurons, *Physica A*, **388** (12), 2410-2419 (2009).
11. Y. H. ZHENG & Q. S. LU, Spatiotemporal patterns and chaotic burst synchronization in a small-world neuronal network, *Physica A*, **387** (14), 3719-3728 (2008).

# Perturbations non-linéaires optimales dans un écoulement de Couette plan

Yohann Duguet<sup>1,2</sup> & Luca Brandt<sup>2</sup> & Robin B. Larsson<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LIMSI-CNRS, UPR 3251, 91403 Orsay Cedex, France

<sup>2</sup> KTH Mechanics, Linné Flow Centre, Osquars Backe 18, SE-10044 Stockholm, Suède  
duguet@limsi.fr

**Résumé.** Dans de nombreux écoulements cisailés, la transition vers la turbulence s’observe en l’absence d’instabilité linéaire de l’écoulement de base. Nous nous proposons d’étudier numériquement les mécanismes qui permettent d’initier un écoulement turbulent avec une perturbation initiale de moindre énergie. L’exemple choisi est celui d’un écoulement de Couette plan incompressible entre deux parois planes se déplaçant parallèlement avec des vitesses opposées. Le nombre de Reynolds est de 400, et le domaine de calcul est une cellule tridimensionnelle périodique de taille comparable au Minimal Flow Unit, la taille critique pour qu’un écoulement turbulent puisse se maintenir. Cette perturbation est recherchée comme une superposition de modes linéaires optimaux, dont l’amplification linéaire transitoire est maximale. Un algorithme d’optimisation non-linéaire de l’énergie initiale met en évidence le rôle prépondérant des modes ‘obliques’ par rapport aux perturbations essentiellement bidimensionnelles. Le scénario complet de la transition peut être suivi dans l’espace de Fourier associé : interactions nonlinéaires et croissance transitoire des modes excités amènent l’écoulement au voisinage d’un état non-linéaire non identifié auparavant. Il s’agit d’un écoulement stationnaire dominé par des streaks de faible amplitude. Cet état limite instable est la dernière étape cohérente avant d’atteindre l’état turbulent. L’énergie critique des perturbations initiales de type oblique ou longitudinal est aussi étudiée en fonction du nombre de Reynolds et de la longueur du domaine de calcul. Des calculs avec une bonne résolution numérique suggèrent un seuil critique évoluant comme  $E_c = O(Re^{-2})$ , en accord avec plusieurs prédictions théoriques et expérimentales.

**Abstract.** In many shear flows, transition to turbulence occurs even in the absence of linear instability of the base flow. In this study we are investigating the mechanisms which can trigger a turbulent flow starting from a disturbance with least initial energy. We focus here is on plane Couette flow, the incompressible flow between two parallel countersliding plates. The Reynolds number is 400 and the numerical domain is a tridimensional periodic cell, whose size is comparable to the Minimal Flow Unit, the minimal domain size for turbulence to be sustained. Such a minimal perturbation is sought as a linear combination of linear optimal modes, those with maximal transient linear amplification. A nonlinear optimisation algorithm shows the importance of ‘oblique’ waves compared to nearly two-dimensional perturbations. The full transition scenario starting from the optimal initial disturbance can be tracked in the associated Fourier space : nonlinear interaction and transient growth of the excited Fourier modes bring the system close to an edge state not identified in former transition studies. This state corresponds to a steady flow dominated by low-amplitude streaks. It is unstable and represents the last coherent stage before breakdown into a turbulent flow. The kinetic energy of initial disturbances of oblique or longitudinal type is investigated as a function of the Reynolds number and of the domain length. Well-resolved computations suggest a critical threshold energy varying as  $E_c = O(Re^{-2})$ , in good agreement with theoretical and experimental predictions.

## 1 Introduction

Nous étudions ici la transition vers la turbulence dans les écoulements de fluide newtonien incompressible, en choisissant l’exemple générique de l’écoulement de Couette plan entre deux plaques planes parallèles de déplaçant dans des sens opposés. Le nombre de Reynolds est défini par  $Re = \frac{Uh}{\nu}$ , où  $\pm U$  est la vitesse des parois,  $2h$  est l’espacement entre les plaques, et  $\nu$  représente la viscosité cinématique du fluide. Cet écoulement, régi par les équations de Navier-Stokes, admet une solution de base unidimensionnelle, qui est linéairement stable quelque soit la valeur de  $Re$ . Malgré l’absence de modes propres instables,

la non-normalité de l'opérateur linéarisé permet d'expliquer la croissance (transitoire) de certaines perturbations à l'écoulement de base [1]. Le concept (linéaire) de modes optimaux (ceux dont la croissance transitoire en énergie est maximale) a pris forme, expliquant l'émergence au sein de l'écoulement de structures cohérentes représentatives de l'écoulement turbulent. La pertinence de ce concept est cependant limitée par sa nature linéaire, alors que la transition vers la turbulence n'est possible en pratique qu'en présence de perturbations d'amplitude finie. Dans cette étude, nous nous intéressons au concept de modes non-linéaires optimaux, c'est-à-dire aux perturbations d'énergie minimale permettant au système complet d'évoluer vers l'état turbulent. Dans la mesure où le système repose sur deux attracteurs (l'état laminaire et l'état turbulent), l'énergie de la perturbation recherchée indique le diamètre minimal du bassin d'attraction de l'état laminaire. Ce problème d'optimisation non-linéaire en dimension infinie peut être simplifié en tenant compte des découvertes récentes sur la topologie de l'espace des phases associé au système. D'une part, nous supposons que la perturbation initiale recherchée peut s'écrire comme la somme pondérée de  $m$  modes linéaires optimaux  $\bar{U}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ce qui réduit à  $m$  la dimension du problème :

$$\mathbf{U}(t = 0) = \sum_{i=1}^m A_i \bar{U}_i. \quad (1)$$

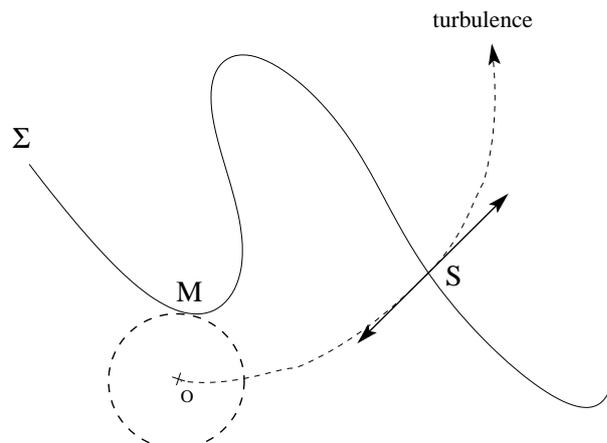
Cette décomposition est une approximation justifiée a priori dans la mesure où l'énergie initiale de la perturbation est suffisamment faible pour favoriser le rôle des modes qui croissent le plus. De plus, tous les modes linéaires optimaux vérifient les conditions d'optimalité non-linéaires nécessaires [2]. D'autre part, des travaux récents ont montré l'existence d'un régime asymptotique non-linéaire intermédiaire entre laminaire et turbulent, baptisé état limite (*edge state*) [4]. A toute perturbation initiale est associée une énergie critique, à partir de laquelle le système évolue de façon transitoire vers l'état limite, avant de diverger, soit vers l'état laminaire soit vers l'état turbulent (voir figure 1). Ce régime intermédiaire, par nature instable, peut être identifié par simulation numérique directe via un procédé de bisection de l'amplitude de la perturbation considérée. Puisque l'état limite est un passage obligé des trajectoires de l'espace des phases proche de la criticalité, il peut servir de cible pour des trajectoires sous contraintes. Ce choix, pertinent vue la nature critique des perturbations non-linéaires optimales, permet d'une part des simulations beaucoup moins coûteuses, d'autre part une optimisation avec une contrainte dynamiquement mieux définie que la notion relativement vague d'état turbulent.

## 2 Méthode numérique

Les équations de Navier-Stokes tri-dimensionnelles sont discrétisées selon une méthode de collocation spectrale dans les directions longitudinale  $x$  et transversale  $z$ , et selon un développement en modes de Chebyshev dans la direction  $y$  normale aux parois. L'avancement en temps est assuré par un schéma du type Runge-Kutta d'ordre 4. Le domaine spatial considéré a les dimensions suivantes :  $(L_x, L_y, L_z) = 4\pi h \times 2h \times 2\pi h$ , ce qui le rapproche du domaine minimal dans lequel un écoulement turbulent peut se maintenir. La résolution numérique adoptée pour  $Re = 400$  est de 33 modes selon  $y$ , et de 48 modes en  $x$  et  $z$ . Cette résolution est poussée à 65 modes en  $y$  et 48 modes en  $x$  et  $z$  pour  $Re$  entre 1500 et 3500. Pour toute perturbation initiale tri-dimensionnelle permettant la transition vers la turbulence, l'énergie critique  $E_c$  est déterminée approximativement par une méthode de bisection, jusqu'à ce que la trajectoire associée en un temps donné n'évolue ni vers l'état laminaire ni vers l'état turbulent. Cette étape est de loin la plus coûteuse au sein du processus d'optimisation. La recherche de minima de  $E_c$  dans le sous-espace engendré par les vecteurs  $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_m$  est réalisée par une méthode de Newton, afin d'identifier les zéros de la fonctionnelle

$$\nabla_m E_c : (A_1, \dots, A_m) \rightarrow \left( \frac{\partial E_c}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial E_c}{\partial A_m} \right). \quad (2)$$

L'optimisation a été réalisée pour  $m = 2$  puis  $m = 3$ . Différentes combinaisons de modes optimaux de bas ordre (ceux dont la croissance transitoire est optimale) ont été envisagées comme conditions initiales



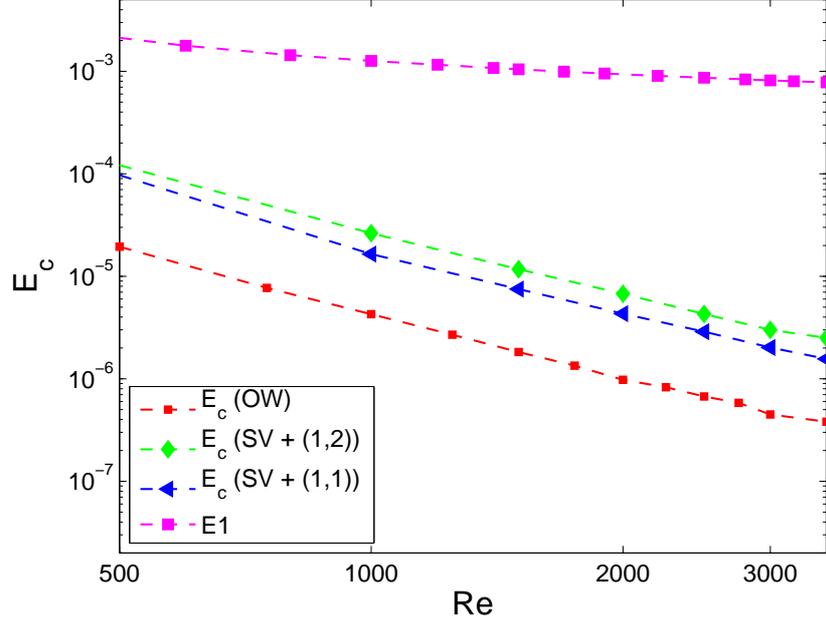
**Fig. 1.** Schéma simplifié de la topologie de l'espace des phases (de dimension infinie).  $O$  représente l'état de base (laminaire) du système.  $\Sigma$  est la frontière laminaire-turbulent, séparant les conditions initiales menant à l'état laminaire de celles menant à l'état turbulent.  $S$  représente l'état limite instable, atteint asymptotiquement par toutes les trajectoires contraintes à rester sur  $\Sigma$ . Enfin,  $M$  représente la perturbation non-linéaire optimale recherchée, c'est-à-dire la perturbation de moindre énergie appartenant à  $\Sigma$ . Toute trajectoire super-critique issue d'un voisinage  $M$  visite  $S$  de façon transitoire avant d'approcher l'état turbulent.

pour l'algorithme itératif d'optimisation. Tous les modes optimaux initiaux sont présentés sous la forme  $(k_x, k_z)$ , où  $k_x$  et  $k_z$  sont les nombres d'onde respectivement longitudinal et transverse de la perturbation considérée. La méthode d'optimisation permettant de calculer ces modes pour chaque combinaison  $(k_x, k_z)$  se base sur la décomposition SVD de la matrice associée à l'opérateur linéarisé [1].

### 3 Résultats

Nous présentons tout d'abord les résultats pour  $m = 2$  et  $Re = 400$ . Le mode linéaire  $(0, 2)$  est celui qui possède le plus fort taux de croissance transitoire (pour tout  $Re$ ), cependant il ne peut assurer à lui seul la transition vers la turbulence car le champ de vitesse associé est bidimensionnel. Il doit donc être perturbé par des modes obliques de bas ordre comme  $(1, 1)$  ou  $(1, 2)$ , ce qui donne lieu au scénario appelé SV. D'autre part, la paire de mode purement oblique  $(1, \pm 1)$  (OW), qui mène à un état turbulent fortement symétrique, est également considérée [3]. Les résultats de l'optimisation mettent en évidence le fait que le scénario OW est associé à un seuil critique en énergie plus bas d'un ordre de magnitude que le scénario SV. Les résultats dans le cas bi-modal confirment donc ceux de Reddy *et al* [5]. Enfin, les énergies critiques associées aux scénarios SV et OW ont été calculées en fonction de  $Re$ . Les deux scénarios présentent une asymptote claire en  $E_c \sim O(Re^{-2})$ . Le scénario OW reste donc constamment optimal par rapport au scénario SV. Les résultats présentés ici ont demandé une résolution numérique accrue pour  $Re \geq 1500$ . Ceci permet de corriger les estimations numériques de [5] qui indiquent un exposant de  $-2.5$  à cause d'une résolution trop faible dans la direction  $y$ . Un exposant de  $-2$  ( $-1$  pour l'amplitude critique) est en accord parfait avec les prédictions théoriques les plus récentes [6,7] ainsi qu'avec les résultats expérimentaux en conduite cylindrique [8].

Le cas  $m = 3$  (toujours pour  $Re = 400$ ) est plus délicat car il nécessite plus d'essais à partir de conditions initiales différentes, ainsi que des calculs plus coûteux. 500 jours de calcul répartis sur 8 processeurs, à partir de 60 conditions initiales différentes, ont montré l'existence d'une seule perturbation  $M$  qui est un zéro de  $\nabla_3 E_c$ . Elle est constituée des modes obliques  $(1, \pm 1)$ , d'amplitudes inégales, et du mode  $(1, 2)$ . Les résultats de l'optimisation sont contenus dans la table 1. L'énergie critique associée n'est que 2% plus faible que celle du scénario OW, ce qui démontre l'importance du mécanisme sous-jacent. Cependant, l'état turbulent associé à  $M$  est ici plus réaliste puisqu'il n'est plus soumis aux contraintes de symétrie



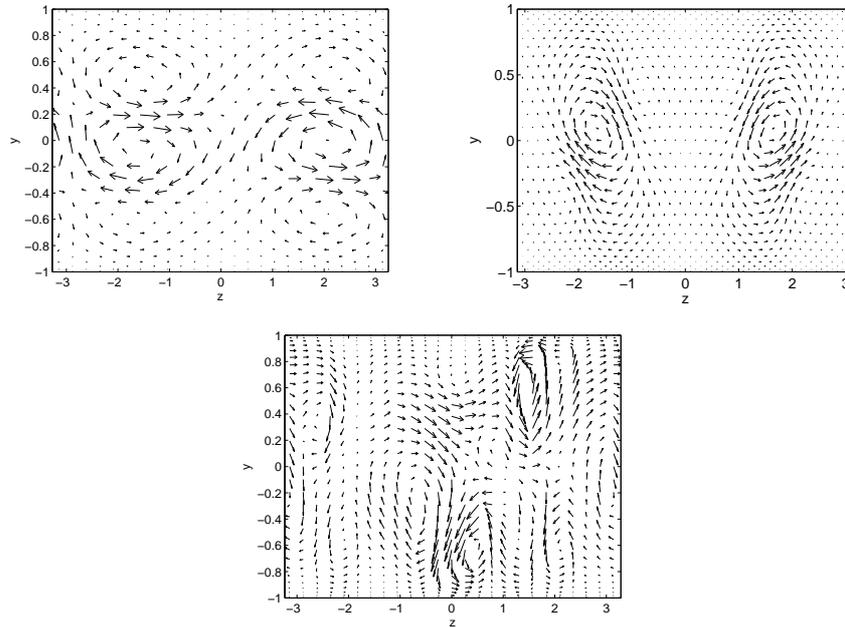
**Fig. 2.** Energies critiques associées aux scénarios SV (*streamwise vortices*) et OW (*oblique waves*) en fonction de  $Re$ . Le régime asymptotique vérifie  $E_c \sim O(Re^{-2})$ .  $E1$  représente l'état limite (*edge state*) approché de façon transitoire par les perturbations de type oblique.

fortes des conditions initiales de type OW.

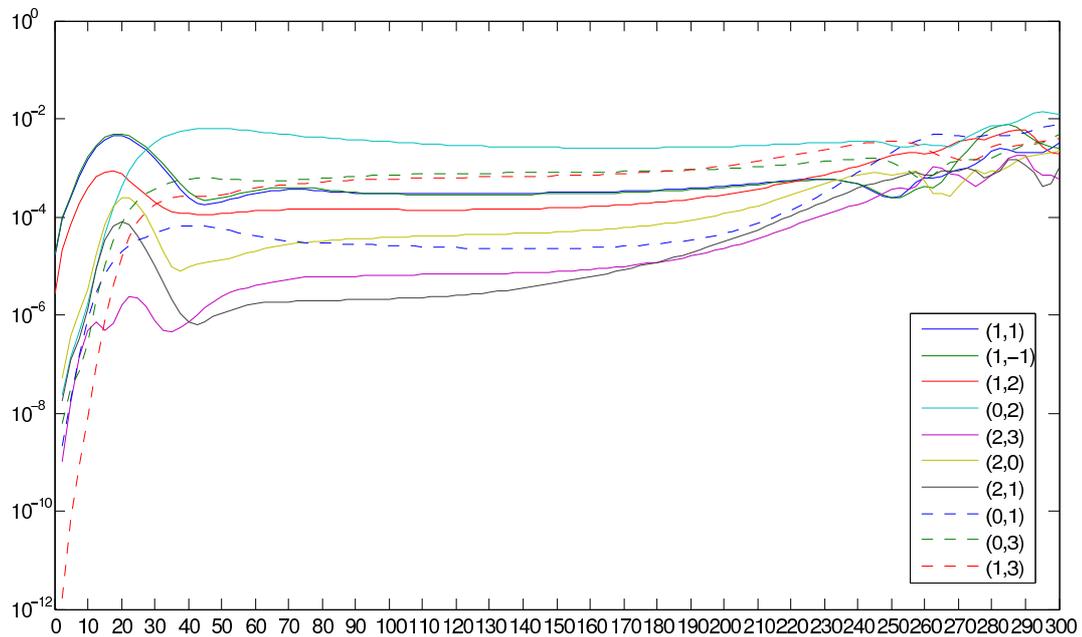
Afin d'analyser le processus de transition associé à  $M$ , nous avons généré une trajectoire à partir de la condition initiale  $(1 + \varepsilon)M$ , avec  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Le champ des vitesses dans une section transversale est représenté sur la figure 3. Les énergies des différentes composantes spectrales  $(k_x, k_z)$  sont représentées en fonction du temps sur la figure 4. La croissance énergétique des modes principaux cède le pas à un plateau d'énergie constante, correspondant à l'approche transitoire d'une onde stationnaire  $E1$ . Cet état stationnaire forme un point-selle sur  $\Sigma$ , non identifié dans les études précédentes. L'instabilité linéaire de  $E1$  mène directement le système à l'état turbulent. On notera que  $E1$ , caractérisé par des stries longitudinales de relativement faible amplitude, est approché par toutes les conditions initiales dominées par la paire oblique  $(1, \pm 1)$ . Au contraire, les conditions plus proches du scénario SV (voir table 1) approchent deux autres états stationnaires  $E2$  et  $E3$  déjà identifiés [4].

**Tab.1.** Energie des ondes stationnaires identifiées sur la frontière laminaire-turbulent  $\Sigma$ , associée à l'énergie minimale des perturbations permettant de les approcher de façon transitoire. La perturbation optimale trouvée avec  $m = 3$  est sur la première ligne.  $Re = 400$ .

Etat limite	Energie	Energie initiale	Perturbation
$E1$	$2.84 \cdot 10^{-3}$	$3.276 \cdot 10^{-5}$	$E_{(1,2)} = 0.0192E_{(1,1)} = 0.0327E_{(1,-1)}$
$E1$	$2.84 \cdot 10^{-3}$	$3.34 \cdot 10^{-5}$	$E_{(1,1)} = E_{(1,-1)}$
$E2$	$1.82 \cdot 10^{-2}$	$1.98 \cdot 10^{-4}$	$E_{(1,2)} = 0.0965E_{(0,2)}$
$E3$	$2.61 \cdot 10^{-2}$	$1.72 \cdot 10^{-4}$	$E_{(1,1)} = 0.48E_{(0,2)}$



**Fig. 3.** Coupe transversale du champ des vitesses dans une section  $z = cste$  pendant le processus de transition pour  $Re = 400$ . A gauche : perturbation optimale  $M$  (voir texte), au centre : état limite stationnaire  $E1$  approché de façon transitoire, à droite : état turbulent final.



**Fig. 4.** Energie contenue dans divers modes  $(k_x, k_z)$  en fonction du temps, le long de la trajectoire partant du voisinage de la perturbation optimale  $M$  pour  $m = 3$ , constituée des modes  $(1, \pm 1)$  et  $(1, 2)$ .  $Re = 400$ .

L'analyse fine des interactions non-linéaires agissant le long de la trajectoire issue du voisinage de  $M$  indique de plus les mécanismes modaux à l'œuvre dans le processus d'optimisation. Ces interactions sont du type  $\pm(k_x^1, k_z^1) \pm (k_x^2, k_z^2) \rightarrow (\pm k_x^1 \pm k_x^2, \pm k_z^1 \pm k_z^2)$  puisque la non-linéarité dans les équations de

Navier-Stokes et de type quadratique. Tous les modes issus d'interactions quadratiques avec  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  et  $(1, 2)$  sont présents, cependant on remarque également la présence dominante du mode  $(0, 2)$ , puis de  $(1, 3)$  et  $(0, 3)$ , pendant la visite de  $E1$ .  $(0, 2)$  est le mode dominant qui structure l'écoulement en stries. Comme  $(1, 3)$ , il est issu de l'interaction entre  $(1, 1)$  et son conjugué.  $(0, 3)$  ne peut en revanche pas résulter de l'interaction quadratique de ces deux modes obliques, et nécessite l'adjonction initiale du mode  $(1, 2)$ . Ces résultats suggèrent que l'énergie critique d'une perturbation peut être abaissée lorsque les modes initiaux participent, directement ou via des interactions quadratiques, au spectre de l'état limite correspondant.

## Références

1. S.C. REDDY & D. S. HENNINGSON, Energy growth in viscous channel flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **252**, 209-238 (1993).
2. C. COSSU, An optimality condition on the minimum energy threshold in subcritical instabilities, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (Mécanique)*, **333** (4), 331 (2005).
3. P. J. SCHMID & D.S. HENNINGSON, A new mechanism for rapid transition involving a pair of oblique waves, *Physics of Fluids*, **4** (9), 1992.
4. T. M. SCHNEIDER, J. F. GIBSON, M. LAGHA, F. DE LILLO AND B. ECKHARDT, Laminar-turbulent boundary in plane Couette flow, *Physical Review E*, 037301 (2008).
5. S. C. REDDY, P. J. SCHMID, J. S. BAGGETT & D. S. HENNINGSON, On the stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **365**, 269 (1998).
6. J. S. CHAPMAN, Subcritical transition in channel flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **451**, 35, (2002).
7. F. WALEFFE & J. WANG, Transition Threshold and the Self-Sustaining Process , *IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition and Finite Amplitude Solutions*, Springer, Dordecht (2005).
8. B. HOF, A. JUEL & T. MULLIN, Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe, *Physical Review Letters*, **91**, 244502 (2003).

# Les courbes singulières : invariants unidimensionnels des systèmes dynamiques

Jean-Marc Ginoux<sup>1</sup>, Robert Gilmore<sup>2</sup>, Timothy Jones<sup>2</sup>, Ubiratan Freitas<sup>3</sup> & Christophe Letellier<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire PROTEE, I.U.T. de Toulon — Université du Sud, BP 20132, F-83957 La Garde Cedex, France

<sup>2</sup> CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France  
ginoux@univ-tln.fr

**Résumé.** Les courbes singulières sont des invariants unidimensionnels qui sont introduits de manière à décrire les contraintes d'évolution des courbes intégrales d'un système dynamique de dimension  $n$ . Ces courbes qui fournissent plus d'information sur le système que les invariants de dimension nulle (les points fixes) sont appelées "singulières" parce qu'elles passent par les points fixes. Elles peuvent être définies de deux manières différentes mais équivalentes, l'une issue de la théorie des systèmes dynamiques, l'autre issue de la géométrie différentielle. Ce travail a pour but de décrire les deux méthodes de calcul de ces courbes et d'illustrer leurs propriétés en montrant les courbes singulières de plusieurs systèmes dynamiques de type Rössler de dimensions 3 et 4.

**Abstract.** We introduce one dimensional sets to help describe and constrain the integral curves of an  $n$ -dimensional dynamical system. These curves provide more information about the system than the zero-dimensional sets (fixed points) do. In fact, these curves pass through the fixed points. These connecting curves are introduced using two different but equivalent definitions, one from dynamical systems theory, the other from differential geometry. We describe how to compute these curves and illustrate their properties by showing the connecting curves for a number of dynamical systems.

## 1 Introduction

A la fin du XX<sup>e</sup> siècle Poincaré suggéra que les points fixes d'un système dynamique pourraient être utilisés pour fournir des informations, ou des contraintes sur le comportement des trajectoires définies par un système de  $n$  équations différentielles ordinaires non linéaires (un système dynamique) [1,2,3,4]. Les points fixes d'un système dynamique représentent son ensemble invariant dimension de dimension nulle. Malheureusement, les points fixes ne fournissent qu'une information locale sur la nature du flot.

Au début du XX<sup>e</sup> siècle, bon nombre de scientifiques comme Andronov, Tikhonov, Levinson, Wasow, Cole, O'Malley et Fenichel, se sont concentrés sur des ensembles invariants de dimension supérieures, en particulier des ensembles invariants de dimension  $n - 1$ . Dans de nombreux cas, ils correspondent aux variétés lentes invariantes de systèmes dynamiques singulièrement perturbés. Ces variétés permettent alors de définir la partie lente de l'évolution de la courbe de trajectoire de tels systèmes. Jusqu'à présent, il semble que, exception faite des travaux de [5], personne n'a étudié le problème d'ensembles invariants de uni-dimensionnels qui jouent un rôle très important dans la structure des attracteurs chaotiques en reliant leurs points fixes. L'objectif de ce travail est de définir et présenter des méthodes permettant de construire l'une de ces ensembles invariants uni-dimensionnels, c'est-à-dire ces courbes singulières.

## 2 Dynamical system

On considère un système d'équations différentielles définies dans un compacte  $E$  inclus dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$  :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{S}}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

où  $\vec{\mathfrak{S}}(\mathbf{X}) = [f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^n$  définit un champ de vecteurs vitesse dans  $E$  dont les composantes  $f_i$  sont supposés continus et infiniment différentiable par rapport aux  $x_i$ , c'est-à-dire que ce

sont des fonctions  $C^\infty$  dans  $E$  qui satisfont les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz theorem. Une solution de ce système est la représentation paramétrique de la *courbe trajectoire*  $\mathbf{X}(t)$  dont les valeurs définissent les *états* du *système dynamique* (1). Puisqu'aucun composant  $f_i$  du champ de vecteurs vitesse ne dépend pas explicitement du temps, le système est dit *autonome*.

## 2.1 Champ de vecteurs vitesse

Comme la fonction vectorielle  $\mathbf{X}(t)$  de la variable scalaire  $t$  représente la *trajectoire* du point mobile  $M$ , la différentielle totale de  $\mathbf{X}(t)$  est une fonction vectorielle  $\vec{V}(t)$  de la variable scalaire  $t$  qui représente le vecteur vitesse instantanée de  $M$  à l'instant  $t$ , soit :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{S}}(\mathbf{X}) \quad (2)$$

Le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  est tangent à la *trajectoire* excepté aux *points fixes*, où il n'est pas défini.

## 2.2 Champ de vecteurs accélération

Comme la fonction vectorielle  $\vec{V}(t)$  de la variable scalaire  $t$  représente le vecteur vitesse instantanée de, la dérivée par rapport au temps  $\vec{V}(t)$  est une fonction vectorielle  $\gamma(t)$  qui représente le vecteur accélération instantanée de  $M$  à l'instant  $t$ , soit :

$$\gamma(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (3)$$

Puisque les fonctions  $f_i$  sont supposées  $C^\infty$  dans un compacte  $E$  inclus dans  $\mathbb{R}^n$ , la dérivée par rapport au temps du champ de vecteurs vitesse  $\vec{V}(t)$  (1) peut être calculée. La dérivée des fonctions composées fait apparaître une dérivée au sens de Fréchet :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\mathfrak{S}}}{d\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{dt} \quad (4)$$

En remarquant que  $\frac{d\vec{\mathfrak{S}}}{d\mathbf{X}}$  est la matrice Jacobienne fonctionnelle  $J$  associée au système dynamique (1), il vient des équations (2) et (1) que

$$\gamma = J\vec{V} \quad (5)$$

Cette équation joue un rôle très important dans la suite de la discussion.

## 3 Ensemble invariant de dimension nulle

Comme il a été précédemment rappelé, Poincaré [1,2,3,4] définit l'*ensemble invariant de dimension nulle* comme le lieu des points où le champ de vecteurs vitesse s'annule. Aux points fixes le champ de vecteurs accélération s'annule aussi. Il en va de même pour le champ de vecteurs sur-accélération  $d\gamma(t)/dt$ . Toutes les dérivées par rapport au temps du champ de vecteurs vitesse s'annulent également aux points fixes.

## 4 Ensemble invariant uni-dimensionnel

La première tentative d'étude d'*ensembles invariants uni-dimensionnels* a été réalisée dans un contexte de Mécanique des Fluides par Roth and Peikert[8]. L'idée de transposer le concept de "courbes de vorticité" à l'espace des phases d'un système dynamique est à l'un d'entre nous (R.G.), qui l'appliqua à

un système dynamique de dimension trois et ensuite à des systèmes de dimensions plus élevées. Dans le contexte de la théorie des systèmes dynamiques, l'un de nous (C. L.), appela ces courbes invariantes *courbes singulières* puisqu'elles représentent des courbes reliant ou partant des points singuliers.

Dans le cas de systèmes dynamiques autonomes de dimension  $n$  (1), les *ensembles invariants unidimensionnels* sont des courbes définies par la relation de colinéarité entre les champs de vecteurs vitesse et accélération. Cette condition se traduit par :  $\gamma = J\vec{V} = \lambda\vec{V}$ , où  $J$  est la matrice jacobienne fonctionnelle, qui facilite d'une part la généralisation et, d'autre part l'interprétation de ces *courbes singulières*. De plus, il peut être facilement établi que tous les points fixes appartiennent à ces courbes invariantes.

## 5 Détermination des courbes singulières

Ce type de problème ne peut, en général être résolu, analytiquement. Aussi, trois méthodes peuvent être utilisées (seule la première est présentée ci-dessous) pour déterminer les *courbes singulières* définies par l'intersection de deux surfaces, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \phi_{23} = 0 \\ \phi_{12} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

En dimension trois, il est possible, en principe, d'utiliser deux des trois équations  $\phi_{ij}(X) = 0$  pour exprimer deux des trois variables  $(x, y, z)$  en fonction de la troisième, par exemple  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ .

## 6 Applications

Dans ce paragraphe les courbes singulières sont explicitées pour des systèmes dynamiques de dimensions trois et quatre.

### 6.1 Modèle de Rössler model

Les équations du flot de l'attracteur de Rössler [6] sont :

$$\vec{V} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{S}} \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y - z \\ x + ay \\ b + z(x - c) \end{bmatrix} \quad (7)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des paramètres réels. La *courbe singulière* de ce système dynamique a été fournie par l'équation  $J\vec{V} = \lambda\vec{V}$  qui dépend des trois paramètres de contrôle  $(a, b, c)$  et qui est alors paramétrisée l'une des trois coordonnées de l'espace des phases. Choisissons  $x$  comme coordonnée de l'espace des phases, la valeur propre  $\lambda$  satisfait alors une équation du cinquième degré :

$$\sum_{j=0}^5 D_j \lambda^j = 0 \quad (8)$$

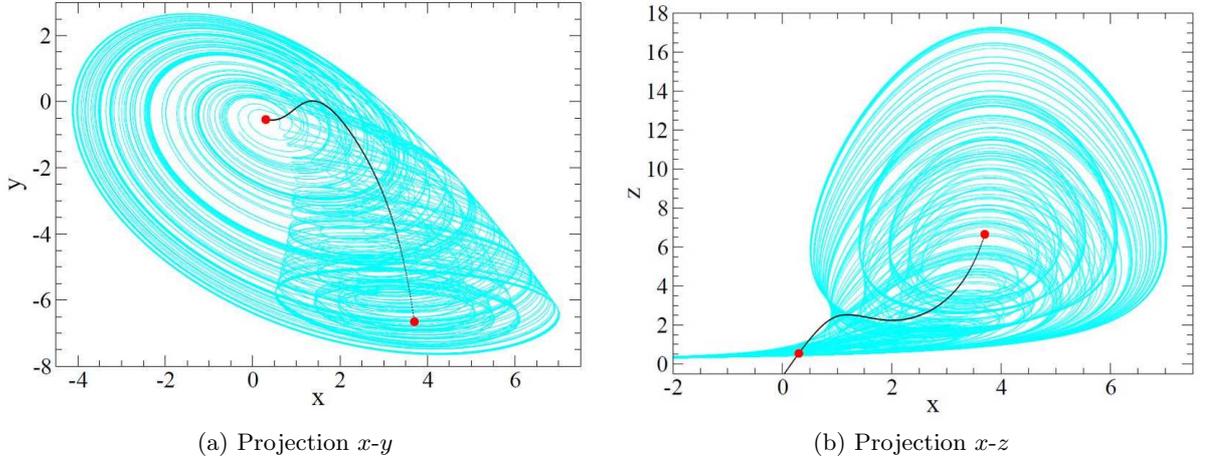
Les coefficients  $D_j$  sont présentés dans la Table I. Pour chaque point fixe, la valeur de  $\lambda$  est la valeur de la valeur propre réelle de la matrice Jacobienne fonctionnelle. Les coordonnées  $y$  and  $z$  sont exprimées par des fonctions rationnelles de  $x$  and  $\lambda(x)$  :

$$\begin{aligned} y &= \frac{-b - x + ax(c - x) + \lambda x(x - c + a - \lambda)}{a + (c - x)(1 - a^2) + \lambda a(c - x + \lambda - a)} \\ z &= \frac{+b + x + (\lambda x + ab)(\lambda - a)}{a + (c - x)(1 - a^2) + \lambda a(c - x + \lambda - a)} \end{aligned} \quad (9)$$

**Tab.1.** Coefficients de l'équation du cinquième degré qui définit la valeur propre  $\lambda$  dans l'expression de la courbe singulière le long de laquelle les champs de vecteurs vitesse et accélération sont parallèles pour le système dynamique de Rössler.

$D_5$	$a$
$D_4$	$2a(c - a - x)$
$D_3$	$ax^2 - 2acx + 4a^2x - 4a^2c + a^3 + c + 2a + ac^2$
$D_2$	$-2a^2x^2 + x^2 - 2a^3x - 2cx + 4a^2cx - 4ax + ab + 2ac - 2a^2c^2 + 2a^3c + c^2 - 2a^2$
$D_1$	$a^3x^2 + 4a^2x - 2a^3cx - 2a^2b + a + b + c - 3a^2c + a^3c^2$
$D_0$	$x^2 - a^2x^2 + 2a^2cx - 2cx - 2ax + ac - a^2c^2 + c^2 - ab + a^3b$

Le segment de courbe singulière entre les points fixes (dots) est représenté pour l'attracteur de Rössler par Fig. 1 pour les valeurs des paramètres  $(a, b, c) = (0.556, 2.0, 4.0)$ . Deux projections sont présentées. Près du point fixe de direction propre réelle et répulsive, cette courbe est une bonne approximation de la courbe qui définit le mouvement de l'œil d'une tornade. Cependant, lorsqu'on se déplace vers le point fixe près du plan  $x$ - $y$  et que les non-linearités augmentent, l'approximation devient de plus en plus mauvaise, intersectant même l'attracteur à deux reprises. Ce problème est visible sur la projection selon  $x$ - $z$ . Ce résultat renforce une observation faite par Roth and Peikert selon laquelle la courbe singulière définie par  $J\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$ , est une bonne approximation de l'œil du vortex dans la région où les nonlinéarités sont faibles, mais ne l'est plus là où les nonlinéarités deviennent plus importantes [8].



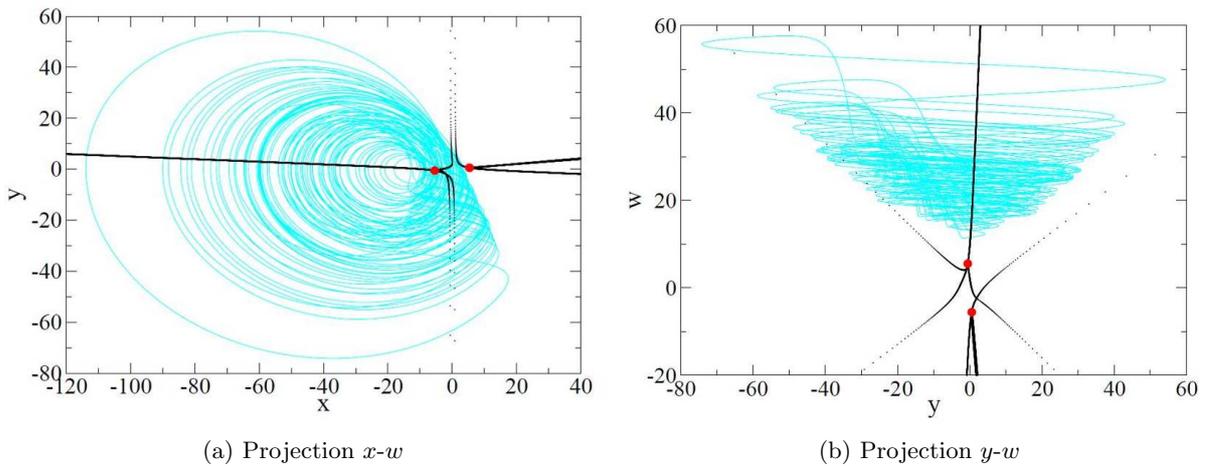
**Fig. 1.** Courbes connectantes du système de Rössler. La course entre en intersection deux fois avec l'attracteur, comme cela est vu sur la projection  $x$ - $z$ . Paramètres :  $(a, b, c) = (0.556, 2, 4)$ .

## 6.2 Modèle de Rössler model d'hyperchaos

Rössler proposa en 1979 un modèle simple de dimension quatre et produisant un comportement hyperchaotique [7]. Ce modèle s'écrit :

$$\vec{V} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \vec{\mathfrak{F}} \begin{bmatrix} f_1(x, y, z, w) \\ f_2(x, y, z, w) \\ f_3(x, y, z, w) \\ f_4(x, y, z, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y - z \\ x + ay + w \\ b + xz \\ -cz + dw \end{bmatrix} \quad (10)$$

Les variables d'état sont dans ce cas  $(x, y, z, w)$  et les paramètres de contrôle sont  $(a, b, c, d)$ . La courbe singulière a été calculée selon la seconde méthode qui fournit un résultat plus simple lorsque la coordonnée  $z$  est utilisée pour exprimer le comportement des autres variables. La valeur propre  $\lambda$  s'exprime comme la racine d'un polynôme de degré sept dont les coefficients sont fonctions des quatre paramètres de contrôle  $(a, b, c, d)$  et de  $z$ . Les trois autres coordonnées sont des fonctions rationnelles de plus faible degré des variables  $z$  et  $\lambda(z)$ . Deux projections de cet attracteur hyperchaotique et de la courbe singulière sont présentées sur la Fig. 2. Les calculs ont été effectués pour  $(a, b, c, d) = (1/4, 3, 1/2, 1/20)$ . Les points fixes sont représentés par des points rouges le long des courbes singulières connecting curve.



**Fig. 2.** Hyperchaotic strange attractor generated by the 1979 Rössler model for hyperchaos, with control parameter values  $(a, b, c, d) = (1/4, 3, 1/2, 1/20)$ .

## 7 Discussion

Dans ce travail nous allons au-delà de l'ensemble invariant zéro-dimensionnel (points fixes) qui servent d'une certaine manière à définir la structure de l'attracteur d'un système dynamique. Nous avons introduit une courbe que l'on appelle une courbe singulière (ou connectante), car elle relie ou part des points fixes d'un système dynamique autonome. Nous avons défini cette courbe par une équation aux valeurs propres,  $J\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$ , où  $\mathbf{V}$  est le champ de vecteurs vitesse définissant le système dynamique et  $J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$  est son Jacobien.

Ces courbes connectantes se présentent comme des objets permettant, au même titre que les points fixes, un lien entre la structure algébrique des systèmes dynamiques et la topologie de leurs solutions. Les courbes connectantes se présentent comme une courbe de foyers autour de laquelle la trajectoire s'enroule. Il reste que la manière générale dont elles structurent le portrait de phase reste à déterminer.

## Remerciements

Ce travail a été partiellement supporté par la *U.S. National Science Foundation* par le contrat PHY-0754081. R. G. remercie le CNRS et le CORIA pour une position de chercheur invité.

## Références

1. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> série, **7**, 375-422 (1881).
2. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> série, **8**, 251-296 (1882).
3. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, **1**, 167-244 (1885).
4. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, **2**, 151-217 (1886).
5. E. KREYSZIG, *Differential Geometry*, New York : Dover, 1959.
6. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57**( 5), 397-398 (1976).
7. O. E. RÖSSLER, An equation for hyperchaos, *Physics Letters A*, **31**, 155-157 (1979).
8. M. ROTH & R. PEIKERT, A higher-order method for finding vortex core lines, *Proceedings IEEE of the conference on Visualization'98*, 143-150 (1998).

## L'Histoire des Oscillations de Relaxation : de Gérard-Lescuyer (1880) à Van der Pol (1926)

Jean-Marc Ginoux<sup>1</sup> & Loïc Petitgirard<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586), 175, rue du Chevaleret, F-75013 Paris, France

<sup>2</sup> Conservatoire National des Arts et Métiers, Case 600, 292 rue Saint Martin, 75141 Paris CEDEX 3  
jmginoux@orange.fr

**Résumé.** Les oscillations de relaxation se réduisent généralement à la contribution de Balthazar Van der Pol [18] intitulée : “On relaxation-oscillations”, dans laquelle il utilisa cette terminologie pour désigner un phénomène oscillatoire produit par une triode. Ainsi, il sera démontré dans cet article que les oscillations de relaxation n’ont pas été observées pour la première fois par Van der Pol en 1926 au moyen d’une triode mais par Gérard-Lescuyer [6] en 1880 avec une machine série-dynamo puis par Blondel [3] en 1905 avec un arc chantant. De plus, il sera établi que la toute première mise en équation des oscillations de la triode n’a pas été réalisée par Van der Pol [19] en 1920 mais par Blondel [4] en 1919. En englobant en 1929 les oscillations de relaxation dans le cadre théorique des oscillations auto-entretenues, Andronov [1] est depuis considéré comme le tout premier à avoir mis en évidence un lien entre les travaux de Poincaré [10] et la solution de l’équation d’un oscillateur de type Van der Pol. Il sera alors démontré que cette correspondance entre cycle limite et solution périodique a été réalisée vingt ans plus tôt par Poincaré [15,16] lui-même lors d’une série de conférences faite à l’École supérieure des Postes et Télégraphes (aujourd’hui Sup’Télécom) en 1908. La découverte de ce texte “oublié” relance ainsi le débat d’une part sur l’implication de Poincaré dans les développements de la technique et notamment de la T.S.F. et, d’autre part sur la question de son héritage scientifique.

### 1 La machine série-dynamo : la non-linéarité en action

En 1880, un jeune ingénieur du nom de Jean-Marie-Anatole Gérard-Lescuyer est le témoin d’une expérience qu’il qualifie alors de “paradoxe électrodynamique”. Poursuivant des recherches sur la fabrication de générateurs d’électricité il réalise une expérience consistant en l’association d’une machine dynamo-électrique qui joue le rôle de générateur à une machine magnéto-électrique que l’on peut assimiler dans ce cas à un moteur. Il expose dans une unique note aux Comptes Rendus de l’Académie des Sciences (C.R.A.S.) de Paris les effets qu’il observe :

“ ... si l’on envoie le courant produit par une machine dynamo-électrique dans une machine magnéto-électrique, on assiste à un phénomène étrange. Aussitôt que le circuit est fermé, la machine magnéto-électrique se met en mouvement ; elle tend à prendre une vitesse de régime, en rapport avec l’intensité du courant qui l’anime ; mais subitement elle se ralentit, s’arrête et repart dans le sens contraire, pour s’arrêter de nouveau et tourner dans le même sens que précédemment. En un mot, elle est animée d’un mouvement alternatif régulier, qui dure autant que le courant qui l’actionne.” [6, p. 226]

Il constate une inversion périodique du sens de rotation de la machine magnéto-électrique alors que le courant est continu ce qu’il considère comme un “paradoxe scientifique”. D’après lui, c’est un accroissement de vitesse de la machine magnéto-électrique qui en induisant un courant de sens inverse provoque l’inversion de polarité des inducteurs et renverse le sens de rotation. En fait, il sera mis en évidence bien plus tard par Paul Janet en 1893 que l’intervalle situé entre les balais de la dynamo est le siège d’une force électromotrice (f.é.m.) représentant la différence de potentiel ou la tension à ses bornes et qui est une fonction non-linéaire de l’intensité. Ainsi, l’essence même de son paradoxe est l’apparition d’une f.é.m. dont la caractéristique courant-tension non-linéaire conduit à des oscillations que Balthazar Van der Pol [21, p. 116] qualifiera d’oscillations de relaxation. Ce phénomène représente, semble-t-il, l’une des premières manifestations d’un composant à caractéristique non-linéaire au sein d’un dispositif électrotechnique.

## 2 L'arc chantant

### 2.1 Des réverbères à la T.S.F.

À la fin du XIXe on utilisait pour l'éclairage des phares, des balises côtières et des villes un dispositif, ancêtre de la lampe à incandescence, appelé arc électrique . Il présentait indépendamment de sa faible lueur, un inconvénient majeur : le bruit engendré par la décharge électrique qui gênait les habitants. À Londres, le physicien britannique William Du Bois Duddell (1872-1917), fut mandaté en 1899 par les autorités anglaises pour résoudre ce problème. Il eut l'idée d'associer un circuit oscillant composé d'une bobine d'induction  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$  à l'arc électrique pour en faire cesser le bruissement. Il réalisa ainsi un dispositif qu'il appela arc chantant et put établir que la période du son musical émis par l'arc correspondait à la période propre du circuit oscillant qui lui est associé et s'exprimait par la formule de Thomson [17] :  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ . En réalité, Duddell venait d'inventer un circuit oscillant susceptible de produire non seulement des sons d'où son nom, mais aussi et surtout des ondes électromagnétiques. Ainsi, cet appareil sera utilisé comme émetteur pour la Télégraphie Sans Fil (T.S.F.) jusqu'à l'avènement de la triode. En effet, l'arc chantant ou arc de Duddell était un dispositif "éclateur" produisant des étincelles qui engendraient la propagation d'ondes électromagnétiques mises en évidence par les expériences de Heinrich Hertz (1857-1894) comme le rappelle Henri Poincaré (1854-1912) :

"Si un arc électrique est alimenté par un courant continu et si l'on place en dérivation une self-induction et un condensateur, on a quelque chose d'analogue à l'excitateur de Hertz." [14, p. 79]

Après sa découverte Duddell poursuit ses recherches sur l'arc chantant dans le but de produire des ondes électromagnétiques susceptibles de transmettre un signal.

### 2.2 De l'entretien des oscillations aux cycles limites de 1908

En France, la vétusté des installations électriques des systèmes de signalisation maritime incite le jeune ingénieur André Blondel (1863-1938), affecté au Service central des Phares et Balises, à effectuer des recherches sur l'arc électrique dans le but d'améliorer ce genre de dispositif. Pour y parvenir il inventera l'oscillographe galvanométrique en 1893. Durant l'année 1905, il publie un imposant mémoire dans lequel il réalise une étude complète de l'arc chantant de Duddell. Il obtient alors, pour différentes valeurs de la tension et de l'intensité, deux nouveaux types d'oscillations pour l'arc qu'il qualifie d'arc sifflant et d'arc strident en lesquels Van der Pol [21, p. 30] reconnaîtra des oscillations de relaxation. Blondel [3] met de plus en évidence que la courbe d'évolution de la tension aux bornes de l'arc à courant continu en fonction de l'intensité qui le traverse prend la forme de cycles qui rendent possible l'entretien de l'oscillation.

Dans les dernières années de sa vie Henri Poincaré publie plusieurs travaux fondamentaux sur la T.S.F. (Poincaré [14,15,16]). C'est lors d'une série de conférences faite à l'École supérieure d'Électricité en 1908 que Poincaré [15] établit le lien entre ses propres travaux sur les *cycles limites* ([10, p. 261]) et l'équation différentielle caractérisant les oscillations entretenues dont l'arc chantant est le siège. Poincaré s'intéresse naturellement à ce problème parce que les développements de la T.S.F. nécessitent de résoudre le problème de l'entretien des oscillations. Il étudie alors un circuit (voir Fig. 1) qui comprend une source de force électromotrice constante continue  $E$ , une résistance et une self, et, en parallèle, d'une part un arc, de l'autre une self et une capacité. Il précise que  $\rho x'$  étant un terme correspondant à la résistance interne de la self et aux autres causes possibles d'amortissement, y compris le rayonnement par l'antenne,  $\varphi(x + x')$  le terme dû à l'arc. Ce dernier représente la f.é.m. de l'arc chantant qui est à reliée à l'intensité qui le traverse par une relation non-linéaire déterminée empiriquement.

L'indétermination de cette relation rend impossible l'intégration analytique de l'équation différentielle que va établir Poincaré. Mais cela ne constitue pas un obstacle pour lui car il envisage une analyse qualitative du problème. En appelant  $x$  la charge du condensateur et  $i$  le courant dans le circuit extérieur, il obtient la toute première mise en équation des oscillations de l'arc chantant :

$$Lx'' + \rho x' + \varphi(i + x') + Hx = 0 \quad (1)$$

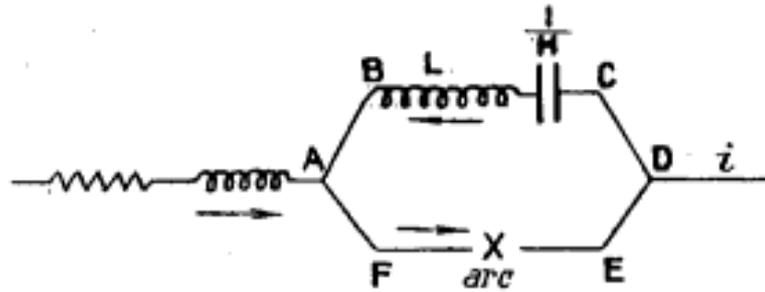


Fig. 1. Oscillations entretenues par l'arc chantant, d'après Poincaré [15, p. 390].

Poincaré explique alors que si la fonction  $\varphi$  était connue il serait possible d'établir une relation entre  $i + x'$  et  $x'$ . Il remplace donc  $\varphi(i + x')$  par une fonction  $\theta(x')$ . Ce qui le conduit à l'équation suivante :

$$Lx'' + \rho x' + \theta(x') + Hx = 0 \quad (2)$$

Il se place ensuite dans le plan de phase  $(x', x'')$  tel qu'il l'a lui-même défini ([12, p. 168]) en posant :  $x' = y$  et  $x'' = y'$  puis, il trace une représentation de la courbe solution de cette équation différentielle.

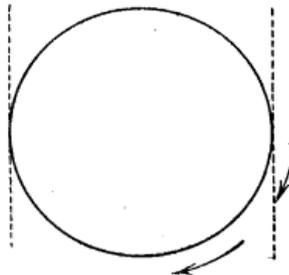


Fig. 2. Courbe fermée, d'après Poincaré [15, p. 390].

Il précise ensuite que l'on "peut construire les courbes qui satisfont à cette équation différentielle, à condition de connaître la fonction  $\theta$ . Les oscillations entretenues correspondent aux courbes fermées, s'il y en a. Mais toute courbe fermée ne convient pas, elle doit remplir certaines conditions de stabilité que nous allons étudier" [15, p. 391]. Puis, il exprime la condition nécessaire à l'entretien des oscillations :

*Condition de stabilité.* - Considérons donc une autre courbe non fermée satisfaisant à l'équation différentielle, ce sera une sorte de spirale se rapprochant indéfiniment de la courbe fermée. Si la courbe fermée représente un régime stable, en décrivant la spirale dans le sens de la flèche on doit être ramené sur la courbe fermée, et c'est à cette seule condition que la courbe fermée représentera un régime stable d'ondes entretenues et donnera lieu à la solution du problème." [15, p. 391]

Dans la Notice sur les Travaux scientifiques d'Henri Poincaré faite par lui-même en 1886, il définit le concept de cycle limite ainsi :

"J'appelle ainsi les courbes fermées qui satisfont à notre équation différentielle et dont les autres courbes définies par la même équation se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre. Cette seconde notion n'est pas moins importante que la première. Supposons, en effet, que l'on ait tracé un cycle limite ; il est clair que le point mobile dont nous parlions plus haut ne pourra jamais le franchir et qu'il restera toujours à l'intérieur de ce cycle, ou toujours à l'extérieur." [13, p. 30]

En comparant avec la condition de stabilité présentée dans le texte de 1908 il apparaît clairement que la “courbe fermée” qui représente le régime stable d’ondes entretenues n’est rien d’autre qu’un cycle limite au sens où il l’a lui-même défini. On peut néanmoins s’interroger sur les raisons qui l’ont poussé à ne pas l’écrire explicitement. On peut alors arguer d’une part que cette présentation était destinée à des ingénieurs et non à des mathématiciens et, d’autre part que l’introduction de ce concept n’apporte rien de plus qu’une terminologie. Poincaré a donc bien établi, vingt avant Andronov [1] une correspondance entre oscillations entretenues et cycles limites. Il peut être intéressant de mettre en parallèle la condition de stabilité de Poincaré avec cette phrase d’Andronov [2] qui conclut le paragraphe de l’édition originale russe de 1937 de son ouvrage :

“L’existence de cycles limites dans le portrait de phase du système dynamique envisagé est une condition nécessaire et suffisante garantissant la possibilité (avec des conditions initiales appropriées) d’auto-oscillations dans le système.” [2, p. 293]

Après sa disparition prématurée en 1912, un nouveau dispositif développé au cours du premier conflit mondial va jouer un rôle déterminant pour la suite dans le domaine des transmissions : la lampe à trois électrodes ou triode.

### 3 La lampe à trois électrodes ou triode

Bien que l’audion (premier tube électronique de type triode) ait été réalisé en 1907 par Lee de Forest (1873-1961) ce n’est qu’à partir de la première guerre mondiale que sa diffusion commence à se généraliser pour des raisons militaires puis commerciales. En 1919, Paul Janet publie aux C.R.A.S. de Paris un article dans lequel il démontre l’existence d’une analogie électromécanique entre les trois dispositifs : machine série-dynamo, arc chantant et triode. Il en déduit d’une part que leur caractéristique d’oscillations, i.e., que la f.é.m. aux bornes de chacun de ces dispositifs peut être assimilée à une “résistance négative” et d’autre part qu’ils le siège d’un même phénomène oscillatoire. Six mois plus tard, le 17 novembre 1919, André Blondel présente aux C.R.A.S. de Paris une note dans laquelle il propose de calculer l’amplitude et la période des oscillations d’une triode. Pour y parvenir, il propose de modéliser la caractéristique non-linéaire de la triode par un développement “sous forme d’une série à termes impairs, qui sera sûrement convergente” [4, p. 946]. Il l’écrit :

$$i = F(u + k\nu) = b_1(u + k\nu) - b_3(u + k\nu)^3 - b_5(u + k\nu)^5 - \dots \quad (3)$$

Le montage qu’il utilise (Fig. 3a) possède deux résistances internes  $r_1$  et  $r_2$ . L’application des lois Kirchhoff le conduit à l’équation différentielle d’ordre trois suivante :

$$\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{r_2}{L} \frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{1}{CL} - \frac{r_1 r_2}{L^2} \right) \frac{du}{dt} - \frac{r_1}{CL^2} u - r_2 \frac{d^3i}{dt^3} - \frac{1}{C} \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \quad (4)$$

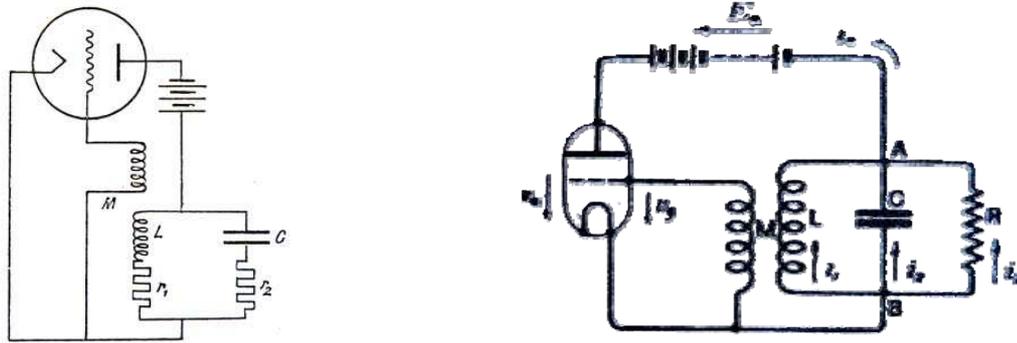
En remplaçant dans l’Eq. (4)  $i$  par son expression (Eq. (3)) puis en négligeant les résistances internes et en intégrant une fois par rapport au temps on obtient :

$$C \frac{d^2u}{dt^2} - (b_1 h - 3b_3 h^3 u^2 - \dots) \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0 \quad (5)$$

Au mois de juin de l’année suivante Blondel [5] expose ces résultats dans un article plus long et plus détaillé. Moins d’un mois après, le 17 juillet 1920, Van der Pol [19] achève la rédaction d’un article qui ne sera publié qu’en novembre et décembre et dans lequel il effectue la mise en équation de la triode oscillatrice. Son montage (Fig. 3b) qui ne comporte pas de résistances interne mais une résistance  $R$  en parallèle le conduit à une équation différentielle d’ordre deux.

Auparavant, Van der Pol fait appel à un à un développement limité de Taylor-McLaurin pour modéliser la caractéristique de la triode qui d’après-lui “can be represented by the equation” [19, p. 703] :

$$i = \psi(k\nu) = \alpha\nu + \beta\nu^2 + \gamma\nu^3 \quad (6)$$



(a) Montage de Blondel 1919.

(b) Montage de Van der Pol, 1920.

**Fig. 3.** Montages de la triode oscillatrice.

Il obtient alors l'équation suivante :

$$C \frac{d^2\nu}{dt^2} + \left( \frac{1}{R} - \alpha \right) \frac{d\nu}{dt} + \beta \frac{d(\nu^2)}{dt} + \gamma \frac{d(\nu^3)}{dt} = 0 \quad (7)$$

Il ajoute que, par des considérations de symétrie on peut choisir  $\beta = 0$ . Cependant, afin de permettre une comparaison avec les travaux de Blondel [4] il convient de faire abstraction de la résistance  $R$ . On a alors :

$$C \frac{d^2\nu}{dt^2} - (\alpha - 3\gamma\nu^2) \frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{L}\nu = 0 \quad (8)$$

Ainsi, il apparaît clairement que, moyennant les simplifications effectuées, les équations (6, 8) de Van der Pol [19] et (3, 5) de Blondel [4] sont totalement identiques, au signe près des coefficients qui dépendent du sens choisi pour le courant.

## 4 Conclusion

Il a ainsi été établi dans cet article que l'histoire des oscillations de relaxation ne commence pas avec le montage de la triode oscillatrice mais avec l'inversion périodique du sens de rotation de la machine série-dynamo observée en 1880 par Jean-Marie-Anatole Gérard-Lescuyer. De plus, ce n'est pas Balthazar Van der Pol [19] qui a réalisé la toute première mise en équation de la triode en 1920 mais André Blondel [4] un an auparavant. Enfin et surtout, il a été démontré que la correspondance entre cycle limite et oscillations entretenues a été établie par Poincaré lui-même en 1908 dans le cadre d'une application technique à la T.S.F. vingt avant les travaux d'Andronov [1]. Une analyse détaillée de la bibliographie de l'ouvrage d'Andronov [2] a montré que bien qu'il ait été également concerné par des problèmes radiotechnique à la fin des années 1920 il ne semblait pas avoir eu connaissance des travaux de Poincaré [15]. La découverte de ce texte "oublié" de Poincaré relance ainsi la question de son héritage scientifique à laquelle on ne peut apporter que des éléments de réponses fondés sur des hypothèses. Le premier est bien entendu la disparition brutale et prématurée d'Henri Poincaré en 1912. Le second est le premier conflit mondial qui va décimer les rangs de l'élite de la nation. En effet, alors que les allemands placent leurs scientifiques et ingénieurs en arrière du front, les élèves des grandes écoles françaises sont envoyés en première ligne. Le troisième est que le texte des conférences de Poincaré [15] n'apparaît pas dans ses oeuvres complètes. Cependant, même s'il ne semble pas y avoir trace, comme en U.R.S.S., "d'école de non-linéaire" en France durant les années 1920 et 1930 les contributions françaises vont s'avérer fondamentales pour permettre l'élaboration d'une théorie des oscillations non-linéaires. Ce sera le cas notamment de l'article d'Alfred Liénard [8] qui va établir l'existence et l'unicité du cycle limite de l'équation de Van der Pol.

De plus, au cours de cette période la France apparaît comme le “berceau” de cette théorie naissante des oscillations non-linéaires. En effet, bon nombre d’articles des écoles russes de Gorki et de Kiev vont être publiés aux Comptes Rendus de l’Académie des Sciences ou dans la Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées. Enfin, un fait important qui vient d’être récemment mis au jour [7] : la toute première Conférence Internationale de Non-Linéaire qui eut pour objet de permettre une rencontre entre ces écoles russes et les physiciens et mathématiciens français les plus impliqués dans le domaine des oscillations non-linéaires eut lieu à l’Institut Henri Poincaré à Paris entre les 28 et 30 janvier 1933.

## Références

1. A. A. ANDRONOV, Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, **189**, 559-561 (1929).
2. A. A. ANDRONOV & S. E. KHAIKIN, *La théorie des oscillations*, Moscow, Leningrad : ONTI, (1937).
3. A. BLONDEL, Sur les phénomènes de l’arc chantant, *Éclairage Électrique*, **XLIV** (28), 41-58 (1905) — *Éclairage Électrique*, **XLIV** (29), 81-104 (1905).
4. A. BLONDEL, Amplitude du courant oscillant produit par les audions générateurs, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, **169**, 943-948 (1919).
5. A. BLONDEL, Théorie graphique des audions générateurs et calcul de l’amplitude des oscillations, *Radioélectricité*, **1**, 7-13 & 63-72 (1920).
6. J. M. A. GÉRARD-LESCUYER, Sur un paradoxe électrodynamique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, **168**, 226-227 (1880).
7. J.-M. GINOUX & L. PETITGIRARD, The first “lost” international conference on nonlinear, *in press*, (2010).
8. A. LIÉNARD, Étude des oscillations entretenues, *Revue générale de l’Electricité*, **23**, 901-912 et 946-954 (1928).
9. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> série, **7**, 375-422 (1881).
10. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 3<sup>e</sup> série, **8**, 251-296 (1882).
11. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, **1**, 167-244 (1885).
12. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, **2**, 151-217 (1886).
13. H. POINCARÉ, *Notice sur les Travaux scientifiques de Henri Poincaré*, Gauthier-Villars, Paris, (1886).
14. H. POINCARÉ, *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes : la télégraphie sans fil*, (3<sup>e</sup>ème édition) Gauthier-Villars, Paris, (1907).
15. H. POINCARÉ, Sur la télégraphie sans fil, *Lumière Électrique*, **4**, 259-266 — 291-297 — 323-327 — 355-359 — 387-393 (1908).
16. H. POINCARÉ, *Conférences sur la télégraphie sans fil*, Éd. La Lumière Électrique, Paris, (1909).
17. W. THOMSON, On transient electric currents, *Philosophical Magazine*, Series 4, **5**, 393-405 (1853).
18. B. VAN DER POL, On “relaxation-oscillations”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **7** (2), 978-992 (1926).
19. B. VAN DER POL, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Review* (London), **1**, 701-710 — 754-762 (1920).
20. B. VAN DER POL, Über „Relaxationsschwingungen II”, *Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie*, **29**, 114-118 (1927).
21. B. VAN DER POL, Oscillations sinusoidales et de relaxation, *Onde Électrique*, **9**, 245-256 — 293-312 (1930).

# Ondes modulées dans le système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température

Raphaël Guillermin, Arnaud Prigent & Innocent Mutabazi

LOMC - FRE 3102, 53 Rue de Prony, 76 058 Le Havre cedex  
arnaud.prigent@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Nous étudions l'écoulement lié au couplage de la force centrifuge et des effets thermiques dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température et dont le rapport des rayons et le rapport d'aspect valent respectivement 0,8 et 112. Pour cela, nous avons développé une technique de mesure non-intrusive de la température et de la vitesse basée sur l'utilisation de cristaux liquides thermochromiques. Les résultats que nous présentons sont obtenus en imposant une forte valeur du nombre de Grashof et en augmentant progressivement le nombre de Taylor. Au-dessus d'une valeur critique du nombre de Taylor, l'écoulement de base, composé d'une grande cellule convective due au gradient radial de température et de l'écoulement de Couette circulaire, devient instable. Pour les grandes valeurs du nombre de Grashof, il est remplacé par une spirale modulée présente sur toute la longueur du système et tournant à la vitesse angulaire moyenne de l'écoulement. Le motif ainsi formé peut être décrit comme un ensemble de paquets d'onde dont nous avons étudié l'enveloppe. Nous montrons qu'elle peut être modélisée sous la forme  $A(t) = A_{max}.sech[(t - t_{max})/T_{mod}]$  où  $A_{max}$  est le maximum de l'amplitude d'un paquet,  $t_{max}$  l'instant auquel se trouve ce maximum et  $T_{mod}$  la période de modulation correspondant à la durée d'un paquet. La variation linéaire de  $A_{max}^2$  avec le nombre de Grashof, indique que ce motif d'onde modulée apparaît via une bifurcation supercritique quand on augmente le nombre de Grashof.

**Abstract.** This experimental work focused on the study of the flow induced by the coupling between the centrifugal force and thermal effects in a Couette-Taylor system submitted to a high radial temperature gradient. The geometrical parameters of our system are fixed with aspect ratio and radius ratio respectively equal to 112 and 0,8. We have developed a non-intrusive velocity and temperature fields measurement technique using thermochromic liquid crystals. In this study, the Grashof number is fixed and the Taylor number is progressively increased. Above a critical value of Ta, the base flow is destabilized and replaced by a modulated spiral pattern that fills almost the whole length of the system and rotates at the mean angular velocity of the flow. It produces a modulated wave-like pattern with a wave packet shape which envelope can be fitted by  $A(t) = A_{max}.sech[(t - t_{max})/T_{mod}]$  where  $A_{max}$  is the amplitude maximum of a packet,  $t_{max}$  the time at which this maximum occurs and  $T_{mod}$  the modulation period corresponding to the lifetime of the packet.  $A_{max}^2$  increases linearly with the Grashof number indicating a supercritical bifurcation to the modulated wave-like pattern when the Grashof number is increased.

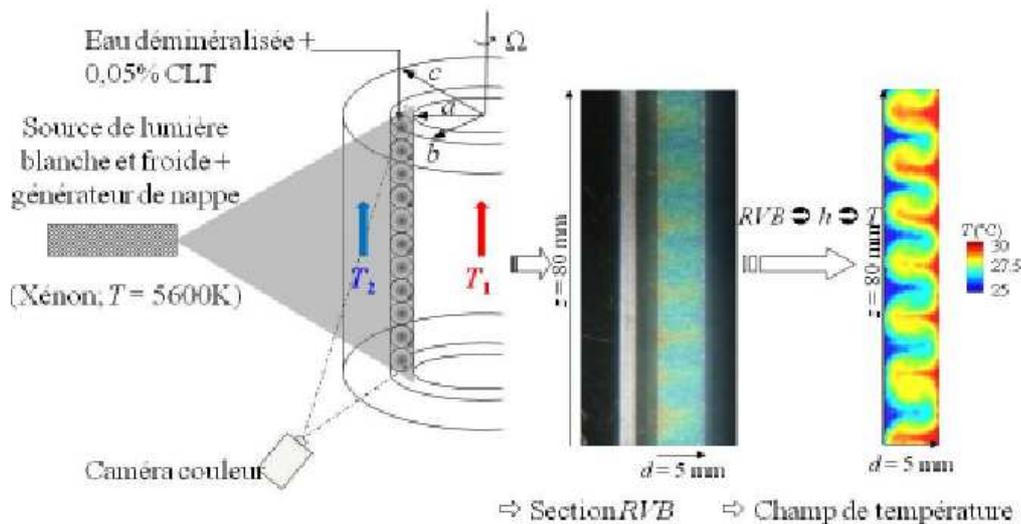
## 1 Introduction

Nous nous intéressons à l'écoulement produit dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température. Le système de Couette-Taylor, composé de deux cylindres coaxiaux en rotation, est depuis longtemps considéré comme un système modèle pour l'étude des effets centrifuges et de la transition vers la turbulence dans les écoulements fermés [1,2]. Sa compréhension est également importante pour un grand nombre d'applications pour lesquelles il est nécessaire de tenir compte des effets thermiques. La première observation des complications engendrées par les effets thermiques est généralement attribuée à Taylor lui-même [1]. En effet, il a rapporté dans certains cas l'apparition d'un écoulement de type spiralé au lieu des rouleaux stationnaires axisymétriques portant son nom et ce phénomène, non prédit par la théorie dans le cadre d'un fluide isotherme [1], fut a posteriori [3] associé à la présence d'un écoulement axial lié à l'existence d'un gradient de température. Depuis, plusieurs études théoriques, expérimentales et numériques ont été réalisées sur le système de Couette-Taylor soumis à un gradient radial de température. Snyder et Karlsson [4] ont étudié expérimentalement l'effet d'un gradient radial de température sur la stabilité de l'écoulement. Ball et Farouk [5] ont montré la complexité des

phénomènes apparaissant en faisant varier les effets thermo-centrifuges. Ali et Weidman [6] ont conduit une étude théorique sur l'influence des divers paramètres de contrôle du système sur la stabilité de l'écoulement. Kuo et Ball [7] ont établi un diagramme de stabilité répertoriant les différents régimes d'écoulement en fonction de l'écart de température et de la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Ils ont montré qu'une modulation basse fréquence apparaissait lorsque les effets thermiques et centrifuges devenaient plus forts. Nous avons déjà rapporté l'apparition d'une modulation basse fréquence similaire [8] mais souhaitons en donner une description plus complète ici. En effet, nous avons développé une méthode non intrusive de mesure de la température et de la vitesse basée sur l'utilisation de cristaux liquides thermochromiques (CLT) qui nous permet de caractériser l'écoulement produit dans notre système de Couette-Taylor soumis à un gradient radial de température. Nous avons aussi procédé à une nouvelle analyse de nos signaux que nous avons transformé sous la forme de séries temporelles.

## 2 Le dispositif expérimental

Le système est composé de deux cylindres coaxiaux verticaux de même longueur  $L = 57$  cm : un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon  $a = 2$  cm et un cylindre extérieur fixe en verre transparent de rayon  $b = 2,5$  cm (Fig. 1). L'entrefer entre les deux cylindres est alors  $d = b - a = 0,5$  cm et le rapport des rayons est  $\eta = a/b = 0,8$ . L'espace annulaire est fermé par deux anneaux de Téflon fixés sur le cylindre extérieur. Ainsi, la longueur utile de l'écoulement étudié est  $H = 55,4$  cm et le rapport d'aspect est  $\Gamma = H/d = 112$ . Le cylindre intérieur est mis en rotation à la fréquence angulaire  $\Omega$ . Le système est immergé dans une large cuve cylindrique en verre de rayon  $c = 5$  cm et le cylindre intérieur est creux. Les cylindres intérieur et extérieur peuvent donc être maintenus à des températures fixées via deux circulations reliées à des bains thermostatés, l'une dans le cylindre intérieur et l'autre entre les deux cylindres périphériques. Des mesures de température effectuées en insérant des thermocouples dans les anneaux en Téflon, ont montré l'absence de gradient vertical de température. L'écoulement dans le système peut être décrit par trois paramètres de contrôle physiques : le nombre de Taylor  $Ta = (\Omega a d / \nu) \cdot (d/a)^{1/2}$  lié aux effets inertiels, le nombre de Grashof  $Gr = g \alpha \Delta T d^3 / \nu^2$  lié aux effets thermiques et le nombre de Prandtl  $Pr = \nu / \kappa$  lié aux propriétés du fluide. Le nombre de Richardson reliant les effets thermiques et inertiels est aussi utilisé  $\sigma = Gr \cdot a / d \cdot Ta^2$ .



**Fig. 1.** Dispositif expérimental avec le système d'acquisition de la température utilisant les cristaux liquides thermochromiques.

Pour visualiser les champs de température du liquide dans l'entrefer, nous avons utilisé une méthode non intrusive de thermographie par cristaux liquides. Celle-ci est basée sur la diffusion sélective de la lumière par des cristaux cholestériques dans lesquels les molécules sont regroupées par couches. Dans chaque couche, les molécules tendent vers un alignement parallèle à un axe commun décrit par un vecteur unitaire appelé le directeur. En passant d'une couche à l'autre, le directeur tourne d'un petit angle de telle sorte qu'une structure spiralée avec un certain pas  $p$  soit formée. Lorsqu'elle est éclairée par de la lumière blanche, cette structure réfléchit la lumière suivant la condition de Wolf-Bragg (dans le cas d'une incidence normale de la lumière, la longueur d'onde avec le maximum d'intensité de réflexion  $\lambda_0$  est approximativement égale au pas de la spirale). Pour la plupart des cristaux liquides cholestériques, le pas de la spirale est compris entre 400 et 1000 nm et  $\lambda_0$  se trouve dans le domaine du visible. Une action extérieure telle qu'un changement de température modifie  $p$ , ce qui induit un changement de la longueur d'onde préférentiellement réfléchie, donc de la couleur des cristaux. La dépendance de la couleur des cristaux liquides cholestériques avec la température permet donc d'obtenir une image du champ de température dans le système étudié. Les cristaux liquides thermochromiques utilisés sont de type SR25C5W de chez Hallcrest. La température de la première transition (du noir au rouge) est de 25°C et ils fonctionnent sur une gamme de 5°C. Ils sont microencapsulés dans des sphères de diamètre moyen 75  $\mu\text{m}$  et leur temps de réaction à un changement de température est de l'ordre de 3 ms. Nous avons ensemencé l'eau déminéralisée de 0,05% en volume de CLT en nous assurant par des mesures de viscosité que ce dosage ne modifiait pas les propriétés newtoniennes du liquide. Un étalonnage des cristaux a été réalisé et nous avons choisi l'angle de hue  $h$ , défini dans un espace de chromaticité polaire par les intensités des primaires Rouges, Vertes et Bleues (les valeurs RVB) enregistrées par le système d'acquisition, comme scalaire mesurable associé à la couleur observée en fonction de la température [9,10]. Nous avons donc tracé  $h$  en fonction de la température et dans ce qui suit, les températures ont été obtenues à partir de  $h$  avec un polynôme d'ordre 4, calculé à partir de la courbe d'étalonnage. Compte tenu de la précision des cristaux, de leur temps de réaction et de la précision sur les bains thermostatés, l'incertitude de mesure a été évaluée à environ  $\pm 0,3^\circ\text{C}$ . Les mesures des composantes  $v_r$  et  $v_z$  de la vitesse ont été effectuées en utilisant les CLT comme traceurs pour de la vélocimétrie par images de particules.

Les expériences ont été réalisées en appliquant un gradient radial de température entre les cylindres en chauffant le cylindre intérieur à une température  $T_1 > T_2$ . Après une heure, le cylindre intérieur est progressivement mis en rotation par pas réguliers. Pour chaque valeur de la vitesse angulaire, les mesures de la température et de la vitesse sont effectuées après vingt minutes. Dans la gamme de valeurs de température utilisée, l'eau déminéralisée a un nombre de Prandtl  $Pr = 5,5 \pm 0,2$ .

### 3 Résultats

Le gradient radial de température génère un écoulement barocline prenant la forme d'une large cellule convective. L'écoulement ainsi formé sans rotation peut se déstabiliser lorsque le nombre de Grashof est augmenté au-dessus d'une valeur critique  $Gr_c = 8010$  dans notre système. Lorsque le cylindre intérieur est mis en rotation pour une valeur donnée du nombre de Grashof inférieure à  $Gr_c$ , l'écoulement de base est alors composé de la cellule convective et de l'écoulement de Couette circulaire. Cet écoulement peut lui aussi se déstabiliser lorsque le nombre de Taylor est augmenté au-dessus d'une valeur critique  $Ta_c$  qui dépend du nombre de Grashof (Fig. 2) :  $Ta_c$  diminue puis atteint une valeur constante pour les grands nombres de Grashof correspondant aux forts gradients de température qui nous intéressent ici.

Aucune hystérésis n'a été observé pour cette transition et le motif qui se forme dans ce cas est une spirale modulée qui remplit presque entièrement la longueur du système et tourne à la vitesse angulaire moyenne de l'écoulement. Sur un diagramme spatio-temporel de l'intensité lumineuse enregistrée le long de l'axe des cylindres (Fig. 3a), cela se traduit par un motif d'onde propagative. Les champs de vitesse, de vorticité et de température correspondant sont présentés sur les figures 3b et c. Ils r velent la nature ondulatoire de ce motif.

Nous avons mesuré la vitesse de groupe  $v_g$  (Fig. 4a) et la vitesse de phase  $v_s$  (Fig. 4b) verticales de ce motif. Elles sont égales et varient linéairement avec le nombre de Grashof. Cette spirale modulée présente donc une forme de paquet d'onde se propageant sans dispersion. Nous avons procédé à un changement

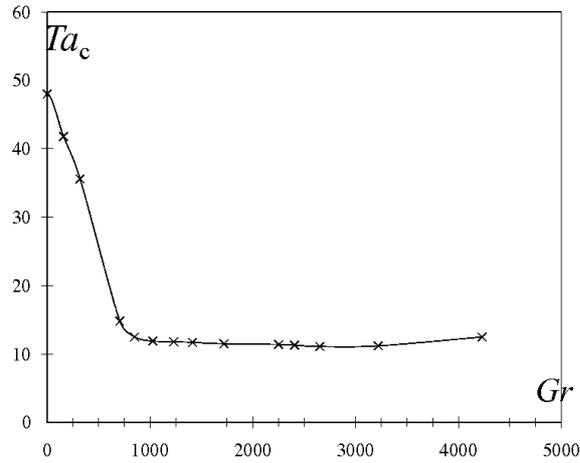


Fig. 2. Diagramme de stabilité  $Ta_c = f(Gr)$ .

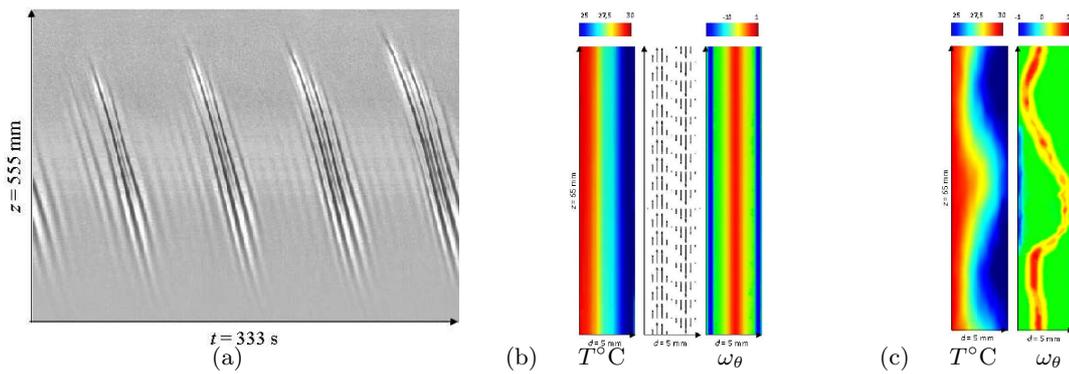


Fig. 3. Diagramme spatio-temporel (a), champs de vitesse, de température et de vorticité sans (b) et avec motif (c) obtenus pour  $Gr = 2405$  et  $Ta = 11,3$ .

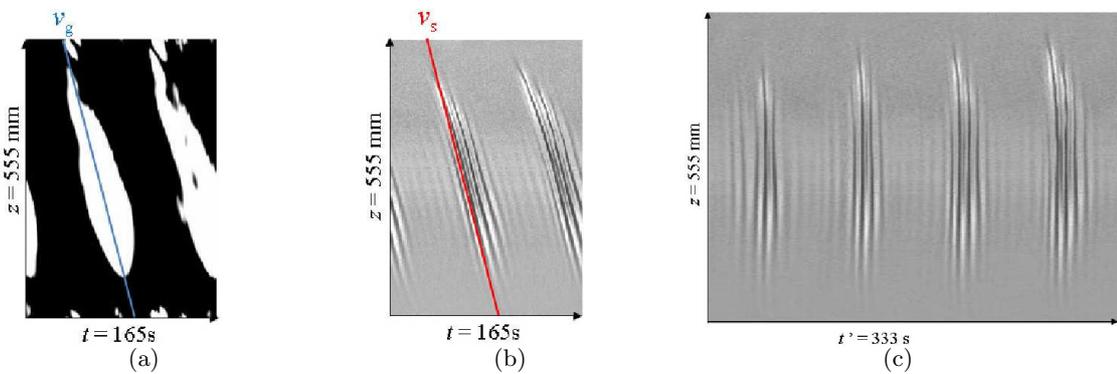
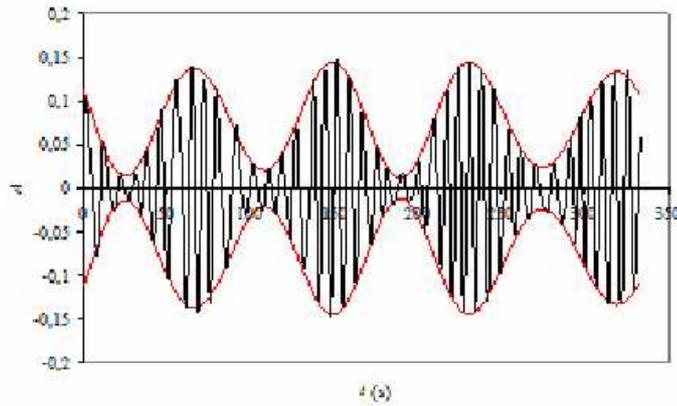
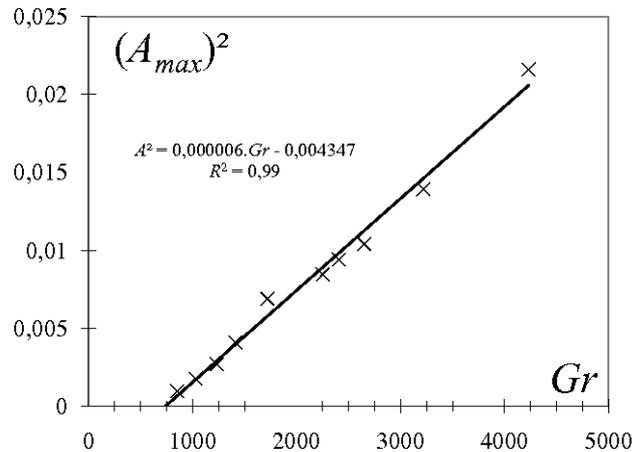


Fig. 4. Diagrammes spatio-temporels du module de l'intensité lumineuse (a), de l'intensité lumineuse (b) et obtenu par le changement de référentiel  $t' = t + z/v_s$  pour  $Gr = 2405$  et  $Ta = 11,3$ .

de référentiel pour les diagrammes spatio-temporels avec  $t' = t + z/v_s$  où  $v_s$  correspond naturellement à la vitesse de propagation axiale du motif. On obtient alors des diagrammes spatio-temporels comme celui de la figure 4(c), obtenu à partir de celui de la figure 3(a), où le motif devient uniforme en  $z$ . Une moyenne en espace, nous a ensuite permis d'en déduire des séries temporelles comme celle de la figure 5(a) dont l'enveloppe  $A(t)$  tracée en rouge peut être convenablement ajustée par une équation de la forme :  $A(t) = A_{max} \cdot \text{sech}[(t - t_{max})/T_{mod}]$  où  $A_{max}$  est le maximum de l'amplitude d'un paquet,  $t_{max}$  l'instant auquel se trouve ce maximum et  $T_{mod}$  la période de modulation correspondant à la durée d'un paquet. Il s'agit d'une solution de l'équation de Schrödinger non linéaire appartenant à la famille des solitons enveloppe.



(a) Moyenne axiale de l'amplitude de l'intensité lumineuse



(b) Variation du carré de l'amplitude maximale moyenne

**Fig. 5.** Moyenne axiale de l'amplitude de l'intensité lumineuse obtenue à partir du diagramme spatio-temporel  $(z, t')$  de la figure 4c pour  $Gr = 2405$  et  $Ta = 11,3$  (a). Variation du carré de l'amplitude maximale moyenne des paquets en fonction du nombre de Grashof (b).

Nous avons répété ces opérations pour tous les diagrammes spatio-temporels obtenus au seuil de la première instabilité quand une modulation est observée. Le même ajustement a pu être appliqué à l'enveloppe des séries temporelles ainsi obtenues. Le carré du maximum de l'amplitude moyenne des paquets de chaque série est représenté en fonction du nombre de Grashof sur la figure 5(b).  $A_{max}^2$  augmente linéairement avec  $Gr$ . Cela suggère une bifurcation supercritique vers l'onde modulée lorsqu'on

augmente le nombre de Grashof. L'extrapolation de la droite d'ajustement de  $A_{max}^2$  en fonction de  $Gr$  donne un seuil d'apparition de la spirale modulée pour  $Gr = 751$ . Cette valeur correspond au point où le nombre de Taylor critique devient constant dans le diagramme de stabilité (Fig. 2).

## 4 Conclusion

Nous avons étudié l'écoulement lié au couplage de la force centrifuge et des effets thermiques dans un système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température. Dans ce cas, l'écoulement de base composé d'une large cellule convective et de l'écoulement de Couette circulaire, est remplacé par une spirale modulée présente sur toute la longueur du système et tournant à la vitesse angulaire moyenne de l'écoulement, lorsqu'il est déstabilisé. Une nouvelle technique de mesure non-intrusive de la température et de la vitesse basée sur l'utilisation de cristaux liquides thermochromiques, nous a permis de révéler la nature ondulatoire de cette spirale. Nous avons montré que ce motif peut être décrit comme un ensemble de paquets dont nous avons étudié l'enveloppe. Il apparaît alors que celle-ci peut être modélisée sous la forme d'une solution d'onde solitaire de l'équation nonlinéaire de Schrödinger. La variation linéaire du carré de l'amplitude maximale moyenne des paquets avec le nombre de Grashof, nous a permis de montrer que ce motif d'onde modulée apparaît via une bifurcation supercritique quand on augmente le nombre de Grashof au dessus d'une valeur conforme à ce que laissait supposer la forme du diagramme de stabilité.

## Références

1. G. I. TAYLOR Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders *Philosophical Transaction of the Royal Society of London A*, 223-289 (1923).
2. R. TAGG, The Couette-Taylor problem, *Nonlinear Science Today* **4** (3), 1-25, 1994.
3. J.R. Donnelly Taylor Couette flow : the early days, *Physics today*, **44** (11), 32-39 (1991).
4. H. A. SNYDER & S. K. F. KARLSSON Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient, *Physics of Fluids*, **7**, 1696-1706 (1964).
5. K. S. BALL & B. FAROUK Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow with buoyancy effects *Journal of Fluid Mechanics*, **197**, 479-501 (1988).
6. M. ALI & P.D. WEIDMAN, On the stability of circular Couette flow with radial heating *Journal of Fluid Mechanics* **220**, 53-84 (1990).
7. J. Y. KUO & K. S. BALL, Taylor-Couette flow with buoyancy : Onset of spiral flow, *Physics of Fluids*, **9**, 2872-2884 (1997).
8. V. LEPILLER, A. GOHARZADEH, A. PRIGENT & I. MUTABAZI, Weak temperature gradient effect on the stability of the circular Couette flow *European Physics Journal B*, **61**, 479-501 (2008).
9. N. AKINO, T. KUNUGI, M. UEDA & A. KUROSAWA, Liquid crystal thermometry based on automatic colour evaluation and applications to measure turbulent heat transfer, in *Transport phenomena in turbulent flows* (New York : Hemisphere), pp. 807-827 (1989).
10. J. L. HAY, D. K. HOLLINGSWORTH, Calibration of micro-encapsulated liquid crystals using hue angle and a dimensionless temperature, *Experimental Thermal and Fluid Science*, **18**, 251-257 (1998).

# Une vague auto-similaire pour l'atomisation

Jérôme Hoepffner<sup>1,2</sup>, Ralf Blumenthal<sup>1,2</sup> & Stéphane Zaleski<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> UPMC, Univ. Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond D'Alembert, F-75005 Paris, France.

<sup>2</sup> CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond D'Alembert, F-75005 Paris, France.

jerome.hoepffner@upmc.fr

**Résumé.** Nous étudions la déstabilisation hydrodynamique d'une interface entre un flux gazeux et une masse liquide. Cette situation d'écoulement diphasique est un cas d'étude pour l'atomisation : comment un corps liquide peut se transformer en un nuage de gouttelettes. Nous reportons comment une perturbation initialement localisée, tend après un transitoire rapide, vers un comportement auto-semblable.

**Abstract.** A perturbation is induced at the sheared interface between a stream of liquid and a stream of gas. This initial perturbation then evolves as the response of inertia, viscosity and interfacial tension. The initial condition we have considered is localized in space. We observe as a result a single Kelvin–Helmholtz wave, tending to a self-similar regime after a short transient. We describe the anatomy of this well-defined entity as the physical parameters are varied, especially the density ratio of the two phases. This study is aimed at identifying a possible recurrent agent in atomization processes.

## 1 Introduction

L'atomisation est l'ensemble des processus par lesquels un corps liquide peut être transformé en gouttelettes ; c'est une étape essentielle lorsque l'on veut favoriser ce qui se passe à l'interface liquide/gaz, par exemple lors de la combustion de carburant liquide. C'est par le biais d'instabilités que se produit le plus souvent l'atomisation : le filet d'eau qui coule du robinet devient gouttes par une instabilité d'étranglement due à la tension de surface : Rayleigh–Plateau. A plus grande vitesse, des instabilités dynamiques vont jouer le rôle déterminant, notamment l'instabilité de Kelvin–Helmholtz due à la zone de cisaillement entre le jet liquide et son gaz environnant [1].

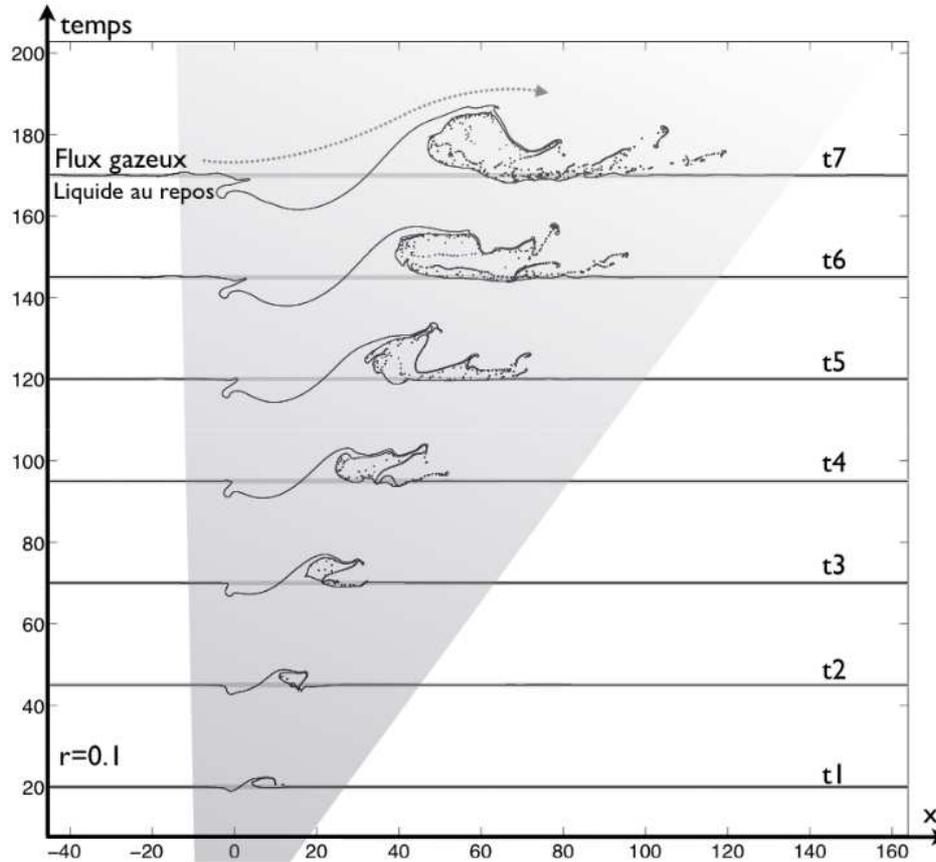
Dans le cas dynamique, cette instabilité primaire ne suffit pas à créer des gouttes, il faudra une succession de mécanismes pour passer des ondes d'interface en vagues, qui se déstabiliseront selon la direction transverse pour donner naissance à des ligaments étirés. Ces ligaments seront à leur tour la proie de mécanismes de dislocation via entre autres l'instabilité de tension de surface.

La génération des vagues d'interfaces pour l'atomisation est traditionnellement abordée avec les outils du linéaire, en supposant des perturbations d'amplitude infinitésimale. Ici, nous cherchons à déterminer s'il est possible de mettre en évidence des comportements non linéaires singuliers — caractéristiques, représentatifs — qui nous permettront par la suite de mettre en lumière les étapes intermédiaires de la génération de gouttelettes.

Nous nous plaçons dans le cadre idéal d'une couche de mélange diphasique, caractérisée par sa tension de surface, le rapport des densités et la vitesse relative des deux phases, ainsi que l'épaisseur de la couche de cisaillement. Nous simulons pour les méthodes numériques) l'évolution dans le temps d'une impulsion initiale localisée qui donnera rapidement naissance à une vague non linéaire. La figure 1 présente une illustration des simulation que nous avons réalisées. Nous représentons la position de l'interface liquide/gaz évoluant dans le temps, sous la forme d'un diagramme spatio-temporel.

## 2 Arguments pour un comportement auto-semblable

L'observation montre qu'au terme d'un court transitoire, notre vague adopte un comportement auto-semblable très simple. L'analyse dimensionnelle montre que plus la vague sera grande, plus les effets de



**Fig. 1.** Illustration de la croissance de la vague, sous la forme d'un diagramme spatio-temporel. Ici la densité du gaz est un dixième de la densité du liquide.

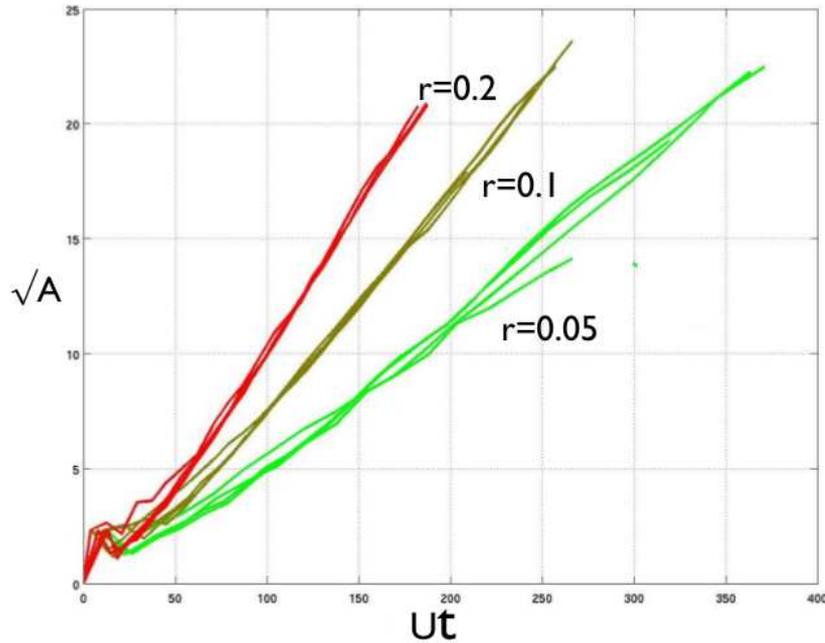
viscosité, tension de surface et d'épaisseur de couche de mélange seront marginaux. La vague voit ainsi son évolution intrinsèquement liée à la croissance de la seule échelle spatiale restante : la vitesse relative des deux phases  $U$  fois le temps  $t$ .

Pour confirmer cette analyse, nous devons mesurer dans nos simulations une longueur caractéristique de la vague qui serait peu affectée par les instationnarités observées sur la figure 1. La racine carrée de l'aire de gaz attirée sous la position au repos de l'interface s'est avérée une bonne mesure ; nous la notons  $\sqrt{A}$ . L'évolution dans le temps de  $\sqrt{A}$  est représentée sur la figure 2. On observe comme attendu une croissance linéaire, et on note que la vitesse de croissance augmente avec le rapport de densité  $r$ .

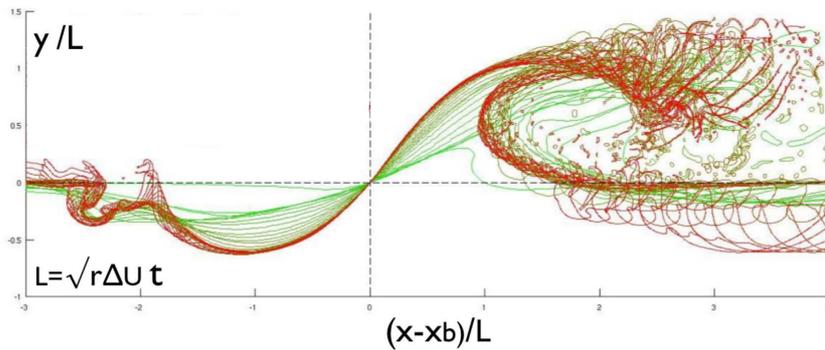
La figure 3 est une seconde confirmation du comportement auto-semblable. Nous avons représenté l'interface mise à l'échelle. Après le transitoire initial, l'interface vient adopter sa forme définitive, perturbée cependant par de violentes agitations de sa langue et par des lâchés de gouttes.

### 3 Effet du rapport de densité

Nous pouvons maintenant nous intéresser à l'impact du rapport de densité des deux phases. Ce sera l'effet physique déterminant quant à la structure de la solution non linéaire. Le schéma explicatif est représenté sur la figure 4. La vague est considérée comme un obstacle qui vient dévier et accélérer le flux gazeux. La chute de pression résultante est proportionnelle à  $\rho_{gaz}U^2$ . La dépression ainsi générée vient aspirer le liquide vers le haut à vitesse  $v$ . Ici, l'écoulement induit est d'ordre  $\rho_{liq}v^2$ . Si nous injectons maintenant la croissance linéaire des mensuration de la vague — son aire augmentant en proportion du



**Fig. 2.** Evolution de la taille mesurée de la vague  $\sqrt{A}$  en fonction de  $Ut$  pour différents rapports de densités.



**Fig. 3.** L'évolution de la vague pour  $r = 0.1$ , mise à l'échelle similaire. Du temps initial vers les temps finaux des tons de gris du clair au foncé.

flux entrant  $Lv$  — on obtient une loi en racine carrée du rapport de densité

$$L \propto \sqrt{\rho_{\text{gaz}}/\rho_{\text{liq}}}Ut.$$

Plus le rapport des densité est petit (moins le gaz est porteur d'énergie cinétique...), plus la croissance est lente. Une évaluation cette loi est proposée figure 5, qui présente la variation de  $\sqrt{A}$  mesurée, rapportée au facteur  $\sqrt{r}Ut$ .

#### 4 La forme des vagues et leur origine virtuelle

Nous étudions maintenant comment la forme de la vague change avec le rapport de densité. Nous avons défini la longueur  $\sqrt{A}$  qui est une première mesure de l'évolution de cette vague. Après un transitoire initial, cette longueur croît linéairement dans le temps. En extrapolant cette croissance linéaire vers

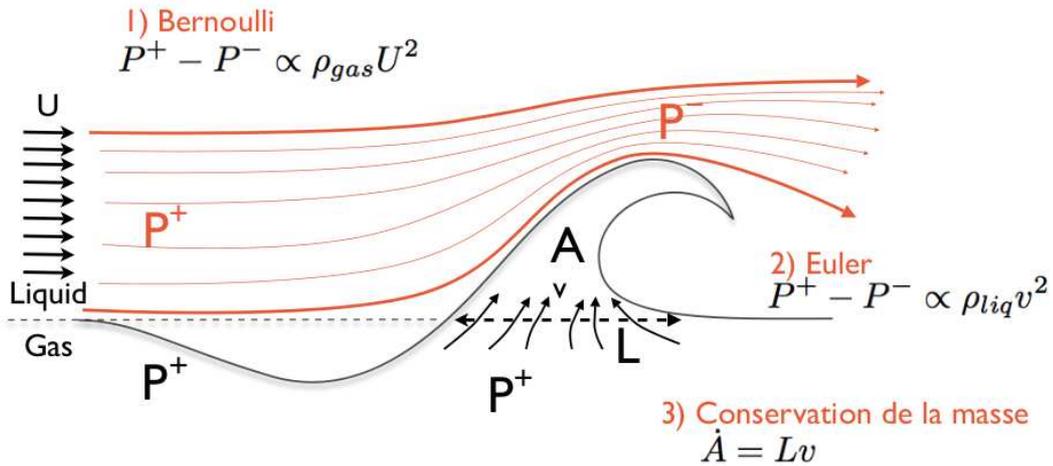


Fig. 4. Schéma pour la prise en compte du rapport de densité dans la loi auto-semblable.

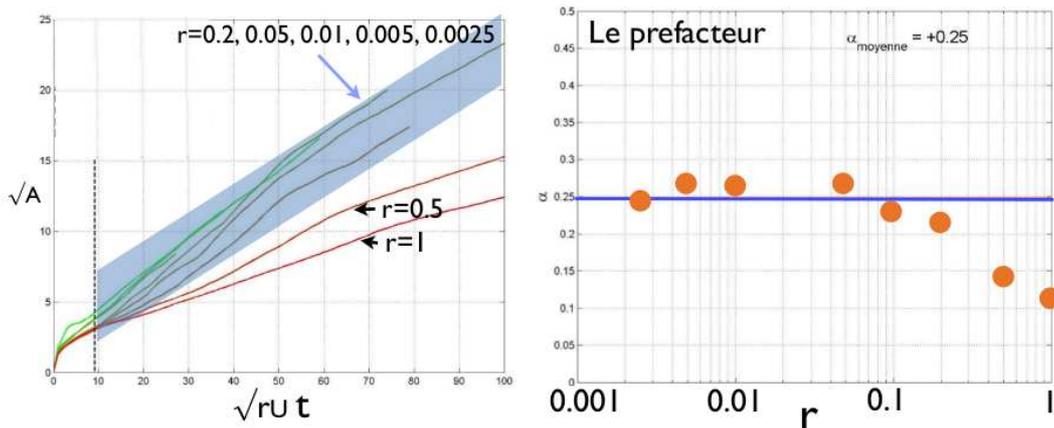


Fig. 5. Prise en compte de la dépendance en densité pour la loi de similitude.

les temps initiaux, nous pouvons déduire un temps  $t_0$  qui correspond à la naissance de la forme auto-semblable. C'est l'origine temporelle virtuelle de notre vague. Pour localiser également une origine spatiale, il nous faut extraire une seconde mesure de notre simulation. Pour ceci, nous pouvons mettre à profit l'observation que la zone centrale de la vague est peu sujette aux fluctuations parasites dues au lâcher de gouttes en aval. Nous pouvons donc mesurer la position  $x_d$  où l'interface traverse la ligne horizontale  $y = 0$  qui correspond à la position de l'interface non perturbée. Cette valeur également, après un transitoire initial, tend vers une progression temporelle linéaire. Extrapolant cette loi vers l'origine temporelle  $t_0$ , nous déduisons l'origine spatiale virtuelle  $x_0$  de notre vague.

La figure 6 représente un diagramme spatio-temporel de l'évolution d'une vague pour quatre valeurs du rapport de densité  $r$ . L'origine virtuelle est indiquée par un cercle. Ce lieu/temps de naissance est l'origine du cône de vie de notre vague, inscrit entre une ligne verticale matérialisant le mouvement d'une particule de liquide (vitesse nulle), et une ligne oblique matérialisant le mouvement d'une particule de gaz (vitesse  $U = 1$ ). Cette représentation met en évidence la loi d'échelle de notre vague auto-semblable, étirée uniformément entre les deux milieux en mouvement relatif dont elle tire son énergie.

Pour deux fluides de même densité, la forme est symétrique, et occupe le centre du cône : la vague grandit en avançant à la vitesse moyenne  $U = 0.5$ . Il faut noter pour les petits  $r$  — les petites densités de

gaz — que la vague croît lentement, confinée proche de la vitesse du liquide. Cette tendance est décrite par la loi de croissance  $\sqrt{A} = \sqrt{rUt}$ . En effet, la vague ne se *propage* pas comme une onde, elle *croît* : sa queue maintenue en arrière par le liquide et sa tête poussée/tirée en avant par le gaz. Si l'action du gaz est affaiblie par sa faible densité — c'est l'effet quantifié par le facteur  $\sqrt{r}$  —, alors la vague se laisse devancer par les particules rapides de gaz.

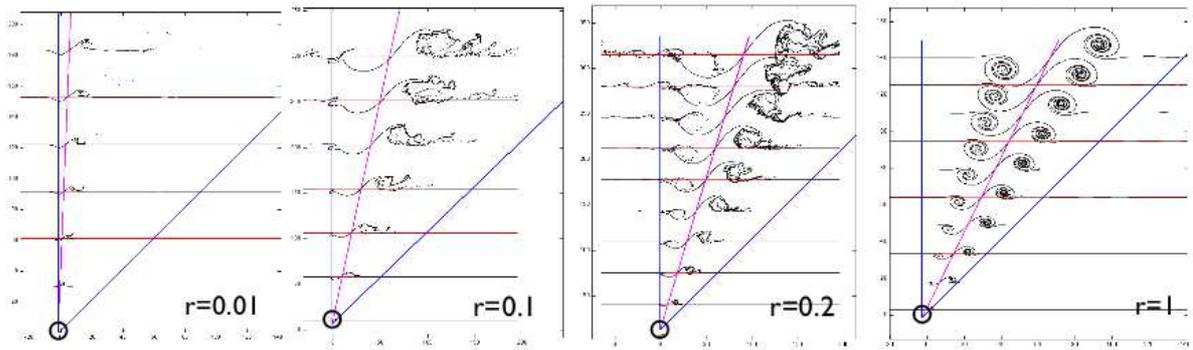
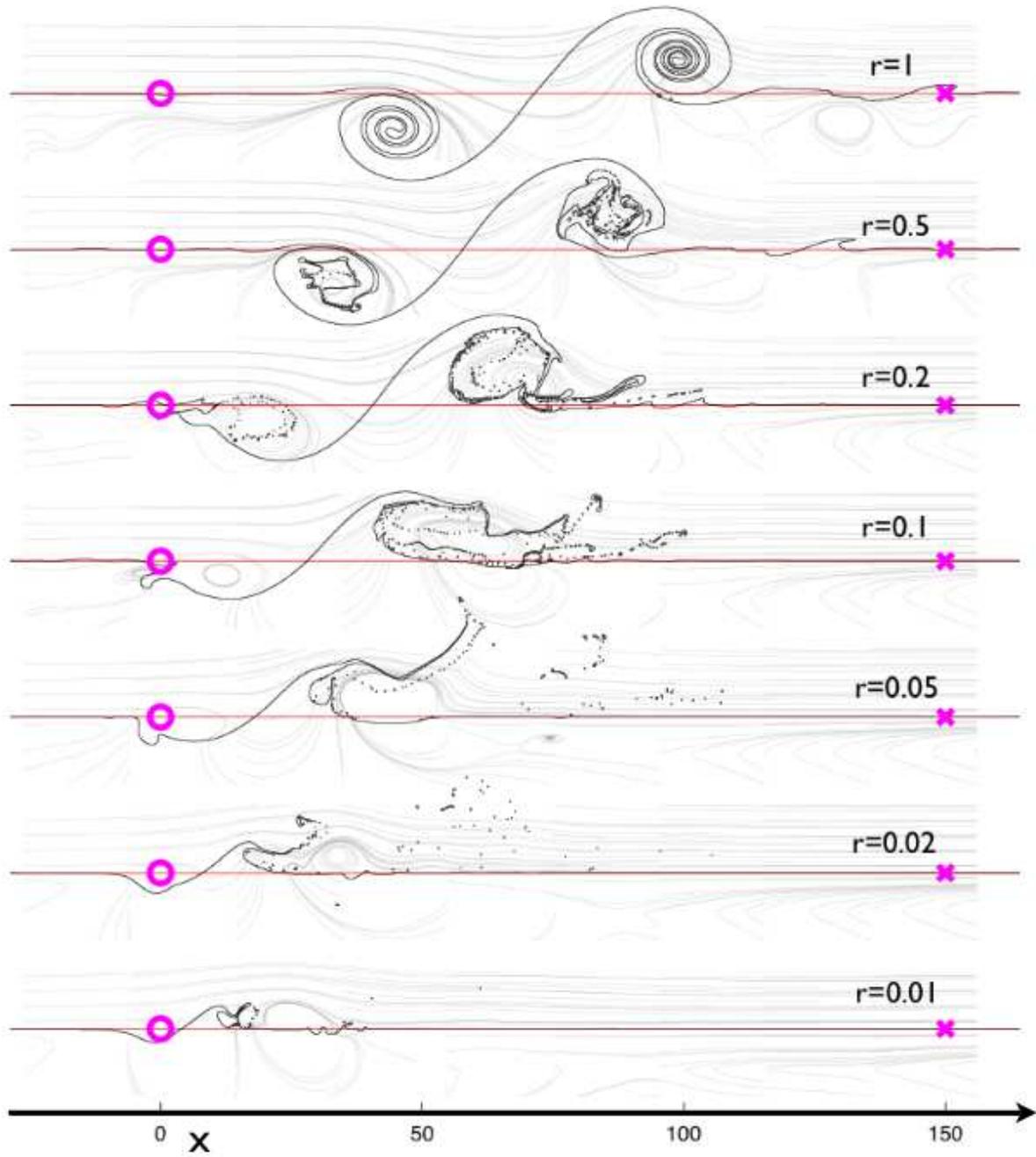


Fig. 6. L'origine virtuelle et le cône de vie pour quatre vagues.

La figure 7 compare pour  $t = 100$  les anatomies des vagues obtenues en variant le rapport de densité. Les points de la forme auto-similaire fixes par rapport au liquide et au gaz sont mis en évidence par le cercle et la croix. On observe ici clairement la lenteur de la croissance prépondérantes vagues à petit  $r$ . Cette figure représente aussi les lignes de courant instantanées du champs de vitesses. Pour deux fluide de même densité, la structure est dominée par deux tourbillons corotatifs qui se manifestent en embobinant le liquide pour l'un, en aval, et le gaz pour l'autre en amont. Mis à part ce couple symétrique, l'écoulement est peu perturbé. A mesure que le rapport de densité se réduit, le tourbillon responsable de l'enroulement liquide devient prépondérant, et on observe en amont une bulle close de recirculation qui n'est plus capable de percer l'interface pour l'enrouler. Pour les petits  $r$ , la vague ralentit pour adopter une vitesse d'avancée proche de celle du liquide. Cette tendance est responsable d'une mutation de l'impact dynamique de la vague : elle devient un obstacle pour la gaz rapide. Le gaz, forcé de contourner la masse liquide, s'enroule en aval sous forme de tourbillons, lâchés périodiquement. Chacun de ces événements violents vient arracher à la vague une portion de sa langue, qui se retrouve soufflée en un nuage de gouttelettes. Deux de ces nuages sont visibles sur la figure pour  $r = 0.02$  et  $r = 0.05$ .

## Références

1. P. G. DRAZIN & W. H. REID, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press (2004).
2. P. MARMOTTANT & E. VILLERMAUX, On spray formation, *Journal of Fluid Mechanics*, **498**, 73-111 (2004).
3. D. FUSTER, A. BAGUÉ, T. BOECK, L. LE MOYNE, A. LÉBOISSETIER, S. POPINET, P. RAY, R. SCARDOVELLI & S. ZALESKI, Simulation of primary atomization with an octree adaptive mesh refinement and VOF method, *International Journal of Multiphase Flow*, **35**, 550-565 (2009).



**Fig. 7.** Comparaisons des formes de vagues, prises à  $t = 100$ , et lignes de courant instantanées. Les points de la forme fixes par rapport au liquide et au gaz sont localisés par le cercle et la croix.

# Adhésion d'une plaque mince sur une sphère par capillarité

Jérémy Hure & Benoît Roman & José Bico

PMMH, CNRS UMR 7636, Univ. Paris 6 & Paris 7, ESPCI ParisTech, 10, rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05  
jeremy.hure@espci.fr

**Résumé.** Le collage d'un film mince sur une sphère par capillarité conduit à des morphologies complexes, allant d'un contact total à de multiples branches de contact séparées par des zones décollées. L'un des facteurs essentiels expliquant ces motifs est le *Theorema Egregium* de Gauss dont la conséquence est l'étirement nécessaire à une plaque pour être en contact étendu avec une sphère. Notre étude s'intéresse aux propriétés locales des motifs comme la taille caractéristique des zones de contact ou globales comme la forme générale de celles-ci, expérimentalement et numériquement.

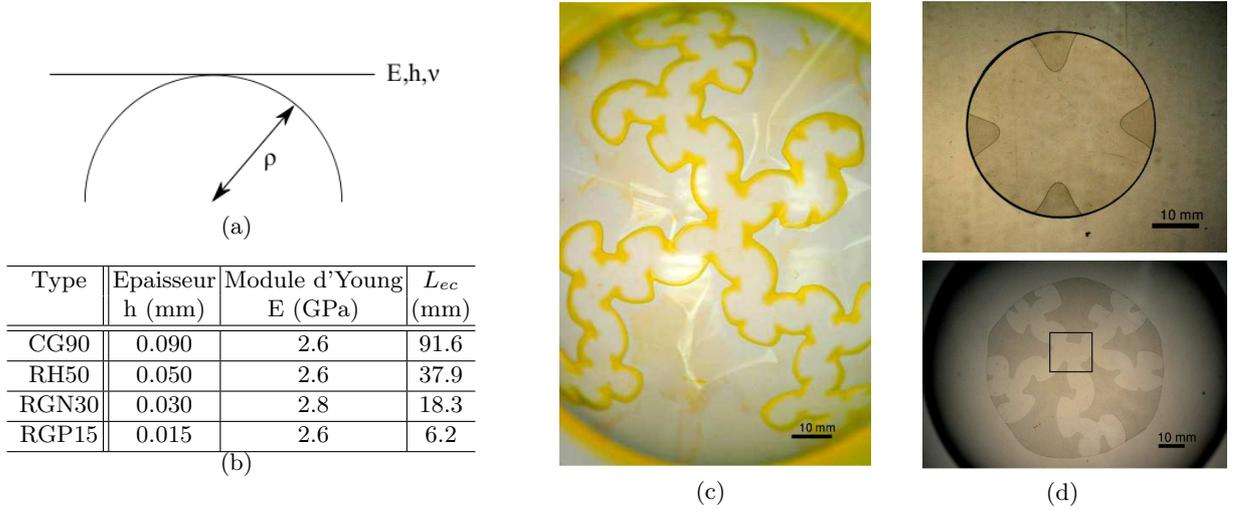
**Abstract.** The complex morphology resulting from the adhesion of a thin plate on a sphere by capillarity ranges from complete contact to branching patterns. One of the key factors explaining these morphologies comes from Gauss' *Theorema Egregium* whose consequence is the unavoidable stretching needed to map a plate on a sphere. We study both experimentally and numerically the characteristics of the developed contact patterns such as the typical size of the contact zone as well as the general shape of the pattern.

## 1 Introduction

Différents types de projections ont été développés par les cartographes afin de réaliser des planisphères, dont l'une des plus célèbres est celle que l'on doit à Gerardus Mercator [1]. Cette dernière est conforme, conservant les angles mais modifiant les distances. En fait, la projection d'une sphère sur un plan ne peut être isométrique, i.e. conserver à la fois les angles et les distances. Cette propriété à laquelle on doit l'aspect des planisphères découle du *Theorema Egregium* énoncé par Gauss qui stipule que le produit des courbures principales - ou courbure de Gauss - d'une surface est invariant par isométrie locale [2]. Ainsi, transformer une sphère, de courbure de Gauss constante  $\rho^{-2}$ , en un plan, de courbure de Gauss nulle, n'est possible qu'en modifiant les distances entre les points de la surface. Cette propriété géométrique contraint de manière très importante les déformations des surfaces élastiques - comme les plaques et les coques - puisqu'à une variation de courbure de Gauss est donc associée une énergie d'extension. De plus, cette dernière varie linéairement avec l'épaisseur alors que l'énergie de courbure - due aux déformations opposées de part et d'autre de la surface moyenne - varie comme le cube de l'épaisseur. Ainsi, pour des films élastiques minces, les déformations de flexion, quand elles sont possibles, sont privilégiées par les surfaces élastiques [3]. De ces deux propriétés - géométrique et mécanique - découlent les propriétés des plaques minces telles que la focalisation de l'énergie d'extension au niveau de points ou de lignes que l'on observe par exemple dans le papier froissé, et en dehors desquels la surface est isométrique à un plan [4]. Dans cette étude, on s'intéresse à la situation réciproque de celle des cartographes et qui consiste à enrober une sphère par une plaque.

## 2 Dispositif expérimental

L'expérience consiste à déposer un film mince sur une calotte sphérique préalablement recouverte de liquide (Fig. 1a). Les caractéristiques mécaniques des films utilisés sont indiquées dans le tableau 1b. Le liquide est de l'éthanol, de tension superficielle  $\gamma = 22.4 \text{ mN.m}^{-1}$ , en situation de mouillage total avec les films et les sphères. En fonction des paramètres du système, on observe des morphologies complexes de zones collées et décollées comme le montrent les figures 1c, d.



**Fig. 1.** (a) Dispositif expérimental (b) Caractéristiques des films de polypropylène (Innovia Films), avec  $L_{ec} = \sqrt{B/\gamma}$  la longueur élastocapillaire [5], [6],  $B = [Eh^3]/[12(1-\nu^2)]$  le module de flexion. Le coefficient de Poisson  $\nu$  est pris égal à 0.4. La valeur du module d'Young correspond à une valeur moyenne : l'anisotropie peut atteindre 10% pour le film le plus mince. Le rayon des calottes sphériques  $\rho$  utilisées est dans la gamme [25mm, 500mm]. (c) Cas  $\rho = 60\text{mm}$ , RGP15, éthanol coloré. (d) Haut :  $\rho = 197\text{mm}$ , RH50 ; Bas :  $\rho = 60\text{mm}$ , RGP15 ; Les zones claires correspondent au contact entre le film et la sphère, les zones plus foncées aux endroits où le film est décollé.

L'utilisation de colorant (Fig. 1c) permet de distinguer le ménisque délimitant la zone de contact entre la plaque et la sphère. Le volume présent entre les deux dans cette zone est quasi-nul d'où l'absence de coloration. Entre les branches de contact se trouvent des parties décollées. Dans la suite, afin de s'affranchir du paramètre de volume de liquide, on laisse l'éthanol s'évaporer jusqu'à disparition du ménisque. Dans cette limite  $V \rightarrow 0$ , la présence de liquide se réduit à considérer une énergie liée au contact entre le film et la sphère. Dans cette étude, on s'intéresse principalement aux caractéristiques des motifs développés, comme sur les figures 1c, d bas.

### 3 Caractéristiques des motifs observés

#### 3.1 Zone de contact

Considérons l'adhésion par capillarité d'une plaque de surface  $S$ , d'épaisseur  $h$ , de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$  sur une sphère de rayon  $\rho$ . Dans un premier temps, on se restreint au cas d'une plaque de surface infinitésimale, ce qui permet de négliger l'énergie d'extension devant l'énergie de courbure d'ordre  $E_c \sim (Eh^3/\rho^2)S$  [7]. L'énergie due à la tension de surface par le contact vaut  $E_a \sim \gamma S$ <sup>1</sup>. L'adhésion complète de la plaque n'est possible que si  $E_a > E_c$  ce qui s'écrit  $\rho > L_{ec}$  où  $L_{ec}$  est la longueur élastocapillaire. Si le rayon de la sphère est plus petit que la longueur élastocapillaire, l'adhésion complète par capillarité d'une plaque, même de surface infinitésimale, n'est pas possible. Pour des rayons plus grands, l'énergie gagnée par le système lors de l'adhésion de la plaque sur la sphère est d'autant plus grande que la surface de contact est grande. Ce qui va limiter la taille du contact est donc l'énergie d'extension. Dans le cas de l'adhésion complète d'une plaque circulaire de rayon  $R$ , en négligeant les frottements, Majidi *et al* ont montré que le rayon maximal est donné par la relation [8] :

$$R_{max} = \max \left( \left[ \frac{256\gamma\rho^4}{Eh} - \frac{32h^2\rho^2}{3(1-\nu)} \right], 0 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1)$$

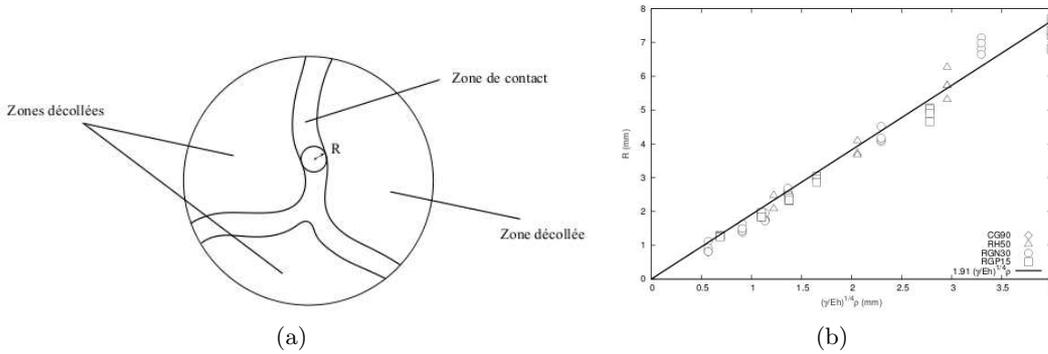
<sup>1</sup> à cause du mouillage total : séparer la plaque de la sphère crée deux interfaces air/liquide

On peut également s'intéresser au contact entre une plaque rectangulaire dont la largeur  $2a$  est très petite devant la longueur. Les équations de Föppl-von Kármán s'écrivent [9] :  $B\Delta^2 w = q + 2h[\phi, w]$  et  $\Delta^2 \phi = -E[w, w]$  en notant  $w$  le déplacement transverse,  $q$  le chargement transverse,  $\phi$  la fonction d'Airy et  $[f, g] = (1/2)f_{,xx}g_{,yy} + (1/2)f_{,yy}g_{,xx} - f_{,xy}g_{,xy}$  en coordonnées cartésiennes. L'axe ( $0x$ ) est orienté selon la longueur de la plaque. Du fait de l'invariance en  $x$  des contraintes, la fonction d'Airy s'écrit, à une fonction affine près,  $\phi(x, y) = f(y) + \alpha xy + \beta x^2$ . Les contraintes dans le plan moyen s'en déduisent en utilisant les conditions aux limites  $\sigma_{yy}(\pm a) = 0$  et  $\langle \sigma_{xx} \rangle_y = 0^2$  et s'écrivent :  $\sigma_{xx} = [E/(6\rho^2)](a^2 - 3y^2)$ ,  $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$ . Par la loi de Hooke en contraintes planes, on en déduit l'énergie élastique par unité de longueur de la plaque :  $E_{el} = [(Eh^3a)/(6\rho^2(1-\nu))] + [(Eha^5)/(45\rho^4)]$  où les deux termes correspondent respectivement à l'énergie de courbure et à l'énergie d'extension. L'énergie totale du système vaut  $E_t = E_{el} - 4\gamma a$ . La largeur maximale est définie par la relation  $dE_t/da = dE_{el}/da - 4\gamma = 0$  :

$$a_{max} = \max \left( \left[ \frac{36\gamma\rho^4}{Eh} - \frac{3h^2\rho^2}{2(1+\nu)} \right], 0 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

Ces équations ne sont valides que dans le cas d'une plaque complètement en contact avec la sphère. Néanmoins, dans le cas  $\rho \gg L_{ec}$ , elles montrent la loi d'échelle reliant la taille de la zone de contact avec les paramètres du système, i.e.  $a \sim (\gamma/Eh)^{1/4}\rho$ . Cette loi peut se retrouver de la manière suivante : la déformation nécessaire pour coller une plaque circulaire de rayon  $R$  sur une sphère est d'ordre  $(R/\rho)^2$ <sup>3</sup>, ce qui donne une énergie d'extension d'ordre  $EhR^6/\rho^4$  à comparer à une énergie d'adhésion d'ordre  $\gamma R^2$ .

On mesure la taille de la zone de contact sur les motifs développés (cf Fig. 1c,d bas) que l'on définit comme le rayon du plus grand disque que l'on puisse inscrire à l'intérieur de celle-ci (Fig. 2a).



**Fig. 2.** (a) Mesure de la taille de la zone de contact sur les motifs développés définie comme étant le rayon du plus grand cercle inscrit dans celle-ci. (b) Taille de la zone de contact en fonction des paramètres du système.

Toutes les mesures correspondent au cas  $\rho \gg L_{ec}$ . Les résultats expérimentaux (Fig. 2b) vérifient la loi d'échelle prédite dans le paragraphe précédent. Les variations sont attribuées notamment à l'anisotropie des films. Ce résultat est particulièrement frappant puisqu'il semble indiquer que, dans ce régime, l'énergie dans les zones décollées est négligeable. Le préfacteur obtenu par l'ajustement des données vaut 1.91, proche de la valeur correspondant à une bande complètement en contact de 2.45.

Dans le cas d'un volume de liquide non nul, on retrouve des résultats proches de ceux précédents, indiquant que l'influence du ménisque semble être négligeable dans la taille de la zone de contact.

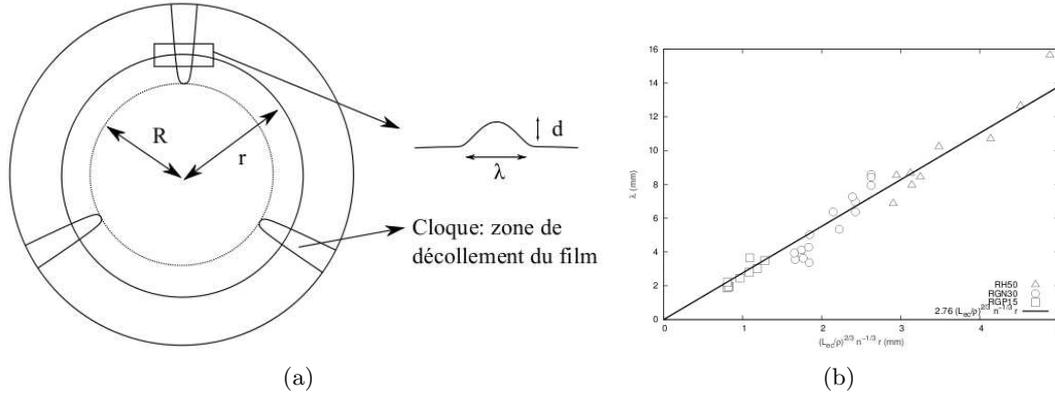
<sup>2</sup> Aucune force extérieure n'est appliquée dans cette direction.

<sup>3</sup> ce qui correspond à l'ordre de grandeur de la déformation radiale si on considère que le périmètre ne change pas de longueur, ou inversement la déformation orthoradiale à rayon constant.

### 3.2 Décollements

Afin d'étudier la forme générale des zones collées et décollées dans les cas complexes de présence de multiples branches de contact, on s'intéresse au cas où l'on observe une zone de contact centrale avec des cloques de décollement autour (voir Fig. 1d haut). Cette situation peut être vue comme un agrandissement de la zone centrale des cas plus complexes (rectangle dans Fig. 1d bas). On s'intéresse dans un premier temps à la forme de ces cloques. Supposons qu'elle résulte d'un équilibre entre adhésion et énergie de courbure, comme pour des cloques rectilignes [10]. Pour une plaque circulaire complètement en contact sur une sphère, la variation de longueur  $\Delta L$  d'un cercle de rayon  $r$  est d'ordre  $\Delta L \sim r^3/\rho^2$ . L'apparition des cloques permet de relâcher cette déformation d'où  $\Delta L \sim nd^2/\lambda$  avec  $n$  le nombre de cloques,  $d$  la hauteur et  $\lambda$  la largeur des cloques. L'énergie d'adhésion par unité de longueur  $\gamma\lambda$  s'équilibre avec l'énergie de courbure  $Eh^3d^2/\lambda^3$ , ce qui donne :

$$\lambda \sim \frac{L_{ec}^{2/3}}{\rho^{2/3}n^{1/3}}r \quad (3)$$



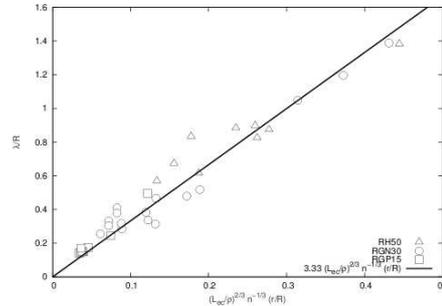
**Fig. 3.** (a) Motif simple de décollement constitué de cloques équiréparties de faibles amplitudes (Fig. 1d haut). (b) Largeur des cloques en fonction des paramètres du système. La valeur de  $n$  utilisée est celle mesurée expérimentalement.

Le graphique 3b valide l'hypothèse selon laquelle la forme des cloques résulte d'un équilibre entre adhésion et énergie de courbure. L'énergie d'extension à l'intérieur des cloques, pour ce type de cloques de faibles amplitudes, qui existe puisque la forme décrite n'est pas développable, est donc négligeable. On peut maintenant s'intéresser au nombre de cloques. On considère l'équilibre du disque de rayon  $r$ . L'énergie de courbure et de surface associées aux cloques sont respectivement d'ordre  $n(Eh^3)(d^2/\lambda^4)\lambda(r - R)$  et  $n\gamma\lambda(r - R)$  en notant  $R$  la taille du disque de contact central. Pour estimer l'énergie d'extension, qui se trouve principalement au centre, on considère que la déformation d'ordre  $\epsilon = R^2/\rho^2$  est également répartie en  $n$  zones à l'intérieur de la zone centrale du fait de la présence des cloques, d'où une énergie d'ordre  $nEh(R/n)^2\epsilon^2$ . Equilibrer ces trois énergies en considérant que les cloques relâchent toute la déformation orthoradiale  $\Delta L \sim r^3/\rho^2 \sim nd^2/\lambda$  conduit à :

$$n \sim \left(\frac{Eh}{\gamma}\right)^{3/5} \frac{R^{18/5}}{r^{3/5}(r - R)^{3/5}L_{ec}^{2/5}\rho^2} \quad (4)$$

$$\lambda \sim \frac{L_{ec}^{2/3}}{\rho^{2/3}n^{1/3}}r \quad (5)$$

La figure 4 montre un bon accord entre les équations 4, 5 et les résultats expérimentaux. Cela étant, il est difficile d'obtenir une plage de nombre de cloques suffisamment large pour infirmer ou confirmer de manière plus significative les prédictions.



**Fig. 4.** Largeur des cloques en fonction des paramètres du système. La valeur de  $n$  utilisée est celle provenant de l'équation 4.

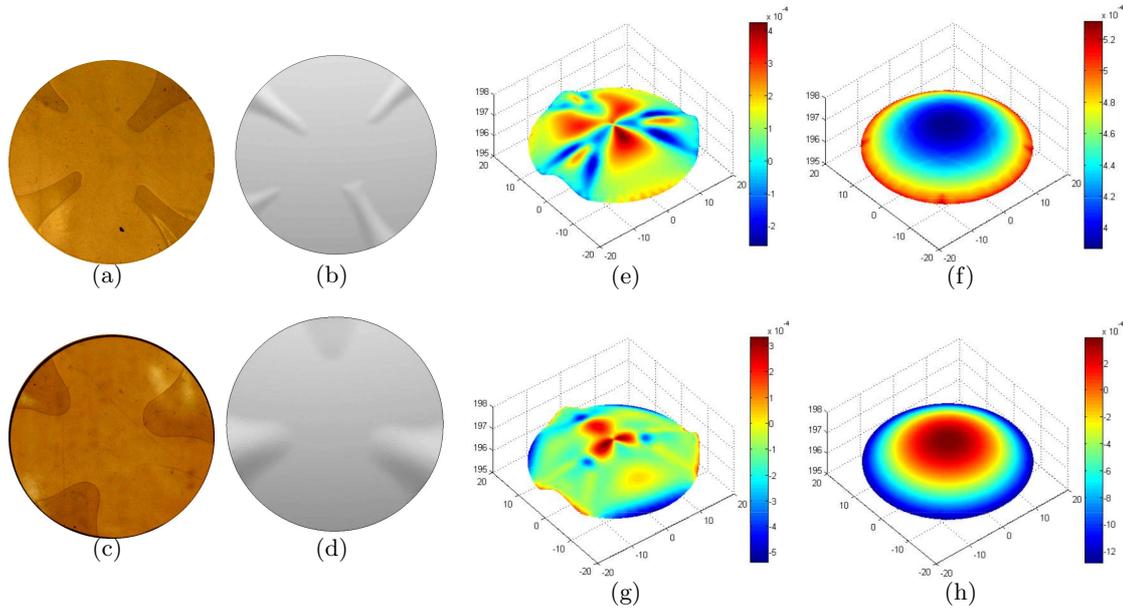
L'étude de ces motifs simples de décollement permet de comprendre globalement les motifs dans les cas développés (Fig. 1b). Le nombre de cloques apparaissant autour d'une zone de contact centrale va fixer le nombre de branches de contact, dont on a vu dans le paragraphe précédent que la taille caractéristique dépend des paramètres du système. A cela s'ajoute le fait que les branches de contact ne peuvent délimiter une zone décollée fermée, puisque d'après le théorème de Gauss-Bonnet [2], cela nécessiterait de changer la courbure de Gauss dans la partie décollée, et donc coûterait au système de l'énergie d'extension sans gain d'énergie d'adhésion.

## 4 Simulations numériques

Les simulations numériques ont été réalisées avec le logiciel Surface Evolver [11], principalement utilisé pour l'étude des surfaces liquides, mais également pour simuler des tiges et coques élastiques [12], [5]. L'énergie d'adhésion est modélisée par un potentiel énergétique décroissant exponentiellement sur une longueur caractéristique lorsque la plaque s'éloigne de la sphère. La minimisation de l'énergie utilise alternativement les algorithmes de gradient et de gradient conjugué en introduisant également de la stochasticité. Enfin, on vérifie que les résultats ne dépendent pas du maillage ni du paramètre de décroissance exponentielle de l'énergie d'adhésion. Les simulations permettent de retrouver les motifs expérimentaux (Fig.5 a,b,c,d). Les comparaisons des déformations radiales et orthoradiales entre la situation où toute la plaque serait en contact et la solution avec des cloques montrent que les cloques permettent de relâcher en grande partie la déformation orthoradiale. De plus, la déformation radiale est non nulle dans les cloques. Cela étant, les simulations montrent également que l'énergie d'extension est négligeable devant l'énergie de courbure dans celles-ci. Ces remarques valident les hypothèses faites dans le paragraphe précédent qui prédit la forme et le nombre de cloques dans les cas simples de cloques de faibles amplitudes.

## 5 Conclusion

L'adhésion d'une plaque mince sur une sphère par capillarité présente des motifs complexes de zones de contact et décollées. La taille caractéristique du contact, dans le cas où celui-ci est possible, est donnée par un équilibre entre adhésion et extension de la plaque. Pour les motifs plus simples, la forme des cloques est décrite de manière satisfaisante par un équilibre entre courbure et adhésion comme dans le cas des cloques rectilignes. Enfin, la simulation numérique permet de prédire le motif de contact et d'avoir accès au champ de déformations dans la plaque.



**Fig. 5.** (a)  $\rho = 100\text{mm}$ , RGP15, expérience (b)  $\rho = 100\text{mm}$ , RGP15, simulation (c)  $\rho = 197\text{mm}$ , RH50, expérience (d)  $\rho = 197\text{mm}$ , RH50, simulation (e,f)  $\rho = 197\text{mm}$ , RH50, déformation radiale  $\epsilon_{rr}$ , comparaison avec la déformation de la plaque complètement en contact (g,h)  $\rho = 197\text{mm}$ , RH50, déformation orthoradiale  $\epsilon_{\theta\theta}$ , comparaison avec la déformation de la plaque complètement en contact

## Références

1. G. MERCATOR, Atlas Sive Cosmographicae Meditationes De Fabrica Mundi Et Fabricati Figura, *Duisburgi Clivorum*, (1595).
2. D.J. STRUIK, Lectures on classical differential geometry, *Dover*, (1988).
3. T.A. WITTEN, Stress focusing in elastic sheets, *Review of Modern Physics*, **79** (2), 643-675 (2007).
4. M. BEN AMAR & Y. POMEAU, Crumpled paper, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **453**, 729-755 (1997).
5. A.E. COHEN & L. MAHADEVAN, Kinks, rings, and rackets in filamentous structures, *Proceedings of the National Academy of Science (USA)*, **100** (21), 12141-12146 (2003).
6. C. PY, P. REVERDY, L. DOPPLER, J. BICO, B. ROMAN AND C.N. BAROUD, Capillary origami : Spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet, *Physical Review Letters*, **98** (15), 156103 (2007).
7. S. TIMOSHENKO AND S. WOINOWSKI-KRIEGER, Theory of plates and shells, *McGraw-Hill*, (1959).
8. C. MAJIDI & R.S. FEARING, Adhesion of an elastic plate to a sphere, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **464**, 1309-1317 (2008).
9. L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, Theory of elasticity, *Butterworth Heinemann*, (1986).
10. D. VELLA, J. BICO, A. BOUDAUD, B. ROMAN & P.M. REIS, The macroscopic delamination of thin films from elastic substrates, *Proceedings of National Academy of Science (USA)*, **106** (27), 10901-10906 (2009).
11. K. BRAKKE, The surface Evolver, *Exp. Maths*, **1** (2), 141-165 (1992).
12. C. QUILLIET, C. ZOLDESI, C. RIERA, A. VAN BLAADEREN & A. IMHOF, Anisotropic colloids through non-trivial buckling, *European Physical Journal E*, **27** (1), 13-20 (2008).

## Entre les lignes, la véritable contribution d’Otto Rössler à la théorie du chaos

Christophe Letellier & Valérie Messenger

CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex  
Christophe.Letellier@coria.fr

**Résumé.** Otto Rössler est largement reconnu comme l’un des « pères fondateurs » de la théorie du chaos pour ses équations produisant un attracteur chaotique tout simple, mais très peu savent que cette attracteur n’est pas le premier qu’il publia. Notre objectif est de montrer que son premier article sur un système chaotique contient en fait beaucoup plus et révèle une compréhension profonde de la manière dont les attracteurs chaotiques s’organisent dans l’espace des phases. De plus, nous montrerons qu’Otto Rössler était essentiellement influencé par le livre d’Andronov, Khaikin et Vitt, l’article de 1963 publié par Lorenz et le théorème de Li et Yorke « une période trois implique le chaos ». Rössler étudiait les attracteurs chaotiques en termes de surface schématisant l’enveloppe de la trajectoire dans l’espace des phases, et parvint à distinguer différents domaines topologiques caractérisant l’attracteur.

**Abstract.** Otto Rössler is widely considered as one of the very influential contributors to “chaos theory”, mainly for its equations producing one of the simplest chaotic attractors. But very few know that this attractor was not the first he published. Our aim is to show that his first paper on a chaotic system contains in fact much more and reveals a deep understanding of how chaotic attractors were organized in the phase space. Moreover, it is shown that Otto was mainly influenced by Andronov, Khaikin and Vitt’s textbook, the 63 Lorenz paper and the Li-Yorke’s theorem “period-three implies chaos”. Rössler investigated chaotic attractors in terms of a surface sketching the envelope of the trajectory in the phase space, and went up to distinguish different topological domain characterizing the attractor.

La théorie du chaos correspond au paradigme selon lequel les solutions des systèmes dynamiques non linéaires, qui sont sensibles aux conditions initiales, sont étudiées. Elle constitue une branche de la théorie des systèmes dynamiques. Comme la plupart des théories scientifiques, elle a ses « héros » : Henri Poincaré (1854-1912), Edward Lorenz (1913-2008) et Otto Rössler, né en 1940. Poincaré est souvent crédité d’une contribution majeure à la théorie du chaos. S’il n’a pas observé de solutions chaotiques, il a été confronté à la grande sensibilité aux conditions initiales au voisinages des orbites homoclines [1]. Depuis ses premiers travaux, Poincaré a utilisé l’espace des phases, les quatre type de points singuliers (dans le plan), les sections de Poincaré, les applications de premier retour, les bifurcations [2]. Lorenz est connu pour avoir développé un jeu d’équations produisant un fascinant attracteur chaotique [3]. Sa contribution repose sur le fait d’avoir appliqué les techniques, développées par David Birkhoff (1884-1944) dans le contexte des systèmes conservatifs, à un système dissipatif dérivé du problème de la convection de Rayleigh-Bénard. L’utilisation d’un ordinateur numérique pour calculer la solution de ce système constitue également un aspect important de la contribution de Lorenz.

Les ordinateurs sont requis pour disposer de la précision nécessaire à l’étude de la structure sous-jacente aux solutions aperiodiques. Quelques scientifiques furent toutefois confrontés à de telles solutions avant l’avènement des ordinateurs : Poincaré avec les trajectoires homoclines, Balthazar van der Pol (1889-1859) et van der Mark while alors qu’ils étudiaient une triode [4], Mary Lucy Cartwright (1900-1998) et John Edensor Littlewood (1885-1977) lors de l’étude des solutions aperiodiques de l’équation de “van der Pol equation” [5]. Mais aucun ne disposait d’obtenir une représentation globale de la trajectoire dans l’espace des phases, manquant ainsi la structure sous-jacente.

A la suite des travaux de Lorenz, David Ruelle et Floris Takens poussèrent l’idée que les comportements étranges pouvaient émerger de systèmes relativement simples [6] : en d’autres termes, il n’était

plus nécessaire d'invoquer des systèmes de grandes dimensions pour expliquer des comportements « turbulents ». En dépit de leur contribution cruciale au développement de la théorie du chaos, leur langage trop mathématique et le manque de figures attractives à montrer ne les amenèrent pas à disposer d'un impact durable sur un large public, comme c'est le cas aujourd'hui pour la théorie du chaos. Néanmoins, pour les scientifiques, Ruelle (et dans une moindre mesure, Takens) fut un acteur important des premiers développements de la théorie du chaos.

Otto Rössler fut le second, après Lorenz, à fournir une belle — fascinante — image d'un attracteur chaotique. C'était en 1976 [22]. Après ce premier essai, il « inonda » le marché du chaos avec différentes variétés de chaos aux noms suggestifs comme le chaos « spiral », l'attracteur « vis », le chaos « entonnoir », le chaos « sandwich », l'application « canne », l'application « serviette pliée », parmi d'autres. En raison de ces usages de termes informels (non techniques) et d'images très suggestives — il utilisa même le « son du chaos » dans une conférence en reliant son ordinateur à un haut-parleur —, Otto Rössler attira rapidement une très large audience. Il est probable que ces termes inadéquats au sein d'articles scientifiques le conduisirent à une reconnaissance finalement très limitée par ses pairs. Adepte d'un style d'écriture elliptique, intuitif, il n'a jamais consacré beaucoup de temps à introduire le bagage qu'il utilisait. En conséquence, ce qui est habituellement retenu de sa contribution à la théorie du chaos peut être réduit à l'attracteur de Rössler, et de manière plus discrète, au premier exemple d'attracteur hyperchaotique [10]. Notre propos est de « décoder » le premier article sur un système chaotique publié par Rössler en 1976.

## 1 Courte biographie

Otto Rössler est né en 1940. Son père, Otto Rössler (1907-1991), était un linguiste reconnu pour avoir introduit un nouveau système de correspondance des consonnances Egypto-sémites. Adolescent, il fabriqua son propre radio-émetteur et s'initia ainsi à l'électronique. Il étudia ensuite la médecine jusqu'en 1967, époque à laquelle il était particulièrement intéressé par l'origine de la vie. Attiré par les travaux mathématiques sur l'auto-reproduction de Robert Rosen (1934-1998), il se rendit pour un an au Centre de Biologie Théorique à Buffalo où Rosen travaillait. Dans ce centre, une atmosphère très stimulante était présente, comme le rapporte Vahe Bedian au sujet d'un séjour qu'il effectua peu après Rössler [11] :

Au début des années 70, le campus temporaire Ridge Lea de SUNY/Buffalo accueillait le Centre de Biologie Théorique et le Département de Sciences Biophysiques, où j'ai été diplômé. C'était un endroit très stimulant et encourageant pour penser et apprendre des meilleurs du domaine : Robert Rosen, Fred Snell, Robert Spangler, Robert Rein et Howard Pattee. Face à des tableaux et dans les halls, nous discutions de tout, en passant du principe d'incertitude aux automates de von Neumann, aux réseaux de neurones, aux réseaux de bascules binaires de Stuart Kauffman, à la complexité des calculs de mécanique quantique.

Bedian mentionne également que Spangler était l'un de ceux à aller « au-delà des simulations itératives [pour] formaliser le modèle comme un système dynamique non linéaire ». C'est exactement ce que Spangler et Snell réalisèrent au sujet de la réaction chimique oscillante qu'ils simulèrent en 1961 sur un ordinateur digital et en 1967 sur un ordinateur analogique [12]. Dans ce dernier travail, ils montrèrent quelques oscillations périodiques et un portrait de phase d'un cycle limite. Bien que Rössler ne rencontra pas Spangler, il cita l'article de 1967 dans l'un de ses articles de 1975 [13]. C'est à cette époque que Rössler commença à étudier les équations différentielles.

En 1970, Rössler découvre le livre d'Andronov, Khaikin et Vitt où il puisa une motivation pour étudier un multivibrateur à deux et trois variables. Quelques années auparavant, il avait rencontré Friedrich-Franz Seelig qui venait tout juste d'obtenir une position au département de Chimie Théorique à l'Université de Tübingen. Dans les années 60, Seelig avait été diplômé en contribuant avec Hans Kuhn et Firtz-Peter Schäfer à la construction d'un ordinateur analogique pour résoudre l'équation de Schrödinger à deux dimensions. En 1965, Seelig résolut une équation de Schrödinger avec un ordinateur digital (IBM 7090) [14]. Alors qu'ils partageaient leur intérêt pour l'origine de la vie, les équations différentielles et les ordinateurs, ils tombèrent d'accord pour tenter de trouver des équivalents chimiques aux circuits électroniques.

Rössler rejoignit Seelig à Tübingen à son retour de Buffalo en 1970. Avec l’argent mis à disposition pour ses recherches, Seelig avait acheté (80 000 DM) un ordinateur analogique, un Dornier DO 240 (Fig. 1). C’est ainsi qu’Otto commença à l’Université de Tübingen en enseignant la programmation sur ordinateur analogique, juste après avoir lui-même suivi un cours de l’Enterprise Application Integration sur le sujet. En parallèle, Rössler commença l’étude de systèmes à quelques variables avec Seelig.

A l’aide du livre de Hans Sutaner [15] de la Librairie des radio-amateurs (acheté en 1967 à Marburg avec Seelig), Otto commença par un oscillateur électronique, un flip-flop, c’est-à-dire un multivibrateur à deux états stables pouvant par conséquent être utilisé comme un bit de mémoire. Avec Seelig, Rössler proposa un multivibrateur chimique [16,17]. Ces premiers travaux restent encore aujourd’hui cité comme l’un des tous premiers systèmes chimiques pour l’implémentation de circuits logiques [18]. L’analyse de ce multivibrateur par Otto Rössler révèle une très bonne connaissance de l’électronique d’une part, mais également du livre d’Andronov, Khaikin et Vitt [13] :

Les equations de ce système partiel sont bien connues en électronique où elles correspondent au flip-flop symétrique RS habituel [...] seuls les termes non linéaires [...] sont normalement remplacés par une classe de fonctions formulée plus généralement (voir Andronov *et al* [19], p. 309, Eq. 5.61). Cependant, le système [A-B] est obtenu, même dans le cas électronique, si des transistors à effet de champ à  $n$  canaux sont utilisés comme éléments actifs [20]...



**Fig. 1.** Ordinateur analogique Dornier DO 240 comme celui acheté par Seelig en 1970 et sur lequel Otto effectua la plupart de ses recherches sur les premiers systèmes chaotiques.

## 2 Le premier système chaotique de 1976

Alors qu’il poursuit ses premières études sur les circuits chimiques, Rössler rencontra le biologiste théoricien Art Winfree (1942-2002) qui lui demanda de tenter un « Lorenz chimique ». Avec cette « commande », Winfree lui fit parvenir une collection d’articles comprenant celui de Lorenz [3], celui de Robert May [7], celui de Tien Y. Li et James Yorke [8], celui de Guckenheimer, Oster et Ipitchki (en tant que preprint puisque seulement publié en 1977 [21]), et un de Stephen Smale. Rössler considéra ces articles comme son « initiation et son armure ». Les articles qui l’influencèrent plus particulièrement furent ceux de Lorenz, et de Li & Yorke, à tel point qu’il est intéressant de comparer la construction de l’article de Lorenz à celle du premier article de Rössler (Tab. 1). Il est manifeste que Rössler a fortement calqué son article sur celui de Lorenz, au moins dans la structure car nous verrons que dans la forme, ces deux articles diffèrent grandement.

Rössler évita le problème en citant quelques travaux antérieurs où l’utilisation de l’espace des phases était, de plus, évidente. Il résuma la discussion sur l’espace des phases à un paragraphe où foisonnent des remarques telles que, pour deux oscillateurs, « quatre variables d’état » sont nécessaires : la trajectoire évolue alors sur une « métrique non Euklidienne » (même orthographe que celle utilisée par Lorenz). Pour Rössler, le fait qu’un « tore  $T^2$  puisse être replongé dans un espace  $\mathbb{R}^3$  Euklidien n’a d’une certaine manière pas été exploité ». De cette remarque, Rössler sortit trois ans plus tard un jeu de trois équations produisant un tore  $T^2$  plongé dans  $\mathbb{R}^3$  [23], mais ce système ne produisait qu’un comportement quasi-périodique.

Afin de se débarrasser d’une éventuelle définition de la notion de chaos, Rössler commença par considérer que « le chaos est connu depuis longtemps », se référant à Poincaré, l’application d’Arnold, le fer-à-cheval de Smale, et l’attracteur étrange de Ruelle et Takens. Bien sûr, aucun de ces exemples n’était explicitement associé, dans leurs contextes originaux, au terme « chaos ». Cependant, plusieurs articles

**Tab.1.** Table comparative entre le contenu des articles respectifs de Lorenz [3] et Rössler [22]. Les numérotations renvoient aux différentes sections des articles.

Lorenz 1963 12 pages	Rössler 1976 6 pages
I. Introduction	I. Introduction
Flots hydrodynamiques turbulents	Comportements chaotiques
II. Espace des phases	Espace des phases
	Application de Poincaré
III. Stabilité des orbites périodiques	Théorème de Li et Yorke
IV. Schéma d'intégration numérique	une simple citation à Gear
V. Les équations de convection	II. Les équations de réaction chimique
VI. Stabilité linéaire des points singuliers	$\emptyset$
VII. Séries temporelles et portraits de phase	Séries temporelles et portraits de phase
Analyse topologique = "isopleths"	III. Application de premier retour
Application de premier retour	IV. Analyse topologique = le « mixeur »
$\emptyset$	Preuve de l'existence d'un fer-à-cheval de Smale
VIII. Conclusion	V. Discussion

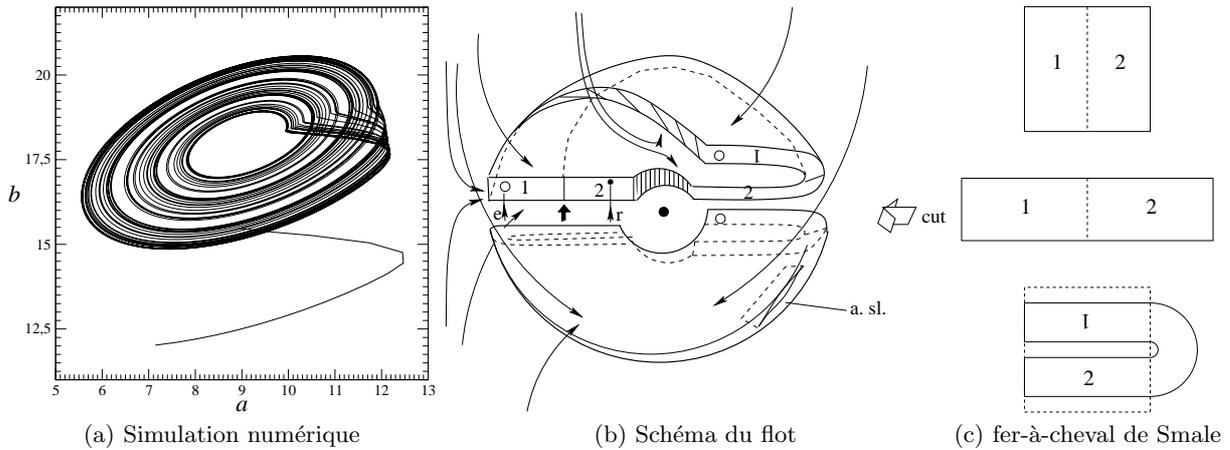
publiés en 1974 et 1975 (ou circulant alors comme « preprint ») mentionnaient le terme de chaotique : l'article de May [7], celui de Li et Yorke [8]. De manière plus intéressante, celui de Guckenheimer & Co [21] mentionnait également que « plusieurs auteurs avaient pointé que des modèles déterministes simples pouvaient produire des comportements apparemment chaotiques qui étaient essentiellement indistingables de processus aléatoires », et en donnaient même une définition :

Par « attracteur étrange <sup>1</sup> » pour une application  $f(\cdot)$  nous entendons un ensemble infini  $A$  avec les propriétés suivantes :

1.  $A$  est invariant sous  $f(\cdot)$ , c'est-à-dire que  $f(A) = A$ .
2.  $A$  a une orbite qui est dense dans  $A$ .
3.  $A$  a un voisinage  $a$  constitué des points dont les orbites tendent asymptotiquement vers  $A$  :  $\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(t)}(a) \subset A$ .

Par la suite, Guckenheimer et ses collègues proposèrent une procédure pour l'étude des systèmes chaotiques : 1. montrer que l'application a un attracteur étrange (chaotique), 2. examiner la topologie de l'attracteur, 3. examiner la nature des orbites sur l'attracteur, 4. discuter la « mécanique statistique » de l'attracteur, etc. Ils résumèrent ensuite la première étape consistant à montrer qu'il y a une orbite dense sur  $A$ , c'est-à-dire que la trajectoire n'est pas un cycle limite. Malheureusement, il a été montré récemment par Lozi [25], qu'il est illusoire de vouloir expliquer cela numériquement. La seconde étape se résumait à montrer l'implication d'un fer-à-cheval de Smale. L'étape 3 était en fait commutée en une analyse par dynamique symbolique et matrices de Markov, ces dernières contribuant également à la détermination de la statistique sur l'attracteur. On peut montrer que Rössler complète la première étape en invoquant le théorème de Li et Yorke, l'étape 2 en introduisant un « mixeur » comme une « enveloppe des trajectoires » (Fig. 2a). Ce mixeur est particulièrement important car Otto lui donna une épaisseur afin de bien mettre en évidence la relation avec le fer-à-cheval de Smale : celle-ci permet une connection avec une dynamique symbolique (les deux symboles « 1 » et « 2 ») qui n'est toutefois pas exploitée dans l'article d'Otto Rössler. Ce mixeur — ou la « crêpe pliée » — est en fait un équivalent des « isopleths » de Lorenz et des variétés branchées de Williams qui deviendront des « gabarits » [26]. Pour Rössler, le mixeur se présente comme une enveloppe pour les trajectoires dans l'espace des phases : description plutôt vague.

<sup>1</sup> A cette époque, l'adjectif d'étrange est utilisée de manière quasi-équivalente à celui de chaotique. Ce n'est qu'après l'article de Grebogi, Ott, Pelikan et Yorke sur les attracteurs étranges qui ne sont pas chaotiques [24].



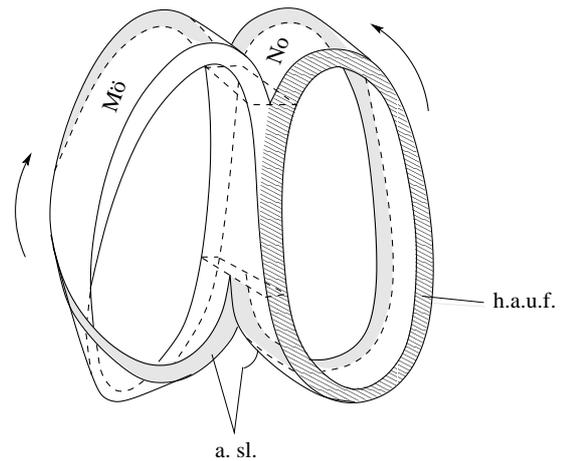
**Fig. 2.** Le « mixeur tri-dimensionnel ». → = trajectoires entrant dans la structure par l'extérieur ; 1, 2 = demi section d'intersection (démontrant la « transformation mélangante » qui apparaît), e = point d'entrée d'une trajectoire arbitrairement choisie, r = reentrée du point de la même trajectoire après un cycle. ↑ = « application du fer-à-cheval », a.sl. = incision permise. Dans (b), ne pas oublier que le repliement est associé à une rotation de  $\pi$  autour du point singulier central •, envoyant ainsi le repliement à droite et non à gauche, comme les symboles « 1 » et « 2 » auraient pu le suggérer autrement.

Pourtant, toute la topologie de l'attracteur est contenue dans cette figure, jusqu'à l'« incision permise » qui rappelle la troncature qu'impose Smale à son fer-à-cheval pour éviter les complications mathématiques avec la courbure due au repliement. Reste que cette description ne résiste pas à celle de Williams, par exemple : « l'étude de l'attracteur peut être réduite à celle de la variété branchée sur laquelle est appliqué un semi-flot ».

Enfin, Rössler applique une isotopie (déformation continue sans découpage) pour passer du mixeur à une structure équivalente qui révèle un ruban de Möbius et une boucle normale, c'est-à-dire deux domaines topologiquement inéquivalents et constituant l'attracteur. Sur cette figure, le cœur de la figure révèle une carte de jonction (partie supérieure) où les deux rubans sont « collés » l'un avec l'autre, et une carte de séparation, résultat de l'étirement. C'est ainsi que les deux rubans résultent d'un mécanisme d'étirement et de repliement, deux ingrédients essentiels dans la production du chaos. Mais tout ceci n'est qu'implicitement montré, sans aucun autre commentaire.

### 3 Conclusion

Avec son premier article sur le chaos, Otto Rössler reproduit le « tour de force » réalisé par Lorenz ou par Guckenheimer, Oster et Ipaktchi, et comme il est rarement rencontré, c'est-à-dire **avec** qu'une étude détaillée du système. Du point de vue du contenu, l'écart entre l'article de Lorenz et celui de Rössler n'est pas si grand, et les structures de ces deux articles sont finalement relativement proches. Ce qui les distingue le plus, c'est un style de rédaction très mathématique pour Lorenz, et un style très intuitif, très imagé, parfois implicite, pour Rössler. De ce style informel, il ressort une impression de flou, d'autant plus que l'ensemble des détails ne sont pas explicitement donnés ; seul un examen minutieux des figures comme celle du « mixeur » et de sa légende révèle la parfaite maîtrise des concepts par Otto Rössler.



**Fig. 3.** Une structure équivalente à celle montrée Fig. 2a. Mö = boucle de Möbius, No = boucle normale ; h.a.u.f. = trou autour du foyer instable de la Fig. 2a ; a.sl. = frontières de l'incision permise de la Figure 2. Les deux flèches — ajoutées par les auteurs — montrent la direction du flot.

Sans aucune doute, une rédaction plus mathématique aurait fait de cet article relativement peu cité (186 citations en 2010) un article de référence pour l'étude des systèmes chaotiques.

## Références

1. H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Tome III, (Gauthier-Villars, Paris, 1899, and A. Blanchard, Paris, 1987).
2. H. POINCARÉ, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *Journal de Mathématiques*, Serie 3, **7**, 375-422, 1881 — Serie 4, **1**, 167-244, 1885.
3. E. N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141, 1963.
4. B. VAN DER POL & VAN DER MARK, Frequency demultiplication, *Nature*, **120**, 363-364, 1927.
5. M. L. CARTWRIGHT & J. E. LITTLEWOOD, On non-linear differential equations of the second-order, *Annals of Mathematics*, **48**, 472-494, 1947.
6. D. RUELLE & F. TAKENS, On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, **20**, 167-192, 1971.
7. R. May, Biological populations with nonoverlapping generations; stable points, limit cycles, and chaos, *Science* **186** (1974) 645-647.
8. T. Y. Li & J. Yorke, Period-three implies chaos, *American Mathematics Monthly* **82** (1975) 985, 1975.
9. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398, 1976.
10. O. E. RÖSSLER, An equation for hyperchaos, *Physics Letters A*, **71**, 155-157, 1979.
11. V. BEDIAN, Self-description and the origin of the genetic code, *Biosystems* **60** (2001), 39-47.
12. R. A. SPANGLER & F. M. SNELL, Transfer function analysis of an oscillatory model chemical system, *Journal of Theoretical Biology*, **16**, 381-405, 1967.
13. O. E. RÖSSLER, A multivibrating switching network in homogeneous kinetics, *Bulletin of Mathematical Biology*, **37**, 181-192, 1975.
14. F. F. SEELIG, Numerical solution of 2- and 3-dimensional Schrödinger equations for any molecular potential by iterative variation of numerical test functions with a digital computer — I. Theoretical principles : description of a computer program for solution of 2-dimensional Schrödinger equation, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **20**, 416-427, 1965.
15. H. SUTANER, *Das Spulenbuch — Hochfrequenzspulen*, (Franzisz Verlag, 1972).
16. F. F. SEELIG & O. E. RÖSSLER, A chemical reaction flip-flop with one unique switching input, *Zeitschrift für Naturforschung B*, **27**, 1441-1444, 1972.
17. F. F. SEELIG & O. E. RÖSSLER, A Rashevsky-Turing system as a two-cellular flip-flop, *Zeitschrift für Naturforsch B*, **27**, 1445-1448, 1972.
18. K.-P. ZAUNER, Molecular information technology, *Critical Reviews in Solid State and Material Sciences*, **30**, 33-69, 2005.
19. A. A. ANDRONOV, A. A. VITT & S. E. KHAIKIN, *Theory of oscillators*, (Dover, 1966).
20. O. E. Rössler, A synthetic approach to exotic kinetics (with examples), *Lecture Notes in Biomathematics* **4** (1974) 546-582.
21. J. GUCKENHEIMER, G. F. OSTER & A. IPAKTCHI, Periodic solutions of a logistic difference equation, *Journal of Mathematical Biology*, **4**, 101-147, 1977.
22. O. E. RÖSSLER, Chaotic behavior in simple reaction systems, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **31**, 259-264, 1976.
23. O. E. RÖSSLER, Toroidal oscillation in a 3-variable abstract reaction system, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **32**, 299-301, 1977.
24. C. GREBOGI, E. OTT, S. PELIKAN & J. A. YORKE, Strange attractors that are not chaotic, *Physica D*, **13**, 261-268, 1984.
25. R. LOZI, Giga-periodic orbits for weakly coupled tent and logistic discretized maps, In : *Modern Mathematical Models, Methods and Algorithms for Real World Systems*, A. H. Siddiqi, I. S. Duff & O. Christensen (Eds), (Anamaya Publishers, New Delhi), 80-14, 2006.
26. R. F. WILLIAMS, The structure of lorenz attractors, *Lecture Notes in Mathematics*, **615**, 94-112, 1977.

# Systèmes minimaux, symétries et ordre unimodal

Jean-Marc Malasoma<sup>1</sup> & Christophe Letellier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Géomatériaux DGCB — URA CNRS 1652, ENTPE, rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin cedex, France

<sup>2</sup> CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex  
malasoma@entpe.fr

**Résumé.** Sept classes de systèmes minimaux sont répertoriées, la topologie de leurs attracteurs est étudiée et les diagrammes de bifurcations sont tracés. Cinq classes correspondent à des suspensions (double ou simple selon la présence de symétrie ou non) d'une application unimodale à maximum différentiable ; une classe est associée à une symétrie centrale et deux à une symétrie de rotation. Les deux dernières classes correspondent à des systèmes invariants sous une rotation  $\mathcal{R}_z(\pi)$ , l'une étant une double suspension d'une application multimodale et l'autre une double suspension d'une application feuilletée à maximum différentiable

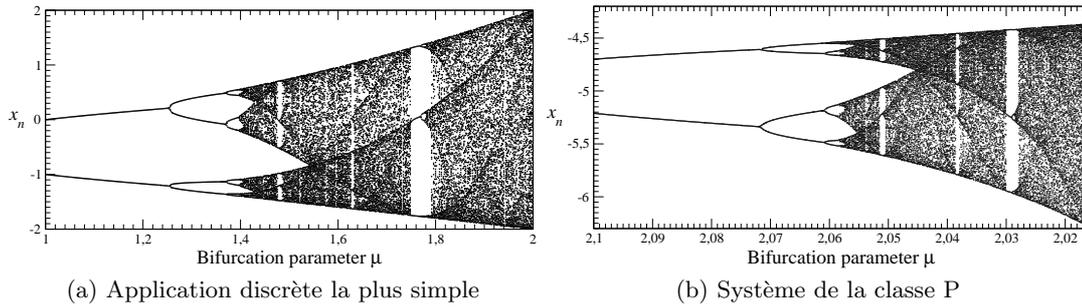
**Abstract.** Seven classes of minimal system are reported, the topology of their attractor is investigated and their bifurcation diagram are plotted. Five classes correspond to a (double or simple depending on the existence of a symmetry or not) suspension of an unimodal map with a differentiable maximum, one presenting an inversion symmetry and two being invariant under a rotation  $\mathcal{R}_z(\pi)$ . The two remaining systems are invariant under a rotation  $\mathcal{R}_z(\pi)$ ; one being a double suspension of a multimodal map and one a double suspension of a layered map with a differentiable maximum.

## 1 Introduction

À l'exception de Rössler qui s'est attaché à simplifier son système d'équations chaotiques [1] en éliminant un à un les termes superflus pour aboutir à une simple équation pour le chaos continu [2], ce n'est qu'à partir de la seconde moitié des années 90 que les systèmes « minimaux » ont été l'objet de recherches approfondies. C'est Sprott qui a ravivé l'intérêt pour ces systèmes simples lors de sa recherche systématique de systèmes chaotiques [3]. L'adjectif « minimal » caractérise la complexité algébrique de ces systèmes qui est donc aussi simple que possible. Les systèmes chaotiques ont nécessairement cinq termes répartis sur les trois équations différentielles qui les constituent [4]. Nous ne considérons donc que des systèmes chaotiques à cinq termes et dont les nonlinéarités ne sont que quadratiques. Nous répertorions aujourd'hui huit classes de systèmes minimaux. L'objectif de ce travail est de faire un inventaire de leurs propriétés topologiques.

Avant de commencer l'étude de ces systèmes, considérons tout d'abord l'application discrète chaotique la plus simple, soit  $x_{n+1} = x_n^2 - \mu$ . Elle représente en fait la famille des applications unimodales à un maximum différentiable. À ce titre, elle entre dans la classe d'équivalence de la fonction logistique dont la signature est de présenter une cascade de doublements de périodes comme route vers le chaos (Fig. 1). Le diagramme se termine, lorsque la dynamique symbolique est complète — chaque séquence possible constituée de « 0 » pour la branche croissante et de « 1 » pour la branche décroissante est réalisée comme orbite périodique —, par une crise de frontière qui éjecte la trajectoire à l'infini.

Les flots, autrement dit les équations différentielles, se présentent comme des suspensions des applications discrètes ou, inversement, les applications discrètes correspondent à des applications de premier retour à une section de Poincaré transverse au flot de trajectoires. Nous sommes alors en mesure de nous interroger sur la nature des relations existantes entre les applications discrètes minimales et les flots minimaux. C'est ce que nous aborderons dans ce travail.



**Fig. 1.** Diagrammes de bifurcations de l'application discrète la plus simple (a) et d'un système minimal de la classe P.

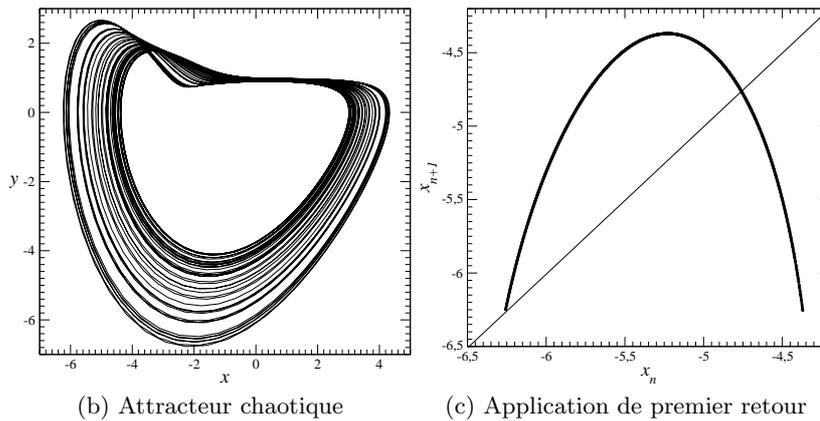
## 2 Les différentes classes de systèmes minimaux

### 2.1 Sans propriété de symétrie

La première classe de systèmes minimaux correspond au système minimal proposé par Sprott [5] sous la forme  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} - x\dot{x} = 0$  et qui peut se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z - x + xy. \end{cases} \tag{1}$$

Il correspond à la classe P selon la terminologie introduite par Malasoma [6]. Ce système présente une cascade de doublements de période comme route vers le chaos (Fig. 1b); l'attracteur chaotique (Fig. 2a) est donc caractérisé par une application de premier unimodale pourvue d'un maximum différentiable (Fig. 2b). La crise de frontière terminant le diagramme survient lorsque la dynamique symbolique est complète (Fig. 2b).



**Fig. 2.** Solution chaotique et application de premier retour du système minimal (1) de la classe P.

La deuxième classe — la classe R — de systèmes minimaux comprend le système [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = -\alpha y + z \\ \dot{z} = -x + xy. \end{cases} \tag{2}$$

Comme le système précédent, ce système présente une cascade de doublements de période (Fig. 3). L'attracteur chaotique est donc caractérisé par une application de premier retour unimodale à maximum différentiable. La crise de frontière éjectant la trajectoire à l'infini survient lorsque la dynamique symbolique est complète comme pour le système précédent. Une fois de plus, le système minimal est une suspension de l'application discrète minimale.

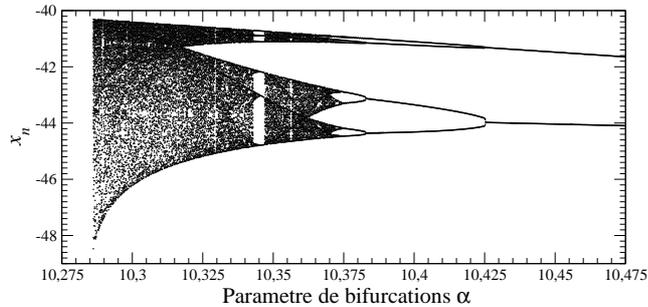


Fig. 3. Diagramme de bifurcations du système minimal (2) de la classe R en fonction du paramètre  $\alpha$ .

## 2.2 Avec symétrie centrale

Le système « jerk » avec symétrie centrale  $\mathcal{P}$  minimal a été proposé par Malasoma [7]. Il s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\alpha z + xy^2 - x. \end{cases} \quad (3)$$

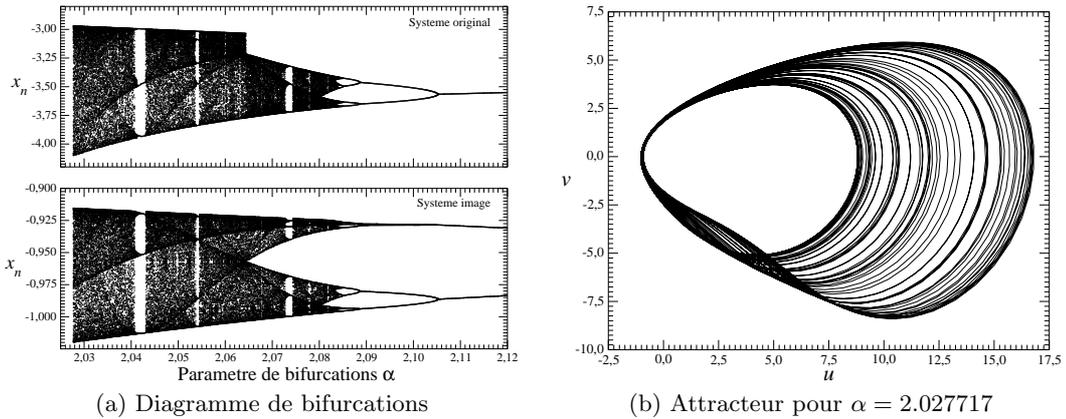
La symétrie centrale induit un champ de vecteurs invariant sous le changement de coordonnées  $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ . Le système (3) possède un seul point singulier  $F_0$  situé à l'origine de l'espace des phases ; le point est du type col-foyer avec une valeur propre réelle négative et deux valeurs propres complexes conjuguées à partie réelle positive. Lorsqu'un système équivariant est obtenu, il est possible de s'affranchir des propriétés de symétrie en utilisant un système image [8,9]. Dans le cas présent, nous pouvons par exemple utiliser le changement de coordonnées  $(u, v, w) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy, z^2)$ . Dans ce cas, le diagramme de bifurcations (Fig. 4b) se ramène à un diagramme équivalent à celui observé sur l'application discrète la plus simple (Fig. 1a). En d'autres termes, le système (3) est une double suspension d'une application de premier retour unimodale à maximum différentiable, le caractère double étant induit par la rotation (une symétrie d'ordre 2) [10]. Une fois de plus, le système perd sa stabilité par crise de frontières pour  $\alpha = 2.027717$  lorsque la dynamique symbolique associée à l'application unimodale du système image est complète. Par ailleurs, la représentation de l'attracteur image (Fig. 4b) correspondant au système (3) rappelle clairement l'attracteur obtenu pour les classes P et R.

## 2.3 Avec symétrie de rotation

Récemment, Malasoma a proposé deux systèmes minimaux avec une symétrie de rotation  $\mathcal{R}_z(\pi)$  autour de l'axe  $0z$ . Le premier système est entièrement nouveau et vient d'être découvert par Malasoma : il s'écrit

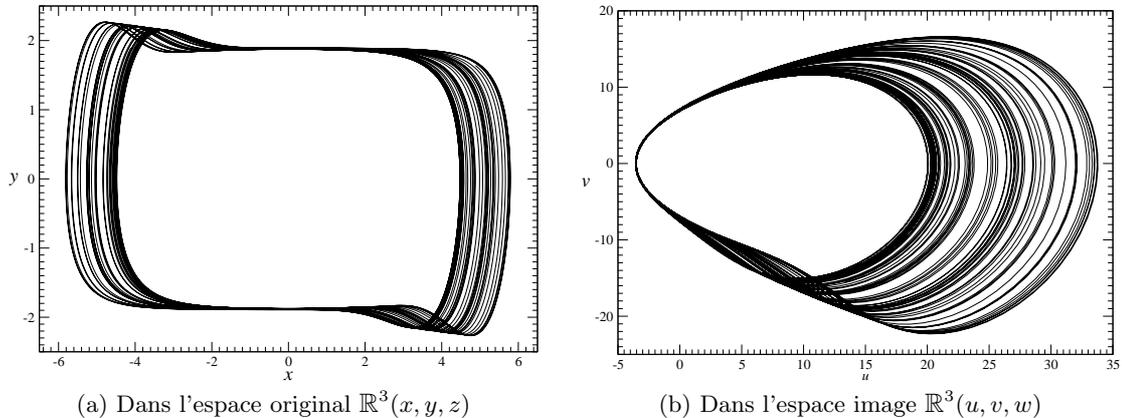
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + xz \\ \dot{z} = -\alpha z + y^2 \end{cases} \quad (4)$$

L'attracteur chaotique solution de ce système (Fig. 5a) se présente comme une couverture d'ordre 2 de l'attracteur obtenu avec le système minimal P (Fig. 2b). Ce système est équivariant, c'est-à-dire



**Fig. 4.** Diagramme de bifurcations en fonction du paramètre  $\alpha$  pour le système (3) et son image. L'attracteur image est représenté juste avant la crise de frontières qui éjecte la trajectoire à l'infini.

que le champ de vecteurs est invariant sous l'action d'une rotation  $\mathcal{R}_z(\pi)$  correspondant au changement de coordonnées  $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ . Comme nous l'avons vu précédemment, il est alors possible de s'affranchir des propriétés de symétrie par le changement de variables  $(u, v, w) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy, z)$  qui projette l'attracteur original dans l'espace des phases du système *image* [8,9]. L'attracteur ainsi obtenu (Fig. 5b) ne présente plus de symétrie; il est alors de configuration comparable aux attracteurs solutions des systèmes minimaux des classes P et R. La crise de frontière apparaît à la complétude de la dynamique du système image.

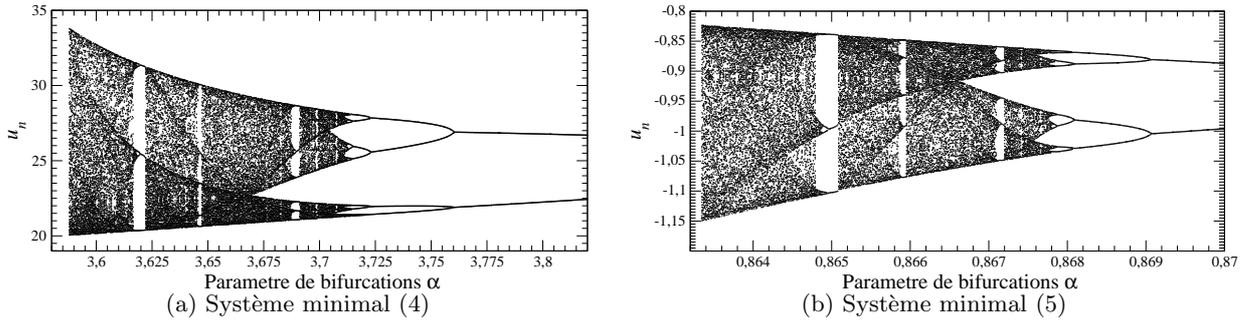


**Fig. 5.** Attracteur chaotique solution du système minimal (4) juste avant la crise de frontières ( $\alpha = 3.588$ ). Conditions initiales :  $x_0 = 1.24$ ,  $y_0 = 1.89$  et  $z_0 = 0.99$ .

Une deuxième classe de systèmes minimaux comprend le système [11] :

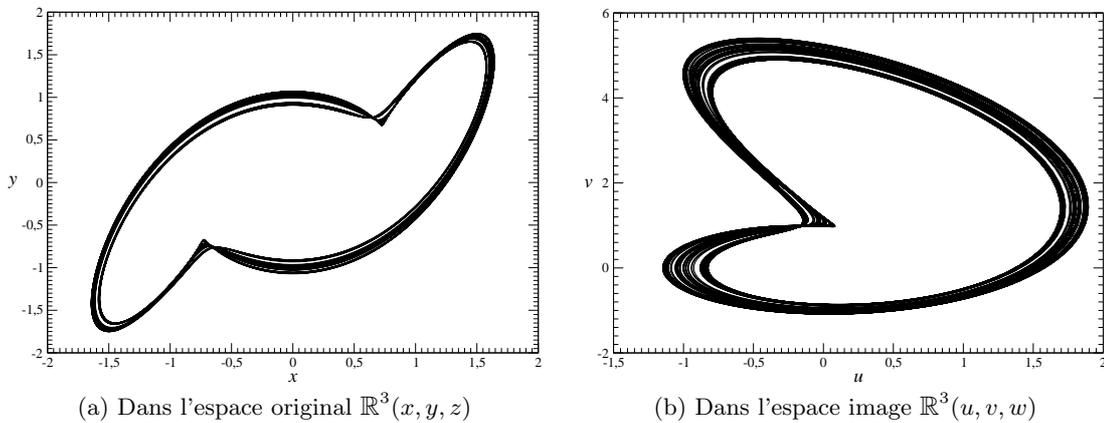
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + y \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = 1 + x^2 \end{cases} \quad (5)$$

Ce système produit un attracteur chaotique issu d'une cascade de doublements de période (Fig. 6b). La crise de frontière survient alors que la dynamique symbolique associé à l'application de premier retour à une section de Poincaré du système image est complète. Topologiquement parlant, ce système est donc



**Fig. 6.** Diagrammes de bifurcations des systèmes minimaux (4) et (5) en fonction du paramètre  $\alpha$ .

équivalent à tous les systèmes vus précédemment. Toutefois, l'attracteur chaotique ne s'organise pas exactement de la même manière dans l'espace des phases (Fig. 7).

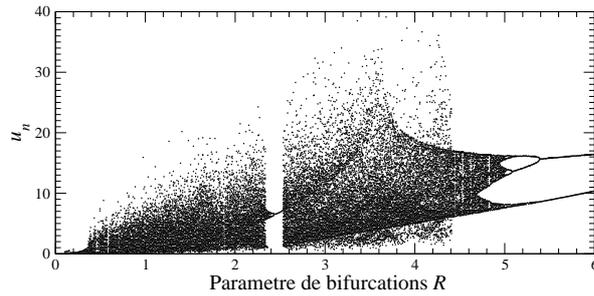


**Fig. 7.** Attracteur chaotique solution du système minimal (5) juste avant la crise de frontières ( $\alpha = 0.86335$ ). Conditions initiales :  $x_0 = 1.171$ ,  $y_0 = 0.0$  et  $z_0 = -1.577$ .

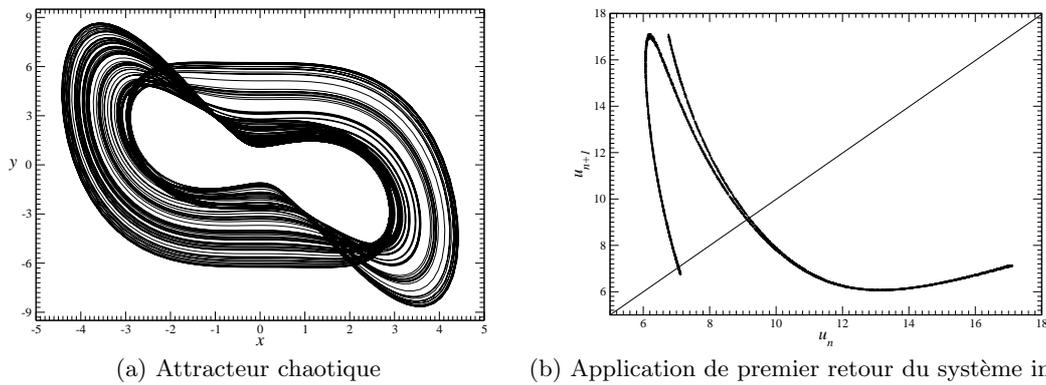
Une autre classe est associée au système de Sprott B [3] dont un équivalent à un paramètre a été obtenu par van der Schrier et Maas [12]. Il correspond à un système de Lorenz où les effets de viscosité et de diffusion ont été négligés. Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = -xz \\ \dot{z} = R + xy \end{cases} \quad (6)$$

présente l'avantage d'avoir un paramètre naturel,  $R$ . Le diagramme de bifurcations (Fig. 8) révèle une structure plus riche que l'ensemble des diagrammes présentés jusqu'ici (Figs. 6 par exemple). Une crise de frontière survient vers  $R = 4.417$ , mais elle ne produit pas l'éjection de la trajectoire à l'infini. Au lieu de cela, l'attracteur subit une brutale inflation de sa taille par intégration d'une collection d'orbites périodiques instables. Cette crise survient lorsque l'application de premier retour — calculée pour le système image — présente une structure nettement moins courante que l'application unimodale à maximum différentiable, mais néanmoins présente dans de nombreux autres systèmes (le système de van der Pol forcé, par exemple, qu'une expérience pouvant être décrite par ce système présente également [13]). L'application s'apparente à une application unimodale dont la branche décroissante est dédoublée (Fig. 9b) : la crise de frontière survient lorsque la seconde branche décroissante atteint le maximum différentiable.



**Fig. 8.** Diagramme de bifurcations de l'image du système minimal de Schrier & Maas (6) en fonction du paramètre  $R$ .



**Fig. 9.** Attracteur chaotique solution du système minimal (6) juste avant la crise de frontières ( $R = 4.417$ ) et application de premier retour du système image correspondant.

### Références

1. O. E. RÖSSLER, Chaotic behavior in simple reaction system, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **31**, 259-264 (1976).
2. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
3. J. C. SPROTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50** (2), 647-650 (1994).
4. F. ZHANG & J. HEIDEL, Non chaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems, *Nonlinearity*, **10**, 1289-1303 (1997).
5. J. C. SPROTT, Simplest dissipative chaotic flow, *Physics Letters A*, **228**, 271-274 (1997).
6. J.-M. MALASOMA, A new class of minimal chaotic flows, *Physics Letters A*, **305**, 52-58 (2002).
7. J.-M. MALASOMA, What is the simplest dissipative chaotic jerk equation which is parity invariant?, *Physics Letters A*, **264**, 383-389 (2000).
8. C. LETELLIER & R. GILMORE, Covering dynamical systems : Two-fold covers, *Physical Review E*, **63**, 16206 (2001).
9. C. LETELLIER & R. GILMORE, Symmetry groups for 3D dynamical systems, *Journal of Physics A*, **40** (21), 5597-5620 (2007).
10. C. LETELLIER & J.-M. MALASOMA, Unimodal order in the image of the simplest equivariant jerk system, *Physical Review E*, **64**, 067202 (2001).
11. J.-M. MALASOMA, New Lorenz-like chaotic flows with minimal algebraic structure, *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **1** (2), 1-16 (2008).
12. G. VAN DER SCHRIER & L. R. M. MAAS, The diffusionless Lorenz equations; Shil'nikov bifurcations and reduction to an explicit map, *Physica D*, **141**, 19-36 (2000).
13. C. LETELLIER, O. MÉNARD, TH. KLINGER, A. PIEL & G. BONHOMME, Dynamical analysis and map modelling of a thermionic diode plasma experiment, *Physica D*, **156**, 169-178 (2001).

# Double ionisation d'atomes en champ laser intense : cas du magnésium

François Mauger<sup>1</sup>, Cristel Chandre<sup>1</sup> & Turgay Uzer<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centre de Physique Théorique, CNRS – Aix-Marseille Université, Campus de Luminy, case 907, F-13288  
Marseille cedex 09, France

<sup>2</sup> School of Physics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332-0430, USA  
mauger@cpt.univ-mrs.fr

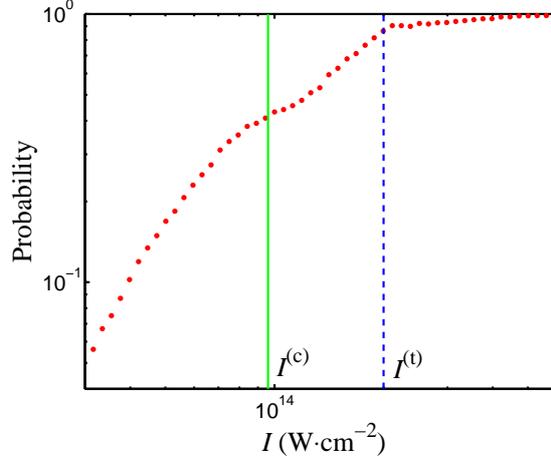
**Résumé.** Nous identifions les structures dans l'espace des phases qui régulent la double ionisation d'atomes (ici le magnésium) soumis à des impulsions laser intenses et très courtes. Cette nouvelle image de la dynamique complète le scénario de la recollision en clarifiant les rôles distincts des électrons interne et externe. Cela conduit à des prédictions sur les intensités caractéristiques du “coude” dans la probabilité de double ionisation en fonction de l'intensité du champ laser, ce coude étant une marque de fabrique des processus non-séquentiels. Nous comparons les résultats obtenus pour le magnésium avec ceux de l'hélium.

**Abstract.** We identify the phase-space structures that regulate atomic double ionization in strong ultrashort laser pulses. The emerging dynamical picture complements the recollision scenario by clarifying the distinct roles played by the recolliding and core electrons, and leading to verifiable predictions on the characteristic features of the “knee” in the double ionization probability versus intensity of the field, a hallmark of the nonsequential process. We compare the results obtained for magnesium with the ones for helium.

## 1 Introduction

Une des surprises les plus frappantes de ces dernières années dans l'étude des interactions laser-matière est venue de l'étude de l'ionisation multiple au moyen d'imputions laser ultracourtes et intenses : la probabilité de double ionisation corrélée (non-séquentielle) s'est révélée être de plusieurs ordres de grandeur supérieure à ce que de simples modèles décorrélés prédisaient. Cette différence, se manifestant par un “coude” dans la probabilité de double ionisation en fonction de l'intensité du champ laser, en fait l'une des manifestations les plus importantes de la corrélation entre électrons. Le mécanisme qui rend la corrélation si efficace est loin d'être établi. Différents scénarios ont été proposés pour expliquer les mécanismes sous-jacents à l'ionisation [1,2]. Le modèle de la recollision [2] (dans lequel l'électron qui est le premier ionisé est précipité sur le noyau par le champ laser) est le plus en accord avec les résultats expérimentaux. La figure 1 représente une courbe typique de double ionisation en fonction de l'intensité du champ laser. Elle montre clairement un excès de double ionisation avant saturation par rapport à des prédictions obtenues à partir de modèles décorrélés. Des courbes similaires ont été obtenues avec des calculs quantiques pour différents atomes et molécules. Des travaux (voir par exemple [3]) montrent que les caractéristiques essentielles de la double ionisation sont reproduites au moyen de calculs classiques des trajectoires des électrons. Ce succès a été attribué au rôle prépondérant de la corrélation, présent aussi dans le modèle classique.

Dans une série de travaux [4,5,6], nous avons complété le scénario bien connu de la recollision en identifiant les structures qui organisent les propriétés statistiques des trajectoires classiques telle que la probabilité d'ionisation. En plus de l'image de la dynamique de l'électron ionisé donnée par le scénario de la recollision, nous connectons la dynamique de l'électron resté au voisinage du noyau et l'échange d'énergie qui conduit à la double ionisation avec les structures qui organisent l'espace des phases (essentiellement, des orbites périodiques ou des tores invariants). L'image qui en découle conduit à deux prédictions vérifiables pour les caractéristiques du coude représenté sur la figure 1 : l'intensité du laser pour laquelle la double ionisation non-séquentielle est maximale et celle pour laquelle la double ionisation



**Fig. 1.** Probabilité de double ionisation en fonction de l'intensité du champ laser  $I$  pour le hamiltonien (1) pour  $\omega = 0.0584$  a.u. (780 nm) avec  $a = 3$  et  $b = 1$  (magnésium). Les lignes verticales indiquent les intensités pour lesquelles notre analyse prédit le maximum de double ionisation non-séquentielle ( $I^{(c)}$ , trait continu) et une double ionisation complète ( $I^{(t)}$ , tirets). (Voir figure 4).

est complète. Ici, nous revisitons ce scénario de la recollision en considérant le cas du magnésium et nous comparons les résultats de double ionisation avec le cas de l'hélium. En particulier, nous identifions un mécanisme très similaire pour la double ionisation non-séquentielle et nous expliquons pourquoi le coude du magnésium est moins prononcé que celui de l'hélium.

## 2 Modèle et description qualitative

Nous considérons le hamiltonien classique pour le modèle de l'atome de magnésium en utilisant un potentiel de Coulomb régularisé (auss appelé potentiel de Rochester). Le hamiltonien est donné par :

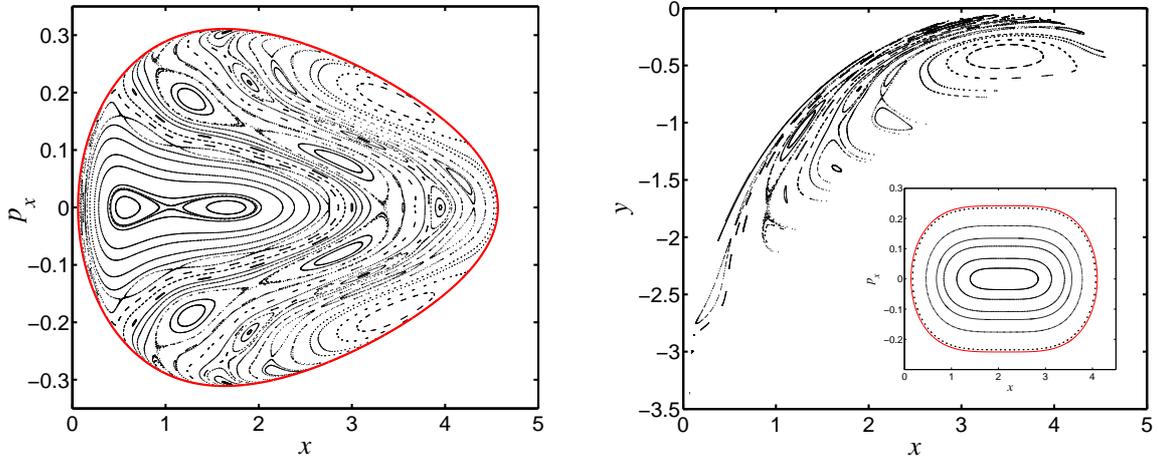
$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y, t) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{2}{\sqrt{y^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - y)^2 + b^2}} + (x + y) E(t) \quad (1)$$

où  $x$  et  $y$  sont les positions,  $p_x$  et  $p_y$  les moments canoniquement conjugués associés à chaque électron. L'énergie est initialement fixée à l'état fondamental  $\mathcal{E}_g = -0.83$ . Les paramètres  $a$  et  $b$  du hamiltonien (1) sont choisis de la façon suivante :  $a$  est choisi de telle sorte qu'il n'y ait aucune double ionisation spontanée sur la surface d'énergie considérée, et  $b$  est choisi assez petit afin de fournir suffisamment d'énergie lors d'une recollision. Une borne minimale de  $a$  est  $-2/\mathcal{E}_g$ . Pour le magnésium, on choisit  $a = 3$  et  $b = 1$  (nous rappelons que pour l'hélium, nous avons choisi  $a = 1$  et  $b = 1$ ). Le laser d'amplitude maximale  $E_0$  et de fréquence  $\omega = 0.0584$  (correspondant à une longueur d'onde de 780nm) est modulé par une enveloppe  $f(t)$ , i.e.  $E(t) = E_0 f(t) \sin \omega t$ . L'enveloppe du champ est un trapézoïde composé de deux cycles laser de montée, quatre cycles pour le plateau et deux cycles pour la descente. Une étude qualitative de la dynamique révèle deux chemins distincts pour la double ionisation : la double ionisation non-séquentielle dans laquelle les deux électrons quittent la région du noyau au même moment, et la double ionisation séquentielle dans laquelle les deux électrons sont ionisés à des instants différents.

Afin de comprendre les mécanismes sous-jacents, nous commençons par analyser la dynamique du hamiltonien (1) sans le champ laser ( $E_0 = 0$ ). L'utilisation des propriétés de stabilité linéaire tels que celles données par les indicateurs de Lyapunov en temps fini révèle que la dynamique sur tout l'espace admissible est relativement régulière. Pour mieux visualiser cela, nous considérons des sections de Poincaré (d'équation  $p_y = 0$ ), telles que représentées sur la figure 2. On remarque alors que presque l'intégralité

de l'espace des phases accessible est recouvert par des tores invariants et que les régions chaotiques entre les tores de différentes espèces sont très fines (contrairement à ce que l'on avait observé pour l'hélium où la mer chaotique recouvre tout l'espace admissible).

Sans le champ, l'analyse des trajectoires révèle également un mouvement d'ensemble relatif des électrons, i.e. la quantité  $x - y$  varie peu au cours du temps et les deux électrons (de chaque côté du noyau) "vibrent", dans un mouvement presque solide, d'un côté vers l'autre. On peut alors considérer un modèle réduit dans lequel on fixe la distance inter-électronique. Ce modèle est à un degré de liberté (et donc intégrable) et l'espace des phases est recouvert par des orbites périodiques. Le système complet est une déformation du système réduit, ce qui explique la persistance de structures régulières pour le magnésium. Cette quasi-conservation de la distance inter-électronique implique qu'à tout instant, si l'un des électrons est proche du noyau, l'autre s'en trouve alors éloigné. Cela permet de définir, même en l'absence du champ laser, un électron interne et un électron externe.



**Fig. 2.** Sections de Poincaré pour le hamiltonien (1) sans le champ ( $E_0 = 0$ ) avec  $a = 3$  et  $b = 1$  pour la section d'équation  $p_y = 0$ , dans le plan  $(x, p_x)$  sur le panneau de gauche et le plan  $(x, y)$  sur le panneau de droite. Le panneau intérieur représente quelques orbites périodiques qui recouvrent l'espace des phases du modèle réduit associé à une distance inter-électronique fixe.

### 3 Ionisation simple

Lorsque le champ est allumé, l'électron externe est attrapé et envoyé loin du noyau. Par conséquent, son hamiltonien effectif est :

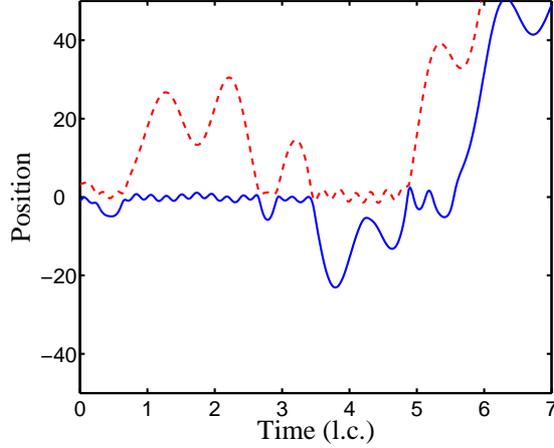
$$\mathcal{H}_1 = \frac{p_x^2}{2} + xE_0 f(t) \sin \omega t. \quad (2)$$

On remarque que l'on peut écrire facilement les expressions des trajectoires associées au hamiltonien (2). Les solutions sont composées d'une dérive linéaire modulée par l'action du champ [voir la figure 3].

Pour l'électron interne, le hamiltonien effectif regroupe les interactions avec le noyau et le champ laser :

$$\mathcal{H}_2 = \frac{p_y^2}{2} - \frac{2}{\sqrt{y^2 + a^2}} + yE_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

En l'absence de champ ( $E_0 = 0$ ),  $\mathcal{H}_2$  est intégrable et l'électron interne est confiné sur une orbite périodique. Puisqu'il est proche du noyau, sa période est approximativement  $\pi a^{3/2} \sqrt{2} \approx 23$  obtenue à partir d'une approximation harmonique (ce comportement est observé sur la figure 3).

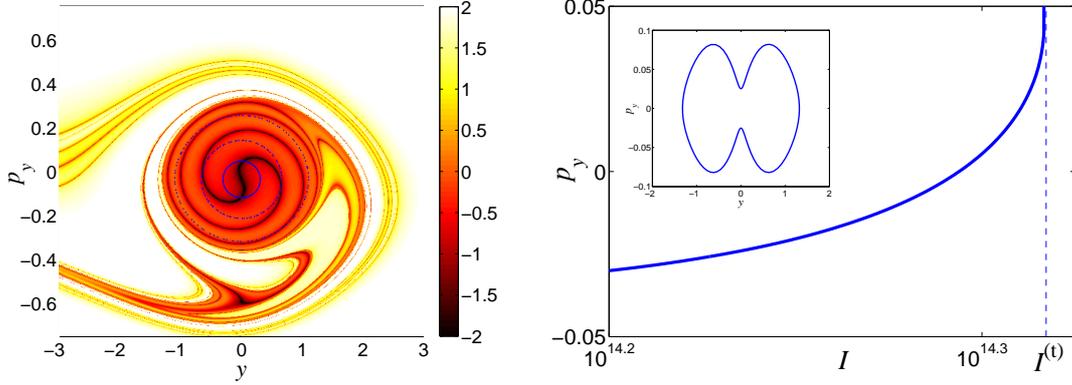


**Fig. 3.** Trajectoire typique de double ionisation non-séquentielle pour le hamiltonien (1) avec  $a = 3$  et  $b = 1$  pour une intensité  $I = 5 \times 10^{13} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  avec des conditions initiales choisies sur la surface d'énergie associée avec l'état fondamental du magnésium. Les deux positions [ $x$  trait continu et  $y$  tirets] sont représentées en fonction du temps (exprimé en cycles laser). On observe alors les comportements caractéristique pour les électrons internes et externes, comme prédits par les hamiltoniens effectifs (2) et (3).

#### 4 Double Ionisation Séquentielle (SDI)

Une fois que l'un des électrons est ionisé (généralement pendant la montée du champ), l'autre électron est laissé sous l'influence du noyau et du champ. Son hamiltonien effectif est alors donné par  $\mathcal{H}_2$ . Sur la figure 4, on représente une carte de l'excursion de l'électron après deux cycles laser ainsi que des sections de Poincaré. Deux régions distinctes apparaissent alors clairement. La première, la région interne, est composée de tores invariants qui sont de petites déformations de ceux obtenus sans le champ pour  $\mathcal{H}_2$ . Cette région elliptique est organisée autour d'une orbite périodique (elliptique) principale qui a la même période que le champ  $2\pi/\omega \approx 107.6$  a.u. Dans cette région, les électrons sont presque insensibles au champ et ne ionisent pas. La seconde région est celle extérieure dans laquelle les électrons ionisent rapidement (c'est la région où le champ l'emporte sur le potentiel d'interaction avec le noyau). Cela correspond à des trajectoires qui double-ionisent séquentiellement. Au contact de ces deux régions, une toute petite interaction (avec l'électron externe par exemple) peut déplacer l'électron interne d'un tore invariant situé près du bord de l'îlot elliptique jusque dans la région externe où il ionise rapidement.

Si l'intensité du laser  $I$  est trop faible, alors l'espace des phases est recouvert par des tores invariants et aucune double ionisation séquentielle n'est possible. La probabilité de double ionisation séquentielle dépend donc de la taille de la région régulière autour de l'orbite périodique, et donc de  $I$  (comparée à la taille caractéristique de la distribution initiale). Nous avons suivi numériquement la position et la stabilité de cette orbite périodique pour  $\omega = 0.0584$ . Tant qu'elle existe, cette orbite reste elliptique pour toutes les intensités que nous avons regardées. Avec un dessin stroboscopique (de fréquence  $\omega$ ) l'orbite périodique se trouve proche de  $p_y \approx 0$ . Sur la figure 4, nous représentons le moment de l'orbite périodique sur le dessin stroboscopique en fonction de  $I$ . On remarque que pour des intensités plus grandes que  $I^{(t)} \approx 2 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ , l'orbite périodique a disparu ainsi que l'îlot elliptique. Par conséquent, on s'attend à ce que la probabilité de double ionisation séquentielle soit égale à 1 pour des intensités plus grandes que  $I^{(t)}$ . La localisation du maximum du potentiel pour le hamiltonien (3) prédit que cette intensité  $I^{(t)}$  est approximativement indépendante de  $\omega$ . On trouve une amplitude correspondante qui est approximativement égale à  $4/(3a^2\sqrt{3})$ . On remarque donc que l'intensité correspondante décroît comme  $1/a^4$ . Pour le magnésium, cette intensité est de  $2.6 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  (en bon accord avec la valeur donnée par la localisation de l'orbite périodique), à comparer avec  $2 \times 10^{16} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  pour l'hélium, donc une énergie de saturation de la double ionisation de deux ordres de grandeur plus faible que pour l'hélium.



**Fig. 4.** Panneau de gauche : Carte de position  $y(t)$  pour  $t = 215.2$  a.u. (2 cycles laser), pour le hamiltonien (3) avec  $a = 3$  pour  $I = 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ . Sections de Poincaré (dessin stroboscopique) pour des trajectoires choisies dans la région elliptique. Le code couleur utilisé est en échelle logarithmique. Panneau de droite : Moment  $p_y$  de l'orbite périodique centrale (sur la section de Poincaré) pour le hamiltonien (3) en fonction de l'intensité du champ laser. La ligne verticale en tirets indique l'intensité  $I^{(t)} \approx 2 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  telle que pour  $I \geq I^{(t)}$  une double ionisation séquentielle complète est attendue. Le panneau intérieur représente une projection de cette orbite périodique pour  $I = 1.7 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  dans le plan  $(y, p_y)$ .

Ces résultats sont en bon accord avec la simulation d'un ensemble de trajectoires et aussi en très bon accord avec les résultats expérimentaux [7].

## 5 Double ionisation non-séquentielle

Comme on l'a remarqué plus tôt, lorsque le champ est allumé, son action est concentrée principalement sur un électron, l'électron externe. Le champ pilote l'électron externe loin du noyau, laissant ainsi l'électron interne presque non affecté par le champ puisque sa position reste petite. Avec le processus de recollision [1], l'électron externe peut revenir proche du noyau pendant le plateau du champ laser, si son amplitude n'est pas trop grande. Dans ce cas, l'électron externe transfère une partie de son énergie à l'électron interne par le biais de l'interaction électron-électron. A partir de là plusieurs scénarios sont possibles : Si l'énergie que l'électron externe a communiquée à l'électron interne est suffisante pour lui permettre de s'échapper de la région régulière (comme dans la figure 3) alors les deux électrons peuvent ioniser ensemble. Si l'énergie n'est pas suffisante, alors l'électron interne reste confiné près du noyau. Si l'énergie cédée à l'électron interne est trop grande alors on a un échange des rôles des électrons interne et externe. L'énergie maximale  $\mathcal{E}_x$  que l'électron externe gagne lorsqu'il retourne à la région interne (après avoir ionisé avec un moment proche de zéro) est obtenue à partir du hamiltonien (2) :  $\mathcal{E}_x = \kappa U_p$  où  $U_p = E_0^2/(4\omega^2)$  est l'énergie pondéromotrice et  $\kappa \approx 3.17$  [1]. Nous complétons le scénario de la recollision (qui se concentre sur l'électron externe) en fournissant la dynamique de l'électron interne qui contribue à la recollision : Pour ioniser l'électron interne, l'énergie fournie par l'électron externe doit être de l'ordre de grandeur de la différence d'énergie entre l'orbite la plus interne ( $y = 0$ ) et celle à la limite de la région elliptique ( $y = y_m$ ) pour le hamiltonien  $\mathcal{H}_2$  (voir figure 4) qui est égale à :

$$\Delta\mathcal{E}_y = \frac{2}{a} - \frac{2}{\sqrt{y_m^2 + a^2}} \quad (4)$$

Une bonne approximation de  $y_m$  est donnée par la valeur pour laquelle le potentiel présente un maximum local, i.e.  $E_0 = 2y_m/(y_m^2 + a^2)^{3/2}$ . La relation de partage équitable qui lie le modèle classique de l'électron externe  $x$  à celui de l'électron interne  $y$  :

$$\Delta\mathcal{E}_y = \frac{\mathcal{E}_x}{2} = \frac{\kappa}{2\omega^2} \frac{y_m^2}{(y_m^2 + a^2)^3} \quad (5)$$

qui définit (à travers une équation implicite) la valeur attendue du champ  $E_0^{(c)}$  pour laquelle on réalise le maximum de double ionisation non-séquentielle puisque cela décrit le cas où chaque électron externe ramène assez d'énergie cinétique pour ioniser un électron interne (même dans la configuration la plus stable pour l'électron interne) tout en restant lui même ionisé. Toutefois, remplir cette condition ne garantit pas la double ionisation non-séquentielle : le résultat final dépend du nombre et de l'efficacité des recollisions. Pour  $\omega = 0.0584$ , la valeur prévue par l'équation (5) pour l'amplitude du champ  $E_0^{(c)}$  correspond à une intensité  $I^{(c)} = 9.59 \times 10^{13} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  et se trouve être en très bon accord avec la simulation représentée sur la figure 1. Un développement de  $E_0^{(c)}$  obtenu à partir des équations (4) et (5) donne :

$$E_0^{(c)} = \frac{4\omega}{\sqrt{\kappa a}} - \left(\frac{2\omega}{\sqrt{\kappa}}\right)^{3/2} a^{1/4} + O\left(\frac{4\omega^2}{\kappa}\right), \quad (6)$$

pour  $\omega$  assez petit. À l'ordre dominant, l'intensité varie comme  $\omega^2$ . Il est aussi intéressant de noter que cette intensité décroît avec  $a$  (avec un rapport  $1/a$ ), ce qui explique que le maximum de double ionisation séquentielle est observé à une intensité plus faible pour le magnésium que pour l'hélium. Pour  $\omega = 0.0584$ , l'intensité donnée par l'équation (6) est  $10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$  ce qui est très proche de la valeur calculée pour  $I^{(c)}$ . Lorsque l'amplitude  $E_0$  du champ est trop petite, alors l'électron externe ne peut pas acquérir assez d'énergie pour ioniser l'électron interne. Lorsque le champ  $E_0$  est trop grand alors l'électron externe ne recollisionne pas avec l'électron interne puisqu'il quitte la région d'interaction presque linéairement. Ces deux limites expliquent les composantes asymptotiques de la courbe de double ionisation non-séquentielle. Une analyse plus poussée, en particulier celle du processus de recollision, permet de déduire une forme en cloche pour cette probabilité de double ionisation [6]. Ceci, mis en commun avec la courbe monotone de probabilité de double ionisation séquentielle explique la forme du coude dans la probabilité totale de double ionisation.

Pour comparer la forme du coude du magnésium avec celle de l'hélium, on regarde les variations des deux intensités caractéristiques  $I^{(c)}$  et  $I^{(t)}$  avec  $a$ . On rappelle que  $I^{(c)}$  décroît comme  $1/a$  alors que  $I^{(t)}$  décroît beaucoup plus vite en  $1/a^4$ . La conséquence est que le pic de double ionisation non-séquentielle se rapproche du pic de double ionisation séquentielle lorsqu'on augmente  $a$ . Ce qui a pour conséquence d'avoir un coude moins marqué pour le magnésium que pour l'hélium.

## Remerciements

Ce travail bénéficie du soutien financier du CNRS (sous la forme d'un contrat PICS) et de la NSF.

## Références

1. P. B. CORKUM, Plasma perspective on strong field multiphoton ionization, *Physical Review Letters*, **71** (13), 1994 (1993).
2. W. BECKER ET H. ROTTKE, Many-electron strong-field physics, *Contemporary Physics*, **49** (3), 199 (2008).
3. P. J. HO ET R. PANFILI ET S. L. HAAN ET J. H. EBERLY, Nonsequential Double Ionization as a Completely Classical Photoelectric Effect, *Physical Review Letters*, **94** (9), 093002 (2005).
4. F. MAUGER, C. CHANDRE ET T. UZER, Strong Field Double Ionization : The Phase Space Perspective, *Physical Review Letters*, **102** (17), 173002 (2009).
5. F. MAUGER, C. CHANDRE ET T. UZER, Strong field double ionization : what is under the knee?, *Journal of Physics B*, **42** (16), 165602 (2009).
6. F. MAUGER, C. CHANDRE ET T. UZER, From Recollisions to the Knee : A Road map for Double ionization in Intense Laser Fields, *Physical Review Letters*, **104** (4), 043005 (2010).
7. G. D. GILLEN, M. A. WALKER ET L. D. VAN WOERKOM, Enhanced double ionization with circularly polarized light, *Physical Review A*, **64** (4), 043413 (2001).

# Modélisation à retard : dynamique du vecteur et transmission du virus Chikungunya

Djamila Moulay & Aziz-Alaoui

LMAH, Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, BP540, 76058 Le Havre Cedex  
 djamila.moulay@univ-lehavre.fr

**Résumé.** Beaucoup de modèles mathématiques ont été établis pour décrire les relations entre, d'une part, les espèces vivantes et leur environnement et d'autre part, les interactions entre espèces vivantes d'une même communauté. Nous nous intéressons à la modélisation et l'étude de systèmes dynamiques dans le cadre de la transmission du chikungunya, maladie vectorielle. Les agents responsables du Chikungunya (maladie de l'homme courbé), tout comme ceux de la Dengue [1,3,4], sont des arbovirus (de l'anglais arthropode borne virus). Ce sont des maladies virales transmises par des insectes de la famille des arthropodes (mouches, tiques, puces...). Nous abordons la dynamique de croissance du moustique *Aedes Albopictus*, vecteur du Chikungunya entre autres, sur l'île de la Réunion, ainsi que de la transmission du virus à la population humaine de plusieurs points de vue. En effet, les observations biologiques, notamment sur le développement et la croissance du moustique, ont permis la construction de modèles mathématiques basés notamment sur l'utilisation de modèles structurés par classes et de modèles de type SIR. Après la description et l'étude d'équations différentielles ordinaire [9,10], nous nous intéressons ici aux systèmes dynamiques à retard associés. En effet, plusieurs facteurs sont à prendre en compte, notamment la durée de chaque stade du cycle biologique du moustique ou encore les période d'incubation du virus chez le moustique, ainsi que la période de virémie. C'est donc afin de décrire au mieux ces phénomènes que l'on utilise les équations différentielles à retard.

**Abstract.** Several mathematical models have been proposed to describe the relationship between living species and their environment on the one hand and between individuals of a same community. We are interested in the study of dynamical systems aimed at modeling the transmission of the vector-based disease—Chikungunya. As for the dengue disease [1,3,4], agents responsible for the Chikungunya (meaning "that which bends up") are arboviruses (shortened name for arthropod-borne viruses). These are viral disease transmitted by arthropods like flies, ticks, or fleas. Here we study both the growth dynamics of the *Aedes Albopictus* mosquito that is the Chikungunya vector on the Reunion Island, and the transmission to the human population from various points of views. Biological observations of the population growth and the development of the mosquito allowed the definition of mathematical stage-structured models and SIR type models. After a previous description and study of ordinary differential equations [9,10], we focus here on the associated delay dynamical system. Indeed several phenomena have to be taken into account, such as the duration of each biological stage of the mosquito life cycle, the incubation duration for mosquitoes, and the duration of the viremia. As a matter of fact the delay differential equation modeling helps dealing with these phenomena.

## 1 Introduction

La Réunion a connu en 2005 une épidémie de Chikungunya, maladie virale du même type que la dengue. Ce virus entraîne des pathologies lourdes pour les personnes contaminées. Après un pic d'importance en mai 2005 (400 contaminations par semaine) sur l'île de la Réunion, l'épidémie a été ralentie par l'arrivée de l'hiver austral. En effet des températures plus basses et une hygrométrie plus faible, durant cette période, ont ralenti fortement la croissance de l'*Aedes Albopictus*, le moustique vecteur de la maladie à l'homme. Ceci n'a cependant pas suffi à stopper l'épidémie dont le pic le plus important a eu lieu en février 2006, avec plus de 40000 cas par semaine. Néanmoins, ce n'est pas une maladie nouvelle. Le virus a été identifié pour la première fois en 1952-53 [12,8]. Bien qu'il soit très difficile de prévoir un tel phénomène, une étude à partir d'un modèle simple peut nous permettre de mieux appréhender les facteurs clés de la propagation de l'épidémie. Plusieurs modèles ont été établis afin de décrire la

transmission de la dengue [1,3,4], mais il n'y en a que très peu sur le Chikungunya [2]. En conséquence nous avons tout d'abord étudié la dynamique de population de l'*Aedes Albopictus* [6], vecteur sur l'île de la Réunion. Ce moustique tropical se transforme quatre fois dans sa vie. Pour décrire les différents stades de l'évolution de la maladie, nous avons proposé un modèle structuré par classes, dans lequel nous avons considéré 3 phases [9,10] :

- la phase embryonnaire (E),
- la phase larvaire (L), qui regroupe l'état de larve et de pupe car leurs modes de fonctionnement sont similaires,
- le stade adulte (A), dans lequel on ne considère que les femelles adultes qui sont hématophages.

La dynamique est alors décrite par :

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = b \left(1 - \frac{E(t)}{K_E}\right) A(t) - sE(t) - dE(t) \\ \frac{dL}{dt} = s \left(1 - \frac{L(t)}{K_L}\right) E(t) - s_L L(t) - d_L L(t) \\ \frac{dA}{dt} = s_L L(t) - d_m A(t) \end{cases} \quad (1)$$

défini sur,

$$\Delta = \left\{ (E, L, A) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq E \leq K_E, 0 \leq L \leq K_L, 0 \leq A \leq \frac{s_L}{d_m} K_L \right\}$$

où

- $b$  : taux de ponte,
- $d, d_L, d_m$  : taux de mortalité naturel des œufs, larves et adultes respectivement,
- $s, s_L$  : taux de transfert des œufs et des larves.
- $K_E, K_L$  : capacité d'accueils en œufs et larves du gîte.

Le virus se propage de la manière suivante. Les moustiques contractent le virus en piquant des animaux ou des hommes infectés par celle-ci. Ensuite ils transmettent le virus en piquant des hommes non infectés. On suppose que la dynamique de population du vecteur est décrite par le modèle d'autorégulation (1). Il a été observé que les moustiques, une fois infectés, le restent jusqu'à leurs morts. A l'inverse, les hommes deviennent immunisés après avoir contracté la maladie. On utilisera donc un modèle de type *SI* pour décrire la transmission du virus chez la population du vecteur et un modèle de type *SIR* pour la décrire au sein de la population humaine [11]. On obtient alors le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS_H}{dt}(t) = b_H(S_H(t) + I_H(t) + R_H(t)) - \beta_H \frac{I_m(t)}{A(t)} S_H(t) - d_H S_H(t) \\ \frac{dI_H}{dt}(t) = \beta_H \frac{I_m(t)}{A(t)} S_H(t) - \gamma I_H(t) - d_H I_H(t) \\ \frac{dR_H}{dt}(t) = \gamma I_H(t) - d_H R_H(t) \\ \frac{dS_m}{dt}(t) = s_L L(t) - d_m S_m(t) - \beta_m \frac{I_H(t)}{N_H(t)} S_m(t) \\ \frac{dI_m}{dt}(t) = \beta_m \frac{I_H(t)}{N_H(t)} S_m(t) - d_m I_m(t) \end{cases} \quad (2)$$

où

- $\beta_m$  = nombre de piqûres transmettant le virus au moustique,
- $\beta_H$  = nombre de piqûres transmettant le virus à l'homme,
- $b_H$  = taux de natalité chez l'homme,
- $d_H, d_m$  = taux de mortalité chez l'homme et le moustique.

Les travaux théoriques et numériques, notamment ceux portant sur la stabilité globale des équilibres, sont décrits dans [9].

## 2 Modèles à retards

Les modèles présentés précédemment sont des modèles simplifiés qui ne décrivent qu'une certaine partie de la réalité. En effet, il ne permettent de modéliser que certains états d'évolution, par exemple l'explosion, l'extinction de la population ou encore une stabilisation autour d'un effectif idéal. Or dans le cas de la population de moustiques le comportement ne peut être prévu grâce à ces modèles. Les conditions climatiques principalement, ou encore la présence de nourriture jouent un rôle fondamental dans l'évolution de celle-ci, notamment en ce qui concerne les passages du stade d'œuf au stade de larve ou encore celui du stade de larve au stade d'adulte. Par simplicité, nous considérons ces taux ( $s$  et  $s_L$ ) comme étant constants dans le cas sans retard, or la présence d'eau a une influence directe sur ces transferts. D'ailleurs les œufs du moustique *Aedes Albopictus* sont très résistants et peuvent se maintenir dans la nature tout au long de la saison sèche, larves et adultes étant capables d'éclore à la saison des pluies suivante. Heureusement tous les œufs n'en sont pas capables. Il est d'ailleurs naturel de penser qu'il est nécessaire pour les œufs pondus d'acquérir une certaine maturité pour ensuite pouvoir éclore, si les conditions du milieu le permettent, ou attendre des conditions plus favorables. On se propose alors de distinguer deux types d'œufs afin de différencier les œufs qui ont acquis une certaine maturité et qui sont prêt à éclore (noté  $E_m$ , environ 48 à 72h pour devenir mature) et ceux qui viennent d'être pondus ( $E_i$ ) [7].

De plus, nous prenons en compte le fait que les transitions d'un stade à un autre ne peuvent être considérées constantes (d'ailleurs le coté très aléatoire concernant la ponte des œufs, la nourriture présente sur un site ... ne nous permettent pas de considérer ces taux comme étant des fonctions de ces paramètres). Donc, si on désigne par  $\tau_1$  le temps de passage de l'état immature à l'état mature, alors le nombre d'œufs pondus à l'instant  $t - \tau_1$  est donné par

$$b \left( 1 - \frac{E(t - \tau_1)}{K_E} \right) A(t - \tau_1),$$

donc, si on désigne par  $d$  le taux de mortalité naturel des œufs, le nombre d'œufs qui survivent à l'instant  $t$  et deviennent matures est donné par :

$$b \left( 1 - \frac{E(t - \tau_1)}{K_E} \right) A(t - \tau_1) \exp(d\tau_1).$$

De plus, le nombre total d'œufs à l'instant  $t$  est :

$$E(t) = E_i(t) + E_m(t)$$

Donc le nombre d'œufs présents à l'instant  $t$  est donné par « la fonction de ponte » définie par :

$$f(t) = b \left( 1 - \frac{E_i(t) + E_m(t)}{K_E} \right) A(t)$$

D'où :

$$\frac{dE_i}{dt}(t) = -dE_i(t) + f(t) - f(t - \tau_1) \exp(-d\tau_1)$$

Comme dans le modèle temporelle,  $s$  désigne le taux de transfert de la classe œufs matures à la classe larve. On suppose que ce taux dépend des conditions extérieures, principalement des précipitations à chaque instant que l'on désignera par  $P(t)$ . Le nombre d'œufs matures qui éclosent à l'instant  $t$  est donc

$$s(P(t))E_m(t)$$

d'où,

$$\frac{dE_m}{dt}(t) = -dE_m(t) + f(t - \tau_1) \exp(-d\tau_1) - s(P(t))E_m(t).$$

Si on désigne par  $\tau_2$  la durée du stade larvaire, c'est-à-dire le temps nécessaire à la population de larves pour devenir adultes, alors le nombre de larves qui se transforment en adultes à l'instant  $t$  est donné par,

$$g(t - \tau_2) = s(P(t - \tau_2)) \left( 1 - \frac{L(t - \tau_2)}{K_L} \right) E_m(t - \tau_2) \exp(-d_L \tau_2)$$

d'où

$$\frac{dL}{dt}(t) = -d_L L(t) + g(t) - g(t - \tau_2) \exp(-d_L \tau_2).$$

Enfin si on désigne par  $\tau_3$  l'espérance de vie des femelles, alors

$$\frac{dA}{dt}(t) = -d_m A(t) + g(t - \tau_2) \exp(-d_L \tau_2) - g(t - (\tau_2 + \tau_3)) \exp(-(d_L \tau_2 + d_m \tau_3))$$

où  $(d_E, d_L, d_m, b_V, r, K_E, K_L)$  sont des paramètres positifs et  $s = s(P(t))$  est continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[0;1]$ .

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dE_i}{dt}(t) = -dE_i(t) + f(t) - f(t - \tau_1) \exp(-d\tau_1) \\ \frac{dE_m}{dt}(t) = -dE_m(t) + f(t - \tau_1) \exp(-d\tau_1) - s(P(t))E_m(t) \\ \frac{dL}{dt}(t) = -d_L L(t) + g(t) - g(t - \tau_2) \exp(-d_L \tau_2) \\ \frac{dA}{dt}(t) = -d_m A(t) + g(t - \tau_2) \exp(-d_L \tau_2) - g(t - (\tau_2 + \tau_3)) \exp(-(d_L \tau_2 + d_m \tau_3)) \end{cases} \quad (3)$$

Ces changements dans la description de la dynamique de populations se répercutent sur le modèle de type SI du vecteur qui s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{dS_m}{dt}(t) &= -d_m S_m(t) + g(t - \tau_2) \exp(-d_L \tau_2) - \beta_m \frac{I_H(t)}{N_H(t)} S_m(t) \\ &\quad - g(t - (\tau_2 + \tau_3)) \exp\left(- (d_L \tau_2 + d_m \tau_3) - \int_{t-\tau_3}^t \beta_m \frac{I_H(s)}{N_H(s)} ds\right) \\ \frac{dI_m}{dt}(t) &= -d_m I_m(t) + \beta_m \frac{I_H(t)}{N_H(t)} S_m(t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$- g(t - (\tau_2 + \tau_3)) \exp(- (d_L \tau_2 + d_m \tau_3)) \left( 1 - \exp\left(\int_{t-\tau_3}^t \beta_m \frac{I_H(s)}{N_H(s)} ds\right) \right) \quad (5)$$

Plusieurs autres termes à retard peuvent être introduit, comme la période d'incubation du virus chez le moustique ou l'homme, ou encore le temps de guérison  $\tau_4$  comme ce qui suit

$$\begin{aligned} \frac{dI_H}{dt}(t) &= -d_H I_H(t) + \beta_H \frac{I_m(t)}{A(t)} S_H(t) - \beta_H \frac{I_m}{A}(t - \tau_4) S_H(t - \tau_4) \exp(-d_H \tau_4) \\ \frac{dR_H}{dt}(t) &= -d_H R_H(t) + \beta_H \frac{I_m(t - \tau_4)}{A(t - \tau_4)} S_H(t - \tau_4) \exp(-d_H \tau_4) \end{aligned} \quad (6)$$

### 3 Conclusion

Le passage au système à retard (4)-(6) et l'ajout de plusieurs termes à retard n'a ici d'intérêts que dans le cadre d'une étude numérique afin de confronter nos résultats aux données entomologiques. Le peu de données sur le moustique, notamment sur les taux de transmissions de la maladie nous a conduit à

l'utilisation des systèmes à retards. En effet, il paraît plus réaliste de considérer les périodes d'incubation du virus chez le moustique, plus facilement quantifiables que le temps de guérison chez l'homme. L'étude théorique en cours porte notamment sur des modèles prenant en compte deux retards, la durée du cycle larvaire ainsi que l'espérance de vie du moustique et s'appuie sur la théorie des systèmes à retard développé par Y. Kuang [7] et K. Gopalsamy [5], dans le cas de la dynamique de population et la période d'incubation du virus chez le vecteur dans le cas du modèle de transmission.

## Références

1. M. DEROUICH, A. BOUTAYEB & E. H. TWIZELL, A model of Dengue fever, *BioMedical Engineering OnLine*, **2**, 4 (2003).
2. Y. DUMONT, F. CHIROLEU & C. DOMERG, On a temporal model for the Chikungunya disease : Modeling, theory and numerics, *Mathematical Biosciences*, **213** (1), 80-91 (2008).
3. L. ESTEVA & C. VARGAS, Analysis of a Dengue disease transmission model, *Mathematical Biosciences*, **150**, 131-151 (1998).
4. L. ESTEVA & C. VARGAS, A model for dengue disease with variable human population, *Journal of Mathematical Biology*, **38**, 220, (1999).
5. K. GOPALSAMY, *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1992).
6. W.H HAWLEY, The Biology of *Aedes Albopictus*, *Journal of the American Mosquito Control Association*, **4**, 1, 1-39 (1988).
7. Y. KUANG, *Delay differential equations with applications in population dynamics*, Mathematics in Science and Engineering **191**, Academic Press, (1993).
8. W. H. R. LUMDSEN, An epidemic of virus disease in Southern Province, Tanganyika territory, in 1952-1953. II General Description and Epidemiology, *Transactions of the Royal Society of Tropical Medicine and Hygiene*, **49** (1), 33-57 (1955).
9. D. MOULAY, M. A. AZIZ ALAOUI & M. CADIVEL, The Chikungunya Disease : Modeling, Vector and Transmission Global Dynamics, *Mathematical Bioscience*, soumis.
10. D. MOULAY, M. CADIVEL & M.A. AZIZ ALAOUI, L'épidémie de Chikungunya : modélisation et stabilité, *12<sup>ième</sup> Rencontre du non linéaire*, (2009).
11. J.D. MURRAY, *Mathematical Biology*, (2nd Ed) Biomathematics Texts, **19**, Springer, Berlin, (1980).
12. M.C. ROBINSON, An epidemic of virus disease in Southern Province, Tanganyika territory, in 1952-53 — I Clinical Features, *Transactions of the Royal Society of Tropical Medicine and Hygiene*, **49** (1), 28-32 (1955).



## Dynamique des interactions patient-ventilateur durant une assistance ventilatoire nocturne

Roomila Naeck<sup>1,2</sup>, Dounia Bounoiare<sup>1,2</sup>, Ubiratan S. Freitas<sup>2</sup>, Herinaina Rabarimanantsoa<sup>2</sup>, Adriana Portmann<sup>1</sup>, Florence Portier<sup>1</sup>, Antoine Cuvelier<sup>1</sup>, & Jean-François Muir<sup>1</sup> & Christophe Letellier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> GRHV UPRES EA 3830, CHU de Rouen — Université de Rouen, France

<sup>2</sup> CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

naeck@coria.fr

**Résumé.** La ventilation non invasive est un traitement couramment utilisé pour la prise en charge des patients souffrant d'insuffisance respiratoire chronique. Le succès de cette assistance ventilatoire est souvent lié à la tolérance du patient qui dépend de la qualité de la synchronisation entre le rythme respiratoire spontané du patient et les cycles ventilatoires délivrés par le ventilateur. Trente-quatre enregistrements polysomnographiques ont été analysés à l'aide d'un algorithme spécifique traitant les mesures du débit et de la pression. Quatre groupes de patients ont été identifiés selon la nature des corrélations entre les asynchronismes et les fuites. Différents mécanismes, qui dépendent des stades du sommeil, ont ainsi été mis en évidence.

**Abstract.** Noninvasive ventilation is a common procedure for managing patients having chronic respiratory failure. The success of this ventilatory assistance is often linked with patients tolerance that is known to be related to the quality of the synchronization between patient's spontaneous breathing cycles and ventilatory cycles delivered by the ventilator. Thirty-four sleep sessions were automatically investigated using a specific algorithm processing airflow and pressure time series. Four groups of patients were defined according to the interplay between asynchrony events and leaks. Different mechanisms that depend on sleep stages were thus evidenced.

Lorsque la respiration spontanée ne maintient plus une ventilation alvéolaire et des échanges gazeux suffisants, une assistance ventilatoire mécanique peut être prescrite afin de réduire le travail ventilatoire [1]. Une composante dynamique importante intervenant dans le confort du patient est le défaut de synchronisation entre la respiration spontanée du patient et les cycles ventilatoires délivrés par le ventilateur. La qualité des interactions patient-ventilateur [2] est par conséquent l'un des facteurs critiques déterminant le succès — ou non — de l'assistance ventilatoire puisqu'il est largement reconnu que la tolérance du patient dépend de sa sensation de confort [3]. Pour cela, des algorithmes de détections automatiques des cycles ventilatoires et de différents types d'asynchronismes ont été développés [4,4]. Il est par conséquent possible d'analyser les taux d'asynchronismes, non plus sur une trentaine de minutes, mais sur des nuits complètes. Il est alors possible d'estimer la qualité des interactions patient-ventilateur dans des conditions proches de celles correspondant aux séances de ventilations nocturnes au domicile du patient.

Les principaux asynchronismes peuvent se regrouper en deux grandes catégories, les cycles non déclenchés (les efforts inspiratoires du patient sont inefficaces) et les cycles déphasés, c'est-à-dire qu'il y a un déphasage entre le cycle respiratoire du patient et le cycle ventilatoire délivré par le ventilateur. Il est connu que les efforts inspiratoires inefficaces sont plus fréquent durant le sommeil [6] et lorsque la pression inspiratoire positive (PIP) délivrée par le ventilateur augmente [7]. De plus, les asynchronismes sont souvent associés à la présence de fuites mais il n'est pas établi que la corrélation soit toujours présente [8,9]. Par ailleurs, l'incidence de ces événements sur le confort demeure très incertaine. Notre objectif est par conséquent d'estimer les corrélations entre, d'une part les grandes catégories d'asynchronismes et, d'autre part, entre les asynchronismes et les fuites.

### 1 Patients et système d'acquisition

Cette étude rétrospective a été réalisée au CHU de Rouen. Trente-quatre enregistrements ont été extraits de la base de données du laboratoire de sommeil de l'Hôpital de Bois-Guillaume. Tous les

patients ont été ventilés avec un ventilateur à deux niveaux de pression (RESMED VPAP III, Australie). Ces patients se répartissaient en deux groupes selon leur pathologie. Le premier groupe comprenait des patients souffrant d'un Syndrome Obésité Hypoventilation (SOH) associé à une augmentation des résistances des voies respiratoires en raison de leur surpoids. Le second groupe est associé à une Broncho-Pneumopathie Chronique Obstructive (BPCO). Des obstructions se présentent dans les petites voies aériennes, limitant les échanges gazeux et réduisant la respiration. Les principales caractéristiques des trente-quatre patients sont reportés Tab. 1. 19 patients (56%) étaient atteints de SOH et 15 patients (44%) avaient une BPCO. 30 patients (88%) présentaient un syndrome d'apnées du sommeil (définie comme plus de 10 apnées par heure). Tous les patients étaient ventilés depuis plusieurs mois. 19 patients (56%) étaient hypercapniques ( $\text{PaCO}_2 > 5,6 \text{ cmH}_2\text{O}$ ).

Les paramètres de ventilation sont ceux appliqués par le clinicien en charge du patient. La ventilation est appliquée avec un masque facial ou nasal selon les patients. Le mode ventilatoire retenu consiste à délivrer une pression expiratoire positive (PEP) qui passe à une pression inspiratoire positive (PIP) supérieure, sous l'action des appels inspiratoires du patient. Lorsque le débit inspiratoire redescend au dessous d'un certain pourcentage du maximum atteint au cours du cycle, la pression redescend à la PEP. Le mode "Ventilation Spontanée avec Aide Inspiratoire" (VS-AI) est un mode souvent qualifié de "physiologique" car il laisse le patient contrôler sa respiration. Il n'est par conséquent par surprenant qu'il soit mieux toléré par les patients que les autres modes de ventilation [10,11]. Un ventilateur à deux niveaux de pression délivre une PIP prédéfinie durant l'inspiration et une PEP, de valeur inférieure, durant l'expiration. La bascule de la PIP à la PEP se fait, dans le cas de ces enregistrements, à 30% de la valeur maximum du débit durant l'inspiration. Un taux significatif d'efforts inspiratoires inefficaces a été observé pour 14 patients (41%) et des cycles déphasés pour 14 patients (41%). 12 patients (35%) ont présentés les deux types d'asynchronismes. Un taux d'asynchronismes significatif ( $\rho_{\text{asyn}} > 10\%$ ) a été observé pour 17 patients (50%).

Les motifs respiratoires, les asynchronismes et les fuites ont été estimés à partir des mesures du débit et de la pression dans le circuit de ventilation selon une méthodologie précédemment développée [4,11]. En effet, durant les mesures de routine des motifs respiratoires, le débit ( $Q_v$ ) a été mesuré à l'aide d'un pneumotachographe relié à un capteur de pression. Le pneumotachographe était inséré entre le masque et le ventilateur. La pression au sein du circuit ( $P_{\text{aw}}$ ) était mesurée avec un capteur de pression différentiel au voisinage du pneumotachographe. Les asynchronismes étaient automatiquement détectés à l'aide d'un algorithme traitant les grandeurs mesurées.

Le taux d'asynchronismes  $\rho_{\text{asyn}}$  a été trouvé significativement corrélé à la PIP ( $p < 0,002$ ), c'est-à-dire que les patients ayant moins de 10% d'asynchronismes étaient ventilés avec une PIP ( $22,25 \pm 3,15 \text{ mbar}$ ) plus petite que celle appliquée aux patients présentant plus de 10% d'asynchronismes ( $\text{PIP} = 25,30 \pm 3,10 \text{ mbar}$ ). Ceci confirme des résultats antérieurs [7]. Le taux d'efforts inefficace  $\rho_{\text{IE}}$  a été trouvé corrélé avec la présence de fuites ( $p < 10^{-5}$ ), c'est-à-dire que les patients ne présentant pas de fuites ont un taux d'efforts inefficaces significativement plus faible que ceux en présentant. Le taux d'asynchronismes est corrélé à la présence d'une sonde œsophagienne lorsqu'il était supérieur à 10% ( $p < 0,0012$ ).

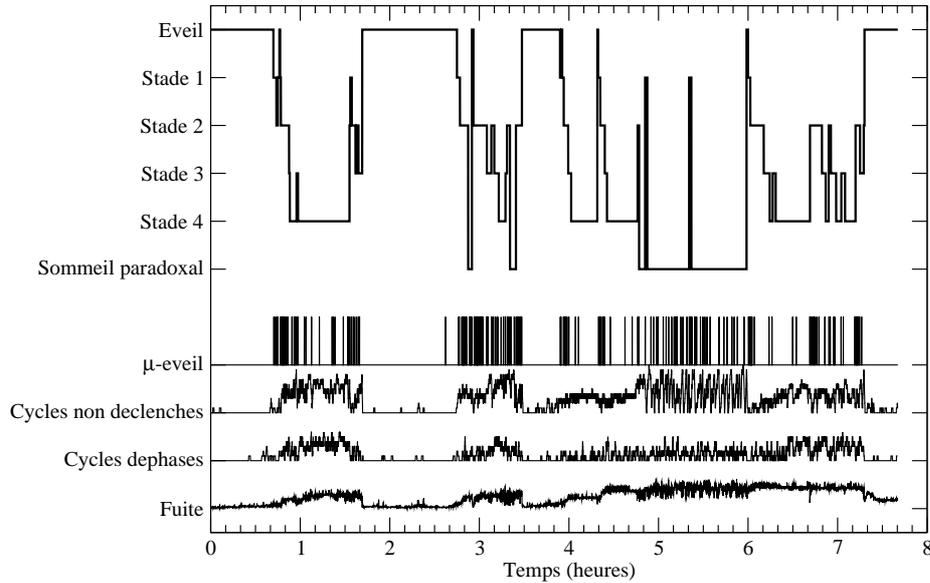
## 2 Dynamique ventilatoire et hypnogramme

Les séances d'assistance ventilatoire se déroulent de manière quasi-générale la nuit. Il est donc important que les interactions patient-ventilateur perturbent le moins possible la qualité du sommeil. Cette dernière reste très délicate à estimer de manière objective. Depuis de nombreuses années, le sommeil

**Tab.1.** Principales caractéristiques cliniques des patients ( $n = 34$ ).

Paramètres	Moyenne	(ET)
Age (années)	64,1	(11,8)
Homme :Femme		24 :10
IMC ( $\text{kg.m}^{-2}$ )	42,0	(10,8)
$\text{PaO}_2$ ( $\text{cmH}_2\text{O}$ )	9,5	1,2
$\text{PaCO}_2$ ( $\text{cmH}_2\text{O}$ )	5,8	(0,9)
Pathologie	$n$	(%)
BPCO	15	(44)
SOH	19	(56)

Valeurs normales : ( $10,7 < \text{PaO}_2 < 12,0$ )  $\text{cmH}_2\text{O}$ ,  $\text{PaCO}_2 \approx 5,3 \text{ cmH}_2\text{O}$ , ( $18,5 < \text{IMC} < 25$ )  $\text{kg.m}^{-2}$  et l'obésité est définie pour un Indice de Masse Corporelle  $> 30 \text{ kg.m}^{-2}$ . ET— écart-type



**Fig. 1.** Evolution des différentes grandeurs analysées au cours d'une nuit sous ventilation non invasive. Exemple du patient 15 (Groupe 1) souffrant d'un syndrome obésité hypoventilation, portant un masque facial et auquel est appliqué une sonde œsophagienne. Valeurs des paramètres du ventilateur : PIP=24,6 cmH<sub>2</sub>O, PEP=8,4 cmH<sub>2</sub>O,  $\rho_{\text{asyn}} = 89,2\%$

est divisé en stades discrets — l'éveil, les stades 1, 2, 3 et 4, et le sommeil paradoxal — selon un standard largement accepté [13]. Toutefois, ces règles de codage sont appliquées par un neurologue sur les électroencéphalogrammes, les mouvements de la cage thoracique, le débit et un électromyogramme du menton et des jambes de manière à réduire la variabilité souvent observée entre neurologistes [14]. Si les stades 3 et 4 apparaissent toujours sur l'hypnogramme (Fig. 1), ils ne sont plus distingués dans les analyses comme le recommande le nouveau standard. L'un des indicateurs les plus fiables pour l'estimation de la qualité du sommeil repose sur la fragmentation de celui-ci à l'aide du taux de micro-éveils (des éveils d'une durée comprise entre trois et quinze secondes dont le patient n'a pas conscience) [15]. Les micro-éveils sont donc eux aussi identifiés par le neurologue (Fig. 1).

Afin de disposer de grandeurs variant relativement continuellement dans le temps, nous avons estimé les taux d'efforts inspiratoires inefficaces et de cycles déphasés sur une fenêtre glissante de 10 cycles ventilatoires. Enfin, la fuite non intentionnelle — autre que la fuite intentionnelle située sur le masque qui permet d'évacuer le gaz carbonique durant l'expiration — est estimée par calcul d'une conductance  $G$  définie comme le rapport du débit dont les hautes fréquences sont filtrées sur la racine carré de la pression elle-aussi issue d'un filtre passe-bas. La fuite  $\Phi_L$  est alors donnée par  $\Phi_L = G\sqrt{P}$  où  $P$  est la pression non filtrée [16]. L'évolution temporelle de ces grandeurs est donnée sur une nuit complète pour un patient (Fig. 1).

### 3 Analyse par covariance croisée

L'une des questions clé en ventilation non invasive est d'estimer dans quelle mesure les asynchronismes ont un impact sur la qualité du sommeil et comment ces événements sont reliés à la présence de fuites. Ces deux questions ont été traitées en regardant comment les différentes grandeurs mesurées (Fig. 1) sont corrélées. La covariance croisée estime le degré de similitude entre deux séries temporelles. Pour des variables discrètes  $x$  et  $y$ , elle est définie par :

$$R(j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau_w} (x_i - \bar{x})(y_{i-j} - \bar{y})}{(N - \tau_w) \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \quad (1)$$

où  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  représentent les valeurs moyennes des variables  $x$  et  $y$ ,  $N$  le nombre de points,  $j$  le décalage considéré et  $\sigma_x^2$  et  $\sigma_y^2$ , les variances de  $x$  et de  $y$ . La covariance croisée  $R_{xy}(j)$ , pour un décalage  $j$  donné, correspond à la covariance simple entre le signal  $x$  et le signal  $y$  décalé de  $j$ . Les valeurs de cette fonction sont calculées pour  $-\tau_w \leq j \leq \tau_w$ . Nous avons choisi  $\tau_w$  égal à 20 cycles. On considère ensuite la valeur absolue maximale de cette fonction sur cet intervalle et on teste l'hypothèse nulle qu'elle ne soit pas significativement différente de zéro. Si l'hypothèse nulle est rejetée, avec  $p < 0,05$ , on note par "+" ("−") une covariance croisée positive (négative).

Après plusieurs essais, nous avons déterminé, d'une part que les covariances  $R_{\text{EI-CD}}$  entre les efforts inspiratoires inefficaces (EI) et les cycles déphasés (CD), et d'autre part que les covariances  $R_{\Phi_F-\text{EI}}$  entre les fuites non intentionnelles et les efforts inefficaces permettaient de dégager quatre grands groupes de patients (Tab. 2). La covariance  $R_{\text{EI-CD}}$  est la plus discriminante. Dans la plupart des cas ( $n = 23$ , 68%), les efforts inspiratoires inefficaces sont positivement corrélés aux cycles déphasés. Ceci signifie qu'il y a une forte relation entre l'apparition des efforts inefficaces et les cycles déphasés. Ces vingt-trois patients sont ensuite répartis en deux groupes selon le signe de la covariance  $R_{\Phi_F-\text{EI}}$  : 17 patients ont une covariance  $R_{\Phi_F-\text{EI}}$  positive (groupe I) et pour six patients d'entre eux, les efforts inefficaces sont anti-corrélés aux fuites  $\Phi_F$  (groupe II). Dans ce dernier cas, les efforts inefficaces apparaissent principalement lorsque le taux de fuites non intentionnelles diminue.

Le groupe I correspondait à ce qui est couramment observé et rapporté dans la littérature, c'est-à-dire que les patients présentaient des asynchronismes qui survenaient bien lorsque le taux de fuites augmentait. Le groupe III correspondait aux patients présentant les deux types d'asynchronismes anti-corrélés, c'est-à-dire que ces deux types d'asynchronismes avaient plutôt tendance à s'exclure (en d'autres termes, ils apparaissent rarement ensemble) : ainsi, nous observions des bouffées d'efforts inspiratoires inefficaces et des bouffées de cycles déphasés. Le groupe IV regroupait toutes les autres possibilités (Tab. 2). Tous les patients appartenant à ce groupe avaient moins de 10% d'asynchronismes, c'est-à-dire que c'était, *a priori*, des patients dont le confort et la qualité du sommeil n'était pas affectés par les asynchronismes.

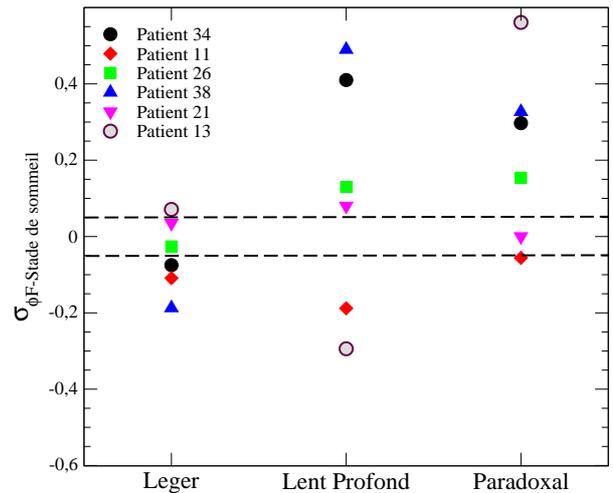
## 4 Dépendance au sommeil

Un seul patient présentant plus de 10% d'asynchronismes se retrouvait avec des fuites non intentionnelles corrélées à l'état d'éveil. Tous les autres patients présentant un taux significatif d'asynchronismes avaient des fuites corrélées aux stades du sommeil (Fig. 2), la fuite augmentant avec la "profondeur" du sommeil (stades d'indice plus élevé).

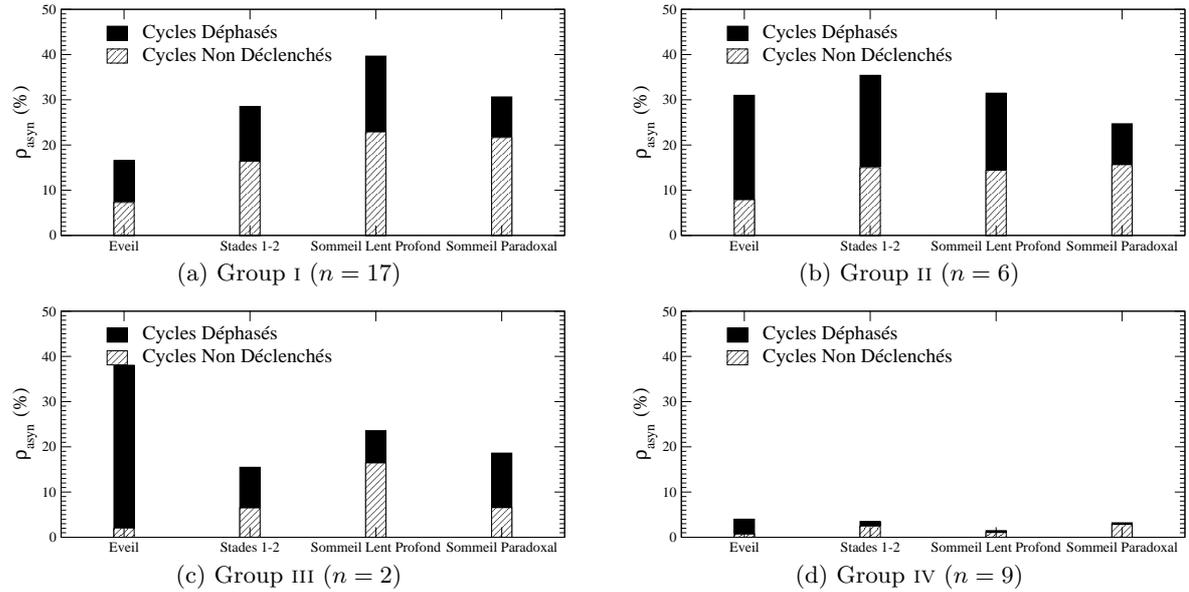
Le groupe I représentait le scénario le plus fréquemment évoqué [17]. Les deux types d'asynchronismes étaient principalement observés durant le sommeil lent profond (Fig. 3a). Les efforts inspiratoires inefficaces étaient également souvent observés durant le sommeil lent profond mais le taux de cycles déphasés était divisé par 2. Durant le sommeil léger, les asynchronismes étaient moins souvent identifiés. Lorsque les patients étaient éveillés, ils géraient mieux leur ventilateur et le taux d'asynchronismes chutait au-dessous de 10%.

**Tab.2.** Quatre groupes de patients définis selon les covariances croisées  $R_{\text{EI-CD}}$  et  $R_{\Phi_F-\text{EI}}$ . Les patients sont associés au groupe IV lorsqu'ils ne font pas partie du groupe I, II ou III. Tous les patients du groupe IV ont moins de 10% d'asynchronismes.

		$R_{\text{EI-CD}}$		
		< 0	$\emptyset$	> 0
$R_{\Phi_F-\text{EI}}$	< 0	$P_9, P_{14}, P_{31}$	$P_{12}$	<b>Groupe II</b> $n = 6$ (18%)
	$\emptyset$	$P_2, P_{16}$	$P_8$	
	> 0	<b>Groupe III</b> $n = 2$ (6 %)	$P_1, P_{35}$	<b>Groupe I</b> $n = 17$ (50 %)



**Fig. 2.** Covariance croisée  $R_{\Phi_F, \text{sleep}}$  pour chaque groupe de sommeil. Cas des patients appartenant au groupe II.



**Fig. 3.** Distributions des taux d'asynchronismes en fonctions des stades de sommeil pour les quatre groupes de patients.

La principale caractéristique du groupe II était que le taux de cycles déphasés décroissait avec la profondeur du sommeil (Fig. 3b) et que les efforts inspiratoires inefficaces durant le sommeil étaient observés deux fois plus souvent que durant l'éveil.

Les patients du groupe III présentaient un fort taux de cycles déphasés ( $\bar{\rho}_{CD} = 35\%$ ) durant l'éveil, alors qu'il n'est que de 10% durant les différents stades de sommeil. Ces deux patients pourraient être l'exemple de patients opposant une résistance au débit insufflé lors de la ventilation.

## 5 Conclusion

La ventilation non invasive est souvent appliquée la nuit au domicile des personnes souffrant d'insuffisance respiratoire chronique. Il est par conséquent important d'étudier la qualité de la ventilation sur la nuit complète puisque les motifs respiratoires dépendent des stades de sommeil. Aussi, l'étude des interactions patient-ventilateur nécessite le recours à des algorithmes d'analyse automatique des mesures de débit et de pression. Au cours de cette étude rétrospective, 34 séances de ventilation ont été analysées à l'aide de covariances croisées. Il apparaît que les patients peuvent être répartis selon quatre grands groupes d'interactions. Le groupe I correspond essentiellement à la situation la plus courante pour laquelle les efforts inspiratoires inefficaces et les cycles déphasés sont corrélés positivement et sont le plus souvent observés lorsque les fuites sont présentes. Le groupe II est atypique dans le sens où les deux types d'asynchronismes sont anti-corrélés. Le troisième groupe est associé à des patients ayant un fort taux d'asynchronismes durant l'éveil que nous interprétons comme un comportement de refus à la ventilation non invasive. Le quatrième groupe est associé aux patients présentant moins de 10% d'asynchronismes, c'est-à-dire pour lesquels le taux d'asynchronismes n'est pas significatif et que nous considérons comme une ventilation idéale.

## Références

1. M. FERRER, A. ESQUINAS, M. LEON, G. GONZALEZ, A. LARCON & A. TORRES, Noninvasive ventilation in severe hypoxemic respiratory failure, *American Journal of Respiratory Critical Care Medicine*, **168**, 1438-1444 (2003).
2. M. TOBIN, A. JUBRAN & F. LAGHI Patient-ventilator interactions, *American Journal of Respiratory Critical Care Medicine*, **163**, 1059-1063 (2001).
3. E. CARLUCCI, J. RICHARD, M. WYSOCKI, E. LEPAGE & L. BROCHARD, Noninvasive versus conventional mechanical ventilation. An epidemiologic survey, *American Journal of Respiratory Critical Care Medicine*, **163**, 874-880 (2001).
4. L. ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER, E. VÉRIN, & J.-F. MUIR, Asynchrony and cyclic variability in pressure support noninvasive ventilation, *Computer in Biology and Medicine*, **37**, 1308-1320 (2007).
5. A. CUVELIER, L. ACHOUR, H. RABARIMANANTSOA, C. LETELLIER, J.-F. MUIR & B. FAUROUX, A noninvasive method to identify ineffective triggering in patients with noninvasive pressure support ventilation, *Respiration*, published online December 2 (2009).
6. F. FANFULLA, M. DELMASTRO, A. BERARDINELLI, N. D. LUPO, & S. NAVA, Effects of different ventilator settings on sleep and inspiratory effort in patients with neuromuscular disease, *American Journal of Respiratory Critical Care Medicine*, **172**, 619-624 (2005).
7. E. GIANNOULI, K. WEBSTER, D. ROBERTS & M. YOUNES, Response of ventilator-dependent patients to different levels of pressure support and proportional assist, *American Journal of Respiratory Critical Care Medicine*, **159**, 1716-1725 (1999).
8. J. R. HOTCHKISS, A. B. ADAMS, D. J. DRIES, J. J. MARINI & P. S. CROOKE, Dynamic behavior during noninvasive ventilation. Chaotic support? *American Journal of Respiration and Critical Care Medicine* **163** (2), 374-378 (2001).
9. J. M. HAYNES, Patient-ventilator asynchrony in a sleeping patient receiving pressure-support ventilation, *Respiratory Care*, **53** (8), 1085-1088 (2008).
10. B. FAUROUX, J. PIGEOT, M. I. POLKEY, D. ISABEY, A. CLEMENT & F. LOFASO, In vivo physiologic comparison of two ventilators used for domiciliary ventilation in children with cystic fibrosis, *Critical Care Medicine*, **29**, 2097-2105 (2001).
11. M. VITACCA, F. RUBINI, K. FOGGIO, S. SCALVINI, S. NAVA & N. AMBROSINO, Non-invasive modalities of positive pressure ventilation improve the outcome of acute exacerbations in COLD patients, *Intensive Care Medicine*, **19**, 450-455 (1993).
12. H. RABARIMANANTSOA, L. ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER & J.-F. MUIR, Recurrence plots and Shannon entropy for a dynamical analysis of asynchronisms in mechanical non-invasive ventilation, *Chaos*, **17**, 013115 (2007).
13. A. RECHTSCHAFFEN & A. KALES (eds.), *A manual of standardized terminology, techniques and scoring system of sleep stages in human subjects*. Los Angeles : Brain Information Service - Brain Research Institute, University of California (1968).
14. C. IBER, S. ANCOLI-ISRAEL, A. CHESSON & S. F. QUAN (Eds.), *The AASM manual for the scoring of sleep and associated events : rules, terminology, and technical specification*, (American Academy of Sleep Medicine, Westchester) (2007).
15. M. BONNET, D. CARLEY, M. CARSKADON, P. EASTON, C. GUILLEMINAULT, R. HARPER, B. HAYES, M. HIRSHKOWITZ, K. PERIKLIS, S. KEENAN, M. PRESSMAN, T. ROEHRS, J. SMITH, J. WALSH, S. WEBER & P. WESTBROOK, EEG arousals : scoring rules and examples : a preliminary report from the sleep disorders atlas task force of the American Sleep Disorders Association, *Sleep*, **15**, 173-184 (1992).
16. M. BERTHON-JONES, Determination of leak and respiratory airflow, United States Patent 6152129 (ResMed Limited, Australia) (2000).
17. Y. F. GUO, E. SFORZA & J. P. JANSSENS, Respiratory patterns during sleep in obesity-hypoventilation patients treated with nocturnal pressure support : a preliminary report, *Chest*, **131**, 1090-1099 (2007).

# Générateur de chaos opto-électronique à double retard pour les télécommunications optiques sécurisées à haut débits

Mourad Nourine, Laurent Larger, Yanne Kouomou Chembo, & Kirill Volyanskiy & Michael Peil

Département d'Optique, Institut FEMTO-ST, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France.

[mourad.nourine@univ-fcomte.fr](mailto:mourad.nourine@univ-fcomte.fr)

**Résumé.** Dans cet article sont présentés nos résultats d'investigations d'un système de cryptographie physique dédié aux télécommunications optiques sécurisées à haut débits. Ce système est composé d'un émetteur et d'un récepteur du même type — clé cryptographique physique secrète — mettant à profit les propriétés des systèmes chaotiques continus, afin de sécuriser en temps réel des transmissions de données optiques par chaos. L'émetteur en question est un oscillateur optoélectronique à double retard, dont le fonctionnement s'appuie sur une dynamique non linéaire à délais; il permet pratiquement de générer d'une manière contrôlée un chaos d'une grande complexité sur la variable intensité optique. L'élément clé de décodage réside dans la capacité du système récepteur à reproduire le plus fidèlement possible les oscillations chaotiques de l'émetteur, autrement dit la *synchronisation* entre chaos, en vue de restituer avec une bonne qualité l'information utile noyée par modulation chaotique au niveau de l'émetteur.

**Abstract.** We report on the study of a physical cryptographic system intended for high speed optical telecommunications. This system consists of a transmitter and a receiver of the same type — secret physical cryptographic key — using the advantage of the chaotic systems properties in order to secure optical data transmission. The transmitter under study is a double delay line optoelectronic oscillator. This allows to produce high complexity chaotic signals in a controlled way, using the variable optical intensity. The decoding key issue is the capability of the receiving system to reconstruct chaotic oscillations of the transmitter: an efficient synchronization between distant chaos allows to reconstruct with a high quality the useful information, which is hidden by chaotic modulation at the transmitter.

## 1 Introduction

Depuis le travail fondateur de synchronisation du chaos déterministe de Pecora et Carroll [1], les travaux sur la cryptographie physique par chaos n'ont cessé de se développer, en particulier dans le domaine des télécommunications optiques [2,3,4] : améliorations des systèmes pour augmenter la qualité et le débit de transmission, mais aussi diversifications des architectures de génération de chaos afin d'en augmenter la complexité, et donc la sécurité. De manière antagoniste, la sécurité dépend de la complexité des transformations dynamiques qui mènent au chaos, mais malheureusement cette complexité rend aussi l'opération de synchronisation plus délicate d'un point de vue expérimental.

Le système dynamique proposé ici pour la génération de chaos appartient à la catégorie des systèmes d'Ikeda [5]. Il est construit à l'aide d'un composant électro-optique spécifique réalisant une non linéarité bi-dimensionnelle (2D), adaptée aux télécommunications haut débits. Ce composant est un interféromètre à ondes multiples, réalisé en optique intégré (LiNbO<sub>3</sub>), et disposant de 2 électrodes de modulation indépendantes : un modulateur QPSK (Quadrature Phase Shift Keying). Le but de cette architecture est d'augmenter la complexité du chaos généré, sur le principe d'une dynamique non linéaire à double retard.

Dans cet article, nous donnerons d'abord une brève description du dispositif expérimental permettant de produire les signaux chaotiques, puis sa mise en équation afin de le simuler et de l'explorer numériquement. Ensuite, nous présentons les premiers résultats obtenus d'une architecture émetteur-récepteur, et de ses performances en terme de synchronisation. Le codage et décodage d'une information binaire sera analysé pour ce type d'architecture, avec laquelle nous espérons pouvoir atteindre des débits multi-Gigabit.

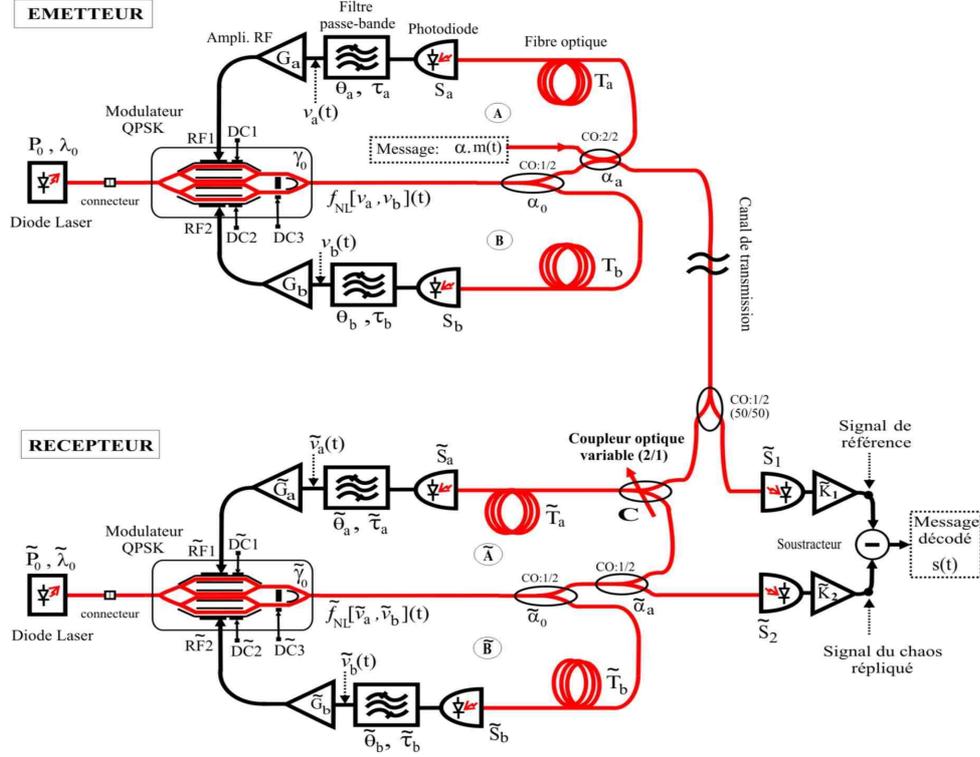


Fig. 1. Schéma de principe du système cryptographique par chaos complet.

## 2 Émetteur : générateur de chaos à modulateur QPSK

### 2.1 Description

Le schéma de la figure 1 illustre le système cryptographique physique complet pour la transmission unidirectionnelle de données optiques ; il est composé de deux sous-systèmes : un émetteur et un récepteur (le symbole « *tilde* » dénote tous les paramètres du récepteur).

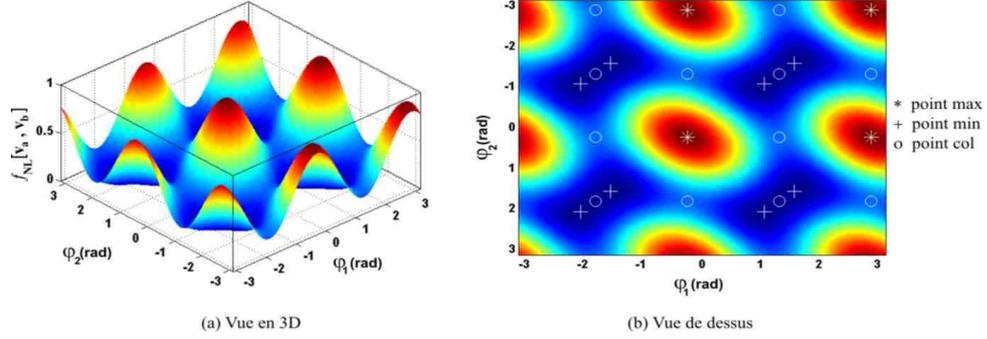
L'émetteur est un oscillateur opto-électronique chaotique [6], basé sur le principe d'une dynamique non linéaire à double retard. Cet oscillateur présente l'originalité d'avoir 2 boucles de contre-réaction électro-optiques non linéaires, impliquant chacune un élément retardant, une photodiode de conversion optique / électrique, un filtre électronique large bande, et un élément amplificateur. La non linéarité est réalisée par le modulateur télécom QPSK, considéré ici comme le cœur de ce générateur de chaos, et qui sert à transporter les oscillations micro-ondes à travers ses électrodes de modulation RF1 et RF2 sur la porteuse optique. Ce modulateur réalise un interféromètre à 4 ondes, dont la condition d'interférence statique est accordable par l'intermédiaire des 3 tensions continues  $V_{DC_m}$  ( $m = 1, 2, 3$ ) appliquées sur ses électrodes  $DC_m$ . Comme le montre un exemple sur la figure 2, la fonction de transfert bi-dimensionnelle de modulation, notée  $f_{NL}[v_a, v_b]$ , est potentiellement fortement non linéaire, selon les amplitudes des tensions de modulation appliquées aux électrodes RF. Son expression est donnée par [6] :

$$f_{NL}[v_a, v_b](t) = \frac{1}{4} \left\{ \cos(\psi_3) \left[ \cos(\psi_3) + 2 \cos(\psi_1 + \psi_2) \cos(\psi_2 + \psi_3 - \psi_1) \right] + \cos^2(\psi_2 + \psi_3 - \psi_1) \right\} \quad (1)$$

avec :

$$\psi_{1,2} = \frac{\varphi_{1,2}(t)}{2}; \quad \psi_3 = \frac{\phi_3}{2};$$

où les termes  $\varphi_{1,2}(t) = \pi(v_{a,b}(t)/V_{\pi RF_{1,2}}) + \phi_{1,2}$  sont des déphasages variables ; ils sont dus à l'application sur les électrodes RF1 et RF2 des tensions de modulations variable  $v_{a,b}(t)$ . Les déphasages



**Fig. 2.** La fonction non linéaire bi-dimensionnelle réalisée par le modulateur QPSK.

$\phi_m = \pi(V_{DC_m}/V_{\pi DC_m})$  sont statiques ; ils déterminent la condition d'interférence au point de repos du modulateur QPSK.

## 2.2 Mise en équations de l'émetteur et résultats expérimentaux

Les oscillations de l'émetteur peuvent se résumer à un modèle théorique de deux équations intégral-différentielles, excitées par un terme non linéaire retardé qui est fonction des deux variables couplées :

$$\frac{1}{\theta_i} \int_{t_0}^t x_i(\xi) d\xi + \tau_i \frac{dx_i}{dt}(t) + x_i(t) = \beta_i \cdot f_{NL} [x_a(t - T_i), x_b(t - T_i)] \quad (2)$$

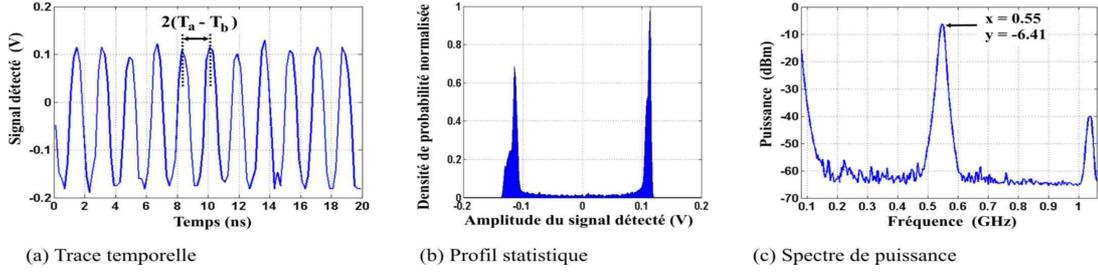
où ( $i = a, b$ ) selon la boucle de rétroaction concernée, et  $x_i(t) = v_i(t)/(2V_{\pi RF_i})$  représentent les variables normalisées.  $\theta_i$  et  $\tau_i$  sont les constantes de temps caractéristiques des filtres électroniques passe-bandes.  $\beta_i = (\pi P_0 \gamma_0 G_i S_i \alpha_0 \alpha_i)/(2V_{\pi RF_i})$  est le gain global normalisé de la boucle de rétroaction, avec :  $P_0$  la puissance optique à l'entrée du modulateur QPSK ;  $\gamma_0$  le coefficient des pertes optiques du modulateur ;  $G_i$  le gain de l'amplificateur de puissance RF ;  $S_i$  la sensibilité du photodétecteur ;  $\alpha_0$  le coefficient de couplage du coupleur optique ( $1 \times 2$ ). Le paramètre  $\alpha_i$  est le coefficient de couplage du coupleur optique ( $2 \times 2$ ) (qui n'apparaît pas pour la boucle (B)).

**Tab.1.** Paramètres expérimentaux du générateur de chaos à modulateur QPSK.

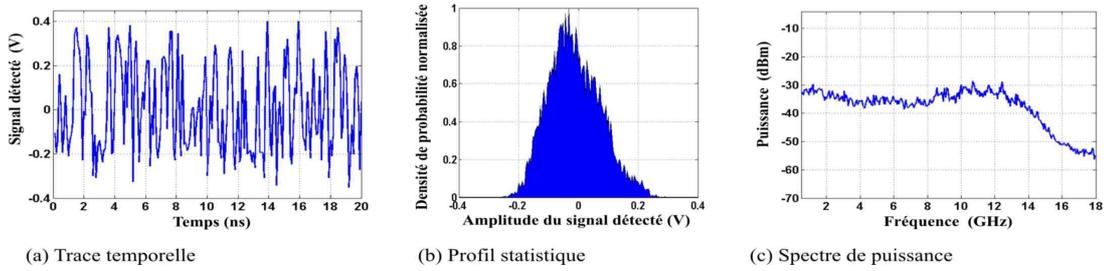
Paramètre	Boucle (A)			Boucle (B)		
	symbole	valeur	unité	symbole	valeur	unité
retard temporel	$T_a$	61	ns	$T_b$	60	ns
fréquence de coupure haute	$f_{c1a}$	13	GHz	$f_{c1b}$	13	GHz
fréquence de coupure basse	$f_{c2a}$	50	kHz	$f_{c2b}$	30	kHz
constante de temps rapide	$\tau_a = \frac{1}{2\pi f_{c1a}}$	12,2	ps	$\tau_b = \frac{1}{2\pi f_{c1b}}$	12,2	ps
constante de temps lente	$\theta_a = \frac{1}{2\pi f_{c2a}}$	3,18	$\mu s$	$\theta_b = \frac{1}{2\pi f_{c2b}}$	5,30	$\mu s$
<b>Paramètres de la non linéarité bi-dimensionnelle</b>						
tension demi-onde dynamique	$V_{\pi RF1}$	5,84	V	$V_{\pi RF2}$	6,08	V
tensions demi-onde statiques	$V_{\pi DC1}$	7,40	V	$V_{\pi DC2}$	7,14	V
	$V_{\pi DC3}$	14,24	V			
déphasages statiques	$\phi_1$	1,2	rad	$\phi_2$	0,7	rad
	$\phi_3$	-0,2	rad			

Avec les valeurs numériques indiquées au tableau 1 et selon les gains de rétroaction du système, le dispositif expérimental est capable de générer une multitude de régimes dynamiques, depuis le point fixe stable

jusqu'aux régimes chaotiques entièrement développés. À titre d'exemples, la figure 3 illustre un régime périodique, de période fonction des deux délais du système, correspondant à des gains de rétroaction considérés comme des gains modérés ( $\beta_a \sim 1, 2$ ;  $\beta_b \sim 0, 4$ ). En augmentant suffisamment et seulement un seul gain de rétroaction ( $\beta_a \sim 5$ ), un régime chaotique entièrement développé est observé (figure 4). Ce régime possède les propriétés d'un bruit blanc gaussien (certes spectralement délimité par la bande passante d'environ 13 GHz du système).



**Fig. 3.** Régime périodique observé expérimentalement. ( $\beta_a \sim 1, 2$ ;  $\beta_b \sim 0, 4$ );



**Fig. 4.** Régime chaotique entièrement développé. ( $\beta_a \sim 5$ ;  $\beta_b \sim 0, 4$ );

### 3 Synchronisation du système implémenté

Même si l'architecture du récepteur est très proche de celle de l'émetteur par certains aspects (mêmes blocs fonctionnels, mêmes composants), il n'en reste pas moins différent : le signal chaotique masquant le message est traité par deux voies différentes (voire la figure 1). En effet, grâce à un coupleur optique (1 entrée / 2 sorties), le signal chaotique reçu est divisé en 2 signaux optiques. Le premier est directement détecté et converti en électrique par une photodiode rapide, puis amplifié pour fournir à la fin **le signal de référence** (noté par :  $X$ ). Le second signal optique est combiné avec la contre-réaction de la boucle ( $\hat{A}$ ) à l'aide d'un coupleur optique variable (2 entrées / 1 sortie), qui se caractérise par un *taux de couplage variable*  $C$ . Le signal optique ainsi combiné parcourt les mêmes éléments que le signal de contre-réaction de la boucle (A) de l'émetteur. La récupération du signal à la sortie du récepteur s'effectue à l'aide d'un autre coupleur optique (1 entrée / 2 sorties) *via* la boucle ( $\hat{A}$ ). Ainsi, après une conversion optique / électrique et une amplification RF, ce signal représente **le signal du chaos répliqué** (noté par :  $Y$ ).

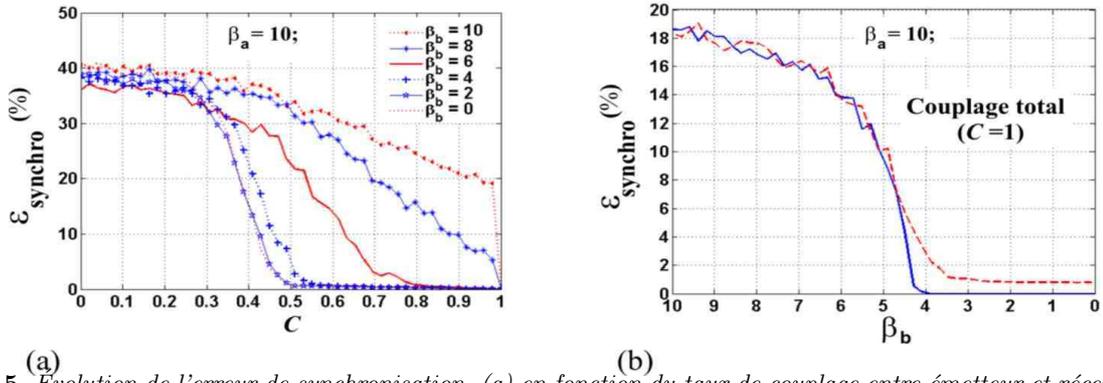
#### 3.1 Condition de couplage

La qualité de la transmission est liée à la qualité de la synchronisation entre chaos. Dans la configuration des systèmes auto-synchronisants, cette qualité de synchronisation dépend fortement du degré d'appariement entre les éléments "clés" (secrets) du récepteur et de l'émetteur. Lorsque ces éléments sont identiques, l'estimation de l'erreur de synchronisation peut déterminer les conditions de couplage, pour lesquelles l'émetteur (maître) pilote les oscillations du récepteur (esclave). Cette erreur est calculée à partir de la valeur quadratique moyenne normalisée (3), où le nombre d'échantillons  $N$  des traces temporelles

est pris assez grand, loin des transitoires, afin de s'assurer que l'ensemble des fréquences, des plus rapides aux plus lentes, soient présentes dans l'évaluation de l'erreur.

$$\varepsilon_{synchro}(C) = 100 \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (Y - X)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\%) \quad (3)$$

Lorsque l'appariement parfait des deux sous-systèmes est réalisé, la figure 5a montre que cette erreur de synchronisation dépend à la fois du taux de couplage  $C$  et du gain global de l'une des boucles du système (ici  $\beta_b$ ). Globalement, la synchronisation s'établit lorsque l'asservissement du récepteur tend vers le couplage total ( $C = 1$  : la boucle ( $\tilde{A}$ ) est ouverte) et l'un des gains de boucle est faible. Dans le cas contraire, à cause de la sensibilité du système aux conditions initiales et de l'influence de la modulation chaotique de l'information, le récepteur est capable de générer ses propres oscillations indépendamment de l'émetteur ; il devient dans ce cas un oscillateur chaotique désynchronisé.



**Fig. 5.** Évolution de l'erreur de synchronisation. (a) en fonction du taux de couplage entre émetteur et récepteur. (b) en fonction du paramètre de bifurcation  $\beta_b$  en couplage total.

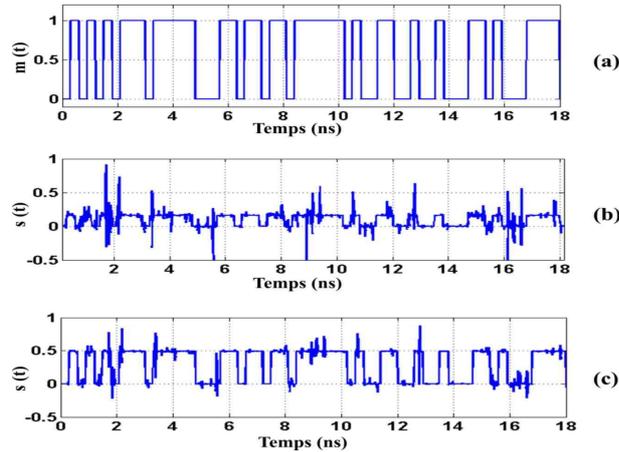
En adoptant le couplage total comme solution de pilotage du récepteur par l'émetteur, la figure 5b illustre l'estimation de l'erreur en fonction de l'un des gains de boucle. La courbe en trait continu représente l'évolution de celle-ci, lorsque son origine est due essentiellement à la différence des états initiaux de fonctionnement. À partir de cette courbe, on déduit que le système se synchronise dans un certain intervalle du paramètre de bifurcation ( $\beta_b \leq 4$ ). Mais comme le montre l'autre courbe en trait pointillé, cet intervalle se réduit légèrement lorsque s'ajoute aux conditions de différence précédentes les conditions les plus probables de fonctionnement du système physique, à savoir des désaccords de paramètres entre l'émetteur et le récepteur. Dans le cas étudié, les paramètres en question sont les gains de boucle et les bandes passantes des filtres, et le désaccord est de  $\pm 1\%$ .

### 3.2 Codage/décodage d'une information numérique

Lorsque le système est considéré totalement synchronisé (le temps nécessaire à la synchronisation correspond grossièrement à la durée des régimes transitoires estimée à  $6\theta_b = 31,8\mu s$ ), avec la mise en application des conclusions de la section 3.1, nous avons inséré au niveau de l'émetteur un message binaire codé NRZ (Non Return to Zero). Ce message est une séquence numérique générée aléatoirement (figure 6a), dont la durée d'un bit est de 300 ps (débit binaire  $\approx 3,3$  Gbit/s). La restitution de l'information en clair (décodage) s'effectue au niveau du récepteur par une opération de soustraction entre les deux signaux de référence et du chaos répliqué. Cette restitution peut être formalisée par :

$$s(t) = \underbrace{\tilde{k}_1 \cdot \left[ f_{NL} [x_a, x_b] (t - T_a) + \alpha \cdot m(t) \right]}_X - \underbrace{\tilde{k}_2 \cdot \tilde{f}_{NL} [\tilde{x}_a, \tilde{x}_b] (t - \tilde{T}_a)}_Y \quad (4)$$

où  $s(t)$  est le signal décodé dépendant fortement de la similarité des deux non linéarités 2D réalisées ;  $\tilde{k}_1$  et  $\tilde{k}_2$  sont des gains d'amplification ;  $m(t)$  est le message utile ;  $\alpha$  est un taux de masquage, défini comme étant le rapport entre l'amplitude du message et l'amplitude du signal chaotique. Comme le montre les résultats numériques des figures 6b et 6c, ce taux de masquage joue un rôle déterminant par rapport à la qualité de masquage de l'information. La sécurité de la transmission se trouve renforcée par un taux faible au détriment de la qualité de synchronisation.



**Fig. 6.** Cryptage/décryptage d'un message binaire codé NRZ avec couplage total ( $C = 1$ );  $\beta_a = 10$ ;  $\beta_b = 2, 2$ ; (a) Message utile en clair. (b) Message décodé à  $\alpha = 3$  %. (c) Message décodé à  $\alpha = 15$  %.

## 4 Conclusion

Nous avons présenté un système optoélectronique de cryptage/décryptage physique en temps réel de données optiques sécurisées par chaos sur la variable intensité optique. Ce système basé sur une dynamique non linéaire à retard est original par son architecture reconfigurable de double boucle, robuste par le nombre de paramètres physiques de sa clé cryptographique, et compatible avec les télécommunications optiques haut débit.

Le travail va désormais se concentrer sur la cryptanalyse du chaos produit, et sur l'estimation des performances expérimentales du système global, en termes de qualité de la réplique du chaos, de celle du masquage et du taux d'erreur binaire.

## Références

1. L. M. PECORA, T. L. CARROLL, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, **64** (8), 821-824 (1990).
2. G. VANWIGGEREN, AND R. ROY, Optical communication with chaotic waveforms, *Physical Review Letters*, **81**(16), 3547-3550 (1998).
3. L. LARGER, J. P. GEODDGEBUER, AND V. UDALTSOV, Ikeda-based nonlinear delayed dynamics for application to secure optical transmission systems using chaos, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (Physique)*, **5**, 669-681 (2004).
4. R. LAVROV, M. PEIL, M. JACQUOT, L. LARGER, V. UDALTSOV, AND J. DUDLEY, Electro-optic delay oscillator with nonlocal nonlinearity : Optical phase dynamics, chaos and synchronization, *Physical Review E*, **80**, 026207(1-9) (2009).
5. K. IKEDA, Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system, *Optics Communications*, **30** (2), 257-261 (1979).
6. M. NOURINE, M. PEIL, AND L. LARGER, Chaos généré par une non linéarité 2D et une dynamique à retard, *Comptes-Rendus de la 12ème Rencontre du Non Linéaire*, 149-154 (2009).

# Requirements for robust entrainment of weakly forced biological oscillators

Benjamin Pfeuty<sup>1,2</sup>, Quentin Thommen<sup>1,2</sup> & Marc Lefranc<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Université Lille 1, Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules, UMR CNRS 8523, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France

<sup>2</sup> Université Lille 1, Institut de Recherche Interdisciplinaire, USR CNRS 3078, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France

pfeuty@phlam.univ-lille1.fr

**Abstract.** Circadian clocks are biological oscillators that synchronize accurately with the day/night cycle by coupling to periodic variations in light and temperature, which may display significant amplitude fluctuations. The requirement for a robust entrainment of circadian clocks raises the theoretical question of which properties of the forced oscillator ensure an efficient entrainment irrespective of the fluctuations in forcing amplitude. To answer this question, we study the dynamics of an oscillatory genetic circuit comprising a simple negative feedback loop and subjected to periodic parameter modulation of variable amplitude. This study reveals that a robust entrainment of the oscillator requires that its period is different from the forcing period and that its phase response curve has a specific shape defined by its first and second derivative near the phase-locking point.

**Résumé.** L'horloge circadienne est un oscillateur biologique qui se synchronise avec précision au cycle jour-nuit en se couplant aux variations périodiques de la lumière et de la température, lesquelles peuvent présenter d'importantes fluctuations d'amplitude. La nécessité pour l'horloge circadienne de se synchroniser de manière robuste soulève la question suivante : quelles sont les propriétés que doivent posséder un oscillateur forcé pour être entraîné indépendamment des variations d'amplitude du forçage. Afin de répondre à cette question, nous étudions la dynamique d'un circuit génétique oscillant contenant une simple boucle négative et soumis à une modulation périodique d'amplitude variable de ses paramètres. Cette étude révèle qu'un entrainement robuste nécessite que la période de l'oscillateur auto-entretenu soit différente de la période de forçage et que la courbe de réponse de phase associée à la modulation ait une forme spécifique caractérisée par ses dérivés première et seconde près de la phase d'accrochage.

## 1 Introduction

Endogeneous rhythms are widespread in biological systems, with periods ranging from milliseconds (neuronal pulses) to years (hibernation cycles). Some of these rhythms can be entrained by periodic forcing which corresponds to the simplest case of synchronization [1]. This is the case of circadian clocks, which synchronize with the periodic variation of light and temperature associated with Earth's rotation. However clouds, water or trees can modulate daylight intensities sensed by organisms over several of orders of magnitude. These observations suggest that circadian clocks have evolved mechanisms that ensure a robust entrainment in face to significant daylight fluctuations. This raises a fundamental question : How to design a forced oscillator able to synchronize irrespective of the forcing amplitude ? This question can be addressed to unveil key design principles of circadian clocks as well as to suggest treatment strategies to promote accuracy of body rhythms such as hormonal cycle, cardiac activity or insulin secretion.

To be specific, we consider a schematic model of circadian oscillator based on a negative transcriptional feedback loop. The forcing is represented as a periodic modulation of the model parameters. To analyse the synchronization of the oscillator, we use a standard approach involving a Poincaré map-based description of the dynamics and the powerful concept of phase response curve. We show that the extent of the phase locking regime of frequency ratio 1 : 1 depends on which parameters are modulated : in some cases, the stability of the synchronized state depends little on modulation strength. This result is interpreted in the framework of the phase approximation, in which the perturbed orbit remains in the neighbourhood of the

free limit cycle. It reveals that robust entrainment requires specific properties of both the oscillator and the forcing.

## 2 Results

### Locking properties of a circadian oscillator

Circadian oscillators are implemented at the level of the biochemical machinery of cell comprising genes and proteins interacting through feedback loops. In particular, the clock mechanism of most organisms relies on a core negative feedback loop, through which the clock gene encodes proteins that activate (resp., inactivate) its own transcriptional repressor (resp., activator) [2,3] (example in Figure 1A). The presence of delays or non-linearities along the loop favors the emergence of oscillations in this system [4]. Such basic clock mechanisms can be captured by low-dimensional dynamical model such as those originally proposed by Leloup and Goldbeter for the *Neurospora* clock [5] : a gene is transcribed into mRNA ( $M$ ) that translates into a protein located in the cytoplasm ( $P_C$ ), further translocated in the nucleus ( $P_N$ ) where it inactivates the gene :

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = s_M \frac{K_I^n}{K_I^n + P_N^n} - d_M \frac{M}{K_M + M} \\ \frac{dP_C}{dt} = s_P M - d_P \frac{P_C}{K_P + P_C} - k_1 P_C + k_2 P_N \\ \frac{dP_N}{dt} = k_1 P_C - k_2 P_N \end{cases} \quad (1)$$

The model includes a Michaelis-Menten type kinetics for the transcription and degradation dynamics, which is required to display oscillations characterized by a free running period  $T_{FRP}$ . We consider the following model parameters that give rise to 24-hours oscillations in the dark :  $n = 4$ ,  $s_M = 2.185$ ,  $K_I = 1$ ,  $d_M = 0.505$ ,  $K_M = 0.5$ ,  $s_P = 0.5$ ,  $d_P = 1.4$ ,  $k_P = 0.13$ ,  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.6$ . The period of free-running oscillations can be adjusted by changing any parameter value. In addition the effect of light on the circadian oscillator is mediated by a modulating a parameter  $p$ , with amplitude  $\epsilon$ , period  $T$  (24 hours) and duration  $T/2$  :

$$\{ p(t) = p_0 + \epsilon(\Theta(t) - \Theta(t - T/2)) = p(t + T) \quad (2)$$

where  $\Theta$  is a step function.

The light-dependent perturbation deviates the circadian oscillator from its free limit cycle trajectory during day (example in Figure 1b). If the amplitude deviation is not too large, the stability of the limit cycle ensures that these deviations will decay in the absence of perturbation (following night) while phase changes remain. In such a case, we can define the following Poincare section mapping :

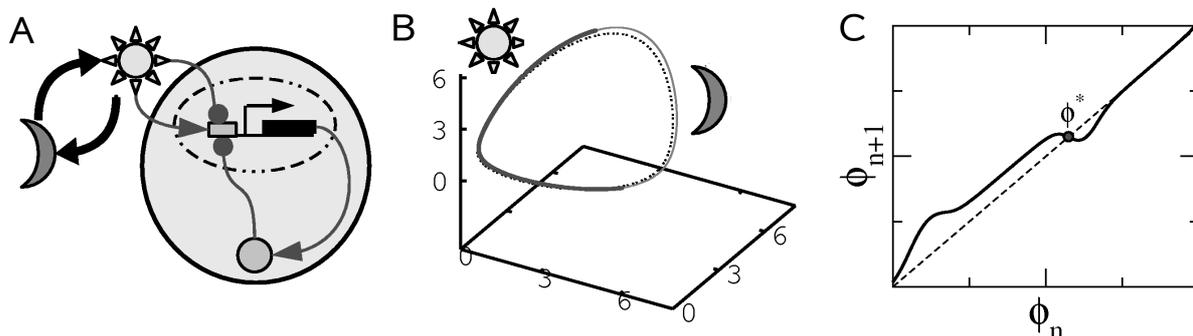
$$\phi_{n+1} = \phi_n - \gamma + V(\phi_n, \epsilon) = F(\phi_n, \epsilon) \quad (3)$$

where  $\phi_n$  is the phase at the time when the light-dependent perturbation is applied during the day  $n$ ,  $\gamma = (T_{FRP} - T)/T_{FRP}$  is the phase change induced by the period mismatch and  $V(\phi, \epsilon)$  is the phase change associated with applying the perturbation of amplitude  $\epsilon$  at  $\phi$ , which corresponds to a phase response curve (PRC). The mapping  $F$  has a stable fixed point if there exists  $\phi^*$  that satisfies :

$$\begin{cases} \phi^* = G(\phi^*, \epsilon) \\ -2 < \partial V(\phi^*, \epsilon)/\partial \phi < 0 \end{cases} \quad (4)$$

which corresponds to a phase-locking regime with the existence of stable period-1 limit cycle of the dynamical system described by Eqs. 1. Specifically, the condition  $\partial G(\phi^*, \epsilon)/\partial \phi \approx 0$  (equivalent to  $\partial V(\phi^*, \epsilon)/\partial \phi \approx -1$ ) defines a superstable entrainment state. In addition, the entrainment is said to be robust if the stability of entrainment depends little on coupling strength :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial V(\phi^*, \epsilon)}{\partial \phi} \approx 0 \quad (5)$$



**Fig. 1.** Representation of the entrainment of a circadian clock. A, Intracellular regulatory circuit based on an autoregulatory gene whose transcription is modulated by daylight. B, Trajectory in the phase space in absence (dashed line) and presence of forcing (thick and thin solid line during day and night respectively). C, Phase return mapping (or phase transition curve) that determines the existence of a stable limit cycle locked with a period  $\phi^*$  to the periodic daylight modulation.

### Examples of robust and fragile entrainment

For any parameter set modulated by light, there always exists a range of modulation strengths and of free running periods for which an entrainment state associated with a stable period-1 cycle exists. However, given a certain value of  $T_{FRP}$ , quasiperiodicity may occur for too small modulation strength (when  $V(\phi, \epsilon) = \gamma$  has no solution) and high-order phase locking may occur for too large modulation strength ( $\partial V(\phi_\epsilon^*, \epsilon)/\partial \phi < -2$ ). In the previous section, we defined a robust entrainment as a phase-locking state whose stability is insensitive to changes in modulation strength. In the following, we show that the robustness of the entrainment state depends actually on which parameters are modulated by light. We consider that the parameter  $s_M$  is modulated by light signal (Eq.2). Indeed positive and negative modulations of this parameter provide typical examples of robust and non-robust entrainment.

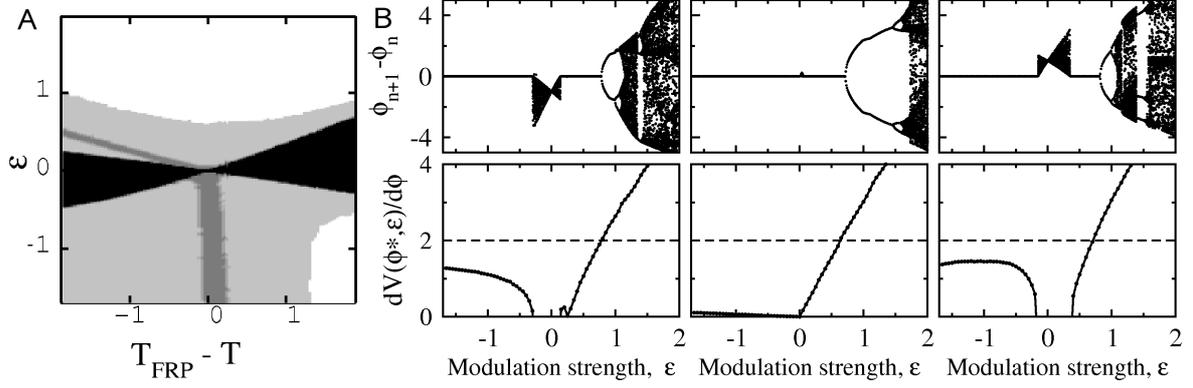
The phase diagram of Figure 2 shows that both positive and negative modulations of  $s_M$  give rise to a stable period-1 cycle in a certain range of modulation strength and period mismatch. However this phase-locked state remains strongly stable for large negative values of modulation strength  $\epsilon$  if the period mismatch is different from 0 (i.e.  $\gamma \neq 0$ ). The saturation of the function  $\partial V(\phi_\epsilon^*, \epsilon)/\partial \phi$  when  $\epsilon$  increases indicates a robust entrainment according Eq. 5. In contrast, this function does not saturate in the case of positive modulation, which leads to destabilization of the period-1 limit cycle and period-doubling bifurcation, and indicates a non-robust entrainment.

### Weak coupling approximation and optimal shape of PRC

If the light-dependent perturbation of the oscillator is small enough, we can assume that the dynamical trajectory remains in a close neighbourhood of the free limit cycle so that only the phase dynamics is perturbed. In the framework of the so-called phase approximation, the effects of perturbations add linearly so that the phase response curve  $V_\epsilon(\phi)$  is proportional to modulation strength  $\epsilon$  :

$$V(\phi, \epsilon) = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} V(\phi, \epsilon_0) = \epsilon W(\phi) \quad (6)$$

The phase approximation remains valid for relatively large modulation strengths giving rise to significant phase shift, though the range of validity depends on the phase at which perturbation is applied (Figure 3A). The proportional relationship between the PRC and  $\epsilon$  is observed for values of  $\epsilon$  at which  $\partial V(\phi_\epsilon^*, \epsilon)/\partial \phi$  saturates (compare Figure 2B and 3A), which suggests that the robustness of entrainment observed in Figure 2 can be interpreted in the framework of the phase approximation. Let consider an oscillator locked with a phase  $\phi_{\epsilon_0}^*$  to a periodic modulation characterized by a amplitude  $\epsilon_0$  and a period



**Fig. 2.** A, Phase diagram. QP (black) : Quasi-periodicity. P1 (grey) : Phase-locking regime with period-1 cycle. Dark grey indicates a slow local relaxation to the phase-locked state ( $|\partial V(\phi^*, \epsilon)/\partial \phi| < 0.2$ ) Pn : High-order phase locking (period-doubling) and chaos. B, The phase changes between two successive days in the asymptotic regime (top panels) and  $\partial V(\phi^*, \epsilon)/\partial \phi$  (bottom panels) as function of  $\epsilon$  for three values of  $T_{FRP}$  (23 h (a), 24 h (b), 25 h (c) respectively)

mismatch  $\gamma$ . From Eqs. 4 and 6, we can compute up to the first order approximation the change of the locked phase induced by a small change in the modulation strength ( $\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon$ ) :

$$\phi_\epsilon^* = \phi_{\epsilon_0}^* + \delta\epsilon \frac{\gamma}{\epsilon_0^2 W'(\phi_0)} + 0(\delta\epsilon^2) \quad (7)$$

Combining Eqs. 6 and 7 allows to expand  $\partial V(\phi_\epsilon^*, \epsilon)/\partial \phi$  as follows :

$$\partial V(\phi_\epsilon^*, \epsilon)/\partial \phi = \epsilon_0 W' + \delta\epsilon (W'(\phi_{\epsilon_0}^*) - \frac{\gamma W''(\phi_{\epsilon_0}^*)}{\epsilon_0 W'(\phi_{\epsilon_0}^*)}) + 0(\delta\epsilon^2) \quad (8)$$

Therefore a robust entrainment defined by the Eq. 5 requires that the local curvature of the PRC near the locking phase  $\phi_\epsilon$  satisfies :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial V(\phi_\epsilon^*, \epsilon)}{\partial \phi} = W'(\phi_\epsilon^*) - \frac{W(\phi_\epsilon^*) W''(\phi_\epsilon^*)}{W'(\phi_\epsilon^*)} \approx 0 \quad (9)$$

Defining  $\phi_0$  the phase satisfying  $W(\phi_0) = 0$  and  $W'(\phi_0) < 0$ , the condition above (Eq. 9) requires that :

1.  $W(\phi_\epsilon^*) \neq 0$  (i.e  $\gamma \neq 0$ ) indicating that the modulation period must be different from the free running period.
2.  $W(\phi_\epsilon^*) W''(\phi_\epsilon^*) > 0$  indicating that the second derivative of  $W$  must be positive (vs negative) for  $\phi_\epsilon^* < \phi_0$  (vs  $\phi_\epsilon^* > \phi_0$ ) associated with  $\gamma > 0$  (vs  $\gamma < 0$ ).
3.  $|W'(\phi_0)|$  is sufficiently small to compensate the vanishing term  $W(\phi_\epsilon^*)$  when the modulation strength increases (assuming that the phase approximation still holds).

In addition to these requirements,  $|W'(\phi_\epsilon^*)|$  must be sufficiently large so that there exists  $\epsilon$  not too large satisfying the condition for a strongly stable entrainment  $\epsilon W'(\phi_\epsilon^*) \approx -1$ .

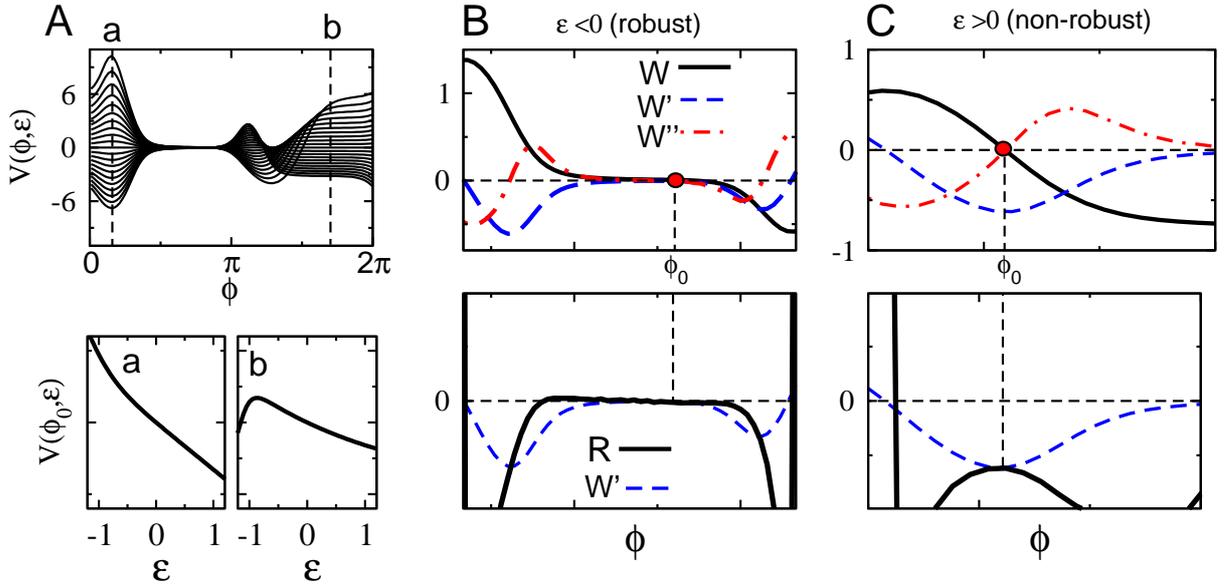
Figure 3B shows that these requirements on the shape of the function  $W$  are satisfied in the case of a negative modulation of  $s_M$ . We first define the function  $R(\phi) = W'(\phi) - W(\phi)W''(\phi)/W'(\phi)$ . Indeed, second derivatives of  $W$  are positive for  $\phi < \phi_0$  and negative for  $\phi > \phi_0$  such that the function  $|R(\phi)|$  is close to zero and bound by  $|W'(\phi)|$  for a large range of phase in the neighbourhood of  $\phi_0$ , indicating a robust phase-locked state for both cases of FRP larger and smaller than 24 hours. In contrast, in the case of positive modulation, the sign of second derivative of  $W$  (positive for  $\phi < \phi_0$  and negative for  $\phi > \phi_0$ ) results in a function  $|R(\phi)|$  unbounded by  $|W'(\phi)|$ , ruling out the existence of a robust phase-locked state.

In the phase approximation, the PRC can be written as a convolution between the phase response function  $\mathbf{Z}(\phi)$  and a small light-dependent modulation of the parameter vector  $\delta\mathbf{p}(\phi)$  :

$$V(\phi, \epsilon) = \epsilon W(\phi) = \epsilon \int_0^{T/2} \delta\mathbf{p}(\phi') \cdot \mathbf{Z}_{\mathbf{p}}(\phi' + \phi) d\phi' \quad (10)$$

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}(\phi) = J_{\mathbf{p}}^*(\phi) \cdot \nabla_{\mathbf{X}_{\gamma}} \phi \quad (11)$$

where  $J_{\mathbf{p}}^*$  is the transpose of the matrix of partial derivatives of  $\mathbf{F}$  with respect to the vector  $\mathbf{p}$  evaluated at the phase  $\phi$  of the limit cycle, and  $\mathbf{X}_{\gamma}$  is the stable closed orbit in free running condition. The phase response function is an intrinsic property of the oscillator that does not depend on the properties of the light-dependent modulation of the parameters. A PRC that achieves a robust entrainment requires that the phase response function displays some specific properties. The conditions  $|W'(\phi_0)|$  small and  $W''(\phi)/W(\phi) > 0$  require that the phase response function  $Z(\phi) \approx 0$  for the phase interval during which the perturbation is applied. Such unresponsive interval has been termed dead zone and may be related with saturation or adaptation mechanisms. These mechanisms ensure that the effect of the light-dependent parameter changes on a variable is negligible or is not diffused to other variables in some domain of the phase space.



**Fig. 3.** Relationship between entrainment robustness and shape of the PRC. A, The PRC (top) and the phase response at two specific phase (bottom) for modulation strength ranging from  $-1.1$  to  $1.1$ . B,C, Local shape of an infinitesimal PRC,  $W(\phi)$  and the robustness condition  $R(\phi)$  near the locking phase, associated with  $\epsilon < 0$  (robust entrainment) and  $\epsilon > 0$  (non-robust entrainment).

### 3 Conclusion

An intriguing characteristic of circadian rhythms is that the free-running period under constant dark conditions is often quite different from 24h in many organisms such as *Neurospora* ( $\approx 21.5$  h), cyanobacteria ( $\approx 25$  h), *Drosophila* ( $\approx 23.5$  h) or mammalian ( $\approx 24.5$  h). In addition, their phase response curves (PRCs) associated with short pulse of light often indicate an insensitivity within certain phase intervals called dead zone. Our study suggests that these two commonly observed properties of circadian clocks can contribute, when combined, to their robustness to daylight amplitude fluctuations. It is possible indeed

that natural selection would evolve an intracellular signaling and regulatory circuit whose kinetics and architecture underlie endogeneous oscillations (i) of a period different from 24 hours and (ii) that are insensitive to specific perturbations in some portion of the limit cycle trajectory.

This interpretation requires to determine the precise relationship between the characteristics of the free-running period and of the PRC in many organisms. It also demands further theoretical investigations to establish whether these properties are compatible with the fact that the clock must also maintain a constant locked phase or adjust it in case of seasonal variation of daylength.

## 4 Acknowledgment

The authors acknowledge the support of the French Agence Nationale de la Recherche (ANR) under reference 07BSYS004.

## Références

1. A. PIKOVSKY, M. ROSENBLUM & J. KURTHS, *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press (2000).
2. J. C. DUNLAP, Molecular bases for circadian clocks, *Cell*, **96**, 271-290 (2002).
3. W. M. YOUNG & S. A. KAY, Time zones : a comparative genetics of circadian clocks, *Nature Genetics*, **2**, 702-715 (2002).
4. P. E. MORANT, Q. THOMMEN, F. LEMAIRE, C. VANDERMOERE, B. PARENT & M. LEFRANC, Oscillations in the expression of a self-repressed gene induced by a slow transcriptional dynamics, *Physic Review Letters*, **102**, 068104 (2009).
5. J. L. LELOUP, D. GONZE & A. GOLDBETER, Limit cycle models for circadian rhythms based on transcriptional regulation in *Drosophila* and *Neurospora*, *Journal of Biological Rhythm*, **14**, 433-448 (1999).

# Repliement élastocapillaire contrôlé par un impact de goutte

Marco Rivetti<sup>1,2</sup>, Sébastien Neukirch<sup>1,2</sup>, Christophe Josserand<sup>1,2</sup>, & Basile Audoly<sup>1,2</sup> & Arnaud Antkowiak<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France

<sup>2</sup> CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France.

rivetti@lmm.jussieu.fr

**Résumé.** Lorsqu'une goutte est déposée sur une fine membrane polymère, on peut observer une déformation de la feuille par la force capillaire pouvant aller jusqu'à l'encapsulation complète de la goutte. Ce type d'interaction élastocapillaire, abondant dans la Nature, suscite un fort intérêt dans la communauté scientifique, car il offre un nombre considérable d'applications technologiques. On montre que le repliement élastocapillaire, jusqu'ici observé de façon quasi-statique, peut être obtenu sur l'échelle de temps capillaire très rapide. Grâce à cette propriété, on utilise l'impact de goutte pour former des 'origamis capillaires'. On montre que des feuilles et gouttes identiques peuvent se replier en origamis totalement différents, selon la vitesse d'impact. Un contrôle précis du repliement peut alors être envisagé en utilisant simplement un impact de goutte. Pour détecter les acteurs-clé de ce phénomène, on emploie une expérience modèle 2d.

**Abstract.** When a liquid drop is gently deposited on a flexible membrane, capillary forces may bend the substrate up to complete self-wrapping of the drop. This process has recently been coined *capillary origami*. Such elastocapillary interactions have recently raised a keen interest in the physics community because of their relevance in a wide variety of practical applications all characterized by tiny lengthscales, ranging to biological ones to industrial applications where the run for miniaturization have let emerged these phenomena which can be dangerous if not harnessed. So far though, the focus of all studies has been restricted to quasi-static configurations. Here we show for the first time a paradigm for elastocapillary dynamics, consisting of a liquid drop impacting a soft membrane. As in the static configuration, encapsulation may occur, but this time on the very rapid capillary timescale, a factor that could be crucial in the manufacturing of small three-dimensional objects. The key point of our study is that dynamics now allows for selective folding of the membrane into e.g. a cylindrical or pyramidal shape. Using a two-dimensional model experiment, we explain the key features responsible for this behavior.

## Introduction

Conformément à l'intuition, quand on dépose sur un support une goutte d'eau suffisamment petite pour que l'on puisse négliger la gravité, la goutte assume la forme d'équilibre d'une calotte sphérique. Même si on ne l'aperçoit pas, la force capillaire génère un effort de flexion sur le support. En effet, au point triple, la composante verticale de la tension de surface doit être compensée par la rigidité du solide. Très souvent, les surfaces sont suffisamment rigides pour ne pas se déformer. Pourtant, sur des membranes fines, non seulement ce phénomène devient visible, mais les déformations engendrées sont tellement importantes qu'elles peuvent modifier fortement la forme de la membrane.

Cela n'est qu'un exemple de couplage entre phénomènes capillaires et élastiques. Ce couplage peut souvent engendrer de considérables modifications des points de vue classiques de la mécanique des fluides, comme par exemple la montée du liquide dans un capillaire en présence de parois élastiques [1], ou l'émergence d'une tige élastique d'une surface libre [2].

La maîtrise des interactions élasto-capillaires est fondamentale dans plusieurs secteurs industriels, car l'action de la force capillaire est la cause des déformations et rassemblements des structures élastiques, comme par exemple les forêts de nanotubes de carbone [3,4]. Mais l'interaction élasto-capillaire ouvre aussi la voie à nouvelle technique d'auto-assemblage, permettant de réaliser des formes tridimensionnelles à partir d'un patron 2d, comme par exemple des modules de panneaux solaires [5].

## Le repliement élasto-capillaire

Pour qu'une goutte puisse déformer la membrane sur laquelle pose, il faut que l'énergie capillaire soit suffisante pour permettre le repliement de la structure, qui nécessite la création d'une énergie de flexion. Il faut aussi que la tension de surface prédomine sur force de gravité. Il existe alors un région caractéristique de l'espace où ce phénomène peut avoir lieu.

D'abord, la capillarité devient plus important que la gravité pour des échelles de longueur inférieures à la longueur gravito-capillaire :

$$L_C = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad (1)$$

où  $\gamma$  désigne la tension de surface,  $g$  la gravité et  $\rho$  la masse volumique du liquide. En suite, limitant l'analyse à une déformation 2d d'une lamelle de longueur  $L$ , épaisseur  $h$  et largeur  $w$ , l'énergie élastique est  $E_{el} \sim EI\kappa^2 L$ , où  $E$  est le module de Young,  $I = \frac{wh^3}{12}$  le moment d'inertie de la section de lamelle et  $\kappa$  la courbure locale. L'énergie capillaire, qui vaut  $E_\gamma = \gamma Lw$ , peut alors déformer la lamelle seulement si  $L > L_{EC}$ , où on a introduit la longueur élasto-capillaire [6] :

$$L_{EC} = \sqrt{\frac{Eh^3}{12\gamma}}. \quad (2)$$

On en déduit alors que les déformation élasto-capillaires sont observables sur des échelles  $L$  telles que :

$$L_{EC} < L < L_C. \quad (3)$$

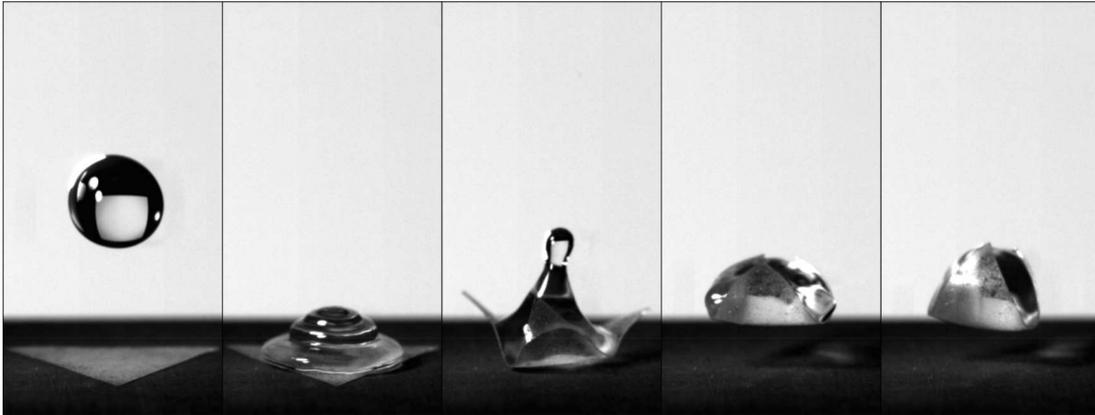
Une première observation du repliement d'une feuille élastique sous l'action capillaire a été montré par Py *et al.* [7] : dans l'expérience, on suit l'évaporation d'une goutte d'eau posée sur un membrane fine. Au fur et à mesure que le volume liquide diminue, la membrane est déformée par l'action de la tension de surface. Selon la géométrie choisie, la membrane peut enrober complètement la goutte. Dans ce cas, pour atteindre l'évaporation du liquide et le repliement de la membrane, plusieurs minutes sont nécessaires.

Nous nous intéressons au repliement élasto-capillaire réalisé par l'impact de la goutte sur le film élastique. Les forces d'inertie, négligeables dans l'évaporation quasi-statique, jouent ici un rôle crucial, raison pour laquelle on parle d'encapsulation dynamique.

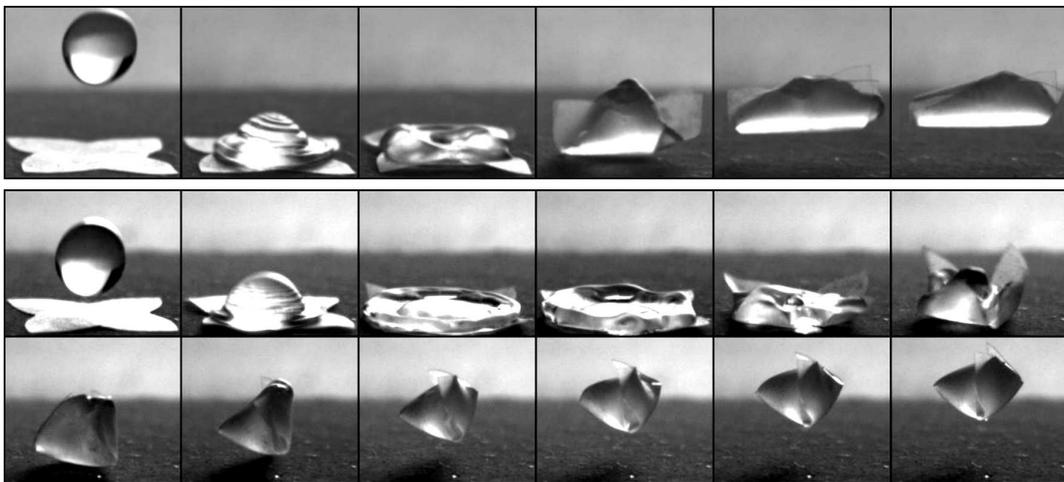
Dans toute la suite, le liquide utilisé est de l'eau. Le film élastique est réalisé en polydiméthylsilyoxane (PDMS - RTV), centrifugé à 1500 tours/min pour obtenir une épaisseur uniforme de 55  $\mu\text{m}$ , et successivement découpé à l'aide d'un scalpel. Ce film est placé sur une surface de cuivre précédemment traitée afin d'augmenter l'angle de contact statique de l'eau : un dépôt de nitrate d'argent est suivi par un dépôt de thiol (perfluorodécane-thiol -  $C_xH_yF_z$ ), dont les longues chaînes carbonées permettent d'obtenir l'hydrophobicité de la surface.

Un exemple de dynamique élasto-capillaire est montrée en figure 1. Ici une goutte d'eau tombe sur un patron de forme triangulaire (le côté mesure 7 mm) : après l'impact, la goutte s'étale sur la membrane et atteint son amplitude maximale quand la capillarité balance l'inertie. L'eau est alors rappelée vers l'intérieur par la tension de surface, et le système goutte - membrane rebondit. Au moment du rebond, le film élastique enrobe le liquide et forme une structure à tétraèdre. L'entière encapsulation a été réalisé en 40 ms, ce qui correspond à l'échelle de temps capillaire.

L'encapsulation dynamique permet aussi de sélectionner la forme finale de repliement de la membrane, selon la vitesse d'impact. La figure 2 en montre un exemple. Dans le premier cas, une goutte d'eau impacte sur un patron en forme de fleur et se replie en forme de cylindre, où les vertex des pétales se touchent deux par deux. Dans le deuxième cas, une goutte de la même taille mais animée d'une vitesse supérieure permet un repliement de la membrane en forme pyramidale, avec les quatre vertex qui se touchent au même point.



**Fig. 1.** Encapsulation dynamique d'une membrane élastique triangulaire. Le système goutte-membrane présente une forme d'équilibre finale à tétraèdre.



**Fig. 2.** Haut : encapsulation dynamique donnant lieu à une forme finale cylindrique. Bas : encapsulation dynamique donnant lieu à une forme finale pyramidale.

## Le modèle 2d

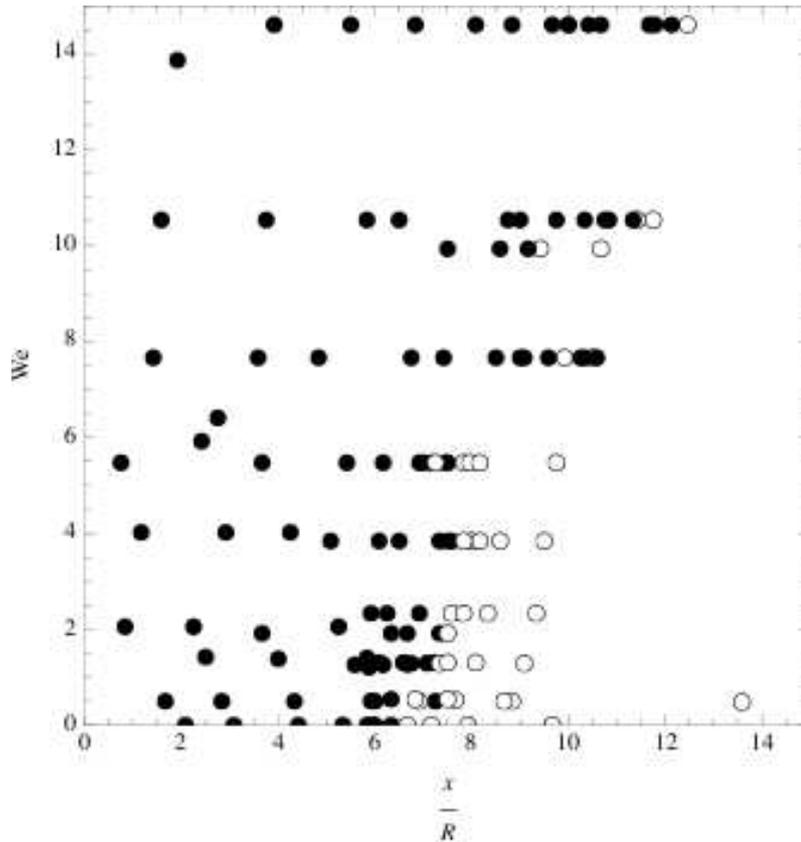
L'encapsulation dynamique d'un patron 2d est un phénomène complexe, où il faut prendre en compte, au delà des effets de capillarité, inertie et gravité, les contraintes géométriques engendrées par le repliement. Pour mieux comprendre le rôle des différents acteurs d'un tel phénomène, on a choisi un modèle plus simple mais encore riche d'intérêt : l'impact d'une goutte sur une longue lamelle élastique. Ce n'est qu'une transposition bidimensionnelle du problème tridimensionnel présenté auparavant. En effet, le fait de réaliser l'impact sur une lamelle posée sur une surface superhydrophobe permet de confiner la dynamique du liquide sur le film élastique.

On étudie alors l'impact d'une goutte (de rayon  $R = 1,2$  mm) sur une lamelle (dont la longueur totale est 5 cm), en faisant varier la vitesse d'impact de la goutte,  $U$ , et la distance  $x$  entre le point d'impact et l'extrémité libre de la lamelle (toujours en gardant l'autre distance beaucoup plus grande que celle-ci). Une fois la goutte lâchée, la dynamique d'impact ressemble à celle présenté pour l'expérience 3d : il y a une phase où le liquide s'étale, suivie par un phase où le liquide revient en arrière et le système rebondit. Il existe, pour cette configuration 2d, deux formes d'équilibre : une forme où la lamelle est presque plate et repose entièrement sur le support superhydrophobe (état non encapsulé), et une autre où l'extrémité

libre est passée de l'autre côté et a recouvert la goutte (état encapsulé). Cette dernière configuration permet de réduire l'énergie de surface, mais fait augmenter l'énergie élastique de la lamelle.

On résume les deux états finaux en fonction de la vitesse d'impact et de l'extrémité libre, dans le diagramme de phase de la figure 3. Ici,  $x$  et  $U$  apparaissent sous forme adimensionnelle comme  $\frac{x}{R}$  et

$$We = \frac{\rho RU^2}{\gamma}.$$



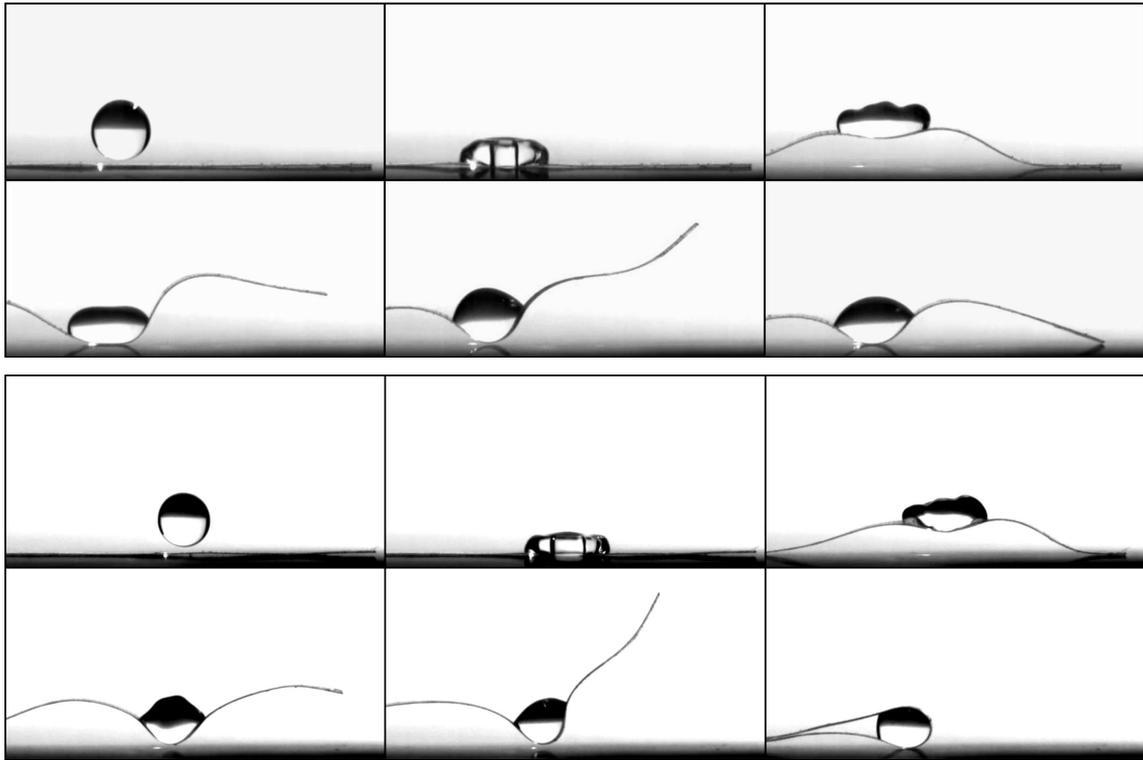
**Fig. 3.** Diagramme de phase des formes d'équilibre : en noir les états encapsulés, en blanc les états non encapsulés.

Dans le cas limite où  $We \simeq 0$  la goutte est déposée très doucement sur la lamelle, et on n'observe que de légères déformations de l'interface liquide-air ; on peut alors négliger l'inertie du liquide et conclure que l'état final du système résulte du bilan entre tension de surface, force élastique et poids de la lamelle.

Dès que  $We$  augmente et qu'on observe un véritable impact de goutte, l'inertie du système couplé liquide-solide joue un rôle crucial. Comme on l'a déjà remarqué, le liquide s'étale et successivement revient en arrière, permettant au système de rebondir. Toutefois, la ligne triple reste accrochée au film élastique, et à cause de cet accrochage la force capillaire exerce une traction sur la lamelle. Selon la vitesse d'impact et la longueur de l'extrémité libre de lamelle, deux scénarios sont alors possibles, comme montré en figure 4 : dans l'image du haut, la lamelle n'arrive pas à encapsuler la goutte et retombe sur le support. D'autre part, sur l'image du bas la traction exercée par le liquide est suffisamment forte pour permettre à la partie libre d'enrouler la goutte.

La frontière entre les deux possibles états d'équilibre dépend du  $We$ , et cela montre que la dynamique est un acteur clé du processus de repliement capillaire. Néanmoins, la frontière n'est pas linéaire, mais présente un saut à  $We \simeq 7$ . En effet, lors de l'incrément de  $We$ , l'apport d'énergie cinétique devient non négligeable et de nouveaux phénomènes apparaissent. D'abord, pendant le rebond du système, on observe

des ondes élastiques se propager le long de la lamelle, ce qui peut influencer la dynamique d'encapsulation. Encore, la formation d'une goutte satellite et sa successive coalescence produisent une forte déformation de l'interface qui génère une traction capillaire encore plus élevée, ce qui explique partiellement le saut de la frontière. Enfin, quand on observe des impact à grands  $We$  et grands  $x$ , on constate que l'encapsulation se fait en repliant la partie libre de lamelle : ce coût en terme d'énergie élastique est nécessaire pour vaincre la force de pesanteur et permettre le passage de la lamelle au delà de la verticale.



**Fig. 4.** Haut : séquence montrant la dynamique d'un état non encapsulé. Bas : séquence montrant la dynamique d'un état encapsulé.

## Conclusion

Nous avons montré ici un exemple intéressant d'interaction élasto-capillaire, qui consiste à réaliser des formes tridimensionnelles grâce à un impact de goutte sur une membrane élastique 2d. À cause de l'action de la tension de surface, la membrane est déformée et sous certaines conditions elle peut enrober complètement la goutte. Cette encapsulation se fait sur une échelle de temps capillaire, correspondant à quelques millièmes de seconde. Nous avons prouvé que, selon la vitesse d'impact de la goutte, on peut sélectionner la forme finale de repliement du film élastique. Pour détecter les acteurs-clé de ce processus, nous avons introduit un modèle simplifié 2d, consistant à réaliser un impact de goutte sur une lamelle. Même si ce modèle simplifié présente une grande richesse de comportements et qu'une compréhension exhaustive du phénomène est de loin non triviale, on a montré que l'apport de la dynamique joue un rôle crucial dans la distinction entre les deux formes finales d'équilibre du système.

## Références

1. H.Y. KIM & L. MAHADEVAN, Capillary rise between elastic sheets, *Journal of Fluid Mechanics*, **548**, 141-150 (2006).
2. S. NEUKIRCH, B. ROMAN, B. DE GAUDEMARIS & J. BICO, Piercing a liquid surface with an elastic rod : Buckling under capillary forces, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **55** (6), 1212-1235 (2007).
3. C.H. MASTRANGELO & C.H. HSU, Mechanical stability and adhesion of microstructures under capillary forces, *Journal of Microelectromechanical Systems*, **2**, 33-43 (1993).
4. N. CHAKRAPANI, B. WEI, A. CARRILLO, P. M. AJAYAN & R. S. KANE, Capillarity-driven assembly of two-dimensional cellular carbon nanotube foams, *Proceedings of the National Academy of Science (USA)*, **101**, 4009-4012 (2004).
5. X. GUO & S.R. KANE Two- and three-dimensional folding of thin film single-crystalline silicon for photovoltaic power applications, *Proceedings of the National Academy of Science (USA)*, **106**, 20149-20154 (2009).
6. J. BICO *et al.* Adhesion : Elastocapillary coalescence in wet air, *Nature*, **432**, 690 (2004).
7. C. PY, P. REVERDY, L. DOPPLER, J. BICO, B. ROMAN & C. N. BAROUD, Capillary Origami : Spontaneous Wrapping of a Droplet with an Elastic Sheet, *Physical Review Letters*, **98**, 156103 (2007).

# Des modèles globaux pour les interactions patient-ventilateur en ventilation non invasive

Giovani Rodrigues<sup>1,2</sup>, Luis A. Aguirre<sup>3</sup>, Antoine Cuvelier<sup>4</sup>, Jean-François Muir<sup>4</sup> & Christophe Letellier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

<sup>2</sup> CEFET-MG, Av. Amazonas 5253, Nova Soça, Belo Horizonte, Brazil

<sup>3</sup> MACSIN Group, Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antonio Carlos, Belo Horizonte, Brazil

<sup>4</sup> Centre Hospitalier Universitaire de Rouen, UPRES EA 3830 (IFR MP23), Institut de Recherches Biomédicales, Université de Rouen, France

[giovani.rodrigues@coria.fr](mailto:giovani.rodrigues@coria.fr)

**Résumé.** La ventilation non invasive est une procédure courante pour aider les insuffisants respiratoires chroniques à améliorer l'oxygénation de leur sang et à réduire leur travail respiratoire. Le débit délivré par les ventilateurs est idéalement synchronisé avec la respiration spontanée du patient. Malheureusement, des asynchronismes apparaissent souvent. De manière à proposer des schémas de ventilation plus efficaces, la dynamique des interactions patient-ventilateur — avec ou sans asynchronismes — devrait être mieux comprise. L'une des premières étapes dans l'étude de la dynamique d'un système consiste à sa modélisation, que nous développerons ici sous la forme de modèles (globaux) autonomes ou du type entrée-sortie directement obtenus à partir de la mesure du débit et de la pression dans le circuit d'assistance ventilatoire. Les modèles considérés sont du type polynômes nonlinéaires ou réseau de fonctions de bases radiales. La nature des interactions (nonlinéarité, causalité, et déterminisme) est étudiée.

**Abstract.** Noninvasive ventilation is a common procedure for helping patients with chronic respiratory failure to improve their blood oxygenation and reduce their work of breathing. Airflow delivered by ventilators is expected to be phase synchronized to the patient spontaneous breathing. Unfortunately asynchrony events occur often. In order to provide more effective ventilation schemes, the dynamics of patient-ventilator interactions with or without asynchrony events should be better understood. One of the initial steps to investigate the dynamics of a system is by modeling. This contribution discussed the estimation of input-output and autonomous models from pressure and airflow time series. The discrete-time model classes used are nonlinear polynomials and radial basis function networks. Issues concerning the nonlinearity of the interactions, causality directions and the underlying determinism of patient-ventilator dynamics are discussed in the paper.

## 1 Introduction

L'une des voies prometteuses pour assister les insuffisants respiratoires chroniques — qui ont besoin d'améliorer l'oxygénation de leur sang en raison d'une déficience de leur système respiratoire — est d'utiliser une assistance ventilatoire mécanique délivrant un débit au sein des poumons du patient. Lorsque la ventilation est non invasive, cela se fait via un masque, facial ou nasal. Cette technique utilise des ventilateurs à deux niveaux de pression, un niveau bas lors de l'expiration et un niveau élevé lors de l'inspiration. Le mode de ventilation le plus intéressant est certainement lorsque le patient pilote lui-même le déclenchement du ventilateur (du niveau bas au niveau élevé) par ses efforts inspiratoires. Malgré les efforts des constructeurs, il y a encore de nombreux asynchronismes durant les séances nocturnes de ventilation [1,2]. Afin de mieux étudier la survenue de ces asynchronismes, des techniques d'analyse automatique ont été développées [3,4].

La respiration spontanée présente déjà des fluctuations chez des adultes respirant calmement [5]. Cette irrégularité est bien sûr largement augmentée lors de troubles de panique comme cela a été montré avec des entropies approchées ou des plus grands exposants de Lyapunov [6]. Ces techniques issues de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires permettent d'améliorer la capacité à distinguer différents groupes de patients. La technique par titrage de bruit permet également d'étudier la variabilité

cyclique de la respiration humaine [7]. Par exemple, ces techniques ont été utilisées lors du passage d'un mode complètement contrôlé par la machine à un mode piloté par des patients en situation aïgue [8]. Toutefois, malgré ce qui est affirmé dans ces études [6,7,8], une preuve définitive de la nature chaotique de la respiration chaotique est encore manquante, pour des raisons similaires à celles évoquées pour la dynamique cardiaque [9,10]. La dynamique sous-jacente aux interactions patient-ventilateur a par ailleurs été étudiée avec des diagrammes de récurrences et des entropies de Shannon [11] ou des covariances croisées [12]. Toutefois, l'utilisation de modèles globaux n'a jamais été adoptée pour l'étude de ces interactions. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ce travail.

Dans ce travail, notre objectif est d'obtenir des modèles globaux, autonomes ou entrée-sortie, à partir des mesures du débit et de la pression. Ainsi, nous regarderons si la pression peut être expliquée à partir du débit (ou *vice versa*), quelle est la nature des relations mathématiques entre ces deux grandeurs, dans quelle mesure les fluctuations en amplitude résultent de processus déterministes. Enfin, dans une étude précédente [11], nous avons mis en évidence quatre groupes de patients selon les asynchronismes et la fluctuation du rythme respiratoire.

## 2 Structure des modèles recherchés

A partir de la mesure du débit et de la pression, deux types de modèles sont recherchés : des modèles à une entrée et une sortie, et des modèles autonomes. Par ailleurs, deux types de représentations seront utilisés : des polynômes nonlinéaires (désignés ici sous le nom de NARMAX) et des réseaux de fonctions de bases radiales (RBF). Dans le cas présent, les résultats obtenus avec ces deux classes de modèles sont semblables. Une revue complète de ces différents types de modèles est disponible [13].

Les modèles NARMAX (pour *Nonlinear AutoRegressive Moving Average with exogenous inputs*) consistent en un représentation de la dynamique reposant sur une reconstruction de l'espace des phases par coordonnées décalées [14]

$$y_k = F^l (y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n_y}, u_{k-d}, u_{k-d-1}, u_{k-d-n_u+1}, \xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots, \xi_{k-n_\xi}), \quad (1)$$

où  $F^l$  est une fonction nonlinéaire générique. Les variables  $y_k = y_{k\tau}$ ,  $u_k = u_{k\tau}$ ,  $e_k = e_{k\tau}$  désignent respectivement la sortie, l'entrée et le bruit du système à chaque instant  $\tau$ . Les décalages temporels sont considérés jusqu'aux décalages  $n_y$ ,  $n_u$  et  $n_e$  respectivement pour la sortie, l'entrée et le bruit. Enfin,  $d$  peut être considéré comme un temps de réponse de la dynamique ventilatoire.

Les réseaux de fonctions de bases radiales consistent en des structures en couches séquentielles. Un réseau typique comporte des « neurones », au sein d'une couche cachée, associés à des fonctions d'activation nonlinéaires de type bases radiales. Les sorties du réseau sont définies comme des combinaisons linéaires des sorties des neurones cachés. Le vecteur d'entrée du réseau, défini sur un sous-espace de  $\mathbb{R}^m$  s'écrit  $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)^T$ . Lorsque le nombre  $H$  de neurones au sein de la couche cachée est augmenté, le réseau devient plus flexible (il accroît sa capacité à modéliser la dynamique sous-jacente au signal d'entrée). Cependant, si un réseau est excessivement flexible, il capturera des particularités inessentiels des données (le bruit de mesure par exemple).

La structure du réseau utilisé dans ce travail s'écrit sous la forme

$$y = f(\mathbf{x}) = w_0 + \sum_{i_1=1}^m w_{i_1} x_{i_1} + \sum_{i=1}^H w_i \phi_i(\mathbf{x}), \quad (2)$$

où  $w_i$  indique les poids des neurones de la couche de sortie. Les fonctions d'activation des bases radiales sont du type gaussien :

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2}{r^2}\right) \quad (3)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme Euclidienne et  $r$  est un paramètre constant. Le vecteurs de centres  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 1, \dots, H$  est choisi de manière à être linéaire par rapport aux poids  $w_{i_1}$  et  $w_i$ , ( $i = 0, \dots, H$ ) à estimer. Le réseau RBF est identifié à l'aide d'une technique de moindres carrés associée à un critère d'information pour sélectionner la structure optimale.

### 3 Circuit de ventilation et mesures

L'assistance ventilatoire était délivrée au patient via un masque facial (Mirage NV, RESMED, North Ride, Australia). Afin d'éviter la recirculation de  $\text{CO}_2$ , une fuite intentionnelle était insérée dans le circuit ventilatoire. Le ventilateur était un Smartair ST (AIROX, Paris, France). A la sortie du ventilateur, un filtre antibactérien (BB2000APS, PALL, Newquay, UK) était inséré pour prévenir tout risque de contamination bactérienne. Le ventilateur fonctionnait en mode d'assistance ventilatoire en mode spontané (sans fréquence de sécurité). La phase inspiratoire était déclenchée par un seuil égal à  $1 \text{ l}\cdot\text{min}^{-1}$  par 20 ms, c'est-à-dire une variation de débit  $\Delta_{20} = 0.0167 \text{ l}\cdot\text{s}^{-1}$  sur 20 ms. Le ventilateur délivrait ainsi une Pression Inspiratoire Positive (PIP) fixée entre 10 et 20 mbar. Dans la plupart des cas, la phase expiratoire était déclenchée lorsque le débit chutait au-dessous de 75% du débit maximum atteint au cours du cycle en cours. La pression et le débit étaient simultanément enregistrés. Pour plus de détails, consultez [11].

### 4 Sujets et protocole

Douze enregistrements correspondant à 7 femmes et 5 hommes ont été extraits de la base de données de notre laboratoire de sommeil (Hôpital de Bois-Guillaume). Tous les sujets étaient dans des conditions stables. Quatre patients étaient atteints de Broncho-Pneumopathie Chronique Obstructive (BPCO), quatre d'un Syndrome d'Obésité Hypoventilatoire (SOH) et quatre sujets étaient sains. Les caractéristiques cliniques des douze sujets sont reportées Tab. 1. Les quatre BPCO étaient des fumeurs, les autres sujets ne l'étaient pas. Les sujets étaient ventilés au calme dans une position assise. Le niveau de PIP a été augmenté entre 10 et 20 mbar par incréments de 2 mbar. Pour chaque valeur, un enregistrement de 10 minutes a été réalisé.

La synchronisation entre le rythme respiratoire du patient et le cycle ventilateur est une condition *sine qua non* pour garantir la tolérance et l'efficacité de la ventilation non invasive [15]. Plusieurs types d'asynchronismes peuvent être identifiés : les déclenchements tardifs, les « cyclages » expiratoires décalés, les efforts inefficaces, les double-déclenchements et les « auto-déclenchements » [16]. La compréhension des causes physiologiques et/ou mécaniques de ces asynchronismes et de leurs implications est par conséquent essentielle pour améliorer la tolérance de la ventilation mécanique à domicile [2].

La variabilité de la respiration sous assistance ventilatoire mécanique a été étudiée à l'aide de techniques comme les diagrammes de récurrence et les entropies de Shannon [11]. A partir des diagrammes de récurrences, calculés d'une part sur les maxima de pression au cours des cycles et, d'autre part, sur la durée des cycles ventilatoires, deux entropies de Shannon ont été introduites : l'entropie  $S_T$  pour désigner la complexité sous-jacente à la variabilité du rythme respiratoire et l'entropie  $S_P$  pour désigner la complexité induite par les efforts inspiratoires inefficaces [11]. Les douze sujets ont ainsi été répartis selon quatre groupes :

- le groupe I, pour lequel  $S_T < 1$  et  $S_P < 1$ , est constitué des sujets avec un rythme ventilatoire régulier et capables, la plupart du temps, de déclencher leur ventilateur ;

**Tab.1.** Données individuelles des caractéristiques démographiques, anthropométriques et fonctionnelles des sujets de cette étude. Le groupe caractérisant les interactions patient-ventilateur résultent de l'étude [11]. Voir le texte pour plus de détails.

#	Sexe	Pathologie	IMC	Groupe					
				PIP (mbar)					
				10	12	14	16	18	20
1	F	BPCO	22.2	I	I	I	I	I	I
2	M	BPCO	21.4	II	II	II	IV	IV	IV
3	M	BPCO	20.2	III	III	IV	IV	IV	IV
4	M	BPCO	25.4	I	I	I	I	I	–
5	F	SOH	55.7	I	III	III	III	III	III
6	F	SOH	57.6	IV	IV	IV	IV	IV	IV
7	F	SOH	48.0	I	I	I	I	I	I
8	F	SOH	54.7	IV	IV	I	II	–	–
9	F	sain	23.1	II	II	IV	II	II	II
10	F	sain	19.9	IV	IV	IV	I	I	I
11	M	sain	24.8	I	I	I	I	I	I
12	M	sain	25.5	IV	IV	IV	IV	IV	IV

F = Féminin, M = Masculin, « Patient » désigne un sujet atteint d'une pathologie. Le terme « sujet » sera utilisé de manière générale. IMC=Indice de Masse Corporelle ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$ ). Les valeurs normales se situent sur l'intervalle [18;25]. L'obésité est définie par un  $\text{IMC} > 30 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$ .

- le groupe II, pour lequel  $S_T > 1$  et  $S_P < 1$ , est constitué des sujets au rythme ventilatoire irrégulier mais capables de déclencher le ventilateur ;
- le groupe III, pour lequel  $S_T < 1$  et  $S_P > 1$ , est constitué des sujets au rythme ventilatoire régulier mais ayant des difficultés à déclencher le ventilateur ;
- le groupe IV, pour lequel  $S_T > 1$  et  $S_P > 1$ , est constitué des sujets au rythme ventilatoire irrégulier et présentant des difficultés à déclencher le ventilateur.

Le confort sous ventilation non invasive est supposé varier inversement proportionnellement à l'indice du groupe, c'est-à-dire que la ventilation serait ressentie comme plus confortable par les sujets du groupe I que ceux du groupe IV.

## 5 Modélisation de la dynamique patient-ventilateur

Les séries temporelles du débit et de la pression ont été initialement enregistrées à la fréquence d'acquisition de 100 Hz ; elles ont ensuite été réduites à une fréquence 100/6 Hz après un léger filtrage passe-bas afin de correspondre à ce qui est recommandé pour une modélisation globale.

### 5.1 Quelle causalité entre débit et pression ?

Afin d'identifier la chaîne causale entre débit et pression, nous avons recherché un modèle global avec le débit comme entrée et la pression comme sortie. Comme dans tous les exemples traités dans ce travail, le modèle est recherché sur une fenêtre de 20 cycles ventilatoires ne comportant pas d'efforts inspiratoires inefficaces. Une modèle typique obtenu s'écrit

$$P_k = 1.6377 P_{k-1} - 1.0077 P_{k-2} + 0.48 P_{k-3} + 1.4632 Q_{k-1}^2 - 0.03 P_{k-2} P_{k-1} + 0.066 Q_{k-3} P_{k-3}, \quad (4)$$

où  $P_k$  et  $Q_k$  désignent respectivement la pression et le débit à l'instant  $k$ . Des décalages en  $P_k$  et  $Q_k$  jusqu'à 3 ont été suffisants pour représenter la dynamique (c'est-à-dire,  $3 \times 6 \times 0.01 = 0.18$  secondes). D'une certaine manière ce décalage représente le délai entre le début de l'effort inspiratoire et l'envoi de la PIP par le ventilateur.

La sortie du modèle (4) reproduit de manière relativement précise le cycle de pression après le déclenchement — au-dessus de 4 mbar — (Fig. 1). Par ailleurs, le modèle ne reproduit pas de manière très précise l'évolution de la pression peu avant le déclenchement du ventilateur. Ceci correspond à l'intervalle de temps sur lequel le patient fournit son effort inspiratoire, entraînant une légère chute de pression que le ventilateur ne compense pas correctement. Toutefois, une fois le déclenchement produit, le modèle est relativement fidèle aux mesures (Fig. 1a).

Nous avons tenté un modèle utilisant la pression en entrée pour prédire le débit. Le modèle

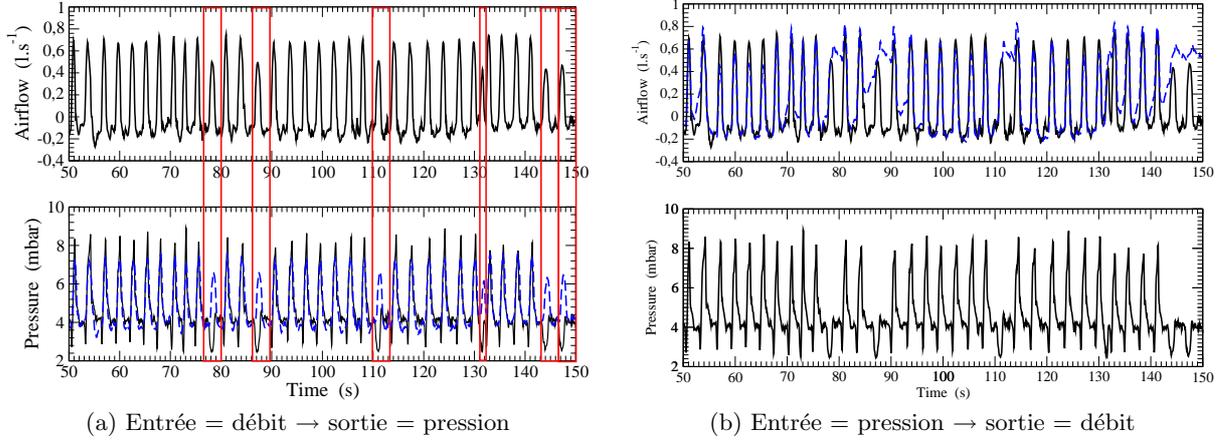
$$Q_{k+1} = 1.6544 Q_k - 0.7061 Q_{k-1} + 0.0167 \tilde{P}_k^2 - 0.0287 \tilde{P}_{k-2} \tilde{P}_k + 0.0120 \tilde{P}_{k-2}^2 \quad (5)$$

n'a pu être obtenu qu'en utilisant  $\tilde{P}_k = P_{k+4}$ , c'est-à-dire en anticipant la pression de  $4 \times 0.06 = 0.24$  s. En d'autres termes, cette anticipation est requise pour réussir à identifier une flèche causale de la pression vers le débit. Si le modèle reproduit alors plutôt bien la dynamique (Fig. 1b), ceci démontre l'absence de chaîne causale naturelle — sans anticipation des données — entre pression et débit. Cette première étude confirme donc que le débit doit être pris comme cause des variations de pression, ce qui est « logique » pour une ventilation en mode assisté pilotée par la respiration spontanée.

### 5.2 Les fluctuations sont-elles de nature déterministe ?

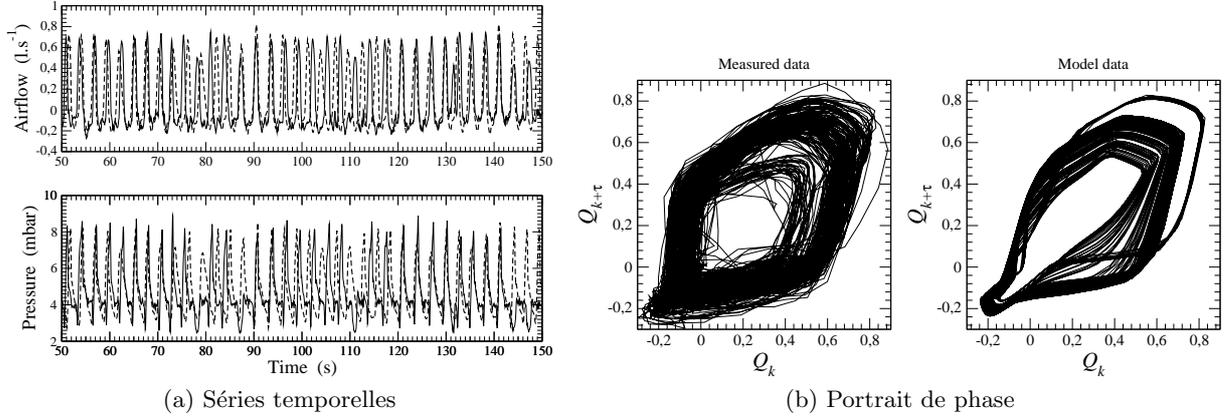
Un modèle autonome RBF a été estimé à partir du débit et de la pression. Le modèle finalement obtenu est de la forme

$$\begin{aligned} P_k &= wp_0 + wp_1 P_{k-1} + wp_2 Q_{k-1} + \sum_{i=1}^{12} \bar{w} p_i \phi_i(\mathbf{x}) \\ Q_k &= wq_0 + wq_1 Q_{k-1} + wq_2 P_{k-1} + \sum_{i=1}^{12} \bar{w} q_i \phi_i(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6)$$



**Fig. 1.** Simulation de la sortie (ligne en pointillés) des modèles (4) et (5) respectivement excités par le débit et la pression. Les valeurs mesurées (lignes pleines) sont représentées de manière à assurer une comparaison. Cas du patient # 3 du groupe III. PIP=10 mbar.

où  $\mathbf{x} = [Q_{k-1} Q_{k-2} Q_{k-3} P_{k-1} P_{k-2} P_{k-3}]^T$ ,  $x_{i_1}$  est le  $i_1$  ième élément de  $\mathbf{x}$ ,  $wp_i$  et  $wq_i$  pour  $i = 1, 2$  sont les poids des termes linéaires,  $wp_0$  et  $wq_0$  sont les termes de dérives,  $\bar{w}p_i$  et  $\bar{w}q_i$  pour  $i = 1 \dots 12$  sont les poids des neurones nonlinéaires, et les fonctions de bases  $\phi_i$  sont données par (3) avec  $r = 0.9$ . Les fonctions de bases sont évaluées en chaque point  $\mathbf{x}$  de la série temporelle.



**Fig. 2.** Intégration numérique (ligne en pointillés) du modèle autonome de type RBF estimé à partir des mesures du débit et de la pression (lignes pleines). Cas du sujet # 3 du groupe III. PIP=10 mbar.

Une intégration numérique du modèle révèle que les fluctuations en forme et en amplitude sont semblables à celles mesurées (Fig. 2a). Toutefois, il y a une perte évidente de synchronisation entre les cycles ventilatoires prédits et mesurés. En d'autres termes, le modèle autonome est incapable de représenter précisément les fluctuations du rythme ventilatoire. Toutefois, il est remarquable que ce modèle produit une dynamique plus riche qu'un simple cycle limite (Fig. 2b), ce qui est une réelle signature d'un mécanisme déterministe sous-jacent à la dynamique ventilatoire. Il est à noter qu'avec un couplage relativement faible, le modèle peut être facilement synchronisé avec les données, confirmant la grande qualité de ce modèle. L'ensemble de ces résultats ont été reproduits, à peu de chose près, pour les quatre groupes de sujets.

## 6 Conclusion

En utilisant des modèles globaux directement estimés à partir de la mesure du débit et de la pression d'un circuit d'assistance ventilatoire mécanique, nous avons montré qu'en mode de ventilation spontanée avec aide inspiratoire, une chaîne causale s'inscrivait bien du débit vers la pression. De plus, un modèle autonome reproduisant une grande partie des fluctuations en amplitude révèle qu'une composante déterministe gouverne ces dernières. Toutefois, le modèle ne parvient pas à reproduire les fluctuations du rythme ventilatoire, celles-ci étant donc probablement de nature aléatoire.

## Références

1. F. FANFULLA, A. E. TAURINO, N. D'ARTAVILLA LUPOA, R. TRENTINA, C. D'AMBROSIO, & S. NAVA, Effect of sleep on patient/ventilator asynchrony in patients undergoing chronic non-invasive mechanical ventilation, *Respiratory Medicine* **101**, 1702-1707, 2007.
2. R. RABARIMANANTSOA, *Caractérisation des asynchronismes durant la ventilation non invasive nocturne*, Thèse de l'Université de Rouen, Décembre 2008.
3. L. ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER, E. VÉRIN & J.-F. MUIR, Asynchrony and cyclic variability in pressure support noninvasive ventilation, *Computers in Biology and Medicine*, **37** (9), 1308–1320, 2007.
4. A. CUVELIER, L. ACHOUR, H. RABARIMANANTSOA, C. LETELLIER, J.-F. MUIR & B. FAUROUX, A noninvasive method to identify ineffective triggering in patients with noninvasive pressure support ventilation, *Respiration*, published online December 2, 2009.
5. J. G. AARDWEG & J. M. KAREMAKER, Respiratory variability and associated cardiovascular changes in adults at rest, *Clinical Physiology and Functional Imaging*, **11** (2), 95-118, 1991.
6. V. K. YERAGANIA, R. K. A. RADHAKRISHNAB, M. TANCERA & T. UHDEA, Nonlinear measures of respiration : respiratory irregularity and increased chaos of respiration in patients with panic disorder, *Biological Psychiatry*, **46** (2), ??, 2002.
7. M.-N. FIAMMA, C. STRAUS, S. THIBAUT, M. WYSOCKI, P. BACONNIER & T. SIMILOWSKI, Effects of hypercapnia and hypoxemia on ventilatory variability and the chaotic dynamics of ventilatory flow in humans, *American Journal of Physiology-Regulatory Integrative and Comparative Physiology*, **292**, R1985-R1993, 2007.
8. L. MANGIN, M.-N. FIAMMA, C. STRAUS, J.-P. DERENNE, M. ZELTER, C. CLERICI & T. SIMILOWSKI, Source of human ventilatory chaos : Lessons from switching controlled mechanical ventilation to inspiratory pressure support in critically ill patients, *Respiratory Physiology & Neurobiology*, **161** (2), 189-196, 2008.
9. L. GLASS, Introduction to Controversial Topics in Nonlinear Science : Is the Normal Heart Rate Chaotic ?, *Chaos*, **19**, 028501 2009.
10. U. FREITAS, E. ROULIN, J.-F. MUIR & C. LETELLIER, Identifying chaos from heart rate : the right task ?, *Chaos*, **19**, 028505, 2009.
11. H. RABARIMANANTSOA, L. ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER & J.-F. MUIR, Recurrence plots and Shannon entropy for a dynamical analysis of asynchronisms in noninvasive mechanical ventilation, *Chaos*, **17**, 013115, 2007.
12. R. NAECK, D. BOUNOIARE, U. S. FREITAS, H. RABARIMANANTSOA, A. PORTMANN, F. PORTIER, A. CUVELIER, J.-F. MUIR & C. LETELLIER, Dynamics underlying patient-ventilator interactions during nocturnal noninvasive ventilation, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, submitted.
13. L. A. AGUIRRE & C. LETELLIER, Modeling nonlinear dynamics and chaos : A review, *Mathematical Problems in Engineering*, 238960, 2009.
14. S. A. BILLINGS & S. CHEN, Representation of non-linear systems : the NARMAX model, *International Journal of Control*, **49** (3), 1013–1032, 1989.
15. D. GEORGOPOULOS, G. PRINIANKIS & E. KONDILI, Bedside waveforms interpretation as a tool to identify patient-ventilator asynchronies, *Intensive Care Medicine*, **32**, 34–47, 2006.
16. L. VIGNAUX, F. VARGAS, J. ROESLER, D. TASSAUX, A. W. THILLE, M. P. KOSSOWSKY, L. BROCHARD & P. JOLLIET, Patient-ventilator asynchrony during non-invasive ventilation for acute respiratory failure : a multicenter study, *Intensive Care Medicine*, **35**, 840-846, 2009.

# Observation de structures dissipatives dans le profil transverse d'intensité d'un laser saphir-titane

Marco Romanelli, Marc Brunel & Marc Vallet

Institut de Physique de Rennes, UMR CNRS 6251, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu  
F-35042 Rennes Cedex, France  
marco.romanelli@univ-rennes1.fr

**Résumé.** Nous décrivons l'observation expérimentale d'une grande variété de motifs transverses stables dans le profil d'intensité d'un laser saphire-titan continu. Nous étudions l'influence de la longueur de cavité et de la courbure des miroirs, ainsi que du taux de pompage. Les motifs observés sont indépendantes de la structure des modes transverses du résonateur et typiques de la morphogenèse dans les systèmes spatialement étendus.

**Abstract.** We describe the experimental observation of a large variety of stable transverse patterns in the intensity profile of a cw Ti :Sa laser. We study the influence of the cavity length and of the mirror curvature, as well as of the pump rate. The observed patterns are independent of the empty resonator transverse mode structure and typical of morphogenesis in spatially extended systems.

## 1 Introduction

La formation de structures dissipatives en optique a été beaucoup étudiée, sur une grande variété de configurations, tant expérimentalement que théoriquement [1]. Sur les résonateurs, on peut citer les cavités lasers ayant un nombre de Fresnel élevé [2], les oscillateurs paramétriques optiques [3], les résonateurs contenant un milieu Kerr [4], et les oscillateurs photoréfractifs [5]. Des motifs transverses ont été également étudiés en utilisant le couplage non linéaire entre ondes dans les vapeurs atomiques ou dans les cristaux photoréfractifs [6]- [7]. Enfin, une riche variété de motifs a été observée dans les valves optiques à cristaux liquides, dans des configurations présentant une boucle de rétroaction optique [8].

En ce qui concerne plus spécifiquement les lasers, des études détaillées ont été d'abord réalisées dans les lasers à gaz [9]- [10]. Les motifs transverses observés sont dus à la compétition ou à l'accrochage de phase de plusieurs modes transverses d'ordre supérieur de la cavité laser. Plus récemment, plusieurs résultats ont été reportés concernant la formation de motifs transverses [11] et de réseaux de vortex [12] dans des laser solides.

Ici, nous décrivons des expériences qui nous ont permis d'observer la formation de motifs transverses stationnaires dans le profil d'intensité d'un laser saphir-titane. Les structures observées sont typiques de la morphogenèse dans les systèmes spatialement étendus. En tant que telles, elles ne peuvent s'expliquer par le couplage de modes transverses du résonateur.

## 2 Description du montage

La cavité laser, linéaire, est composée d'un miroir plan de haute réflectivité et d'un coupleur de sortie sphérique de rayon  $R_c$ . Le milieu actif est un cristal de saphir dopé au titane, placé sur le col  $w_0$  du mode fondamental de la cavité vide, c'est-à-dire contre le miroir plan. Le laser est pompé longitudinalement par un laser Nd doublé émettant un faisceau monomode transverse à la longueur d'onde de 532 nm. Le seuil d'oscillation est obtenu pour une puissance de 1,5 W. La puissance émise par le laser est de 500 mW pour une puissance de pompe de 5 W. Les motifs transverses sont observés sur un écran situé à 40 cm du coupleur de sortie, dont l'image est recueillie avec une camera CCD infrarouge.

La longueur  $L$  de la cavité laser influence fortement la formation des structures transverses. En général, on observe le scénario suivant : pour  $L < R_c$ , le profil transverse d'intensité présente une symétrie

circulaire et correspond à une superposition de quelques modes de Laguerre-Gauss<sup>1</sup>. En s'approchant de la limite de stabilité géométrique du résonateur  $L = R_c$  la complexité des motifs transverses augmente au fur et à mesure, résultant en des structures de type hexagones, spirales, etc. selon les différentes conditions expérimentales. Deux effets concourent à la formation des motifs. i) D'une part, lorsque  $L$  tend vers  $R_c$  le col  $w_0$  du mode de cavité tend vers zéro. L'extension spatiale  $w_p$  du mode de pompe restant constante, le facteur de forme  $A = w_p/w_0$  diverge, ce qui signifie qu'un nombre croissant de modes transverses peut être excité par la pompe. ii) D'autre part, la condition  $L = R_c$  correspond aussi à la dégénérescence en fréquence des modes transverses du résonateur. Enfin, lorsque la longueur de cavité devient supérieure à  $R_c$ , on obtient un résonateur instable (du côté de la branche négative du diagramme de stabilité géométrique des cavités laser [13]). On observe dans ce cas une émission laser puissante et toute structure transverse compliquée disparaît pour laisser place à une distribution approximativement gaussienne de l'intensité. En effet, les rayons lumineux ayant tendance à quitter l'axe optique à chaque aller-retour dans un résonateur instable, la cavité agit en ce cas comme un filtre spatial étroit autour de la direction correspondant à l'axe optique du système [14].

### 3 Résultats expérimentaux

Nous décrivons le scénario évoqué plus haut pour trois valeurs différentes de  $R_c$ . Ensuite, on utilisera la puissance de pompe comme paramètre de contrôle.

#### 3.1 $R_c = 5$ cm

Pour une cavité laser courte, le motif sélectionné par l'oscillateur lorsque l'on est à l'intérieur de la région de stabilité géométrique ( $L < R_c$ ) est l'hexagone (Fig. 1a). En augmentant  $L$  le motif se déstabilise (Figs. 1b et 1c) pour donner lieu à une structure plus compliquée lorsque l'on est en situation de dégénérescence de fréquence (Fig. 1d).

#### 3.2 $R_c = 15$ cm

Dans ce cas on n'observe pas de symétrie hexagonale au départ, à l'intérieur de la région de stabilité. Le profil transverse du laser lorsque  $L < R_c$  est caractérisé par une symétrie circulaire (Fig. 2a et 2b). En augmentant le facteur de forme  $A$  une structure en spirale émerge (Fig. 2d), qui se déstabilise ultérieurement pour donner lieu à un motif cristallin étendu présentant des éléments de symétrie hexagonale (Fig. 2e, 2f et 2g). La dernière image est prise pour  $L > R_c$ ; le résonateur géométriquement instable fonctionne ici sur un mode quasi-gaussien (Fig. 2h).

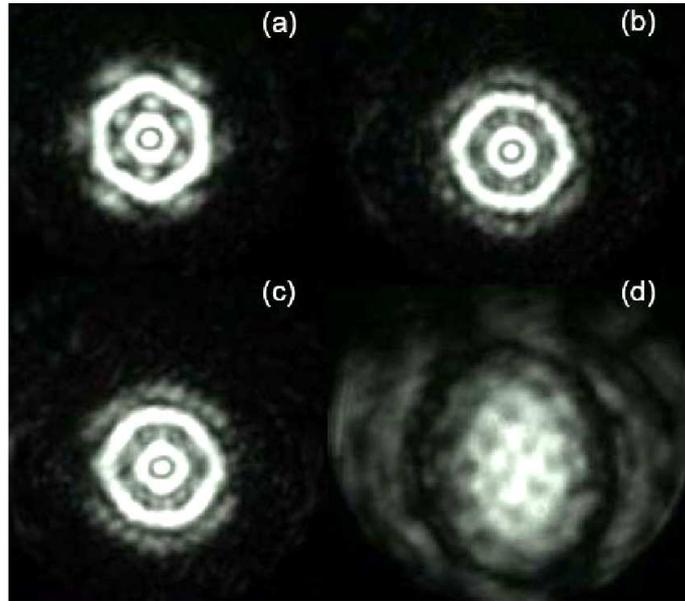
#### 3.3 $R_c = 25$ cm

Un comportement similaire au cas précédent est observé en utilisant un coupleur de sortie avec un rayon de courbure  $R_c = 25$  cm. Tout en suivant un scénario analogue au cas précédent (symétrie circulaire, rouleaux en spirales, structure "cristalline" et finalement effondrement du motif lorsque l'instabilité géométrique du résonateur est atteinte), les *patterns* sont ici plus développés, et occupent toute la surface du coupleur de sortie (Fig. 3).

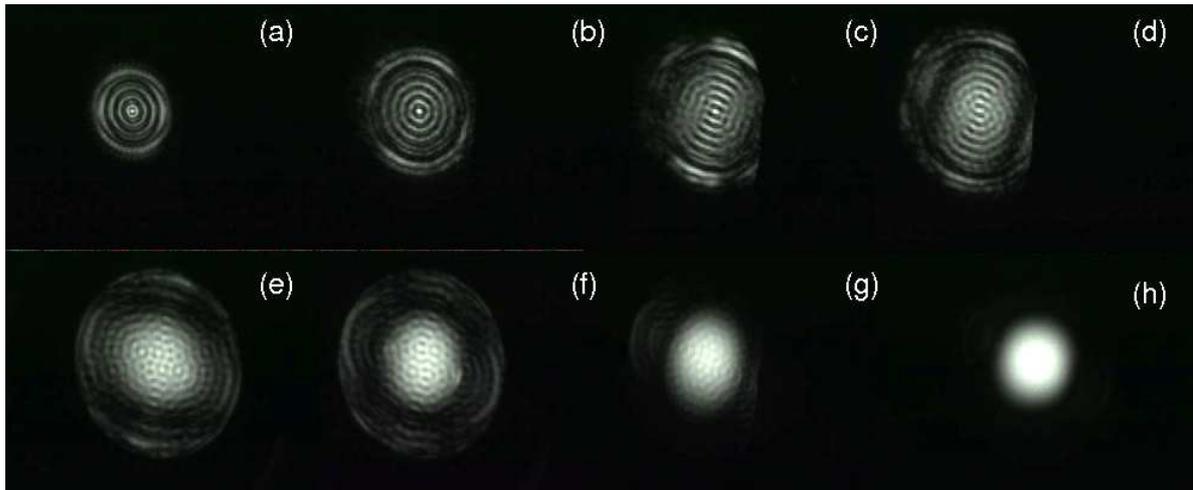
#### 3.4 Evolution des motifs en fonction de la puissance de pompe

L'utilisation de la puissance de pompe comme paramètre de contrôle donne accès à une phénoménologie très riche. On se place dans les conditions de la Fig. 3f. En augmentant la puissance de pompe on observe d'abord la naissance d'une structure cristalline (Fig. 4a et 4b) qui se développe en une structure en spirale (Fig. 4c et 4g). En augmentant davantage le pompage les spirales se cassent en domaines d'extension plus limitée (Fig. 4h et 4i).

<sup>1</sup> Le cas d'une cavité courte fait exception.



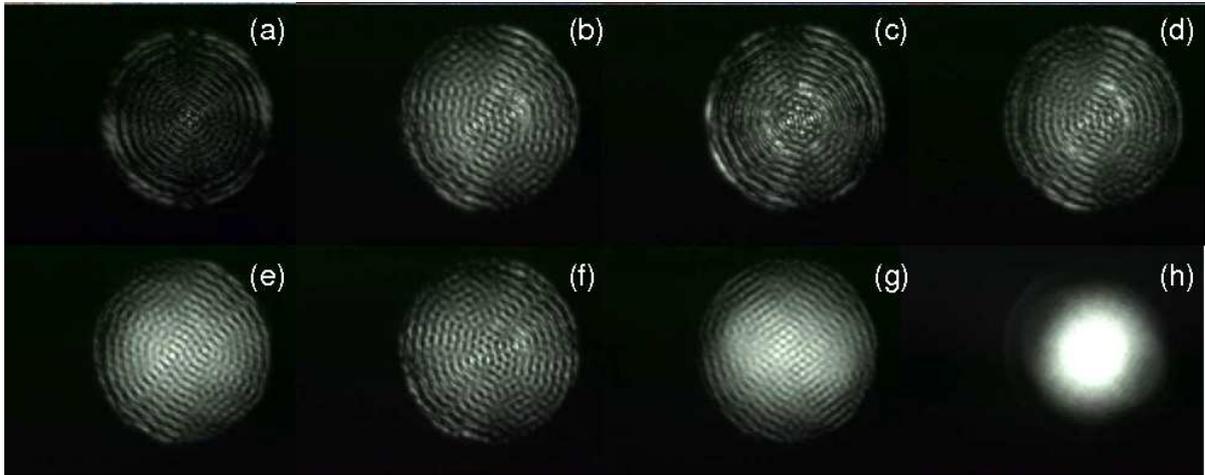
**Fig. 1.** Profil transverse stationnaire d'intensité du laser saphire-titane. La longueur de cavité est croissante de (a) à (d). En (d)  $L \simeq R_c$ . La puissance de pompe est de 5 W.  $R_c = 5$  cm.



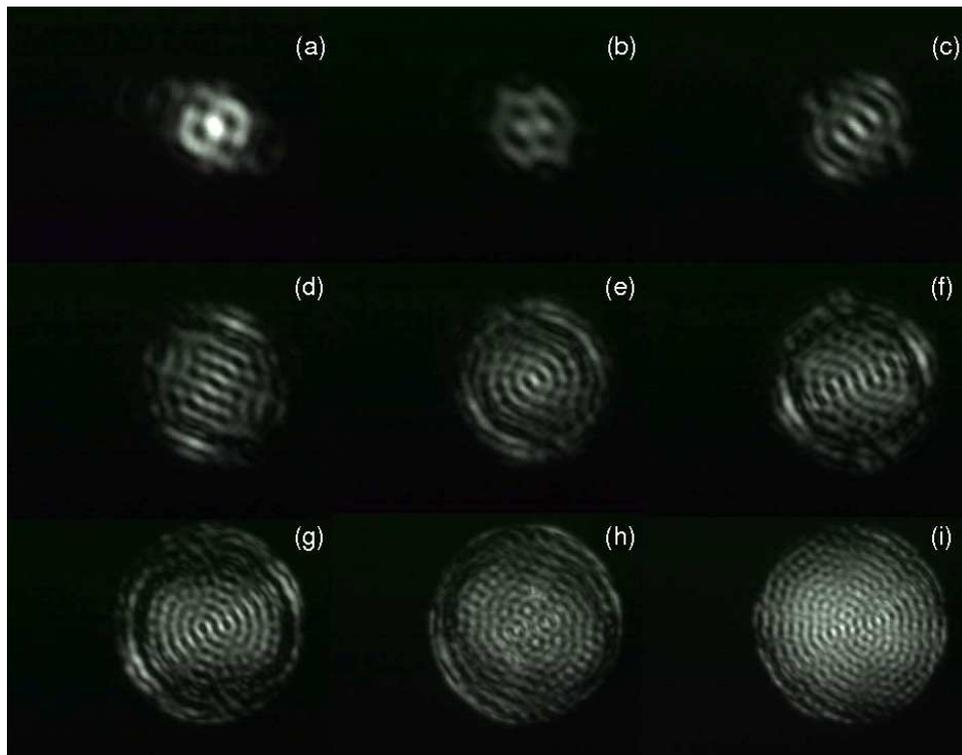
**Fig. 2.** Profil transverse stationnaire d'intensité du laser saphir-titane. La longueur de cavité est croissante de (a) à (h). La puissance de pompe est de 5 W.  $R_c = 15$  cm.

#### 4 Discussion et conclusion

Le laser saphire-titane est un oscillateur dit de classe B [15], parce que la durée de vie  $\tau_D$  de l'inversion de population est plus élevée que le temps de vie  $\tau_c$  des photons en cavité ( $\tau_D = 3\mu s$ ,  $\tau_c = 0,1\mu s$  pour notre laser). Cela implique que la dynamique du laser est régie par deux équations couplées pour le champ laser et l'inversion de population, et ne peut pas être réduite à une seule équation de type Swift-Hohenberg pour un paramètre d'ordre. L'existence de deux variables évoluant sur des échelles de temps différentes amène à une description analogue à celle des systèmes de type réaction-diffusion, le champ optique jouant le rôle de la variable excitable et l'inversion de population de la variable lente [1]. La



**Fig. 3.** Profil transverse stationnaire d'intensité du laser saphire-titane. La longueur de cavité est croissante de (a) à (h). La puissance de pompe est de 5 W.  $R_c = 25$  cm.



**Fig. 4.** Profil transverse stationnaire d'intensité du laser saphire-titane. La cavité laser est en limite de stabilité ( $L \simeq R_c = 25$  cm). La puissance de pompe varie de 1,5 à 5 W.

pertinence de cette interprétation est suggérée par les motifs observés (Fig. 4f et 4g), qui rappellent fortement les structures générées, par exemple, par les réactions de type Belousov-Zhabotinsky.

En conclusion, nous avons décrit l'observation expérimentale de structures dissipatives stationnaires dans le profil transverse d'intensité d'un faisceau laser. Par rapport à des nombreux résultats sur les oscillateurs lasers disponibles dans la littérature, les motifs que nous observons ne sont pas liés à la structure des modes imposée par le résonateur, et ne peuvent s'interpréter en termes d'interaction de modes de cavité. Ils sont essentiellement non linéaires et présentent les caractéristiques paradigmatiques des structures dissipatives dans les systèmes étendus.

Plusieurs directions de travail s'ouvrent à présent. D'une part l'interprétation des résultats nécessite d'être confirmée par une confrontation rigoureuse avec une théorie. D'un point de vue expérimental ici on s'est limité à l'étude des motifs transverses moyens. Les aspects temporel et fréquentiel du système méritent d'être regardés en détail, ainsi que leurs liens éventuels avec la présence d'une structure transverse stable.

## Références

1. K. STALIUNAS & V. J. SÀNCHEZ-MORCILLO, *Transverse patterns in nonlinear optical resonators*, Springer-Verlag, Berlin (2003).
2. S. P. HEGARTY, G. HUYET, J. G. MCINERNEY & K. D. CHOQUETTE, Pattern formation in the transverse section of a laser with a large Fresnel number, *Physical Review Letters*, **82**, 1434-1437 (1999).
3. S. DUCCI, N. TREPS, A. MAÎTRE & C. FABRE, Pattern formation in optical parametric oscillators, *Physical Review A*, **64**, 023803 (2001).
4. W. J. FIRTH, A. J. SCROGGIE, G. S. McDONALD & L. A. LUGIATO, Hexagonal patterns in optical bistability, *Physical Review A*, **46**, R3609 (1992).
5. D. HENNEQUIN, L. DAMBLY, D. DANGOISSE & P. GLORIEUX, Basic transverse dynamics of a photorefractive oscillator, *Journal of the Optical Society of America B*, **11**, 676-684 (1994).
6. G. GRYNBERG, E. LE BIHAN, P. VERKERK, P. SIMONEAU, J. R. R. LEITE, D. BLOCH, S. LE BOITEUX & M. DUCLOY, Observation of instabilities due to mirrorless four-wave mixing oscillation in sodium, *Optics Communications*, **67** (5), 363-366 (1988).
7. P. M. LUSHNIKOV & A. V. MAMAEV, Spontaneous hexagon formation in photorefractive crystal with a single pump wave, *Optics Letters*, **24**, 1511-1513 (1999).
8. S. RESIDORI, Patterns, fronts and structures in a Liquid-Crystal-Light-Valve with optical feedback, *Physics Reports*, **416** (5-6), 201-272 (2005).
9. M. BRAMBILLA, F. BATTIPEDE, L. A. LUGIATO, V. PENNA, F. PRATI, C. TAMM & C. O. WEISS, Transverse laser patterns. I. Phase singularity crystals, *Physical Review A*, **43** (9), 5090-5113 (1991).
10. E. LOUVERGNEAUX, D. HENNEQUIN, D. DANGOISSE & P. GLORIEUX, Transverse mode competition in a CO<sub>2</sub> laser, *Physical Review A*, **53**, 4435-4438 (1996).
11. K. OTSUKA, Y. MIYASAKA, T. NARITA, S.-C. CHU, C.-C. LIN & J.-Y. KO, Composite lattice pattern formation in a wide-aperture thin-slice solid-state laser with imperfect reflective ends, *Physical Review Letters*, **97**, 213901 (2006).
12. K. OTSUKA & S.-C. CHU, Generation of vortex array beams from a thin-slice solid-state laser with shaped wide-aperture laser-diode pumping, *Optics Letters*, **34**, 10-12 (2009).
13. A. E. SIEGMAN, *Lasers*, University Science Books, Sausalito (1986).
14. A. E. SIEGMAN, Unstable optical resonators, *Applied Optics*, **13**, 353-367 (1974).
15. F. T. ARECCHI, G. L. LIPPI, G. P. PUCCIONI & J. R. TREDICCE, Deterministic chaos in laser with injected signal, *Optics Communications*, **51**, 308-314 (1984).



# La détection de non-linéarité par titrage du bruit : encore une technique dépendant du choix de l'observable.

Elise Roulin, Ubiratan Santos Freitas & Christophe Letellier

CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex  
roulin@coria.fr

**Résumé.** L'identification de la chaoticité d'une dynamique expérimentale demeure un véritable défi, principalement parce qu'elle requiert la preuve formelle d'un déterminisme sous-jacent. Même si des modèles déterministes ont déjà été obtenus à partir de données expérimentales, il est rare de pouvoir fournir cette preuve de façon satisfaisante dans le cas de systèmes biologiques. Aussi, une alternative consiste à détecter la présence ou non d'un processus non-linéaire gouvernant la dynamique. La technique de « titrage du bruit » développée par Barahona et Poon repose sur la comparaison entre les prédictions d'un modèle linéaire et celles issues d'un modèle non-linéaire. Elle est relativement efficace, à condition qu'elle soit utilisée dans de bonnes conditions, c'est-à-dire à partir de données correctement échantillonnées et avec des modèles à la structure adaptée. À l'aide du système de Rössler, nous montrons qu'il existe une dépendance des résultats au choix de la variable utilisée.

**Abstract.** Identifying chaotic dynamics from biological data is very challenging, mainly because it requires a conclusive proof for an underlying determinism. Even if deterministic models were already found from experimental data sets, it is rarely possible to provide such a proof for biological systems. An alternative consists in detecting a nonlinear process governing the dynamics under investigations. The noise titration technique, based on the comparison between one-step-ahead predictions by linear and nonlinear models, is appropriate for such a task. But it has to be used in right conditions, that is, to be applied on well sampled data and using models with appropriate structures. The noise titration technique is applied to the Rössler system to show that the detection of nonlinear component is also related to the concept of observability.

## 1 Introduction

De nombreuses tentatives ont été menées afin de développer des techniques capables d'identifier de manière indiscutable l'existence d'un comportement chaotique et ce, uniquement à partir d'une seule série temporelle. Dans le domaine de la biologie, les enjeux liés à cette question sont nombreux, aussi bien d'un point de vue physiologique que thérapeutique. Toutefois, seule la sensibilité aux conditions initiales est le plus souvent testée (plus grand exposant de Lyapunov, etc.) et la question du déterminisme est rarement abordée. À ce jour, la seule preuve satisfaisante de l'existence d'un déterminisme sous-jacent serait l'obtention d'un modèle global reproduisant la dynamique et vérifiant par ailleurs la propriété de sensibilité aux conditions initiales. Mais un tel modèle n'a encore jamais été obtenu à partir d'enregistrements biologiques [1,2].

Pour pallier ce manque, Poon & Barahona ont proposé une technique de titrage de bruit de manière à extraire la chaoticité de la dynamique sous-jacente à une série temporelle [3]. Malheureusement, cette technique s'est révélée incapable de distinguer, dans certains cas, une dynamique aléatoire d'une dynamique déterministe [2]. Un objectif plus modeste consiste donc à analyser l'impact de la nonlinéarité sur les propriétés du système étudié, comme nous l'avons déjà fait à partir d'enregistrements électrocardiographiques de patients souffrant de différentes pathologies cardiaques [1]. Cette technique est par exemple utilisée pour distinguer des dynamiques respiratoires spontanées [4] ou assistées mécaniquement [5]. De manière générale, les paramètres définissant la structure des modèles sont laissés libres, ce qui peut biaiser certains résultats. Nous montrons ici que cette technique doit être appliquée avec certaines précautions.

## 2 Principe de la détection de non-linéarité

Soit une série temporelle  $\{s_k\}_{k=1}^n$  correspondant aux données mesurées. Le test de non-linéarité appliqué à la série temporelle  $\{s_k\}$  consiste à comparer l'erreur de prédiction à un pas en avant du meilleur modèle linéaire et du meilleur modèle non-linéaire, obtenus tous deux à partir des valeurs de  $s_k$  [6]. Les modèles utilisés sont des modèles polynomiaux auto-régressifs, qu'ils soient linéaires ou non. Par exemple, un modèle linéaire d'ordre 5 (décalage temporel maximum autorisé), s'écrit :

$$S_k = \theta_0 + \theta_1 s_{k-1} + \theta_2 s_{k-2} + \theta_3 s_{k-3} + \theta_4 s_{k-4} + \theta_5 s_{k-5}. \quad (1)$$

où l'ensemble des valeurs  $\theta_i$  désigne les paramètres du modèle. Un modèle non-linéaire auquel ce meilleur modèle linéaire peut être comparé, et qui comporterait également six termes, peut s'écrire :

$$S_k = \theta_0 + \theta_1 s_{k-1} + \theta_2 s_{k-2} + \theta_3 s_{k-1} s_{k-2} + \theta_4 s_{k-1}^2 + \theta_5 s_{k-2}^2. \quad (2)$$

où l'ensemble des valeurs  $\theta_i$  représente les paramètres du modèle non-linéaire. Le modèle linéaire (1) est d'ordre 5 et de degré  $d = 1$  : il comporte  $N = 6$  termes. Le modèle non linéaire (2) est d'ordre 2, de degré  $d = 2$  et comporte lui-aussi  $N = 6$  termes. Les modèles peuvent être décrits de manière compacte uniquement en retenant le nombre  $N$  de termes et le degré  $d$  du modèle : le seul fait de savoir si le modèle est linéaire ou non suffit alors à connaître l'ordre du modèle. Dans notre cas, nous fixons le nombre maximum  $N$  de termes permis et le degré  $d$  : ensuite le meilleur modèle est estimé avec une sélection de la structure par « rapport de réduction d'erreur » (ERR) [7]. Les modèles utilisés pour la prédiction ont donc une complexité moindre que celle de départ.

Dans chaque cas, le « meilleur modèle » correspond à l'ensemble des valeurs des paramètres  $\theta_i$  obtenu par une technique de moindres carrés afin de minimiser l'erreur sur la prédiction. Une fois ces paramètres optimisés, le résidu du modèle non-linéaire est comparé à celui du modèle linéaire par un test du type Mann-Whitney. La probabilité  $p$  pour que le meilleur modèle non-linéaire soit plus performant pour prédire la dynamique sous-jacente à  $s(t)$  que le meilleur modèle linéaire est donc calculée. Ainsi, le test de non-linéarité cherche à détecter d'éventuelles relations non-linéaires entre deux échantillons décalés dans le temps, ce qui n'implique pas nécessairement la présence d'un déterminisme sous-jacent puisque la prédiction se fait sur un pas en avant, et non en prédiction libre infinie. Le modèle trouvé ne reproduit donc pas la dynamique globale du portrait de phases, mais exprime seulement un lien, linéaire ou non, entre des valeurs successives prises par une variable dynamique.

## 3 Dépendance à la structure du polynôme utilisé

La probabilité  $p$  d'obtenir de meilleurs résultats avec un modèle non linéaire qu'avec un modèle linéaire a été recherchée pour différentes valeurs des paramètres  $d$  et  $N$  sur le même échantillon de 2000 points d'un bruit blanc construit une seule fois.

**Tab.1.** Probabilité  $p$  d'obtenir une meilleure prédiction avec un modèle non linéaire qu'avec un modèle linéaire pour un bruit blanc en fonction des paramètres ( $d, N$ ) qui correspondent aux valeurs maximales autorisées. Les valeurs inférieures ou égales à 0,50 sont en italique, les valeurs supérieures ou égales à 0,99 sont en gras.

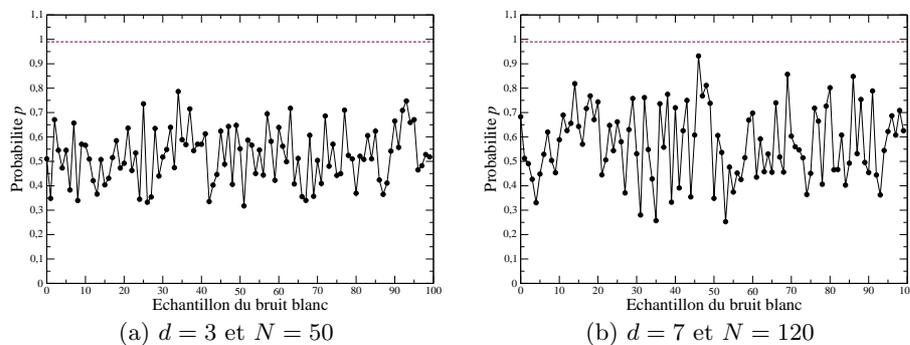
$d$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N = 10$	<i>0,49</i>	0,51	0,58	0,55	0,58	0,54	0,59	0,51	0,51
$N = 20$	<i>0,44</i>	<i>0,47</i>	0,53	0,51	0,53	0,55	0,51	<i>0,50</i>	0,52
$N = 30$	0,51	<i>0,49</i>	0,55	0,51	0,52	0,58	0,54	0,52	0,60
$N = 40$	0,56	<i>0,46</i>	0,56	<i>0,44</i>	<i>0,47</i>	0,53	<i>0,49</i>	<i>0,48</i>	0,59
$N = 50$	0,60	<i>0,44</i>	0,56	<i>0,43</i>	<i>0,45</i>	0,56	0,63	0,51	0,59
$N = 60$	0,62	0,52	0,56	0,56	<i>0,50</i>	0,64	0,68	0,72	0,56
$N = 70$	0,67	<i>0,46</i>	0,51	0,51	<i>0,47</i>	0,68	0,66	0,72	0,86
$N = 80$	0,71	<i>0,44</i>	0,61	0,55	<i>0,44</i>	0,65	0,71	0,71	0,88
$N = 90$	0,65	<i>0,47</i>	0,59	0,51	0,72	0,65	0,68	0,67	0,86
$N = 100$	0,71	<i>0,47</i>	0,62	0,52	0,77	0,69	0,76	0,72	0,87
$N = 110$	0,80	<i>0,44</i>	0,59	<i>0,50</i>	0,78	0,67	0,75	0,75	0,89
$N = 120$	0,80	<i>0,44</i>	0,58	<i>0,50</i>	0,80	0,66	0,77	0,83	0,92
$N = 130$	0,85	0,66	0,89	0,92	0,86	<b>0,99</b>	0,78	0,81	0,93
$N = 140$	0,89	0,63	0,89	0,93	0,86	<b>0,99</b>	0,76	0,84	0,93
$N = 150$	0,90	0,65	0,90	0,95	0,88	<b>1,00</b>	0,79	0,86	0,95
$N = 160$	0,87	0,54	0,85	0,94	0,82	<b>0,99</b>	0,70	0,83	0,94
$N = 170$	0,82	0,69	0,80	0,91	0,78	<b>0,99</b>	<b>1,00</b>	0,77	0,91
$N = 180$	0,78	0,59	0,71	0,88	0,67	<b>0,99</b>	<b>1,00</b>	0,70	0,87
$N = 190$	0,72	0,50	0,63	0,83	0,60	0,98	<b>1,00</b>	0,62	0,85
$N = 200$	0,67	<i>0,40</i>	0,54	0,76	<i>0,50</i>	0,98	<b>1,00</b>	0,55	0,83

Cette probabilité fluctue de façon significative avec les paramètres  $(d, N)$  retenus pour l'estimation des modèles (Tab. 1). Théoriquement, la recherche de la présence d'une composante non-linéaire au sein d'un processus aléatoire de type « bruit blanc » devrait être infructueuse. En effet, puisque nous l'avons choisi comme blanc, ce processus ne résulte pas d'un bruit sur lequel est appliqué un filtrage non linéaire. Or, le fait qu'il existe une probabilité  $p$  voisine de 0,50 indique que le choix entre un modèle linéaire et un modèle non-linéaire n'est pas évident, et que la pertinence de ces modèles est à peu près équivalente. Théoriquement, la probabilité aurait due être au voisinage de 0,5 (il ne devrait y avoir aucun avantage à utiliser un modèle non linéaire par rapport à un modèle linéaire). Aussi, il est plutôt surprenant de trouver un domaine de l'espace des paramètres pour lequel il y a un avantage évident à utiliser un modèle non linéaire ( $d \approx 7$  pour  $N > 130$ ) : en d'autres termes, cela revient à dire qu'une composante non linéaire a été identifiée pour ces paramètres de modélisation. Précisons que le nombre  $N$  de termes est plutôt grand, ce qui pourrait indiquer une dégradation de la qualité des modèles par diffusion du bruit numérique, notamment, celle du modèle linéaire. Ceci semble montrer que la gamme des paramètres n'est pas optimale. D'ores et déjà, nous pouvons conclure que le nombre de termes retenus, tout comme le degré du polynôme, ne devront pas être trop grands : une cinquantaine de termes avec un degré aux alentours de 3 devrait suffire.

## 4 Caractérisation statistique de l'outil

### 4.1 Cas d'un bruit blanc

Dans l'étude précédente, la fenêtre de données utilisée pour l'estimation des modèles était toujours la même. Nous souhaitons maintenant tester la robustesse de l'évaluation par rapport au choix de la fenêtre de données choisie ; en d'autres termes, nous avons voulu vérifier si la probabilité  $p$  dépendait de la fenêtre choisie ou non. Les calculs suivants sont réalisés avec des modèles tels que ( $N = 50$  et  $d = 3$ ) et ( $N = 120$  et  $d = 7$ ) ; la comparaison entre les modèles linéaire et non linéaire est réalisée à l'aide de cinquante fenêtres différentes de 2000 points d'un même bruit blanc.



**Fig. 1.** Fluctuations des valeurs de  $p$ , calculées sur différents échantillons du même bruit blanc pour deux jeux de paramètres  $(d, N)$ .

Pour le jeu de paramètres  $(d, N) = (3, 50)$ , les probabilités  $p$  sont comprises entre 0,31 et 0,79, et pour  $(d, N) = (7, 120)$ , elles fluctuent entre 0,25 et 0,94. Notons toutefois que la probabilité n'atteint jamais la valeur seuil de 0,99. Il apparaît ainsi qu'utiliser une seule valeur de la probabilité  $p$  est peu significative et qu'au moins une valeur moyenne devrait être considérée.

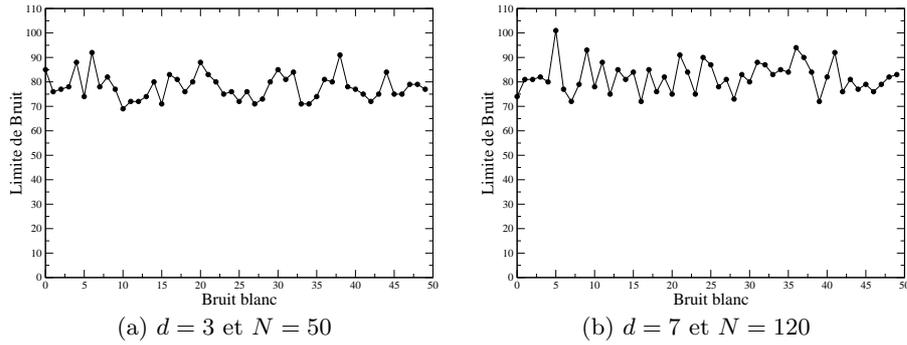
### 4.2 Cas d'une dynamique chaotique

Considérons maintenant la fonction logistique  $x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k)$ . Selon les valeurs de  $\mu \in ]0; 4[$ , le comportement peut être périodique ou chaotique. Le paramètre  $\mu$  est ici choisi égale à 3,69, valeur pour

laquelle le comportement est chaotique. Une étude semblable à la précédente est réalisée. Il apparaît que la probabilité d’obtenir de meilleures prédictions avec un modèle non linéaire est toujours égale à 1 et ce, quelle que soit la structure du modèle choisi, et quelle que soit la fenêtre de données choisie. Ainsi, pour  $\mu = 3,69$ , la fonction présentant un comportement chaotique, il apparaît que, sans aucune équivoque, un modèle non-linéaire est bien plus performant qu’un modèle linéaire pour prédire la dynamique décrite par la fonction logistique.

Lorsque  $p \geq 0,99$ , Mauricio Barahona et Chi-Sang Poon [3] proposent de procéder à un titrage du bruit, technique utilisant le principe du « virage » du titrage chimique. Il suffit d’ajouter progressivement du bruit blanc à l’échantillon de données que l’on souhaite titrer, de procéder à la détection de non-linéarité à chaque ajout de bruit, et ce jusqu’à ce que la valeur de la probabilité  $p$  passe sous le seuil de 0,99. Au moment du « virage », la quantité de bruit ajoutée est appelée *limite de bruit* : elle correspond au rapport de la variance du bruit sur celle du signal à titrer.

La limite de bruit a ici été estimée 100 fois pour un même modèle de données (Fig. 2). À chaque nouveau titrage, la fenêtre de bruit blanc est différente. Nous retrouvons ici des résultats inhomogènes, très dépendants du bruit utilisé pour le titrage. Toutefois, cette dispersion est moindre ( $\frac{\sigma_{LB}}{LB} = 0,07$ ) que dans le cas de la dépendance de  $p$  à l’échantillon de données choisi ( $\frac{\sigma_p}{p} = 0,21$ ) ; elle est également moins sensible à la structure du modèle. Aussi, il est fortement recommandé de réaliser plusieurs titrages pour s’assurer de la pertinence des résultats, et d’au moins en réaliser une moyenne, l’utilisation d’une valeur singulière de limite de bruit n’étant pas significative.



**Fig. 2.** Dispersion des valeurs de la limite de bruit calculée sur le même échantillon de la fonction logistique, lorsque les paramètres  $(d,N)$  sont fixés à (a)  $(3,50)$  et (b)  $(7,120)$ . La limite de bruit est recalculée à chaque fois avec un bruit blanc différent, généré aléatoirement.

## 5 Dépendance au choix de l’observable

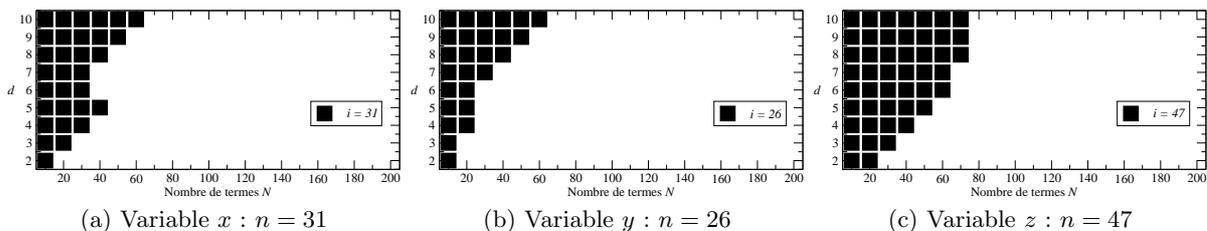
Il est connu que certaines techniques offrent des résultats qui dépendent du choix de l’observable, c’est-à-dire de la variable mesurée [8,9,10]. Ceci s’applique tout particulièrement aux systèmes d’équations différentielles où chaque variable constitue une observable possible. Prenons le cas du système de Rössler [11] :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (3)$$

avec le jeu de paramètres  $(a,b,c) = (0.398,2,4)$  pour lequel la dynamique est chaotique. Il est alors possible d’utiliser trois observables respectivement représentées par les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . La notion d’observabilité repose sur les propriétés du changement de variables  $\Phi_s : \mathbb{R}^3(x,y,z) \mapsto \mathbb{R}^3(s,\dot{s},\ddot{s})$  entre l’espace des phases original  $\mathbb{R}^3(x,y,z)$  et l’espace reconstruit avec les coordonnées dérivées  $\mathbb{R}^3(s,\dot{s},\ddot{s})$  induit par la variable « mesurée »  $s$ . Si  $\Phi_s$  est un difféomorphisme global, la dynamique est complètement

observable *via* la mesure de la variable  $s$  ; c'est le cas de la variable  $y$  du système de Rössler. Malheureusement, il arrive souvent que  $\Phi_s$  ne soit qu'un difféomorphisme local, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble singulier pour lequel des états de  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$  ne soient pas distingués ou observés dans  $\mathbb{R}^3(s, \dot{s}, \ddot{s})$ , c'est le cas des variables  $x$  et  $z$ . Plus l'ensemble singulier est grand et proche de l'attracteur, moins la dynamique est observable [10,9]. Il est montré que les variables du système de Rössler peuvent être classées par observabilité décroissante selon  $y \triangleright x \triangleright z$ .

Comme dans l'exemple discuté section 3, la probabilité  $p$  dépend de la structure des modèles, c'est-à-dire des paramètres  $N$  et  $d$ . Contrairement au cas de la fonction logistique, il existe pour les trois variables du système de Rössler un domaine (carrés noirs) de l'espace des paramètres (Figs. 3) où les modèles ne sont pas suffisamment flexibles pour permettre au modèle non linéaire de surpasser le modèle linéaire. Ceci est logique dans la mesure où les flots sont toujours modélisés par des modèles plus compliqués que les itérations (comme les applications de premier retour). Il est donc nécessaire d'utiliser une structure suffisante. Notons que l'étendue du domaine correspondant à une mauvaise estimation des modèles dépend de la variable utilisée. Si cette surface de l'espace des paramètres ( $N, d$ ) est estimée en comptant les jeux de paramètres pour lesquels le résultat obtenu est contraire à ce qui est attendu, la variable  $y$  est la plus robuste ( $n = 26$ ) alors que la variable  $z$  correspond au domaine de modélisation non valide le plus important ( $n = 47$ ) ; la variable  $x$  se situe à une position intermédiaire. Le domaine s'étend avec la dégradation de l'observabilité comme le prévoit les coefficients d'observabilité, soit  $y \triangleright x \triangleright z$ .

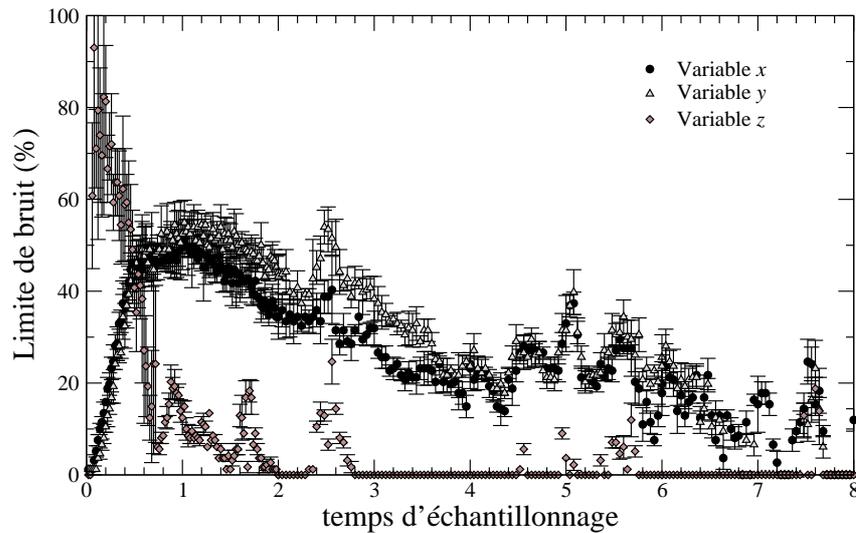


**Fig. 3.** Dépendance de la probabilité  $p$  à la structure des modèles ( $N, d$ ) et au choix de l'observable. Un carré noir représente une probabilité  $p$  inférieure à 0,99. Cas du système de Rössler pour  $(a, b, c) = (0, 398, 2, 4)$ .

En choisissant un jeu de paramètres ( $N = 50, d = 3$ ) pour lequel les trois variables permettent une détection correcte de la non-linéarité, un titrage de bruit est réalisé en fonction du pas de temps utilisé pour l'échantillonnage des trois séries temporelles (Fig. 4). Cinq titrages sont réalisés pour chaque valeur du pas de temps  $\delta t$  et pour chaque variable. Il est tout d'abord remarqué que les pas de temps pour lesquels la limite de bruit est maximale varie d'une variable à l'autre : les variables  $x$  et  $y$  ont une limite de bruit maximum pour  $\delta t_{\max} \approx 1$  s alors que celle de la variable  $z$  est obtenue pour  $\delta t_{\max} \approx 0,2$  s. Le fait que le pas de temps optimal soit plus faible pour  $z$  s'explique par le fait que la nonlinéarité est confinée dans un domaine très restreint du plongement différentiel  $\mathbb{R}^3(z, \dot{z}, \ddot{z})$  : un pas de temps trop grand conduit nécessairement la dynamique à être perçue comme aléatoire puisque la chaîne causale est rompue. Un tel pas de temps se révèle trop petit pour les variables  $x$  et  $y$  pour lesquelles la dynamique apparaît faiblement non linéaire. Enfin, il est intéressant de noter que la valeur de la limite de bruit maximale est plus importante sur la variable  $z$  ( $LB_{\max} \simeq 100\%$ ) que sur les deux autres variables ( $LB_{\max} \simeq 60\%$ ) : ceci s'explique dans la mesure où la non-linéarité agit préférentiellement sur la variable  $z$ , qui la détecte donc plus fortement. Cette technique permettrait donc de détecter la variable sur laquelle la non-linéarité agit préférentiellement...

## 6 Conclusion

La technique de détection de non-linéarité par comparaison de modèles — linéaire *versus* non-linéaire — dépend en fait d'un certain nombre de paramètres dont un choix aisé est fortement recommandé. La structure des modèles utilisés ne doit être ni trop petite, ni trop grande, faute de quoi les résultats peuvent être biaisés. Si plusieurs variables sont disponibles, le résultat peut dépendre du taux d'échantillonnage



**Fig. 4.** Evolution des valeurs moyennes de la limite de bruit calculées pour chacune des trois variables du système de Rössler sur une fenêtre de 2000 points issus de l'intégration du système d'équation (3), pour des échantillonnages croissants. La moyenne de 5 limites de bruit est reportée avec les valeurs minimales et maximales.

utilisé et de la variable choisie : les deux peuvent s'expliquer en terme d'observabilité, les non-linéarités entraînant non seulement une perte d'observabilité mais aussi des dynamiques plus raides.

## Références

1. U. S. FREITAS, E. ROULIN, J.-F. MUIR & C. LETELLIER, Identifying determinism underlying heart rate : the right task?, *Chaos*, **19**, 028505 (2009).
2. U. S. FREITAS, E. ROULIN & C. LETELLIER, Failure for distinguishing colored noise from chaos by the "Noise titration" technique, *Physical Review E*, **79**, 035201 (2009).
3. C.-S. POON & M. BARAHONA, Titration of chaos with added noise, *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, **98**, 7107-7112, 2001.
4. M.-N. FIAMMA, C. STRAUS, S. THIBAUT, M. WYSOCKI, P. BACONNIER & T. SIMILOWSKI, Effects of hypercapnia and hypocapnia on ventilatory variability and the chaotic dynamics of ventilatory flow in humans, *American Journal of Physiology-Regulatory Integrative and Comparative Physiology*, **292**, R1985-R1993 (2007).
5. L. MANGIN, M.-N. FIAMMA, C. STRAUS, J.-P. DERENNE, M. ZELTER, C. CLERICI & T. SIMILOWSKI, Source of human ventilatory chaos : Lessons from switching controlled mechanical ventilation to inspiratory pressure support in critically ill patients, *Respiratory Physiology & Neurobiology*, **161** (2), 189-196 (2008).
6. M. BARAHONA & C.-S. POON, Detection of nonlinear dynamics in short noisy time series, *Nature*, **381**, 215-217 (1996).
7. L. A. AGUIRRE & S. A. BILLINGS, Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering, *International Journal of Control*, **62** (3), 569-587 (1995).
8. C. LETELLIER, J. MAQUET, L. LE SCELLER, G. GOUESBET & L. A. AGUIRRE, On the non-equivalence of observables in phase space reconstructions from recorded time series, *Journal of Physics A*, **31**, 7913-7927 (1998).
9. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Physical Review E*, **71**, 066213 (2005).
10. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Graphical interpretation of observability in terms of feedback circuits, *Physical Review E*, **72**, 056202 (2005).
11. O. E. RÖSSLER, An equation for Continuous Chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).

# Initialisée par Mos, activée par MPF la cascade MAPK dans les ovocytes de *Xénope*

Christophe Russo & Ralf Blossey

Institut de Recherche Interdisciplinaire, Université des Sciences et des Technologies de Lille (USTL)  
USR3078 CNRS, 50 Avenue Halley, F-59658 Villeneuve d'Ascq, France  
`ralf.blossey@iri.univ-lille1.fr`

**Résumé.** La cascade MAPK (Mitogen-Activated Protein Kinase) est une voie de signalisation paradigmatique qui joue un rôle essentiel dans plusieurs événements cellulaires. Dans les ovocytes de *Xénope* la cascade est initialisée par l'oncoprotéine Mos. Après son activation, la cascade est stabilisée par MAPK via une boucle de rétroaction. Le niveau de concentration de Mos n'est pas seulement contrôlé par MAPK. Une molécule essentielle impliquée dans la régulation de la cascade est le complexe MPF. Nous avons développé un modèle détaillé de la dynamique non-linéaire du réseau Mos-MPF-MAPK qui tient compte des trois états de phosphorylation de Mos. Ce modèle nous permet de déterminer l'évolution de Mos sous contrôle de MPF. Notre modèle ouvre une nouvelle voie à la compréhension quantitative de l'interdépendance de Mos et de MPF dans les ovocytes de *Xénope*.

**Abstract.** The MAPK (Mitogen-Activated Protein Kinase) cascade is a paradigmatic signaling cascade which plays a crucial role in many aspects of cellular events. The main initiator of the cascade in *Xenopus* oocytes is the oncoprotein Mos. After activation of the cascade, Mos activity is stabilized by MAPK via a feedback loop. Mos concentration levels are, however, not controlled by MAPK alone. We present a detailed ODE-model for the Mos-MPF-MAPK network which takes into account the three different phosphorylation states of Mos and, as a consequence, allows us to determine the time evolution of Mos under control of MPF. Our work opens a path towards a more complete and biologically realistic quantitative understanding of the dynamic interdependence of Mos and MPF in *Xenopus* oocytes.

## 1 Introduction

La cascade MAPK est une voie de signalisation qui apparaît comme un 'module' récurrent dans la signalisation des cellules des eukaryotes [1,2]. Sa fonction est le transfert d'un signal arrivé au récepteur membranaire à l'intérieur de la cellule, par exemple au noyau pour y initialiser l'expression de gènes. Les propriétés dynamiques de ce module ont été pendant les dernières années un sujet favorisé à la fois par des biologistes cellulaires et des biologistes computationnels.

Une propriété essentielle de la cascade est sa capacité de *robustesse* : elle n'est pas déclenchée s'il n'y a pas de signal suffisamment fort qui est arrivé au récepteur (où, plus généralement, au point d'entrée de la cascade, car celle-ci peut être excitée par des interventions extérieures comme l'injection d'une hormone). Une autre est sa *réactivité* : une fois déclenchée, elle permet un transfert rapide du signal. Cette capacité est fortement liée à la structure du réseau dans lequel le module est inséré : des mécanismes de rétro-action y jouent un rôle primordial [3,4].

La cascade MAPK est considérée comme composée de trois niveaux moléculaires qui consistent de la molécule Mos, qui sera représentée par la lettre  $X$  dans le suivant (avec  $[X]$  comme sa concentration), la molécule MEK ( $Y$ ) et la molécule MAPK ( $Z$ ). Chaque niveau de MEK et de MAPK est, lui-même, composé de trois états qui correspondent au niveau de la phosphorylation de la molécule. Nous considérons donc que, pour l'exemple de la molécule MAPK,  $z$ , il y a les états  $Z_{1,2,3}$  ; de même pour MEK,  $Y$ . Les états de phosphorylation de la molécule Mos n'ont, jusqu'ici, pas été représentés d'une manière complète.

Le modèle mathématique le plus simple de la cascade est le suivant, proposé par Angeli et al. [2]. Il a été obtenu en considérant que les réactions de phosphorylation et de déphosphorylation qui existent entre les différents états des molécules MEK,  $Y$ , et MAPK,  $Z$ , sont suffisamment rapides pour être

considérées d'être en équilibre. De cette manière, la concentration de l'état double-fois phosphorylé de MAPK,  $Z_3$ , devient une fonction sigmoïdale de la concentration de Mos,  $X$ . Donc Angeli et al écrivent pour la dynamique de Mos tout simplement

$$\dot{X} = [Z_3([X])] - \gamma[X] \quad (1)$$

où  $\gamma$  est une constante de dégradation de Mos (il n'y a pas de dégradation de MEK et de MAPK). Nous avons récemment publié une dérivation analytique de la fonction  $[Z_3([X])]$  pour le cas d'une cinétique Michaelis-Menten [6]. L'action de la fonction  $[Z_3([X])]$  sur  $x$  constitue la boucle de rétro-action : le produit de la cascade, MAPK, active Mos.

## 2 Le modèle et l'analyse des bifurcations

Or, comme déjà indiqué, ce modèle est trop simpliste : il néglige le fait que les états de Mos possible sont en aussi trois : on distingue plutôt trois états de phosphorylation  $X$ , comme pour MEK et MAPK : un état de Mos inactif et instable (voir : dégradable),  $X_s$ , un état stable, mais inactif, et un état  $X_{as}$ , dans lequel la molécule Mos est stable est active. On arrive donc au modèle complet suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = k_1 - (k_2[X] + k_7[X]) \\ \dot{X}_a = (k_2[X] + k_5[P_x][X_{as}]) - ([X_a](k_3[MPF] + k_4[Z_3]) + k_6[X_a]) \\ \dot{X}_{as} = [X_a](k_3[MPF] + k_4[Z_3]) - k_5[P_x][X_{as}] \\ \dot{Y}_1 = k_{11}[Y_2][P_y] - k_8[Y_1]([X_a] + [X_{as}]) \\ \dot{Y}_2 = (k_8[Y_1]([X_a] + [X_{as}]) + k_{10}[Y_3][P_y]) - (k_{11}[Y_2][P_y] + k_9[Y_2]([X_a] + [X_{as}])) \\ \dot{Y}_3 = k_9[Y_2]([X_a] + [X_{as}]) - k_{10}[Y_3][P_y] \\ \dot{Z}_1 = k_{15}[Z_2][P_z] - k_{12}[Z_1][Y_3] \\ \dot{Z}_2 = (k_{12}[Z_1][Y_3] - k_{15}[Z_2][P_z]) - (k_{13}[Z_2][Y_3] - k_{14}[Z_3][P_z]) \\ \dot{Z}_3 = k_{13}[Z_2][Y_3] - k_{14}[Z_3][P_z] \end{array} \right. \quad (2)$$

Dans ce modèle, toutes les réactions entre les états de phosphorylation pour Mos, MEK et MAPK sont représentées. Pour les deux dernières, il y a en plus deux conditions de conservation de concentrations :

$$[Y_1] + [Y_2] + [Y_3] = [Y_T] \quad (3)$$

et

$$[Z_1] + [Z_2] + [Z_3] = [Z_T]. \quad (4)$$

En plus, nous avons introduit la concentration de MPF dans le modèle. Le MPF est un complexe de protéines qui contrôle le cycle cellulaire. Notre intérêt final dans le développement du modèle est de comprendre le couplage entre la voie MAPK et le cycle cellulaire. Les constantes cinétiques du modèle ont été déterminées par des mesures expérimentales sauf pour le triplet de Mos, pour lequel ces valeurs n'ont pas encore été déterminées [7,8].

Dans une première étape nous avons considéré le MPF comme un paramètre variable, sans considération de son évolution propre dans le temps. Un résultat représentatif de notre étude exhaustive [7,8] est montré Fig. 2 en fonction des deux paramètres  $k_3$  et  $k_4$  qui concernent le couplage de MPF et de MAPK deux-fois phosphorylée. On observe trois régimes en fonction de la boucle de rétroaction ( $k_4$ ) : (I) la monostabilité, (II) la bistabilité réversible dans la zone incluse par les deux courbes rouges et vertes, (III) la bistabilité irréversible. Ces notions ont été discuté par Giudi et Goldbeter [5] : l'irréversibilité dans ce sens est indicatif d'un transition entre deux états pour laquelle il existe juste 'une voie unique', avec la réaction

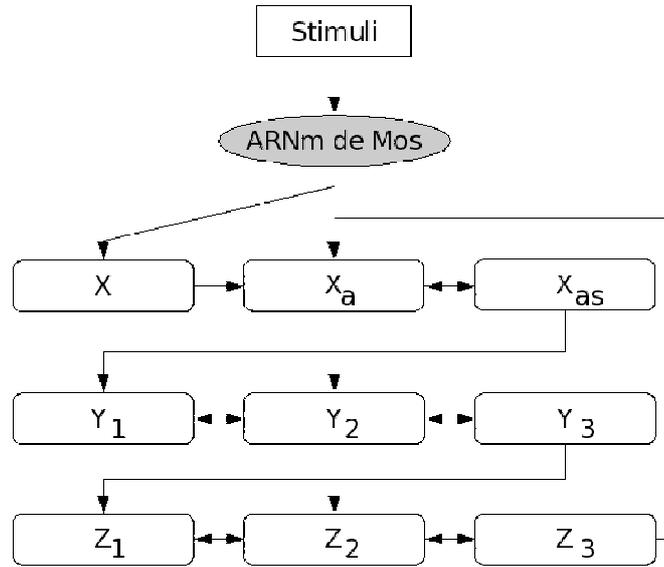


Fig. 1. La topologie du réseau.

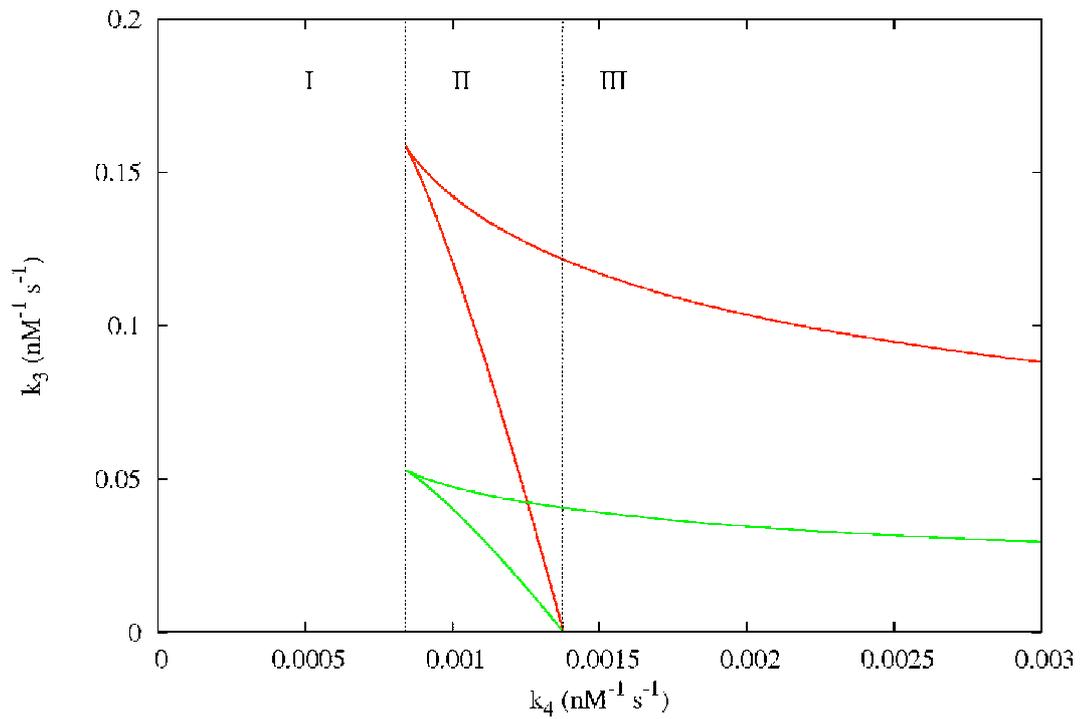


Fig. 2. Résultat d'analyse de bifurcations du modèle. Voir la discussion dans le texte.

inverse bloquée. Ceci est visible sur la figure car, en effet, une branche de la zone de bistabilité n'est plus accessible.

Par contre, on voit que le MPF, s'il n'a pas de dynamique propre, n'est qu'un simple paramètre multiplicatif  $k_3$ . Donc, en changeant sa valeur, la taille de zone de bistabilité change. Surtout, l'influence de MPF ne peut jamais rendre le système bistable inférieur à un certain seuil pour la boucle de rétroaction.

### 3 Discussion

En réalité, le MPF varie dans temps. Cela implique que le système est obligé de traverser un diagramme de bifurcations qui lui-même varie dans le temps. Dans notre étude [7] nous avons étudié la dynamique de Mos induite par le MPF de manière expérimentale. Pour comparer le comportement observé de Mos nous avons choisi des profils de MPF fittés aux expériences, avec un accord assez satisfaisant. Mais, finalement, cette approche nous ne permet pas encore de résoudre des comportements de Mos et de MPF observés dans tous les détails. Nous sommes maintenant en train de coupler notre modèle, que nous considérons comme validé, à des modèles existants sur la dynamique de MPF. Nous espérons que ce travail nous permettra d'obtenir un premier modèle 'complet' qui couple la dynamique de la cascade, son module d'initiation par la protéine Mos, et le MPF - donc, le couplage de la voie de signalisation de MAPK au cycle cellulaire.

### Références

1. C. Y. HUANG & J. E. FERRELL JR, Ultrasensitivity in the mitogen-activated protein kinase cascade, *Proceedings of the National Academy of Science (USA)*, **93**, 10078-10083 (1996).
2. D. ANGELI, J.E. FERRELL JR & E.D. SONTAG, Detection of multistability, bifurcations, and hysteresis in a large class of biological positive-feedback systems, *Proceedings of the National Academy of Science (USA)*, **101**, 1822-1827 (2004).
3. J. E. FERRELL JR & E. M. MACHLEDER, The biochemical basis of an all-or-none cell fate switch in *Xenopus* oocytes, *Science*, **280**, 895-898 (1998).
4. W. XIONG & J.E. FERRELL JR, A positive-feedback-based bistable 'memory module' that governs a cell-fate decision, *Nature*, **426**, 460-465 (2003).
5. G. M. GIUDI & A. GOLDBETER, Bistability without hysteresis in chemical reaction systems : A theoretical analysis of irreversible transitions between multiple steady states, *Journal of Physical Chemistry*, **101**, 9367-9376 (1997).
6. C. RUSSO, C. GIURANIUC, R. BLOSSEY & J.F. BODART, On the equilibria of the MAPK cascade : cooperativity, modularity and bistability, *Physica A*, **388**, 5070-5080 (2009).
7. C. RUSSO, R. BEAUJOIS, J. F. BODART & R. BLOSSEY, Kicked by Mos and tuned by MPF — the initiation of the MAPK cascade in *Xenopus* oocytes, *HFSP Journal*, **3**, 428-440 (2009)
8. C. RUSSO, Dynamique et modularité de la voie Mitogen Activated Protein Kinase dans les ovocytes de *Xénope* : modélisation et approches expérimentales, Thèse de Doctorat Université des Sciences et des Technologies de Lille (2009)

# Analyse du rôle des conditions aux limites acoustiques non linéaires dans les instabilités de combustion

Thierry Schuller<sup>1</sup>, Nicolas Tran<sup>1</sup>, Nicolas Noiray<sup>1</sup>, Daniel Durox<sup>1</sup>, & Sébastien Ducruix<sup>1</sup> & Sébastien Candel<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire EM2C, Ecole Centrale Paris et CNRS, 92295 Châtenay-Malabry

<sup>2</sup> Ecole Centrale Paris et Institut Universitaire de France

thierry.schuller@em2c.ecp.fr

**Résumé.** Les déclenchements à partir d'un seuil, les décalages de fréquence, les commutations de mode et les phénomènes d'hystérésis sont caractéristiques de beaucoup de systèmes présentant des instabilités thermo-acoustiques. Ces mécanismes ne peuvent être décrits par des analyses classiques de stabilité linéaire et la réponse non linéaire de la flamme est souvent évoquée pour interpréter ces phénomènes. Il existe cependant d'autres interactions responsables de fortes non linéarités. Plusieurs études récentes montrent que la réponse des conditions aux limites acoustiques de la chambre de combustion dépend également du niveau des perturbations. Ces phénomènes doivent être pris en compte dans l'analyse de la dynamique du système. Ceci est illustré à l'aide de deux exemples. Le premier correspond à une plaque perforée située sur une cavité résonante et traversée par un écoulement lent. La seconde correspond à une collection de petites flammes coniques stabilisées à la sortie d'un brûleur. Ces systèmes sont soumis à des perturbations acoustiques d'amplitude croissante, jusqu'à atteindre des niveaux typiques d'instabilités de combustion. On montre que leur dynamique peut être analysée par une réponse qui dépend du niveau de la perturbation. On généralise pour cela la notion d'impédance  $Z(\omega)$  par son extension non linéaire qui tient compte du niveau d'amplitude  $Z(\omega, |p'| \text{ ou } |u'|)$  où  $|p'|$  et  $|u'|$  représentent les niveaux des perturbations de pression ou de vitesse. En utilisant ce concept, on montre qu'une plaque perforée utilisée comme système de contrôle passif pour atténuer des instabilités perd ses propriétés absorbantes pour des niveaux d'amplitude élevée. On montre également que la réflexion des ondes acoustiques sur une flamme est modifiée à forte amplitude et que la stabilité d'un foyer peut fortement être affectée.

**Abstract.** Triggering, frequency shifting, mode switching and hysteresis are commonly encountered during self-sustained oscillations in combustors. These mechanisms cannot be anticipated from classical linear stability analysis and the nonlinear flame response to incident flow perturbations is often invoked to interpret these features. However, the flame may not be solely responsible for nonlinearities. Recent studies indicate that interactions with boundaries can be influenced by the perturbation level and that this needs to be considered. The nonlinear response of acoustic boundary conditions to flow perturbations is here exemplified in two configurations which typify practical applications. The first corresponds to a perforated plate backed by a cavity conveying a bias flow and the second corresponds to a set of flames stabilized at a burner outlet. These systems are submitted to acoustic perturbations of increasing amplitudes as can be encountered during unstable operation. It is shown that these terminations can be characterized by an impedance featuring an amplitude dependent response. The classical linear impedance  $Z(\omega)$  is then replaced by its nonlinear counterpart an Impedance Describing Function (IDF), which depends on the perturbation level input  $Z(\omega, |p'| \text{ or } |u'|)$ . Using this concept, it is shown that the passive perforated plate optimized to damp instabilities of small amplitudes may eventually lose its properties when submitted to large sound pressure levels and that the flame response shifts when the amplitude of incoming flow perturbations is amplified.

## 1 Introduction

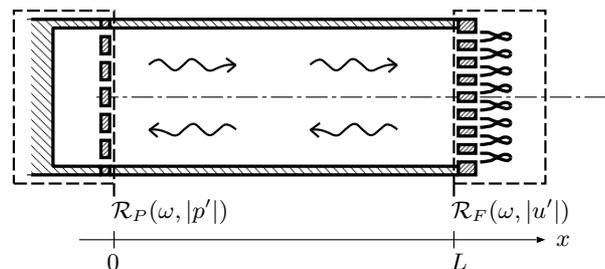
Les instabilités de combustion sont un frein au développement de foyers à haute performance environnementale. Elles apparaissent notamment dans les turbines à gaz pour la production d'électricité, les chaudières thermiques de faible puissance (quelques kW) ou à grande puissance (quelques centaines de MW), les fours, les procédés industriels, les foyers de moteurs d'avions et les moteurs fusées. Elles sont caractérisées par des oscillations périodiques importantes du dégagement de chaleur et de la pression

dans la chambre de combustion lorsqu'elles ont atteint leur cycle limite. Ces oscillations se développent généralement à partir de perturbations d'amplitude infinitésimale [1], mais peuvent également résulter de déclenchements non linéaires suite à des perturbations d'amplitude finie [2]. Lors de la transition vers l'instabilité, des fluctuations d'amplitudes croissantes interagissent avec l'écoulement, la flamme et les limites de la chambre de combustion. Il est donc important de caractériser la réponse acoustique de chacun de ces éléments et en particulier leur sensibilité au niveau d'amplitude des ondes incidentes. Ces phénomènes non linéaires doivent être considérés dans les analyses de stabilité.

La réponse non linéaire d'éléments souvent présents aux limites de foyers est mis en évidence dans cet article dans deux configurations et on montre que leur interaction mutuelle peut modifier la stabilité du foyer. Dans le premier cas, la réponse d'une collection de flammes coniques stabilisées sur une plaque et soumises à des perturbations de l'écoulement est étudiée en fonction du niveau de modulation. Dans le deuxième cas, la non linéarité est mise en évidence sur une plaque perforée en limite de système traversée par un écoulement et soumise à des perturbations acoustiques. Une analyse de stabilité non linéaire est conduite en utilisant les résultats des expériences menées en régime forcé pour caractériser leur interaction mutuelle. La convention suivante est utilisée pour désigner des fluctuations harmoniques :  $b = \bar{b} + b' = \bar{b} + \tilde{b} \exp(-i\omega t)$  où  $\bar{b}$  et  $b'$  désignent respectivement les composantes moyenne et fluctuante et  $\omega$  est la fréquence angulaire.

## 2 Analyse non linéaire de stabilité

La configuration étudiée est un brûleur générique présentant deux éléments non linéaires pouvant interagir entre-eux qui sont représentés schématiquement sur la figure Fig. 1. Le premier élément est actif et comprend une collection de petites flammes coniques laminaires stabilisées sur une plaque perforée dont la réponse acoustique dépend du niveau des perturbations incidentes. Le deuxième élément placé à l'autre extrémité de la cavité est une plaque perforée fermée par une petite cavité résonante. Ce type de système est souvent utilisé pour atténuer les instabilités grâce à son pouvoir d'absorption acoustique. Cet exemple illustre des situations plus complexes dans lesquelles la dynamique de la zone de réaction interfère avec la réponse aux limites de la chambre de combustion.



**Fig. 1.** Schéma d'un brûleur équipé d'un système de contrôle d'impédance en  $x = 0$  et d'une plaque perforée pour stabiliser des petites flammes coniques à sa sortie en  $x = L$ .

Le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_F$  des flammes dépend du niveau des perturbations de vitesse incidentes à la base des flammes  $|u'|$  alors que le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_P$  de la plaque absorbante traversée par un écoulement dépend du niveau de la fluctuation de la vitesse dans les trous de la plaque.

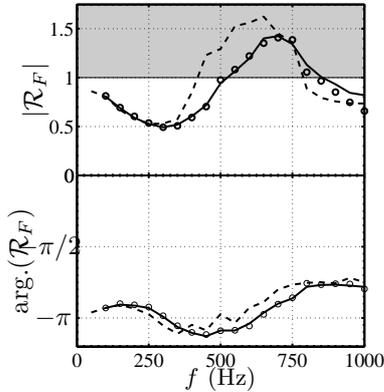
On étudie d'abord la réponse des flammes stabilisées sur la plaque perforée lorsque le système est soumis à des perturbations de l'écoulement générées grâce à un haut parleur. La configuration étudiée comprend une plaque percée de  $N = 420$  trous de rayon  $r = 1$  mm distribués selon un motif carré et qui sont utilisés pour alimenter des petites flammes coniques laminaires. La porosité de la plaque est de  $\sigma = 0.34$  et elle est alimentée par un mélange de méthane et d'air de richesse  $\phi = 0.86$  pour un débit

masse totale  $\dot{m} = 5.4 \cdot 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}$ . Dans ces expériences, le niveau de modulation de vitesse  $u'_{\text{rms}}/\bar{u}$  est contrôlé par un fil chaud placé juste en amont de la plaque perforée au centre du dispositif. Plus de détails sur ce dispositif expérimental peuvent être trouvés dans les références [3,4,2].

Comme les flammes sont sensibles au niveau d'amplitude des perturbations incidentes, le coefficient de réflexion de ce système peut être caractérisé par une impédance  $Z_F$  située en  $x = 0$  qui dépend du niveau d'amplitude  $|u'|$ . On définit alors une nouvelle fonction IDF, Impedance Describing Function, pour représenter cette dépendance :

$$Z_F(\omega, |u'|) = \frac{p'(x=0)}{u'(x=0)} \quad (1)$$

Cette fonction IDF représente la réponse acoustique de tous les éléments en aval du système étudié qui sont vus depuis la cavité située en  $x = 0$ . Cette fonction généralise la notion d'impédance linéaire classique par une fonction qui dépend de la fréquence angulaire  $\omega$  et du niveau de perturbation  $|u'|$ . Cette réponse peut être déterminée sur la base de mesures acoustiques et peut être intéressante lorsque les accès optiques sont limités pour caractériser la dynamique non linéaire des flammes [5,6,7].



**Fig. 2.** Module  $|\mathcal{R}_F|$  et phase  $\arg(\mathcal{R}_F)$  du coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_F$  à la sortie du brûleur en  $x = L$  pour différents niveaux de modulation  $u'_{\text{rms}}/\bar{u} = 0.1$  ( $\circ$ ),  $0.2$  (—) et  $0.4$  (---) sur la gamme de fréquences 100 à 1000 Hz.

Des mesures du coefficient de réflexion de ces flammes sur la gamme de 100 à 1000 Hz sont entreprises à l'aide de la méthode des trois microphones décrites par Chung & Blaser [8,9]. Les résultats  $\mathcal{R}_F = |\mathcal{R}_F| \exp(i \times \arg(\mathcal{R}_F))$  sont présentés pour trois niveaux de modulation  $u'_{\text{rms}}/\bar{u} = 0.1, 0.2$  et  $0.4$  sur la figure Fig. 2. Les données correspondant aux niveaux  $u'_{\text{rms}}/\bar{u} = 0.1$  et  $0.2$  se superposent indiquant qu'il n'y a pas de dépendance vis à vis du niveau de modulation pour des perturbations de faibles amplitudes. Ce régime linéaire prévaut tant que  $u'_{\text{rms}}/\bar{u} = 0.2$ . Lorsque le niveau de modulation est augmenté au-delà de ce seuil, la réponse des flammes est modifiée et la réflexion des ondes acoustiques dévie du comportement observé à plus faibles amplitudes. On remarque également que le module du coefficient de réflexion  $|\mathcal{R}_F|$  prend des valeurs supérieures à l'unité pour des fréquences comprises entre 500 et 800 Hz lorsque le niveau de modulation reste modéré ( $\leq 0.2$ ), mais que la limite basse fréquence est décalée vers 400 Hz lorsque l'amplitude de modulation atteint 0.4. Les valeurs du coefficient de réflexion supérieures à l'unité indiquent qu'une partie de l'énergie acoustique est renvoyée vers la cavité intérieure. L'onde acoustique réfléchie d'amplitude  $\bar{p}_0^-$  prend des valeurs supérieures à la perturbation incidente d'amplitude  $\bar{p}_0^+$ .

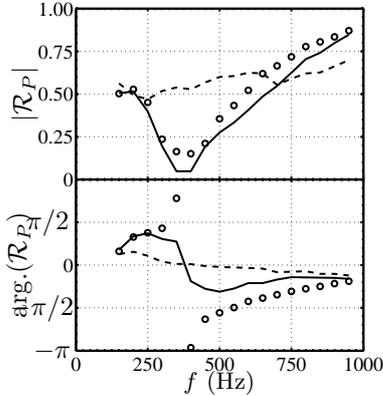
On peut donc également conclure qu'en l'absence de modulation externe, les perturbations internes à l'écoulement vont s'amplifier dans cette gamme de fréquences et peuvent générer des instabilités auto-entretenues [4]. La bande de fréquences dans laquelle les perturbations réfléchies sont amplifiées par la flamme dépend du niveau d'oscillation et s'élargit dans ce cas lorsque le niveau augmente. Il est donc clair que le niveau d'amplitude doit être pris en compte dans les analyses de stabilité. L'analyse de la stabilité linéaire et non linéaire d'un brûleur constitué d'une cavité résonante et équipé à l'une de ses extrémités avec ce type d'élément actif a été conduite par Noiray et al. [2]. Différents régimes instables ont été observés lorsque la taille  $L$  de la cavité amont est modifiée. Des phénomènes tels que des déclenchements d'instabilités à partir d'un seuil, des changements de fréquences, des sauts de modes et des hystérésis ont été mis en évidence. Une méthode de prévision de ces phénomènes basée sur l'analyse de la réponse de la flamme en régime forcé pour différents niveaux d'amplitude a été développée. Elle permet de reproduire la majorité des phénomènes observés aux cycles limites. Dans cette configuration, l'extrémité en regard des flammes présente une condition parfaitement réfléchissante pour les ondes acoustiques ( $\mathcal{R}_P = 1$ , Fig. 1).

La plaque à l'arrière de la cavité résonante est maintenant remplacée par un système de contrôle passif situé en regard de la zone de combustion (Fig. 1). Celui-ci est constitué d'une plaque perforée combinée à une cavité résonante et permet d'atténuer les ondes réfléchies sur la gamme de fréquences de 100 à 1000 Hz. La réponse acoustique d'une plaque perforée de faible porosité  $\sigma = 1.48\%$  fermée par d'une cavité

fermée d'une longueur  $L_b = 15$  cm est caractérisée pour différents niveaux d'amplitude mesurés par le niveau sonore atteint au fond de la cavité. La plaque en acier a une épaisseur  $l = 1$  mm et comprend un réseau régulier de trous de rayon  $r = 0.5$  mm séparés d'une distance  $d = 7$  mm selon des motifs carrés. La plaque est traversée par un écoulement qui acquiert une vitesse  $\bar{u} = 3$  m s<sup>-1</sup> dans les trous. Cette valeur correspond à la vitesse optimale déterminée pour obtenir une condition quasi non-réfléchissante pour une fréquence  $f=400$  Hz dans la limite des perturbations acoustiques de faible amplitude [10] :

$$\mathcal{R}_P = \frac{(ikd^2/K_R) + 1 - (i/\tan(kL_b))}{(ikd^2/K_R) - 1 - (i/\tan(kL_b))} \quad (2)$$

Le coefficient apparaissant dans cette expression est la conductivité de Rayleigh d'un trou et est prise égale à  $K_R(\text{St}) = 2r(\gamma - i\delta)$ , où  $\gamma$  et  $\delta$  sont des fonctions positives du nombre de Strouhal  $\text{St} = \omega r/\bar{u}$  et  $k = \omega/\bar{c}$  est le nombre d'onde [11].



**Fig. 3.** Module  $|\mathcal{R}_P|$  et phase  $\arg.(\mathcal{R}_P)$  du coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_P$  en  $x = 0$  d'une plaque traversée par un écoulement lent et placée au-dessus d'une cavité résonante. La réponse est déterminée pour trois niveaux sonores SPL=110 dB ( $\circ$ ), 128 dB (—) et 140 dB (---) mesurés au fond de la cavité.

L'évolution du module  $|\mathcal{R}_P|$  et de la phase  $\arg.(\mathcal{R}_P)$  du coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_P = |\mathcal{R}_P| \exp(i \times \arg.(\mathcal{R}_P))$  a été caractérisé pour différents niveaux de modulation en fonction de la fréquence de modulation. Ce niveau est contrôlé par un microphone placé au fond de la cavité résonante. Les mesures du coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_P$  sont représentées pour trois niveaux sonores SPL=110 dB, 128 dB et 140 dB sur la figure Fig. 3. Le coefficient de réflexion présente d'abord un régime indépendant du niveau sonore (ici SPL= $\leq 120$  dB). Il présente ensuite des performances d'absorption légèrement améliorées (ici pour SPL=128 dB). Il augmente ensuite rapidement avec le niveau sonore pour atteindre une valeur constante sur la gamme de fréquences 100-1000 Hz lorsque le niveau est très élevé (ici  $\mathcal{R}_P \simeq 0.5$  pour SPL=140 dB). Cette valeur tend vers l'unité pour des niveaux sonores encore plus élevés. A nouveau, ceci peut être pris en compte en remplaçant le concept d'impédance linéaire  $Z_p(\omega)$  par sa généralisation non linéaire sous la forme d'une fonction IDF, Impedance Describing Function, qui dépend de la fréquence angulaire  $\omega$  et du niveau de perturbation :

$$Z_P(\omega, |p'|) = \frac{p'(x=0)}{u'(x=0)}. \quad (3)$$

Un calcul simple montre que la transition entre le régime linéaire et le régime non-linéaire correspond à une situation où le niveau de fluctuation de vitesse acoustique  $u'_{rms}$  dans les trous de la plaque est de l'ordre de grandeur de la vitesse débitante  $\bar{u}$  :  $u'_{rms} \simeq \bar{u}$ . Lorsque le niveau sonore reste modéré, la fluctuation de vitesse dans les trous reste bien inférieure à la vitesse de l'écoulement. Pour les niveaux SPL=128 et 140 dB l'amplitude  $u'_{rms}$  est plus grande que la vitesse d'écoulement  $\bar{u} = 3$  m s<sup>-1</sup> dans les trous et le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_P$  change avec le niveau des perturbations.

Les éléments précédents sont maintenant utilisés pour étudier la stabilité non linéaire du système formé à la figure Fig. 1 combinant les deux éléments non linéaires caractérisés par leur IDF respective :

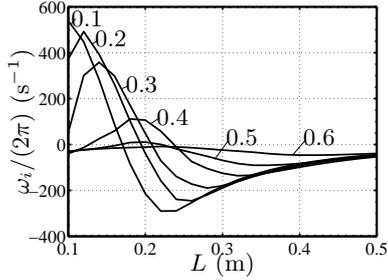
$$\mathcal{R}_F = \mathcal{R}_F(\omega, |u'|) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_P = \mathcal{R}_P(\omega, |p'|) \quad (4)$$

En supposant la propagation d'ondes harmoniques planes, il est facile d'obtenir la relation de dispersion suivante :

$$\mathcal{R}_F(\omega, |u'|) \exp\left(i\frac{\omega L}{\bar{c}}\right) - \mathcal{R}_P^{-1}(\omega, |p'|) \exp\left(-i\frac{\omega L}{\bar{c}}\right) = 0 \quad (5)$$

Les racines complexes  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  de cette équation non linéaire détermine la stabilité du système qui dépend du signe de la partie imaginaire de la fréquence complexe  $\omega$ . Lorsque ce signe est positif l'instabilité

croît. La configuration présentant un fond parfaitement réfléchissant  $\mathcal{R}_P = 1$  ( $Z_p \rightarrow \infty$ ) correspond au cas de référence étudié par Noiray *et al.* [2]. Les changements provoqués par l'introduction du système absorbant en  $x = 0$  par rapport au cas de référence sont maintenant envisagés pour le premier mode résonant longitudinal (de type quart d'onde). Il est clair qu'une modification du coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_P$  à l'entrée du brûleur va modifier les racines de la relation de dispersion (5) et affecter la stabilité du système.



**Fig. 4.** Taux de croissance  $\omega_i$  des racines complexes  $\omega$  de la relation de dispersion Eq. 5 en fonction de la taille de la cavité du brûleur  $L$  et du niveau d'oscillation  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L$  à la base des flammes.

L'analyse de la stabilité peut être simplifiée en considérant une configuration idéalisée. La fonction IDF pour la condition d'entrée  $\mathcal{R}_P$  utilisée pour mener les calculs est supposée indépendante du niveau des perturbations et est donnée par l'expression analytique (2) tant que le niveau sonore reste inférieur à 120 dB. Le système de contrôle passif de l'impédance est ensuite supposé prendre une valeur constante prise ici égale à  $\mathcal{R}_P = 1$  lorsque le niveau sonore dépasse 120 dB :

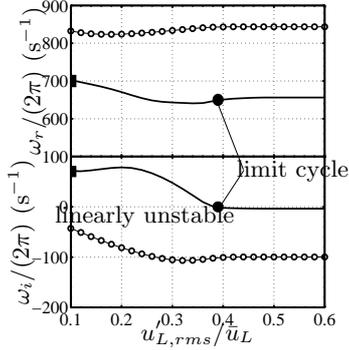
$$\mathcal{R}_P = \begin{cases} \text{Eq. 2} & \text{if } u'_{0,rms} < \bar{u}_0 \text{ (SPL} < 120 \text{ dB)} \\ 1 & \text{if } u'_{0,rms} > \bar{u}_0 \text{ (SPL} > 120 \text{ dB)} \end{cases} \quad (6)$$

La plaque perforée et sa cavité résonante opèrent dans le régime linéaire tant que le niveau sonore reste inférieur à SPL < 120 dB et perd ses propriétés absorbantes pour des niveaux plus importants. Ce modèle nécessite de connaître le niveau de fluctuation de vitesse  $u'_{0,rms}$  dans les cavités du système d'absorption en  $x = 0$ . Cette quantité peut être calculée à partir du niveau de fluctuation  $u'_{L,rms}$  à la base des flammes en  $x = L$  :

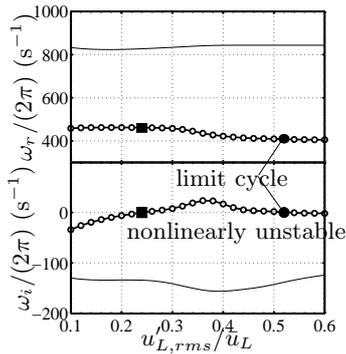
$$\frac{\bar{u}(0)}{\bar{u}(L)} = \frac{1 - \mathcal{R}_P^{-1}}{1 - \mathcal{R}_F} \exp(-ikL) \quad (7)$$

Il est dans ces conditions possible de calculer les racines complexes  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  de l'équation (5) pour différentes longueurs du brûleur  $L = 0.1$  to  $0.5$  m en fonction du niveau de fluctuation relevé à la base des flammes  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L$ . Cette analyse est d'abord représentée pour le cas de référence lorsque  $\mathcal{R}_P = 1$  dans l'équation (5). Les solutions sont recherchées uniquement pour le premier mode longitudinal de la cavité, les modes de fréquences plus élevées ne sont pas examinés dans cette étude. Les résultats pour les taux de croissance  $\omega_i$  des perturbations sont présentés sur la figure Fig. 4 pour six niveaux de modulation à la base des flammes  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L$  de 0.1 à 0.6.

On peut dans cette figure identifier trois type de comportement pour les racines  $\omega_i$ . Pour des faibles niveaux d'oscillation, par exemple  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L = 0.1$ , le taux de croissance  $\omega_i$  est positif pour des brûleur de petites tailles, il décroît ensuite et devient négatif lorsque la taille  $L$  de la cavité est augmentée. Des taux de croissance positifs pour des faibles niveaux de perturbation indiquent des modes linéairement instables. Pour des niveaux de perturbation modérés, par exemple  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L = 0.4$ , le taux de croissance est d'abord négatif pour des petites tailles de la cavité. Il présente ensuite une plage de longueurs  $L$  dans laquelle il prend des valeurs positives et puis chute à nouveau pour reprendre des valeurs négatives pour des grandes tailles de cavité. Ce type de mode présentant un taux de croissance positif au-delà d'un certain seuil est linéairement stable, mais non linéairement instable. Lorsque le niveau d'oscillation est encore plus important, les taux de croissance  $\omega_i$  restent toujours négatifs pour des longueurs comprises entre  $L = 0.1$  et  $0.5$  m. C'est le cas par exemple pour des niveaux d'oscillation  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L \geq 0.6$ . Ceci indique que les flammes stabilisées sur les plaques perforées ne peuvent entretenir des oscillations pour des amplitudes de fluctuation trop importantes et qu'un cycle limite est atteint pour un certain niveau d'oscillation. Les cycles limites atteints sont déterminés par les solutions  $\omega_r$  correspondant à des taux croissance nuls  $\omega_i = 0$  et  $\partial\omega_i/\partial u'_{rms} < 0$ . Ces résultats ont été confirmés par des expériences [3] qui montrent que le système présente des instabilités auto-entretenues dont le cycle limite est associé au premier mode longitudinal du brûleur pour des longueurs comprises entre  $L = 0.10$  et  $L = 22$  m. L'analyse précédente montre que le système est effectivement linéairement instable pour des longueurs comprises entre  $L = 0.10$  et  $L = 0.18$  m et non linéairement instable entre  $L = 0.18$  et  $L = 0.22$  m.



**Fig. 5.** Linearly unstable mode - Evolution of the angular frequency  $\omega_r$  and the growth rate  $\omega_i$  for a burner length  $L = 0.12$  m as a function of the oscillation level  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L$  at the flames base for different inlet impedances : (—)  $\mathcal{R}_P = 1$ , (---)  $\mathcal{R}_P$  given by the linear model (2), (○)  $\mathcal{R}_P$  given by non linear model (6).



**Fig. 6.** Non linearly unstable mode - Evolution of the angular frequency  $\omega_r$  and the growth rate  $\omega_i$  for a burner length  $L = 0.20$  m as a function of the oscillation level  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L$  at the flames base for different inlet impedances : (—)  $\mathcal{R}_P = 1$ , (---)  $\mathcal{R}_P$  given by the linear model (2), (○)  $\mathcal{R}_P$  given by non linear model (6).

La transition des modes linéairement et non linéairement instables vers un cycle limite est maintenant examinée pour deux tailles de cavité  $L = 0.12$  et  $L = 0.20$  m dans les figures Figs. 5 et 2. Le premier cas examiné pour une taille de cavité  $L = 0.12$  m correspond à un mode linéairement instable correspondant à une fréquence d'oscillation initiale  $f = \omega_r/(2\pi) = 700$  Hz. Lorsque le niveau d'oscillation augmente, le taux de croissance  $\omega_i$  est progressivement réduit et s'annule au cycle limite  $\omega_i = 0$  avec une fréquence d'oscillation  $f = \omega_r/(2\pi) = 660$  Hz et un niveau d'oscillation relativement modéré  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L = 0.39$  à la base des flammes (Fig. 5, —). Lorsque le système de contrôle passif est substitué à la plaque parfaitement réfléchissante au fond de la cavité, ce mode disparaît complètement. On peut remarquer dans ce cas que le niveau d'oscillation de la vitesse  $u'_{0,rms}$  dans les perforations du système de contrôle passif situé en  $x = 0$  reste toujours largement inférieur à la vitesse d'écoulement  $\bar{u}_0$  dans les perforations. Le système de contrôle passif opère dans son régime nominal, c'est-à-dire le mode linéaire. Les solutions obtenues pour le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_P$  avec les modèles linéaires (2) et non linéaires (6) sont donc identiques (Fig. 5, — et ○). Le système de contrôle passif remplit parfaitement son rôle en atténuant les perturbations instables dans le brûleur.

La situation est différente pour une cavité d'une taille plus importante  $L = 0.20$  cm. Dans cette configuration le brûleur est linéairement stable tant que le niveau des perturbations reste inférieur à  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L = 0.24$  (Fig. 2, —), mais devient non linéairement instable pour des oscillations de plus grande amplitude. Ce type de mode ne peut pas se déclencher tout seul, mais peut par exemple être déclenché par un autre mode linéairement instable comme cela a été montré dans les expériences réalisées par Noiray et al. [2]. La stabilité du brûleur dépend alors également des conditions d'allumage et de l'histoire de la dynamique de la combustion depuis son initiation. Lorsque le niveau des perturbations atteint  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L \geq 0.24$ , le système se met à osciller avec une fréquence  $f = \omega_r/(2\pi) = 460$  Hz et transite vers un cycle limite caractérisé par une fréquence  $f = \omega_r/(2\pi) = 400$  Hz avec un niveau d'oscillation  $u'_{L,rms}/\bar{u}_L \geq 0.52$  à la base des flammes qui est plus élevé que dans le cas exploré pour une taille de cavité  $L = 0.12$  m. Lorsque le fond du brûleur en  $x = 0$  est cette fois-ci remplacé par le système de contrôle passif chargé d'atténuer cette instabilité, il ne parvient pas à remplir son rôle car l'amplitude de l'instabilité est trop importante. Ceci est illustré par le calcul en examinant l'évolution du taux de croissance de l'instabilité en utilisant le modèle linéaire (6) pour le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_P$  du système de contrôle. Les résultats obtenus avec ce modèle correspondent aux cercles sur la figure Fig. 2 qui présentent les mêmes trajectoires que celles obtenues pour les calculs menés avec un fond rigide lorsque  $\mathcal{R}_P = 1$  (Fig. 2, — and ○).

Le système d'absorption acoustique ne fonctionne pas car le niveau de fluctuation atteint dans ses perforations  $u'_{0,rms}$  est dans ce cas toujours grand devant la vitesse d'écoulement  $\bar{u}_0$  qui le traverse et le système opère dans son régime saturé où  $\mathcal{R}_P = 1$  (6). On peut noter qu'un système de contrôle passif du coefficient de réflexion qui serait robuste opérerait encore dans son régime linéaire et permettrait d'atténuer l'instabilité comme indiqué par la courbe en trait fin sur la figure Fig. 2 (—). Ceci peut être réalisé en concevant une plaque perforée adaptée pour le même type de fréquences mais opérant avec une vitesse d'écoulement dans les trous plus importante comme indiqué par Tran et al. [12]. Dans cette étude, une plaque perforée combinée à une cavité résonante est placée au fond du tube de prémélange d'un brûleur swirlé d'une puissance de 50 kW et présentant des instabilités longitudinales d'amplitude

élevée. Seules les plaques présentant des vitesses d'écoulement suffisamment élevées dans les perforations permettent d'obtenir une réduction significative du niveau d'instabilité, les plaques traversées par des écoulements trop lents restent inefficaces.

### 3 Conclusion

Cette analyse simplifiée montre que des conditions aux limites présentant une sensibilité forte au niveau d'amplitude des perturbations acoustiques incidentes peut fortement modifier la stabilité d'un brûleur présentant des instabilités auto-entretenuës d'amplitudes élevées. Ces phénomènes sont particulièrement importants pour la conception de systèmes de contrôle passif robustes. Il est important dans ces conditions de déterminer pour une configuration donnée quels sont les principaux éléments non linéaires dans un foyer et d'identifier pour chacun d'entre-eux la transition à partir de laquelle les phénomènes non linéaires doivent être pris en compte.

*Remerciements* Ce travail a reçu l'appui de la Fondation d'Entreprise EADS, de la Délégation Générale pour l'Armement. Sébastien Candel est également professeur à l'Institut Universitaire de France

### Références

1. T. C. LIEUWEN & V. YANG, (Eds.), Combustion instabilities in gas turbines, Operational experience, Fundamental mechanisms, and Modeling, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, **210** January (2006).
2. N. NOIRAY, D. DUROX, T. SCHULLER & S. CANDEL, A unified framework for nonlinear combustion instability analysis based on the flame describing function, *Journal of Fluid Mechanics*, **615**, 139–167 (2008).
3. N. NOIRAY, D. DUROX, T. SCHULLER & S. CANDEL, Self-induced instabilities of premixed flames in a multiple injection configuration, *Combustion & Flame*, **145** (3), 435–446 (2006).
4. N. NOIRAY, D. DUROX, T. SCHULLER & S. CANDEL, Passive control of combustion instabilities involving premixed flames anchored on perforated plates. *Proceedings of the Combustion Institute*, **31** (1), 1283–1290 (2007).
5. W. POLIFKE, Reconstruction of acoustic transfer matrices by instationnary computationnal fluid dynamics, *Journal of Sound & Vibrations*, **245** (3), 483–510 (2001).
6. C. O. PASCHEREIT, B. SCHUERMANS, W. POLIFKE & O. MATTSON Measurement of transfer matrices and source terms of premixed flames, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **124**, 239–247 (2002).
7. K. TRUFFIN & T. POINSOT, Comparison and extension of methods for acoustic identification of burners, *Combustion & Flame*, **142** (4), 388–400 (2005).
8. J. Y. CHUNG & D. A. BLASER, Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **68**, 907–913 (1980).
9. J. Y. CHUNG, D. A. BLASER, Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. II. Experiment, *Journal of the Acoustical Society of America*, **68**, 914–921 (1980).
10. I. J. HUGHES, A. P. DOWLING, The absorption of sound by perforated linings, *Journal of Fluid Mechanics*, **218**, 299–335 (1990).
11. M. S. HOWE, On the theory of unsteady high reynolds number flow through a circular aperture, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **366**, 205–223 (1979).
12. N. TRAN, S. DUCRUIX & T. SCHULLER, Passive control of the inlet acoustic boundary condition of a swirled turbulent burner, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **131** (5), 051502 (2009).



# Trafic de gouttes à une jonction

David A. Sessoms, Laurent Courbin, & Pascal Panizza & Axelle Amon

Institut de Physique de Rennes, UMR 6251, Campus de Beaulieu, Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France  
 axelle.amon@univ-rennes1.fr

**Résumé.** Nous présentons une étude numérique, théorique et expérimentale de la répartition de gouttes à l'entrée d'une boucle asymétrique. Nous observons et prédisons des motifs périodiques de répartition. De la multistabilité entre motifs expérimentaux est également observée et expliquée en tenant compte du bruit inhérent aux expériences.

**Abstract.** We investigate numerically, theoretically and experimentally droplet repartition at the inlet of an asymmetric loop. We observe and predict peridodicals patterns of droplets repartition. Multistability between experimental patterns is also observed and rationalized by taking into account noise that is intrinsic in experiments.

## 1 Introduction

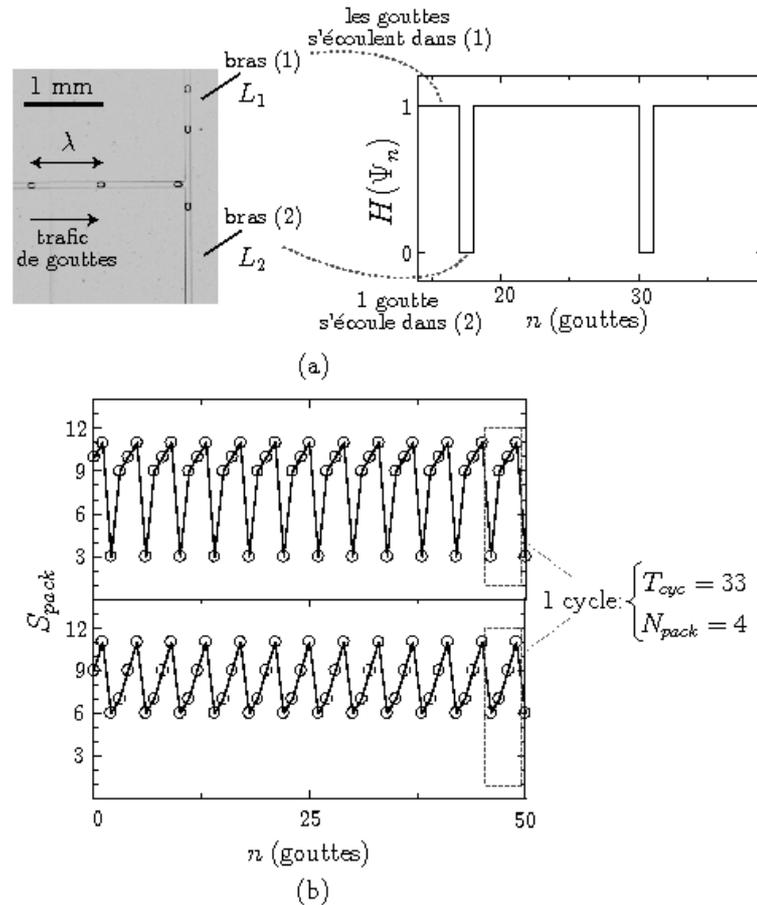
De nombreux domaines mettent en jeu la circulation d'éléments discrets dans des réseaux, comme par exemple la circulation sanguine [1] ou les écoulements de dispersions de gouttes (industrie du pétrole et microfluidique [2]). Comprendre et maîtriser ces écoulements sur l'ensemble d'un réseau nécessite tout d'abord une description du mode de répartition des éléments à une simple jonction. Dans le cas d'écoulements dilués de gouttes en microfluidique, la règle de répartition est particulièrement simple : entre plusieurs canaux accessibles, une goutte choisira celui qui possède la plus faible résistance hydrodynamique.

Dans ce cadre, nous nous intéressons à la dynamique de répartition d'un train de gouttes arrivant à l'entrée d'une boucle asymétrique. Expérimentalement et numériquement, une succession de régimes périodiques et apériodiques ont été observés avec des motifs de répartition des gouttes difficilement prédictibles [2]. La complexité de ce système réside dans le fait que les variables dépendent de toutes les gouttes présentes à cet instant dans la boucle [3] : le problème rentre donc dans la classe des systèmes à retard. Nous proposons ici un modèle conduisant à une dynamique discrète d'une variable binaire, le choix du bras par la goutte à la jonction. Il s'agit donc d'un système discret gouverné par une règle itérative simple, une caractéristique des automates cellulaires. L'étude numérique de ce modèle nous permet de caractériser par deux quantités invariantes les régimes observables. Notre modèle permet de trouver les règles gouvernant la sélection de ces quantités invariantes et les évolutions de ces dernières avec les paramètres physiques du système. Les prédictions théoriques donnent une description complète des résultats numériques. Nous avons confirmé la pertinence du modèle par une étude expérimentale, et avons ainsi pu montrer que certains régimes apériodiques observés résultent de la multistabilité de différents régimes possédant les mêmes invariants.

## 2 Présentation du système, modélisation

Dans notre système (Fig. 1a), un train périodique de gouttes monodisperses arrive à l'entrée d'une boucle formée de deux bras de même section et de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  tels que  $\Lambda = L_2/L_1 > 1$ . Les gouttes sont émises à une période constante  $\tau$  alors que la distance  $\lambda$  entre les gouttes, et donc la vitesse  $v = \lambda/\tau$  peut varier. Dans le régime que nous considérons, lorsqu'une goutte arrive à la jonction, seules les résistances hydrodynamiques des bras accessibles entrent en jeu : la goutte choisit le bras de résistance

hydrodynamique la plus faible [3]. Or il a été montré que la résistance hydrodynamique d'un bras varie avec le nombre de gouttes qu'il contient de manière affine [4] : la résistance hydrodynamique du bras, de longueur  $L$  et contenant  $N$  gouttes, est proportionnelle à  $L + NL_d$  où  $L_d$  est une longueur caractérisant l'accroissement de la résistance hydrodynamique liée à la présence d'une goutte.



**Fig. 1.** (a) A gauche : zoom sur la jonction en T de notre dispositif microfluidique définissant les variables utilisées dans nos études numériques et expérimentales de trafic de gouttes :  $\lambda$ ,  $L_1$  et  $L_2 > L_1$ . A droite : évolution typique du signal numérique binaire  $H(\Psi_n)$  en fonction du numéro  $n$  de la goutte s'écoulant. Chaque 1 et 0 correspond respectivement à une goutte passant dans le bras (1) et un "trou" présent dans le bras (1), *i.e.* une goutte passant dans le bras (2). (b) Pour des valeurs données de  $L_d = 2.7$ ,  $\lambda = 8.2$ ,  $L_1 = 100$ , and  $L_2 = 150$ ,  $S_{pack}$  dépend fortement des conditions initiales : le bras (2) est initialement vide et le bras (1) est rempli de gouttes (signal du haut), ou contient des gouttes distantes de  $L_1/10$  (signal du bas).

Les grandes lignes de la réponse du système en fonction de  $\lambda$  peuvent alors aisément se comprendre : tant que l'écart entre les gouttes est grand, le bras court contient un faible nombre de gouttes et sa résistance hydrodynamique reste plus faible que celle du bras 2 vide. Toutes les gouttes arrivant à la jonction bifurquent alors vers le bras le plus court qui agit comme un filtre. Néanmoins, il existe une valeur seuil  $\lambda_f$  à partir de laquelle il y aura suffisamment de gouttes dans le bras court pour que la résistance hydrodynamique du bras long devienne plus faible que celle du bras court, entraînant une répartition des gouttes entre les deux bras et donnant alors lieu à des motifs de répartition de plus en plus complexes lorsque  $\lambda$  diminue.

Il a été montré récemment [3] que la vitesse des gouttes dans le bras ( $i$ ) dépendait des  $N_i$  gouttes déjà présentes dans ce bras selon  $v_i = (1 - \frac{L_i + N_i L_d}{L})v$  où  $L = L_1 + L_2 + (N_1 + N_2)L_d$ . D'autre part, une fois les transitoires passés, une étude expérimentale et théorique de type champ moyen a montré que le débit tend à se répartir uniformément entre les deux bras [3], c'est à dire que les vitesses dans chaque bras valent en moyenne  $v/2$ , les fluctuations étant d'autant plus faibles que les longueurs des bras sont grands devant  $L_d$ . Nous étudions le système dans cette limite où les fluctuations sont négligeables, *i.e.*  $v_i = v/2$ . Les déplacements des gouttes dans chaque bras sont synchronisés, il y a alors une équivalence entre le temps et l'espace et ces deux quantités sont donc quantifiées. Lorsqu'on s'intéresse à la répartition des gouttes à chaque multiple entier du temps  $\tau$ , qui sera l'unité de temps de toutes les quantités temporelles dans la suite, les positions prises sont contraintes à être des multiples de  $\lambda/2$ . Il y a donc un nombre fini de configurations possibles pour le système et la dynamique étant déterministe, le système est donc forcément périodique.

### 3 Etude numérique, invariants

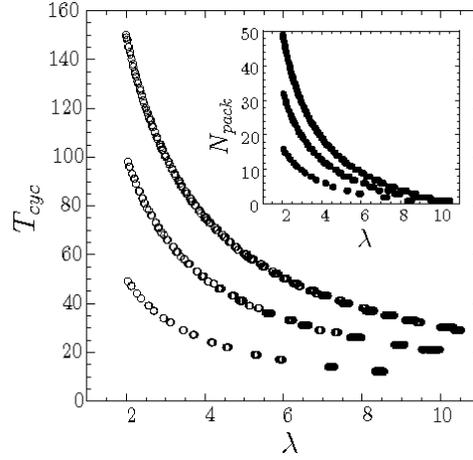
Nous avons mené une étude numérique de façon systématique dans cette limite [5]. La variable considérée  $S_n$  correspond au choix de la goutte arrivant à la jonction au temps  $n$  : 1 si la goutte va dans le bras court, 0 si la goutte va dans le bras long (Fig. 1a). L'algorithme gouvernant la dynamique est alors le suivant : (1) juste avant d'injecter une nouvelle goutte, le nombre de gouttes  $N_1(n)$  et  $N_2(n)$  présentes dans chaque bras est calculé, ainsi que la différence normalisée des résistances hydrodynamiques :  $\Psi_n = (L_2 - L_1)/L_d + N_2(n) - N_1(n)$ ; (2) la nouvelle goutte est injectée :  $S_n = H(\Psi_n)$  où  $H$  est la fonction de Heaviside; (3) toutes les gouttes sont translatées de  $\lambda/2$ , certaines gouttes sortant éventuellement de chaque bras. Une goutte reste dans le bras  $i$  le temps  $T_i^* = \frac{2L_i}{\lambda}$  correspondant à un nombre d'itérations  $T_i = \text{ceil}(\frac{2L_i}{\lambda})$ . Le nombre de gouttes consécutives passant dans le bras court (nombre de 1 consécutifs dans la suite des  $S_n$ ) est appelé *paquet*. Un nouveau signal  $S_{pack}$  peut être déduit de  $S_n$ , correspondant aux valeurs successives des paquets.

La figure 1b montre des signaux typiques  $S_{pack}$  calculés. Ceux-ci sont périodiques comme attendu. Suivant la condition initiale choisie pour la simulation (positions et nombre de gouttes déjà présentes dans chaque bras au lancement d'une simulation), différents motifs de répartition des gouttes peuvent être observés. Néanmoins deux quantités sont toujours conservées à paramètres fixés quelque soit les conditions initiales : la période  $T_{cyc}$  et le nombre de paquets dans un cycle  $N_{pack}$  (Fig. 1b). Ces deux invariants peuvent donc être utilisés pour caractériser la dynamique du système à paramètres donnés. On note qu'une troisième quantité peut être construite à partir de ces deux dernières :  $T_{cyc}/N_{pack}$  qui est la probabilité qu'une goutte aille dans le bras long.

L'étude des valeurs de  $T_{cyc}$  et  $N_{pack}$  en fonction de  $\lambda$  est présenté sur la figure 2. Des figures similaires ont été obtenues pour d'autres valeurs de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $A$ . Les deux invariants peuvent prendre des valeurs situées sur trois branches. Dans le cas des périodes, on constate que les valeurs de la période possibles sont  $T_1$ ,  $T_2$  ou  $T_2 - T_1$  [5]. Le mode de répartition sur ces trois branches semble complexe : les deux invariants sont constants pour un intervalle de valeurs du paramètre plus ou moins large puis commutent ensemble sur une des autres branches. Lorsque  $\lambda$  diminue la densité des transitions entre les branches et les deux invariants augmentent, caractérisant des motifs de plus en plus complexes.

### 4 Etude théorique, règles de sélection

Nous avons pu déduire du modèle les valeurs des deux invariants en régime permanent. En premier lieu, la différence  $N_1 - N_2$ , partie variable de  $\Psi_n$ , n'a que deux valeurs possibles en régime permanent :  $\text{floor}(\frac{L_2 - L_1}{L_d})$  ou  $\text{ceil}(\frac{L_2 - L_1}{L_d})$ . En effet  $\Psi_n$  prend alors les valeurs les plus proches de 0 pour la différence des résistances hydrodynamiques compte tenu de la quantification du système. Dans le cas où  $N_1 - N_2$  reste constant, le régime obtenu correspond à avoir à la fois  $N_1$  et  $N_2$  constants, il est alors facile de montrer que la période est forcément  $T_2 - T_1$ . En général  $N_1 - N_2$  n'est pas constant, c'est à dire que  $N_1$  et  $N_2$  ne peuvent pas être simultanément constants au cours d'un cycle. Lorsque  $N_1$  est constant, la période est  $T_1$



**Fig. 2.** Diagramme de bifurcation numérique de  $T_{cyc}$  et  $N_{pack}$  (en insert) en fonction de  $\lambda$  pour  $L_1 = 100$ ,  $L_2 = 150$  et  $L_d = 2.7$ . La valeur de  $\lambda_f$  est 10.5.

et  $N_2$  oscille entre deux valeurs consécutives. Lorsque  $N_2$  est constant, la période est  $T_2$  et  $N_1$  oscille entre deux valeurs consécutives. Seuls ces trois régimes sont observés en régime permanent. Ils correspondent aux plus petites fluctuations possibles au cours du temps de toutes ces quantités discrètes [5].

Lorsqu'on s'intéresse à la dynamique du système pour différentes valeurs de  $\lambda$ , la première bifurcation est le passage du régime *filtre*, dans lequel toutes les gouttes passent dans le bras court, au régime de *répartition*, dans lequel les gouttes se répartissent entre les deux bras. Cette bifurcation se produit lorsque la résistance hydrodynamique du bras court rempli de gouttes dépasse la résistance hydrodynamique du bras long vide :

$$L_2 < L_1 + \text{floor} \left( \frac{2L_1}{\lambda} \right) L_d \quad (1)$$

Cette inégalité conduit à la valeur critique

$$\lambda_f = \frac{2L_1}{\text{floor} \left( \frac{L_2 - L_1}{L_d} \right) + 1}. \quad (2)$$

Lorsque  $\lambda < \lambda_f$ , il reste un nombre de gouttes

$$M = \text{ceil} \left( \frac{2L_1}{\lambda} \right) - \text{floor} \left( \frac{L_2 - L_1}{L_d} \right) \quad (3)$$

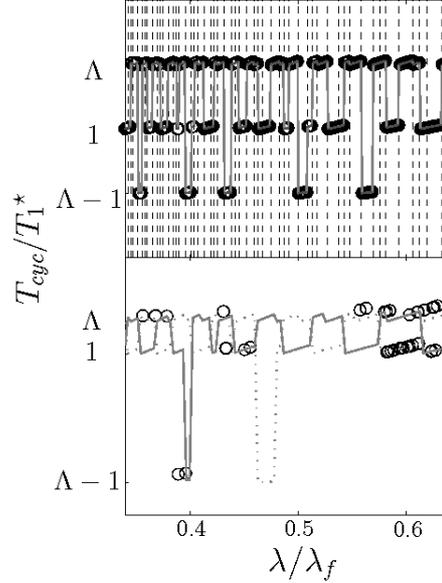
à répartir entre les deux bras pour équilibrer les résistances hydrodynamiques une fois la différence de longueur compensée. Soit  $N_1^H$  le nombre de *trous* dans le bras 1, c'est à dire le nombre de gouttes "manquantes" par rapport à une situation où toutes les gouttes passent par le bras 1. Nous utilisons d'autre part les notations suivantes :  $p = \frac{T_1}{T_1 + T_2}$ ,  $q = \frac{T_2}{T_1 + T_2}$ ,  $\epsilon_p$  partie fractionnaire de  $pM$  et  $\epsilon_q$  partie fractionnaire de  $qM$ . Les règles gouvernant les invariants correspondent à quatre configurations possibles pour les valeurs de ces parties fractionnaires [5] : (i) si  $\epsilon_p = \epsilon_q = 0$  alors  $pM$  et  $qM$  sont des entiers qui donnent les valeurs de  $N_1^H$  et  $N_2$  respectivement, alors tout deux constants,  $T_{cyc} = T_2 - T_1$  et  $N_{pack} = (q - p)M$ ; (ii)  $\epsilon_p = p$  et  $\epsilon_q = q$ , alors  $p(M - 1)$  et  $q(M - 1)$  sont des entiers qui donnent les valeurs de  $N_1^H$  et  $N_2$  respectivement,  $T_{cyc} = T_2 - T_1$  et  $N_{pack} = (q - p)(M - 1)$ ; (iii)  $0 < \epsilon_p < p$  et  $q < \epsilon_q < 1$ ,  $N_1^H$  est constant et égal à la partie entière de  $pM$ ,  $T_{cyc} = T_1$  et  $N_{pack} = N_1^H$ ; (iv)  $p < \epsilon_p < 1$  et  $0 < \epsilon_q < q$ ,  $N_2$  est constant et égal à la partie entière de  $qM$ ,  $T_{cyc} = T_2$  et  $N_{pack} = N_2$ .

La figure 3 montre une superposition des prédictions théoriques et des calculs numériques montrant que les règles ci-dessus décrivent parfaitement le mode de sélection des invariants. Les valeurs de  $\lambda$  pour

lesquelles un changement de régime est attendu correspondent à des changements de valeurs des quantités  $M$ ,  $p$  et  $q$  et peuvent être écrites de manière condensée :

$$\lambda_c(i, k) = \frac{2L_i}{\text{floor}(\frac{L_2 - L_1}{L_d}) + k}. \quad (4)$$

Les prédictions liées à cette expression sont indiquées sur la figure par des lignes verticales pointillées.



**Fig. 3.** Diagrammes de bifurcation numérique (en haut) et expérimental (en bas) de  $T_{cyc}/T_1^*$  en fonction de  $\lambda/\lambda_f$  dans la région  $\lambda/\lambda_f = 0.35 - 0.65$ . Dans les deux cas, les trois branches correspondent à  $T_{cyc}$  égal à  $T_2$ , à  $T_1$ , et à  $T_2 - T_1$ . La ligne grise correspond aux prédictions des règles de sélection et les lignes verticales pointillées à l'équation 4. Les lignes grises présentes sur les résultats expérimentaux correspondent à nos prédictions théoriques et mettent en évidence la forte dépendance des bifurcations vis à vis de  $L_d$ , (ligne continue)  $L_d=305\mu\text{m}$  et (ligne en tiret)  $L_d=331\mu\text{m}$ .

## 5 Etude expérimentale, multistabilité

Afin de confirmer la pertinence de nos résultats, nous avons mené une étude expérimentale sur un système microfluidique. Un train de gouttes monodisperses d'eau dans l'huile est généré. La dilution de ce train permet de contrôler la distance entre les gouttes  $\lambda$  tout en gardant leur volume constant. Cette distance est toujours suffisamment grande pour qu'il n'y ait pas d'interactions entre les gouttes et pas de collisions entre les gouttes successives arrivant à une jonction [3]. La boucle est constituée de deux bras de longueurs  $L_1 = 1.531$  cm et  $L_2 = 1.837$  cm ( $\Lambda = 1.2$ ) et de même section rectangulaire. Les longueurs des bras ont été choisies suffisamment longues pour que les fluctuations des vitesses dans les bras soient faibles, ce qui a été vérifié expérimentalement, afin de travailler dans la limite explorée numériquement. Une caméra rapide (1000 fps) filme l'entrée de la boucle (Fig. 1a à gauche) et un programme d'analyse d'image extrait le signal  $S_n$  (Fig. 1a à droite) identique à la variable de la simulation et dont on peut déduire le signal  $S_{pack}$ .

Des réponses périodiques sur une centaine de gouttes sont observés. Sur des durées plus longues, de l'ordre du millier de gouttes, la configuration du régime change en gardant la même période  $T_{cyc}$

et le même nombre de paquets  $N_{pack}$  [5]. Les valeurs de  $T_{cyc}$  observées pour différentes valeurs de  $\lambda$  sont regroupées sur la figure 3. Les grandes caractéristiques de nos prédictions sont bien retrouvées expérimentalement : nous observons trois branches correspondant à des périodes égales à  $T_2$ , à  $T_1$ , et à  $T_2 - T_1$ . Les deux lignes correspondent aux prédictions théoriques pour différentes valeurs de  $L_d$  montrant la sensibilité des positions des bifurcations aux fluctuations de ce paramètre.

La succession de régimes périodiques de configurations différentes mais de même invariants a été reproduite numériquement en prenant en compte un terme de bruit inhérent aux expériences et de l'ordre de 2% sur  $\lambda$  ou  $L_d$ , dans les simulations. En effet, nous avons vu que la configuration en régime stationnaire à paramètres fixes dépend des conditions initiales choisies, si bien qu'il existe plusieurs attracteurs partageant les mêmes invariants pour un jeu de paramètres donnés. En ajoutant des fluctuations, on peut reproduire numériquement le passage d'un attracteur à un autre. Ce type de régime correspond aux observations expérimentales.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté une étude numérique, théorique et expérimentale d'un système correspondant à la répartition d'objets discrets à un noeud. Notre système est naturellement quantifié et nous avons montré qu'en se plaçant dans certaines limites il est complètement soluble. Ce système est donc à la fois d'une certaine simplicité tout en gardant la dynamique riche et complexe des systèmes de même nature, tout particulièrement les régimes oscillants et la multistabilité, qui sont des caractéristiques des systèmes à retard. Le modèle décrit une situation expérimentale d'intérêt technologique, compte tenu de l'importance que prend actuellement la microfluidique, mais peut être aussi vu comme un système expérimental modèle.

Les études complémentaires en cours montrent qu'en tenant compte du couplage entre les gouttes présentes dans les bras et les vitesses, notre modèle décrit bien le système sur les plateaux du diagramme de bifurcation. En revanche, à proximité des bifurcations, de nouveaux régimes de périodes beaucoup plus longues que les temps de parcours des bras apparaissent ainsi que des régimes qui semblent apériodiques. Nous avons aussi commencer à étudier des configurations plus complexes telles qu'une jonction à trois bras. Nous avons observé numériquement l'émergence de régimes complexes de périodes longues devant les temps de parcours des bras.

## Références

1. R. T. CARR AND M. LACOIN, Nonlinear Dynamics of Microvascular Blood Flow, *Annals of Biomedical Engineering*, **28**, 641-652 (2000).
2. M. J. FUERSTMAN, P. GARSTECKI AND G. M. WHITESIDES, Coding/Decoding and Reversibility of Droplet Trains in Microfluidic Networks, *Science*, **315**, 828-832 (2007).
3. D. A. SESSOMS, M. BELLOUL, W. ENGL, M. ROCHE, L. COURBIN AND P. PANIZZA, Droplet motion in microfluidic networks : Hydrodynamic interactions and pressure-drop measurements, *Physical Review E*, **80**, 016317 (2009).
4. W. ENGL, M. ROCHE, A. COLIN, P. PANIZZA AND A. AJDARI, Droplet Traffic at a Simple Junction at Low Capillary Numbers, *Physical Review Letters*, **95**, 208304 (2005).
5. D. A. SESSOMS, A. AMON, L. COURBIN AND P. PANIZZA, Complex dynamics of droplet traffic in microfluidic networks : periodicity, multistability and selection rules, *soumis à Physical Review Letters*.

# Thermalisation anormale d'ondes unidimensionnelles

Pierre Suret<sup>1</sup>, Antonio Picozzi<sup>2</sup>, & Hans R. Jauslin<sup>2</sup> & Stéphane Randoux<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire PHLAM, bât. P5, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq

<sup>2</sup> Institut Carnot de Bourgogne, UMR 5029 CNRS-Université de Bourgogne, Dijon, France

[pierre.suret@univ-lille1.fr](mailto:pierre.suret@univ-lille1.fr)

**Résumé.** Nous décrivons, de manière expérimentale et théorique, un processus de thermalisation anormale d'ondes Hamiltoniennes non linéaires et uni-dimensionnelles. Il se caractérise par une évolution irréversible des ondes vers un état d'équilibre spécifique d'une nature fondamentalement différente de l'état d'équilibre thermodynamique attendu. Une approche cinétique du problème révèle que ce phénomène découle de l'existence d'un invariant local dans l'espace des fréquences. Une nouvelle famille de solutions d'équilibre est ainsi obtenue. Des expériences réalisées avec des ondes optiques fournissent une signature du transitoire de ce processus de thermalisation anormale.

**Abstract.** We report theoretically and experimentally a process of anomalous thermalization of one-dimensional nonlinear hamiltonian waves. It is characterized by an irreversible evolution of the waves towards a specific equilibrium state of a fundamental different nature than the expected thermodynamic equilibrium state. A kinetic approach of the problem reveals that this phenomenon is due to the existence of a *local invariant* in frequency space. A novel family of equilibrium distributions is obtained. Experiments performed with optical waves provide a signature of the transient process leading to this anomalous thermalization.

## 1 Introduction

La question de la thermalisation d'un système non linéaire Hamiltonien a été largement étudiée dans le cadre de la problématique de Fermi-Pasta-Ulam [1]. Réalisée en 1955, "l'expérience de Fermi-Pasta-Ulam" a consisté à étudier, à l'aide d'une simulation numérique, la répartition à long terme de l'énergie dans un système dynamique unidimensionnel de 64 masses couplées entre elles par des ressorts faiblement anharmoniques. Un seul mode de la chaîne d'oscillateur étant initialement excité, les auteurs de l'expérience s'attendaient à observer une « thermalisation approchée » du système perturbé par la faible anharmonicité, l'énergie se répartissant alors de façon approximativement égale sur les différents modes. Ils furent surpris de constater que cette thermalisation n'a pas lieu et que la dynamique du système demeure de nature quasi-périodique. L'expérience de Fermi-Pasta-Ulam a montré que la thermalisation n'est pas un scénario à caractère universel dans les systèmes non linéaires Hamiltonien. Ceci a conduit, quelques dizaines d'années plus tard, à la découverte du théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) et à la formulation du concept de soliton [1].

Le phénomène de thermalisation a également été largement étudié dans les systèmes physiques Hamiltonien (gaz de Bose ultrafroids [2], ondes en optique non linéaire...) dont le comportement peut être décrit par l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS). La thermalisation d'un système d'ondes non linéaires se caractérise par l'évolution irréversible du spectre des ondes vers la distribution d'équilibre thermodynamique, i.e. le spectre de Rayleigh-Jeans (RJ) [3,4]. Nous décrivons ici un processus de thermalisation anormale apparaissant dans un système d'ondes unidimensionnel [5]. Il se caractérise par une évolution irréversible des ondes vers un état d'équilibre spécifique dont la nature est fondamentalement différente de l'état d'équilibre conventionnel de RJ. La théorie de turbulence d'ondes révèle que ce processus de thermalisation anormale est dû à l'existence d'un nouvel invariant dans l'espace des fréquences,  $J_\omega$ , lequel trouve son origine dans des résonances dégénérées du système non linéaire. Contrairement aux invariants intégraux conventionnels qui donnent lieu à une distribution de RJ généralisée, c'est ici la nature locale de l'invariant  $J_\omega$  qui confère une structure fondamentalement différente aux nouveaux états d'équilibre.

Des expériences réalisées avec des ondes optiques fournissent une signature du transitoire de ce processus de thermalisation anormale [5].

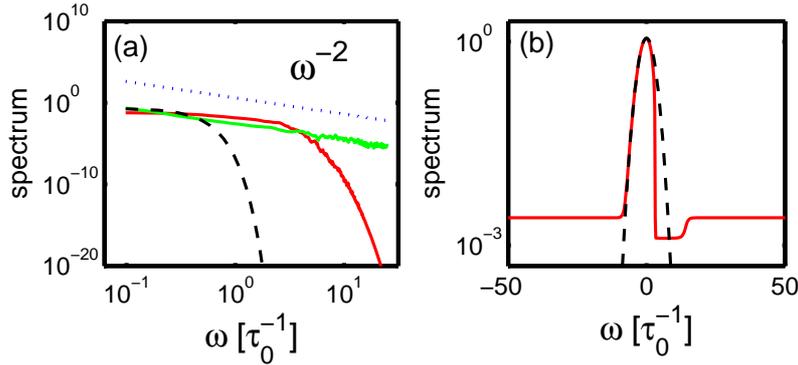
## 2 Théorie

Le premier modèle que nous considérons est l'équation NLS vectorielle qui décrit la propagation non linéaire d'ondes optiques [6] mais aussi les condensats de Bose-Einstein [7]

$$i\partial_z A_1 = -\partial_t^2 A_1 + (|A_1|^2 + \kappa|A_2|^2)A_1, \quad (1)$$

$$i\partial_z A_2 = -\eta\partial_t^2 A_2 + (|A_2|^2 + \kappa|A_1|^2)A_2. \quad (2)$$

$z$  représente la distance de propagation et  $t$  mesure le temps dans un référentiel accompagnant les ondes au cours de leur propagation [6]. Les échelles d'espace et de temps sont normalisées par rapport à la longueur non linéaire  $L_0 = 1/(\gamma e_0^2)$  et au temps  $\tau_0 = (\alpha_1 L_0)^{1/2}$ , où  $\gamma$  représente le coefficient non linéaire,  $\alpha_j$  étant les coefficients de dispersion de  $A_j$ , et  $e_0^2$  l'intensité moyenne de  $A_1$ . Avec ces unités,  $\eta$  désigne le rapport des coefficients de dispersion des deux ondes, et  $\kappa$  le rapport des coefficients de modulation de phase croisée et d'auto-modulation de phase. Les relations de dispersion de  $A_{1,2}$  s'écrivent  $k_1(\omega) = \omega^2$ ,  $k_2(\omega) = \eta\omega^2$ . Les Eqs.(1,2) conservent le nombre de particules (puissance)  $N_j = \int |A_j|^2 dt$  de chaque composante  $A_j$  et l'Hamiltonien  $H$  [6]. Notons que les Eqs.(1,2) sont intégrables pour  $\eta = \kappa = 1$  (ou  $\eta = \kappa = -1$ ) [8] mais que nous ne considérons ici que le cas non intégrable.



**Fig. 1.** (a) Spectre d'équilibre de  $A_1$  obtenu en résolvant numériquement les équations NLS (1,2) pour  $\eta = 1$  (trait plein noir),  $\eta = 1.1$  (trait plein gris) et les conditions initiales correspondantes (trait en pointillés noirs). La ligne de points montre la loi puissance d'équipartition d'énergie  $n_j^{R,J}(\omega) \sim \omega^{-2}$ . (b) Spectre d'équilibre local  $n^{loc}(\omega)$  (trait plein noir) associé à l'équation NLS scalaire (7). La courbe en pointillés noirs montre la condition initiale,  $\alpha = 0.1$ .

Le phénomène de thermalisation anormale peut d'abord être décrit de manière simple grâce à une simulation numérique des Eqs.(1,2). Les conditions initiales sont des ondes partiellement cohérentes ayant un spectre gaussien et des phases aléatoires. Les champs  $A_{1,2}(z = 0, t)$  sont alors de moyenne nulle et présentent une statistique Gaussienne stationnaire. Les simulations numériques révèlent qu'après un transitoire, les deux ondes atteignent un état (statistiquement) stationnaire dans lequel leurs spectres moyens n'évoluent plus au cours de la propagation. Ces états stationnaires sont de nature différente selon la valeur du coefficient de dispersion  $\eta$  apparaissant dans les Eqs.(1,2). Pour  $\eta \neq 1$ , on retrouve le processus de thermalisation conventionnel : les deux ondes évoluent irréversiblement vers le spectre de RJ, dont les ailes vérifient la propriété d'équipartition d'énergie (Fig. 1a) [3,4]. Toutefois, cette équipartition d'énergie n'est plus obtenue lorsque  $\eta = 1$ . Ceci est aussi illustré en Fig. 1a, où l'énergie dans le spectre,  $\epsilon_j(\omega) = k_j(\omega)n_j(\omega)$ , n'est plus également distribuée parmi les modes, de sorte que les spectres d'équilibre ne vérifient plus la loi puissance de RJ attendue,  $n_j(\omega) \sim k_j(\omega)^{-1} \sim \omega^{-2}$ .

Nous avons étudié cet effet de thermalisation anormale dans le cadre de la théorie de la turbulence d'ondes [3]. Cette théorie est basée sur une fermeture de la hiérarchie des équations pour les moments du champ, cette fermeture s'appuyant sur les propriétés de dispersion des ondes [3]. Cette théorie permet de dériver deux équations cinétiques couplées qui gouvernent les évolutions des spectres moyens des ondes  $n_j(\omega, z)$  ( $\langle a_j(\omega_1, z) a_j^*(\omega_2, z) \rangle = n_j(\omega_1, z) \delta(\omega_1 - \omega_2)$ ),  $a_j$  étant la transformée de Fourier de  $A_j$  [3] :

$$\partial_z n_j(\omega, z) = \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 W n_j(\omega) n_i(\omega_1) n_i(\omega_2) n_j(\omega_3) [n_j^{-1}(\omega) + n_i^{-1}(\omega_1) - n_i^{-1}(\omega_2) - n_j^{-1}(\omega_3)] \quad (3)$$

Les conditions de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement sont exprimées par des fonctions de Dirac dans  $W = 2\pi\kappa^2 \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \delta[k_j(\omega) + k_i(\omega_1) - k_i(\omega_2) - k_j(\omega_3)]$ . Les équations (3) conservent le nombre de quasi-particules  $N_j = \int n_j(\omega) d\omega$  de chaque champ  $A_j$  ainsi que l'énergie cinétique  $E = \sum_i E_i$ ,  $E_i = \int k_i(\omega) n_i(\omega) d\omega$ . Le caractère irréversible des Eq.(3) s'exprime par un théorème  $H$  de croissance d'entropie,  $dS/dz \geq 0$ , où  $S = \sum_i S_i$ ,  $S_i(z) = \int \log(n_i) d\omega$  est l'entropie hors-équilibre. Les spectres d'équilibre thermodynamique  $n_j^{RJ}(\omega)$  qui réalisent le maximum d'entropie de  $S[n_j]$ , étant données les contraintes de conservation de  $E$  et  $N_j$  sont les spectres de RJ

$$n_j^{RJ}(\omega) = T / [k_j(\omega) - \mu_j], \quad (4)$$

où  $T$  et  $\mu_j$  sont la température et le potentiel chimique de  $A_j$  [3,4]. Les ailes du spectre de RJ (4) vérifient la propriété d'équipartition d'énergie,  $n_j^{RJ} \sim \omega^{-2}$ . Ils ne permettent donc pas de décrire les spectres d'équilibre identifiés en Fig. 1a pour  $\eta = 1$ . Nous allons cependant voir que les équations cinétiques (3) donnent une description détaillée du processus de thermalisation anormale.

Comme  $\eta = 1$ , les fonctions de Dirac  $\delta$  des Eqs.(3) peuvent être utilisées pour calculer deux des trois intégrales. Les équations cinétiques couplées révèlent alors l'existence d'un nouvel invariant,  $J(\omega) = n_1(\omega, z) + n_2(\omega, z)$ , i.e.,  $\partial_z J_\omega = 0$ . Cet invariant est 'local' dans le sens où il est fixé pour chaque fréquence  $\omega$  prise individuellement. L'existence de cet invariant nous permet de dériver une équation fermée pour l'évolution de  $n_1$ ,

$$\partial_z n_1(\omega, z) = \frac{1}{2} \int \frac{\mathcal{G}[J, n_1]}{|\omega - \omega_1|} d\omega_1 \quad (5)$$

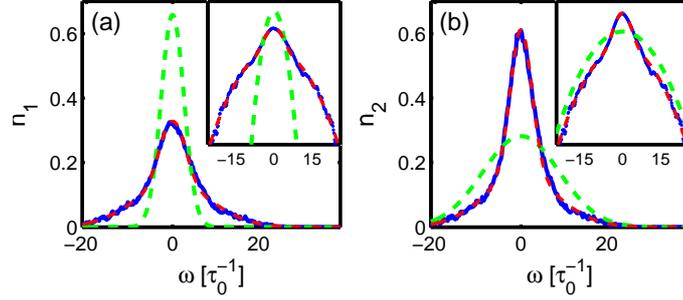
où  $\mathcal{G}[J, n_1] = [J_{\omega_1} - n_1(\omega_1)][J_\omega - n_1(\omega)][n_1(\omega_1) - n_1(\omega)] - n_1(\omega_1)n_1(\omega)[J_{\omega_1} - n_1(\omega_1) - J_\omega + n_1(\omega)]$ . Cette équation conserve  $N_1 = \int n_1(\omega, z) d\omega$  et présente un théorème  $H$  pour  $\mathcal{S}_{loc}(z) = \int \text{Log}\{n_1(\omega)[J_\omega - n_1(\omega)]\} d\omega$  (on notera que la conservation de l'énergie  $E$  et de la quantité de mouvement  $P$  est implicitement vérifiée *via* l'invariant  $J_\omega$ ). Le spectre d'équilibre 'local' qui réalise le maximum de  $\mathcal{S}_{loc}$  étant donnée la contrainte de conservation de  $N_1$  est obtenu en introduisant le paramètre de Lagrange  $\lambda$ ,

$$n_1^{loc}(\omega) = J_\omega/2 - \left[ \sqrt{1 + (\lambda J_\omega/2)^2} - 1 \right] / \lambda, \quad (6)$$

avec par ailleurs  $n_2^{loc}(\omega) = J_\omega - n_1^{loc}(\omega)$ . Cet état d'équilibre est une solution stationnaire de l'Eq.(5). Le paramètre  $\lambda$  est déterminé par la condition initiale à travers  $J_\omega : \int (\sqrt{1 + \lambda^2 J_\omega^2/4} - 1) d\omega = \lambda(N_2 - N_1)/2$ . Si  $N_1 = N_2$ , on obtient  $\lambda = 0$  et le spectre d'équilibre (6) se réduit à  $n_1^{loc}(\omega) = n_2^{loc}(\omega) = J_\omega/2$ . Dans la limite  $N_1 \gg N_2$  ( $N_1 \ll N_2$ ),  $\lambda \rightarrow -\infty$  ( $+\infty$ ), et  $n_1^{loc}(\omega) \rightarrow J_\omega$  ( $n_2^{loc}(\omega) \rightarrow J_\omega$ ). Ainsi, contrairement à la distribution d'équilibre thermodynamique (4), le spectre d'équilibre local (6) préserve une mémoire de la condition initiale *via* l'invariant  $J_\omega$ . La différence entre la nature locale de l'invariant  $J_\omega$  et les invariants intégraux conventionnels est brièvement discutée en Ref. [5].

Les simulations numériques des équations cinétiques Eq.(5) révèlent une évolution irréversible de  $n_1(z, \omega)$  vers l'état d'équilibre (6). Comme l'illustre la Figure 2, cet effet de thermalisation anormale a été aussi confirmé par intégration numérique des équations de NLS (1,2). On notera l'accord quantitatif entre les simulations numériques et la théorie [Eq.(6)] en l'absence de paramètres ajustables.

La famille d'états d'équilibre locaux (6) est paramétrée par la fonction  $J_\omega$  (i.e. pour chaque  $J_\omega$  on a un spectre  $n_j^{loc}(\omega)$  différent). Ainsi, un ensemble d'états d'équilibre distincts peut être atteint en



**Fig. 2.** Spectres d'équilibre obtenus en résolvant numériquement les Eqs.(1,2) confondus avec les états d'équilibre théoriques correspondants  $n^{loc}(\omega)$  données par Eq.(6) (traits pleins noirs). La ligne en traits pointillés montre les conditions initiales. Les encadrés montrent les mêmes courbes en échelle logarithmique. ( $\eta = 1, N_1/N_2 = 0.7$ , une moyenne sur  $10^5 L_0$  a été effectuée une fois l'état d'équilibre atteint,  $\partial_z \mathcal{S} \simeq 0$ ).

partant de conditions initiales différentes : de ce point de vue le système présente un comportement 'multistable'. La distribution de RJ appartient également à cette famille d'états d'équilibre locaux. Si  $J_\omega = n_1^{RJ}(\omega) + n_2^{RJ}(\omega)$  et  $\lambda = (\mu_2 - \mu_1)/T$ , l'équation (6) donne en effet  $n_j^{loc}(\omega) = n_j^{RJ}(\omega)$  pour  $\eta = 1$ . Ceci est consistant avec le fait que la distribution de RJ est associée à un maximum de  $\mathcal{S}$  sans la contrainte  $J_\omega = cte$ .

L'existence de l'invariant local  $J_\omega$  trouve son origine dans des résonances dégénérées du système : les conditions de résonance pour la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement exprimées par le terme  $W$  dans l'équation (3) présentent en effet la solution triviale  $\omega_{3,4} = \omega_{1,2}$  pour  $\eta = 1$ . Ce type de résonance dégénérée peut être rencontré dans de nombreux systèmes non linéaires. Nous avons en particulier pu les identifier dans l'interaction résonante à quatre ondes [5], ainsi que dans l'équation NLS scalaire, dont l'intégrabilité est brisée par la dispersion d'ordre trois

$$i\partial_z A = -\partial_t^2 A - i\alpha\partial_t^3 A + |A|^2 A. \quad (7)$$

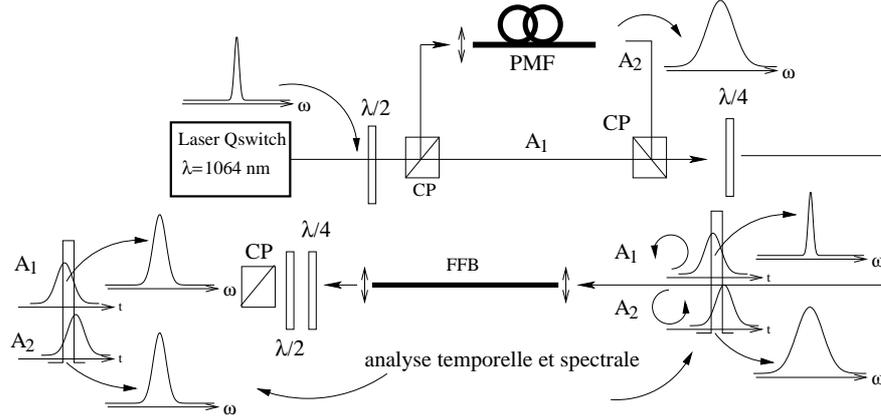
Cette équation est souvent employée en optique pour la description de la propagation de la lumière dans une fibre optique au voisinage du zéro de dispersion [6]. La relation de dispersion s'écrit  $k(\omega) = \omega^2 - \alpha\omega^3$ . L'équation cinétique associée à l'équation (7) révèle l'existence de l'invariant local  $J_\omega = n(z, \omega) - n(z, q - \omega)$ , où  $q = 2/3\alpha$ . Dans ce système, les fréquences  $(\omega, q - \omega)$  résonent avec n'importe quelle paire de fréquences  $(\omega', q - \omega')$ , car  $k(\omega) + k(q - \omega) = q^2/3$ . L'équilibre local correspondant s'écrit,  $n^{loc}(\omega) = J_\omega/2 + [1 + \sqrt{1 + \lambda^2 J_\omega^2/4}]/\lambda$ . Le fait que le système d'ondes n'atteigne pas un état d'équipartition d'énergie se manifeste ici de façon claire par l'apparition d'un piédestal dans le spectre d'équilibre  $n^{loc}(\omega)$  (voir Fig. 1b).

### 3 Expériences et simulations

La théorie développée ci-dessus est valable dans le régime faiblement non linéaire  $U/E \ll 1$  ( $U = H - E$  est la part non linéaire de l'énergie). Dans cette section, nous montrons (expérimentalement et numériquement) que les signatures des phénomènes décrits par la théorie cinétique subsistent y compris en régime non linéaire.

Nous avons réalisé une expérience d'optique dont le principe de base est de co-propager dans une fibre optique (très faiblement biréfringente et monomode transversalement) deux ondes polarisées circulairement droite et gauche ( $A_1$  et  $A_2$ ) (Fig. 3). Quand la biréfringence de la fibre est négligeable, la propagation des deux ondes est décrite par les équations (1) et (2) avec  $\eta = 1$  et  $\kappa = 2$  [6]. L'expérience est réalisée dans le cas particulier où  $N_1 = N_2$ ; l'état d'équilibre correspond alors à  $n_1^{loc}(\omega) = n_2^{loc}(\omega)$  (cf section précédente). Afin d'obtenir un effet significatif, les deux spectres optiques de départ sont de largeurs très différentes (0.05 nm et 1.6 nm). Quand la puissance des deux ondes est identique, l'état d'équilibre attendu est donc caractérisé par l'égalité des spectres optiques de  $A_1$  et  $A_2$ .

Les contraintes de l'expérience ne permettent d'explorer qu'un régime transitoire (équilibre non atteint) et non linéaire. Les spectres d'équilibre sont atteints pour une longueur de propagation typiquement de 100 à 1000 longueurs non linéaires  $L_0$  mais la diffusion Raman stimulée apporte une dissipation non négligeable à partir de 10  $L_0$ . Le régime hamiltonien ne peut donc être exploré que pour des distances de quelques  $L_0$ . De plus la fibre utilisée (très faiblement biréfringente) doit être de longueur réduite afin d'éviter toute biréfringence induite par courbure. Avec une faible longueur physique (1.6 m dans nos expériences), il est nécessaire, pour parcourir plusieurs  $L_0$ , d'utiliser des puissances optiques importantes ce qui amène l'expérience en régime non linéaire (Fig. 4d).



**Fig. 3.** Dispositif expérimental. PMF : fibre à maintien de polarisation de longueur 2m. FFB : fibre faiblement biréfringente de longueur 1.6m.  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$  : lame demi d'onde, quart d'onde. CP : cube polariseur.

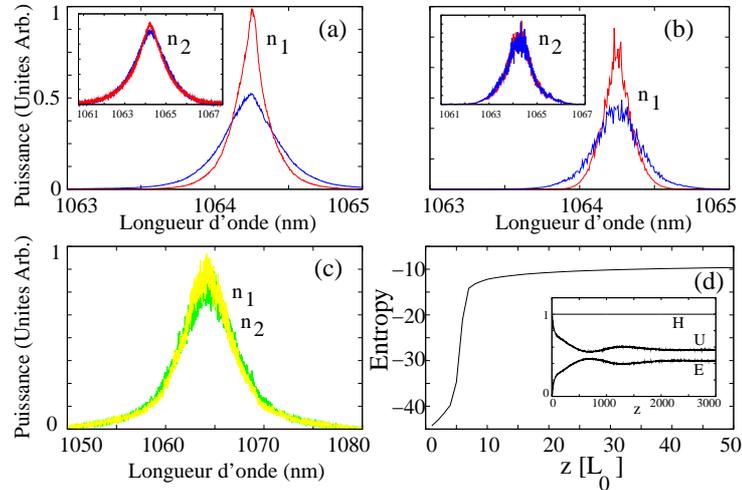
Le dispositif expérimental est présenté de façon schématique sur la figure 3. La source utilisée dans l'expérience est un laser Q-switch Nd :YAG émettant des impulsions de 40ns à un taux de répétition de 30kHz. Il est linéairement polarisé ; sa longueur d'onde est de  $\lambda = 1064\text{nm}$  et sa largeur spectrale de  $\sim 0.05\text{nm}$  à mi hauteur. Afin d'injecter deux ondes de spectres différents, le faisceau laser est divisé en deux à l'aide d'un cube polariseur. Le faisceau transmis par le cube fournit l'onde  $A_1$  (de spectre étroit) et le faisceau réfléchi par le cube est injecté dans une fibre à maintien de polarisation (PMF) de façon à élargir son spectre par mélange à quatre ondes [9]. La lumière à la sortie de la PMF correspond au champ  $A_2$  et son spectre s'étale sur une largeur de  $\sim 1.6\text{nm}$  à mi-hauteur. Notons que la diffusion Raman spontanée est filtrée à l'aide d'un multiplexeur fibré afin de ne pas être amplifiée dans la fibre faiblement biréfringente.

Les deux ondes (linéairement polarisées à  $90^\circ$  l'une de l'autre) sont recombinaées à l'aide d'un cube polariseur, traversent une lame quart d'onde transformant leur polarisations rectilignes en polarisations circulaires droite et gauche, puis sont finalement injectées dans la fibre faiblement biréfringente (FFB). A la sortie de la fibre, la polarisation des deux ondes est analysée grâce à une lame quart d'onde, une lame demi onde puis un cube polariseur.

La dernière difficulté de l'expérience réside dans le fait qu'au cours de l'impulsion de 40ns, la puissance n'est évidemment pas une constante alors que les effets attendus dépendent fortement de la puissance ; de plus les ondes  $A_1$  et  $A_2$  sont décalées de 13ns à cause de la propagation dans la PMF. Nous utilisons donc un système d'analyse résolu en temps : nous injectons la lumière dans un analyseur de spectre optique à l'aide d'un modulateur acousto-optique fibré qui nous permet de "découper" des tranches d'impulsion de 10 à 20 ns. Nous ajustons le déclenchement de cette tranche afin d'avoir des puissances instantanées identiques (400W) pour l'onde  $A_1$  et l'onde  $A_2$ .

La figure 4a montre les spectres des ondes  $A_1$  et  $A_2$  lorsqu'elle interagissent ( $\kappa = 2$ ) ou pas ( $\kappa = 0$ ). Le résultat est sans ambiguïté : l'onde  $A_1$  de spectre étroit s'élargit lorsqu'elle est en interaction avec l'onde de spectre large (qui ne change pratiquement pas). L'intégration numérique des équations (1,2) avec des spectres dont les composantes ont des phases aléatoires [9] et les paramètres de l'expérience reproduisent

très fidèlement les comportements expérimentaux (figure 4b). Notons qu'il est nécessaire de tenir compte de la propagation dans la fibre à maintien de polarisation dans la simulation afin d'obtenir un accord quantitatif.



**Fig. 4.** a) Expérience : spectres optiques  $n_1$  de l'onde  $A_1$  à la sortie de la FFB : le spectre est étroit en absence d'interaction avec l'onde  $A_2$  ( $\kappa = 0$ ) et s'élargit du fait de l'interaction avec  $A_2$  ( $\kappa = 2$ ). En figure insérée, spectres optiques  $n_2$  de l'onde  $A_2$  à la sortie de la FFB en présence et en absence d'interaction avec  $A_1$ . Les deux champs injectés ont une puissance de 400W. La distance de propagation  $z = 2.5L_0$ . b) Simulations numérique correspondant à l'expérience de la figure a) (procédure décrite dans [9]). c) Simulation numérique : spectres optiques  $n_1$  et  $n_2$  pour  $z = 50L_0$ . d) Entropie, hamiltonien (H), énergie cinétique (E) et partie non linéaire de l'hamiltonien (U) en fonction de  $z$  dans la simulation numérique..

Les simulations numériques nous permettent d'explorer la physique à grande distance de propagation dans des conditions inaccessibles dans l'expérience. La figure 4c montre que les deux spectres coïncident à partir d'une distance de propagation de  $50 L_0$ . L'évolution des spectres est irréversible et elle est associée à une augmentation puis une saturation de l'entropie (telle que définie dans le régime linéaire). A l'état stationnaire qui ne vérifie pas la propriété d'équipartition de l'énergie, les spectres de  $A_1$  et  $A_2$  sont identiques. Notons que dans l'état final, les parts linéaire et non linéaire de l'hamiltonien sont du même ordre (Fig. 4d).

## Références

1. G. GALLAVOTTI (Ed.) *The Fermi-pasta-Ulam Problem : A Status Report*, (Lecture Notes in Physics, Springer 2007).
2. P. VILLAIN & M. LEWENSTEIN, *Physical Review A*, **62**, 043601 (2000) — *Physical Review A*, **63**, 033607 (2001).
3. V. E. ZAKHAROV, V. S. L'VOV & G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer, Berlin, 1992) — S. DYACHENKO *et al.*, *Physica D*, **57**, 96 (1992) — V. ZAKHAROV, F. DIAS & A. PUSHKAREV, *Physics Reports*, **398**, 1 (2004).
4. C. CONNAUGHTON *et al.*, *Physical Review Letters* **95**, 263901 (2005); S. PITOIS *et al.*, *Physical Review Letters*, **97**, 033902 (2006) — G. DÜRING, A. PICOZZI & S. RICA, *Physica D*, **238**, 1524 (2009).
5. P. SURET, S. RANDOUX, H. JAUSLIN & A. PICOZZI, *Physical Review Letters*, **104**, 054101 (2010).
6. Y. S. KIVSHAR & G. P. AGRAWAL, *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals* (Ac. Press, 2003).
7. L. PITAEVSKII & S. STRINGARI, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science Publications, 2003).
8. S. MANAKOV, *JETP* **65**, 505 (1973) — V. E. ZAKHAROV & E. SCHULMAN, *Physica D*, **4**, 270 (1982) — **29**, 283 (1988).
9. B. BARVIAU, S. RANDOUX & P. SURET, *Optics Letters*, **31**, 1696 (2006).

# Fluctuations hors équilibre d'une interface entre deux fluides visqueux

Marine Thiébaud<sup>1</sup> & Thomas Bickel<sup>1</sup>

CPMOH, Université de Bordeaux et CNRS (UMR 5798), 351 cours de la libération, 33405 Talence cedex  
m.thiebaud@cpmoh.u-bordeaux1.fr

**Résumé.** On étudie les propriétés statistiques stationnaires d'une interface fluide soumise à un écoulement de Couette à l'aide de l'hydrodynamique, en prenant en compte le mouvement brownien des particules de fluide. On remarque alors que les fluctuations thermiques de l'interface sont contrôlées hors équilibre par un taux de cisaillement effectif qui diffère du taux de cisaillement appliqué. En accord avec les expériences, on aboutit à une rugosité de l'interface qui diminue sous l'effet de l'écoulement de Couette. On montre de plus un aspect universel des résultats puisque tous les paramètres des fluides se factorisent en un seul paramètre de contrôle. Enfin, on discute de ces résultats analytiques en les comparant avec des travaux expérimentaux et numériques.

**Abstract.** The steady states properties of an interface in a stationary Couette flow are addressed within the framework of fluctuating hydrodynamics. Our study reveals that thermal fluctuations are driven out of equilibrium by an effective shear rate that differs from the applied one. In agreement with experiments, we find that the mean square displacement of the interface is reduced by the flow. We also show that nonequilibrium fluctuations present a certain degree of universality in the sense that all features of the fluids can be factorized into a single control parameter. Finally, the results are discussed in the light of recent experimental and numerical studies.

## 1 Introduction

Le but du travail théorique analytique présenté dans la suite est de modéliser de manière rigoureuse l'influence d'un écoulement de cisaillement plan sur les propriétés statistiques d'une interface fluide, frontière entre deux fluides visqueux. Il s'agit d'un système modèle trompeur par la simplicité de sa description étant donné les divers effets (inertiels et visqueux par exemple) jouant des rôles opposés sur l'évolution de l'interface. En remplaçant dans la première phrase le mot « visqueux » par le mot « parfait », on reconnaît le problème de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (KH). La prise en compte de la viscosité complexifie la résolution et le problème diffère alors complètement de l'instabilité de KH. On a souhaité s'en détacher en se plaçant à faible nombre de Reynolds. Les effets inertiels sont négligés et on ne s'attache qu'aux effets visqueux en laissant de côté de plus les effets de confinement dus aux parois. Ainsi, on étudie l'effet du cisaillement sur les propriétés par conséquent hors équilibre des interfaces fluides dans le régime surarmorti des ondes interfaciales.

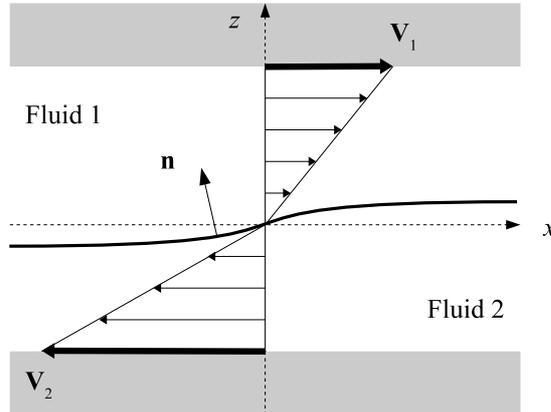
Ce sujet des propriétés hors équilibre des interfaces fluides a connu récemment un regain d'intérêt avec la découverte d'un mélange biphasique de colloïdes et de polymères [1]. L'interface entre ces deux fluides particuliers présente comme spécificité d'avoir une faible tension de surface. L'amplitude des fluctuations, caractérisée par la racine carrée de l'énergie thermique divisée par la tension de surface se situe à l'échelle du micron. L'étude expérimentale peut alors s'effectuer à l'aide de techniques de microscopies confocales fluorescentes qui permettent de visualiser directement en temps réel la configuration de l'interface. Ces deux ingrédients ont permis à Derks et à ses collaborateurs [2] de mesurer l'effet du cisaillement sur l'interface entre les deux fluides particuliers qui se trouve en régime surarmorti. Le constat fût double : diminution des fluctuations de l'interface et augmentation de la longueur de corrélation sous l'effet de l'écoulement de Couette. Le problème a aussi été abordé de manière numérique [3] : la diminution de la rugosité a bien été retrouvée mais la méthode employée aboutit aussi à une diminution de la longueur de corrélation au contraire des mesures expérimentales. La modélisation de ce problème pose donc nombre de questions et en particulier, quels effets prédominent sur les autres dans quels cas ?

Dans la suite de ce papier, nous commençons par décrire le système en précisant les différentes hypothèses. Dans le troisième paragraphe, nous donnons le premier résultat important qu'est l'équation de couplage entre le cisaillement et l'interface. Puis nous résolvons cette équation pour des faibles taux de cisaillement, ce qui nous mène à l'évolution de la rugosité de l'interface en fonction du cisaillement, autre résultat important de ce papier. Le cinquième paragraphe permet une discussion des résultats en tenant compte des résultats expérimentaux et numériques avant de conclure dans la dernière section.

## 2 Dérivation hydrodynamique

Une façon logique et rigoureuse de prédire le couplage entre le cisaillement et les fluctuations de l'interface est de faire appel à l'hydrodynamique. L'hydrodynamique est une bonne description des fluides presque jusqu'à l'échelle moléculaire ([4],[5]). Le problème étant fondamentalement hors équilibre, le bruit thermique subit par l'interface ne peut être connu directement et on envisage donc plus particulièrement l'hydrodynamique incluant le mouvement brownien des particules de fluides.

Les deux fluides sont placés l'un au-dessus de l'autre dans une géométrie plane comme on l'a schématisé sur la figure 1. L'épaisseur des fluides est notée  $L$  et celle du fluide supérieur (resp. inférieur)  $L_1$  (resp.  $L_2$ ). Dans la suite, on indice de façon systématique les quantités intrinsèques au fluide supérieur (resp. inférieur) par  $i = 1$  (resp.  $i = 2$ ). Chaque phase  $i$  est caractérisée par sa densité  $\rho_i$  et sa viscosité  $\eta_i$ . De même que dans la théorie des ondes capillaires, la limite entre ces deux phases immiscibles est supposée être une surface d'épaisseur nulle de déformations modérées autour d'un plan horizontal  $xOy$  : l'interface est décrite par sa hauteur  $z = h(x, y, t)$  au-dessus du point  $(x, y)$  du plan horizontal  $xOy$  au temps  $t$ . On définit une tension de surface  $\sigma$  et une longueur de corrélation  $l_c = \sqrt{\sigma/(\Delta\rho g)}$  où  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$  et où  $g$  représente l'accélération gravitationnelle, deux quantités spécifiques à l'interface. La hauteur moyenne de l'interface est posée égale à  $z = 0$ . Le cisaillement est induit par le mouvement simultané et stationnaire des deux parois à la vitesse  $V_1$  pour la paroi supérieure et  $-V_2$  pour celle inférieure. Les quantités  $V_1$  et  $V_2$  sont choisies tel que le cisaillement soit nul en  $z = 0$ , position moyenne de l'interface. On définit alors les taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_i$  respectifs des deux fluides comme  $\dot{\gamma}_i = V_i/L_i$ . Le taux de cisaillement total  $\dot{\gamma}$  s'appliquant sur l'interface est alors  $\dot{\gamma} = (L_1\dot{\gamma}_1 + L_2\dot{\gamma}_2)/(L_1 + L_2)$ .



**Fig. 1.** Représentation schématique du système. Le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  est normal à l'interface et pointe vers le haut.

Les effets inertiels étant négligés, soit le régime étant surarmorti, les champs de vitesse et de pression vérifient l'équation de Stokes ainsi que la condition d'incompressibilité :

$$\eta_i \nabla^2 \mathbf{v}_i - \nabla p_i + \rho_i g + \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (2)$$

où  $\bar{\bar{s}}$  est le tenseur de contraintes dues aux mouvements browniens des particules de fluides. Bien que hors équilibre, la séparation des échelles de temps permet d'identifier  $\bar{\bar{s}}$  avec son expression à l'équilibre. L'interface évolue sur des échelles de temps plus longues que les particules de fluides. Le temps caractéristique de l'interface  $\tau_c = (\eta_1 + \eta_2)l_c/\sigma$  varie de  $10^{-5} - 10^{-4}$  s pour des fluides moléculaires ( $\sigma = 10^{-1}$  N.m $^{-1}$ ) à 1 – 10 s pour des fluides colloïdaux ( $\sigma = 10^{-9}$  N.m $^{-1}$  [2]). Par ailleurs, le mouvement brownien des particules de fluide se déroule sur un temps caractéristique  $\tau_b = \eta_i a^3/(k_B T)$  où  $a$  est le diamètre des particules de fluide et  $k_B T$  l'énergie thermique. Pour des fluides moléculaires,  $a \sim 1$  nm soit  $\tau_b \sim 10^{-10}$  s tandis que pour des fluides colloïdaux où  $a \sim 100$  nm,  $\tau_b \sim 10^{-4}$  s. Pour les deux types de fluide, on constate  $\tau_b \ll \tau_c$ . Les taux de cisaillement considérés sont tels que  $\dot{\gamma}\tau_c \sim 1$ , le mouvement brownien est donc trop rapide pour être affecté par le cisaillement et il est donc spécifié par :

$$\langle s_{\mu,\nu}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0 \quad (3)$$

$$\langle s_{\mu,\nu}(\mathbf{r}, t) s_{\mu',\nu'}(\mathbf{r}', t') \rangle = 2k_B T \eta_i (\delta_{\mu,\mu'} \delta_{\nu,\nu'} + \delta_{\mu,\nu'} \delta_{\mu',\nu}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (4)$$

Une fois l'hydrodynamique achevée, le couplage entre interface et écoulement a lieu précisément via les conditions limites. Au niveau de l'interface, la continuité des vitesses et des contraintes doit être vérifiée :

$$[\mathbf{v}]_h = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\left[ \bar{\bar{T}} \right]_h \cdot \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) \quad (6)$$

où on a employé la notation  $[f]_{z_0} = f(z_0^+) - f(z_0^-)$ . Dans l'équation 6,  $\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{t}} + \bar{\bar{s}}$  représente le tenseur des contraintes incluant  $\bar{\bar{s}}$  le tenseur des contraintes aléatoires vu précédemment et  $\bar{\bar{t}}$  le tenseur des contraintes de pression et visqueuses. Les composantes de  $\bar{\bar{t}}$  sont  $t_{\mu,\nu} = -p \delta_{\mu,\nu} + \eta_i (\partial_\mu v_\nu + \partial_\nu v_\mu)$  où  $\mu$  et  $\nu$  représentent  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Le vecteur normal  $\mathbf{n}$ , noté sur la figure 1, est le vecteur normal unitaire à l'interface pointant vers le haut. Il dépend de la configuration de l'interface.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x h \\ -\partial_y h \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

L'équation de fermeture entre les champs de vitesse et l'interface est simplement la relation cinétique

$$\partial_t h + v_x \partial_x h + v_y \partial_y h = v_z \quad (8)$$

où les vitesses sont prises en  $z = h$ . Cette équation, une fois les vitesses remplacées par leur expression en fonction de  $h$ , constitue l'équation du mouvement de l'interface.

### 3 L'équation vérifiée par l'interface

Il est difficile de suivre le programme décrit ci-dessus sans approximation. On s'inspire de la dérivation de la relation de dispersion des ondes capillaires en considérant l'amplitude des fluctuations comme petite. Cette méthode semble censée puisqu'elle donne de bons résultats à l'équilibre et le cisaillement, d'après les expériences et les simulations numériques, diminue la rugosité. Cependant, pour des raisons de symétrie, on peut prévoir que l'ordre linéaire ne fasse pas intervenir le taux de cisaillement, il est donc nécessaire d'effectuer le développement par rapport à la rugosité jusqu'à l'ordre 2 où le taux de cisaillement ainsi que des non-linéarités apparaissent. Le développement effectué est plus précisément un développement à petit gradient, soit en  $\epsilon = \sqrt{k_B T / (\sigma l_c^2)}$ .  $\epsilon$  représente le rapport entre l'échelle de longueur perpendiculaire à l'interface soit la rugosité du même ordre que  $\sqrt{k_B T / \sigma}$  et l'échelle de longueur parallèle à l'interface, soit la longueur de corrélation  $l_c$ . On pose ainsi  $h = \epsilon u$  où  $u$  est une fonction d'ordre 1.

Le schéma de résolution décrit dans la section précédente peut alors être résolu en posant

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \epsilon \mathbf{v}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{v}^{(2)} + \dots \quad (9)$$

$$p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)} + \dots \quad (10)$$

Les équations de Stokes étant linéaires, chaque ordre successif obéit aux mêmes équations hydrodynamiques à l'exception de l'ordre 1 où apparaît en plus le tenseur des contraintes aléatoires  $\bar{s}$ . L'ordre 0 correspond à une configuration plane de l'interface, le champ de vitesse est  $\mathbf{v}_i^{(0)} = \dot{\gamma}_i z \mathbf{e}_x$ . La continuité des contraintes à l'interface impose  $\eta_1 \dot{\gamma}_1 = \eta_2 \dot{\gamma}_2$ . L'importance du développement limité se situe au niveau des conditions limites. Par exemple, à l'ordre 2, la vitesse en  $z = h$  est

$$\mathbf{v}(\epsilon u) = \mathbf{v}^{(0)}(0) + \epsilon \left[ \mathbf{v}^{(1)}(0) + u \partial_z \mathbf{v}^{(0)}(0) \right] + \epsilon^2 \left[ \mathbf{v}^{(2)}(0) + u \partial_z \mathbf{v}^{(1)}(0) + \frac{u^2}{2} \partial_z^2 \mathbf{v}^{(0)}(0) \right] + o(\epsilon^3) \quad (11)$$

Un grand soin doit être apporté au même développement du tenseur des contraintes  $\bar{T}$ . On souligne de plus que l'étude des fluctuations nécessite de résoudre la problème tridimensionnel.

Le problème étant invariant par translation horizontale le long de la position moyenne de l'interface, la représentation de Fourier bidimensionnelle est indiquée. On pose  $h(\mathbf{q}, t) = \int d^2 \mathbf{r} \exp(-i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) h(\mathbf{r}, t)$  où  $\mathbf{r} = (x, y)$  et  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ . On définit  $q$  la norme du vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ . Après quelques calculs, on trouve qu'une fluctuation de mode  $\mathbf{q}$  suit l'évolution suivante :

$$\partial_t h(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{\tau_q} h(\mathbf{q}, t) - i \dot{\gamma}_{eff} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} k_x h(\mathbf{k}, t) h(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t) + \varphi(\mathbf{q}, t) \quad (12)$$

Le terme non-linéaire couple tous les modes de Fourier les uns avec les autres. Cette équation constitue le premier résultat important de ce papier. L'évolution temporelle d'une fluctuation de mode  $\mathbf{q}$  dépend de trois termes. Le premier est le terme de relaxation linéaire, trouvé identique à celui de l'équilibre ce qui était prévu  $\tau_q = 2(\eta_1 + \eta_2)q / (\sigma(q^2 + l_c^{-2}))$ . L'advection de la déformation représentée par le second terme est un effet non-linéaire. Il prend la forme d'un produit de convolution entre tous les modes de Fourier multiplié par un taux de cisaillement effectif

$$\dot{\gamma}_{eff} = \frac{\eta_1 \dot{\gamma}_1 + \eta_2 \dot{\gamma}_2}{\eta_1 + \eta_2}. \quad (13)$$

Ce taux de cisaillement effectif ressenti par l'interface diffère du taux de cisaillement appliqué. Il s'agit d'une quantité dynamique, les viscosités des deux fluides permettant de le définir. Le dernier terme de l'équation  $\varphi(\mathbf{q}, t)$  modélise le bruit thermique à l'origine des fluctuations de l'interface. La procédure précédente permet de constater que ce terme a les mêmes propriétés qu'à l'équilibre. Sa valeur moyenne est nulle et ses corrélations sont données par :

$$\langle \varphi(\mathbf{q}, t) \varphi(\mathbf{q}', t') \rangle = \frac{k_B T}{(\eta_1 + \eta_2) q} \delta(t - t') (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (14)$$

#### 4 Les fluctuations hors équilibre

La résolution de l'équation du mouvement 12 met en lumière le paramètre de contrôle sans dimension associé au cisaillement. Il s'agit du paramètre  $\alpha$  :

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_B T}{\sigma l_c^2}} \dot{\gamma}_{eff} \tau_c \quad (15)$$

Notons que l'équation 12 est valable jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Avec un souci de cohérence, on ne peut obtenir une solution pour les propriétés statistiques de l'interface qu'à l'ordre  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ . La résolution est ainsi restreinte à des taux de cisaillement modérés, ce qui ne signifie pas que  $\dot{\gamma} \tau_c$  doit être petit mais que le paramètre  $\alpha$  doit vérifier  $0 \leq \alpha < 1$ . On utilise la théorie de perturbation, ce qui nous permet d'obtenir la fonction de corrélation  $S(\mathbf{q}, \dot{\gamma})$  définie de la manière suivante :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle h(\mathbf{q}, t) h(\mathbf{q}', t) \rangle = S(\mathbf{q}, t) (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \quad (16)$$

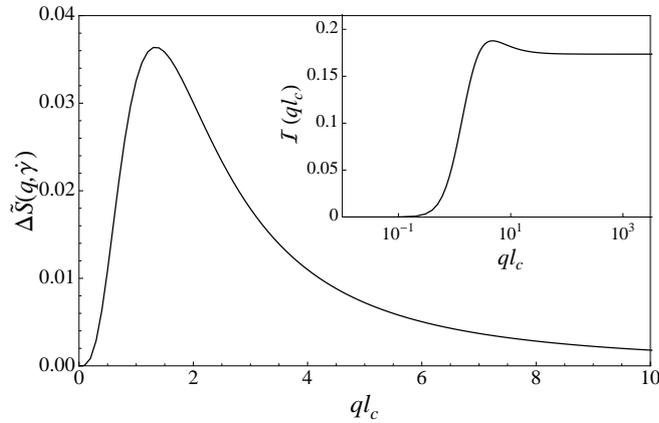
A l'équilibre, on rappelle que  $S(\mathbf{q}, 0) = k_B T / (\sigma(q^2 + l_c^{-2}))$ . Sous cisaillement, on constate la modification suivante du spectre :

$$S(\mathbf{q}, \dot{\gamma}) = S(\mathbf{q}, 0) [1 - \alpha^2 \mathcal{I}(ql_c) \cos^2 \theta_q + \mathcal{O}(\alpha^4)] \quad (17)$$

où  $\theta_q$  est l'angle entre le vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  et la direction du cisaillement soit  $\mathbf{e}_x$ . La fonction  $\mathcal{I}(ql_c)$  dépend seulement de la norme  $q$  du vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ .

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 \mathbf{s} \cos \theta_s \frac{x^2 s}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}| f(|\mathbf{x} - \mathbf{s}|)} \times \frac{[x f(x)]^{-1} - [s f(s)]^{-1}}{f(x) + f(x) + f(|\mathbf{x} - \mathbf{s}|)} \quad (18)$$

où  $\mathbf{x} = x \mathbf{e}_x$ ,  $s = |\mathbf{s}|$ ,  $\theta_s$  est l'angle entre le vecteur  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{e}_x$ , et où  $f(x) = (1 + x^2)/x$ . L'intégration ne se fait pas analytiquement, on présente le résultat numérique sur la figure 2.



**Fig. 2.** Correction du spectre des fluctuations hors équilibre  $\Delta\tilde{S}(\mathbf{q}, \dot{\gamma}) = \sigma / (k_B T l_c^2) \times \Delta S(\mathbf{q}, \dot{\gamma})$ , dans la direction du cisaillement  $\theta_q = 0$  et pour  $\alpha = 1$ . Dans l'encart est représenté  $\mathcal{I}(ql_c)$ .

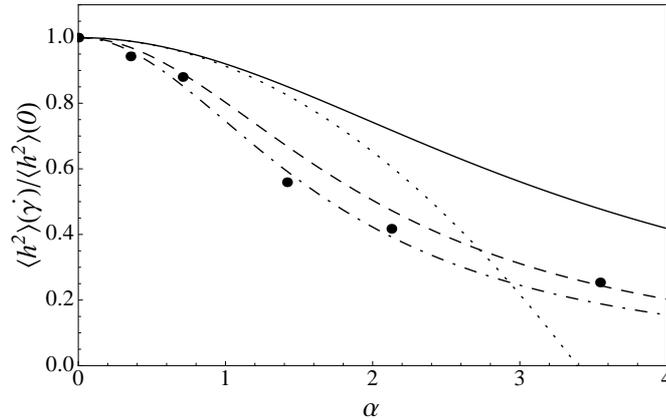
L'équation 17 est le second résultat notable du papier. Le couplage est maximum dans la direction du cisaillement tandis qu'il est nul dans la direction de la vorticité. Les longueurs d'onde les plus affectées par le cisaillement sont celles de l'ordre de la longueur capillaire  $l_c$ . En revenant dans l'espace réel, on constate qu'effectivement les fluctuations sont réduites par le cisaillement :

$$\langle h^2 \rangle(\dot{\gamma}) = \int \frac{q dq d\theta_q}{(2\pi)^2} S(\mathbf{q}, \dot{\gamma}) = \langle h^2 \rangle(0) [1 - K\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^4)] \quad (19)$$

La correction est quadratique par rapport au paramètre de contrôle  $\alpha$ .  $K$  est une constante universelle dans le sens où aucune des propriétés des deux fluides ou des constantes élastiques de l'interface n'intervient dans son expression. Le modèle hydrodynamique donne  $K \sim 0,087$ . Le spectre nous a permis aussi d'obtenir les fonctions de corrélation spatiales qui sont détaillées dans un autre papier [6].

## 5 Discussion

On a montré que l'amplitude des fluctuations de l'écoulement est diminué sous l'effet du cisaillement. Cette réduction fait intervenir un paramètre universel que la théorie hydrodynamique sans param tra justable fixe à  $K = 0.087$ . Cette même suppression des ondes capillaires a été mesuré par Derks et ses collaborateurs [2] grâce à un mélange diphasique de collo ides et de polymères. Connaissant les différents paramètres de la géométrie de l'expérience et des deux phases, il est possible de comparer le modèle purement hydrodynamique avec les mesures exp riementales ce qui est effectué sur la figure 3.



**Fig. 3.** Correction du spectre des fluctuations hors équilibre  $\Delta\tilde{S}(\mathbf{q}, \dot{\gamma}) = \sigma / (k_B T l_c^2) \} \times \Delta S(\mathbf{q}, \dot{\gamma})$ , dans la direction du cisaillement  $\theta_q = 0$  et pour  $\alpha = 1$ . Dans l'encart est représenté  $I(q l_c)$ .

On constate un décalage d'un facteur 3-4 entre modèle hydrodynamique et expériences. On peut donc se demander si d'autres effets que les effets d'hydrodynamique classique entrent en jeu. En particulier, on peut penser à la séparation des différentes échelles de longueur. On a supposé de plus que les propriétés élastiques de l'interface comme sa tension  $\sigma$  n'étaient pas affectées par le cisaillement. On pourrait imaginer une tension au contraire, fonction du cisaillement. Pour modéliser cette variation, il faudrait cependant sortir de l'hydrodynamique classique.

En conclusion, on peut souligner le bon accord qualitatif d'un modèle hydrodynamique avec des points expérimentaux, modèle poussé jusqu'à l'ordre 2. On note aussi la dérivation rigoureuse d'une équation linéaire de type Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) [7]. Ce type d'équation est courante en matière molle mais provient de raisonnements phénoménologiques.

## Références

1. D. G. A. L. AARTS, M. SCHMIDT & H. N. W. LEKKERKERKER, Direct Visual Observation of Thermal Capillary Waves, *Science*, **304**, 847-850 (2004).
2. D. DERKS, D. G. A. L. AARTS, D. BONN, H. N. W. LEKKERKERKER & A. IMHOF, Suppression of Thermally Excited Capillary Waves by Shear FLOW, *Physical Review Letters*, **97**, 038301 (2006).
3. T. H. R. SMITH, O. VASILYEV, D. B. ABRAHAM, A. MACIOLEK & M. SCHMIDT, Interfaces in Driven Ising Models : Shear enhances Confinement, *Physical Review Letters*, **101**, 067203 (2008).
4. C. FRADIN, A. BRASLAU, D. LUZET, D. SMILGIES, M. ALBA, N. BOUDET, K. MECKE & J. DAILLANT, Reduction in the surface energy of liquid interfaces at short length scales, *Nature*, **403**, 871-874 (2000).
5. R. DELGADO-BUSCALIONI, E. CHACON & P. TARAZONA, Hydrodynamics of Nanoscopic Capillary Waves, *Physical Review Letters*, **101**, 106102 (2008).
6. M. THIÉBAUD & T. BICKEL, Nonequilibrium fluctuations of an interface under shear, *ArXiv*, 0909.0849 (2009).
7. M. KARDAR, G. PARISI & Y. C. ZHANG, Dynamic Scaling of Growing Interfaces, *Physical Review Letters*, **56**, 889-892 (1986).

## Robustesse des horloges circadiennes aux fluctuations : le cas du picoeucaryote *Ostreococcus*

Quentin Thommen<sup>1,2,3</sup>, Pierre-Emmanuel Morant<sup>1,2,3</sup>, Benjamin Pfeuty<sup>2,3</sup>, Florence Corellou<sup>4,5</sup>, & François-Yves Bouget<sup>4,5</sup> & Marc Lefranc<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Université Lille 1, Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, et Molécules, UFR de Physique, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France

<sup>2</sup> Université Lille 1, Institut de Recherche Interdisciplinaire, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France

<sup>3</sup> CNRS, UMR 8523, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

<sup>4</sup> Université Pierre and Marie Curie Paris 06, Laboratoire d'Océanographie Microbienne, Observatoire Océanologique, F-66651 Banyuls/Mer, France

<sup>5</sup> Centre National de la Recherche Scientifique, Laboratoire d'Océanographie Microbienne, Observatoire Océanologique, F-66651 Banyuls/Mer, France

quentin.thommen@univ-lille1.fr

**Résumé.** La modélisation de l'horloge circadienne de l'algue verte unicellulaire *Ostreococcus tauri* permet de reproduire presque parfaitement les profils temporels expérimentaux de deux acteurs centraux par un modèle minimal, non couplé au cycle jour/nuit. Ce résultat contre-intuitif et surprenant indique que la trajectoire dans l'espace des phases de l'oscillateur couplé au cycle jour/nuit est très proche de celle d'un oscillateur libre et nous conduit à la recherche d'un couplage indirect, *via* un médiateur présent de façon temporaire, entraînant une faible déviation de la trajectoire dans l'espace des phases. L'accent est mis sur les couplages localisés induisant un accrochage de phase relativement indépendant de l'intensité du couplage, suggérant que les oscillations de l'horloge circadienne sont indépendantes de l'intensité lumineuse reçue. Cette propriété nouvelle permet à l'horloge d'être robuste vis à vis des fluctuations d'éclairement.

### 1 Introduction

Les horloges circadiennes, présentes chez la plupart des organismes vivants, leurs permettent d'anticiper les changements de leur environnement liés au cycle jour/nuit, et d'adapter leur comportement en conséquence. Cela implique un couplage indispensable entre l'horloge et l'alternance jour/nuit, permettant de recalibrer l'horloge rapidement lors d'un brusque décalage temporel, ainsi que l'adaptation saisonnière de l'horloge. Les rouages de ces horloges se trouvent dans des réseaux biochimiques où interagissent gènes et protéines; les principaux composants des horloges circadiennes de plusieurs organismes (*Arabidopsis*, *Neurospora*, *Drosophila* ...) ont pu être identifiés ainsi que leurs interactions [1,2].

Nous présentons les premiers résultats de modélisation de l'horloge circadienne de l'algue verte unicellulaire *Ostreococcus tauri*, dont deux acteurs centraux, les gènes *TOC1* et *CCA1*, ont été récemment identifiés [3]. En particulier, nous montrons qu'un modèle minimal permet de reproduire, au delà de toute espérance, les données expérimentales de l'horloge entraînée par un cycle jour/nuit artificiel. Fait remarquable, le meilleur ajustement du modèle aux données est obtenu quand on suppose un forçage nul, soit l'absence de couplage entre l'oscillateur circadien et le cycle d'éclairement [4]. Ceci suggère que le couplage à la lumière est confiné dans des intervalles de temps spécifiques et qu'il n'a aucun effet lorsque l'oscillateur est entraîné par le cycle diurne en régime permanent. Nous montrons qu'il est effectivement possible de créer des profils de modulation paramétrique ne laissant aucune signature sur les profils temporels des acteurs de l'horloge lorsque celle-ci est en phase avec le cycle jour/nuit — l'horloge « à l'heure » —, mais permettant néanmoins une synchronisation efficace de l'horloge [4]. Cette propriété intrigante reflète probablement une stratégie visant à minimiser l'impact des fluctuations d'intensité lumineuse sur l'oscillateur circadien, un type de perturbation qui a rarement été pris en compte pour évaluer la robustesse des horloges circadiennes.

## 2 Modélisation de l'horloge

### 2.1 Les données et le modèle utilisé

Pour caractériser les profils temporels de l'expression de TOC1 et CCA1 chez *Ostreococcus*, nous utilisons les données ARN acquises avec un cycle jour/nuit comportant 12h de lumière constante et 12h d'obscurité. La technique de mesure par micro-puce permet une sensibilité logarithmique ce qui est particulièrement utile ici. Notons que Corellou *et al* [3] ont mené un travail exhaustif de transformation génétique chez *Ostreococcus* pour mesurer en temps réel l'activité transcriptionnelle et les niveaux de protéine par bioluminescence. Cependant la cinétique de la luciférase est encore mal connue chez *Ostreococcus*, si bien que la recherche d'un accord quantitatif avec ces données est prématurée ; nous présentons néanmoins également ces données pour une vérification qualitative de l'accord.

Notre démarche est de chercher à reproduire au mieux les données ARN à l'aide d'un modèle minimale de quatre équations différentielles décrivant la cinétique chimique d'une boucle transcriptionnelle : les protéines CCA1 répriment la synthèse de l'ARN de TOC1 alors que les protéines TOC1 activent la synthèse de l'ARN de CCA1,

$$\dot{M}_T = \mu_T + \frac{\lambda_T}{1 + (P_C/P_{C0})^{n_C}} - \delta_{M_T} \frac{K_{M_T} M_T}{K_{M_T} + M_T}, \quad (1a)$$

$$\dot{P}_T = \beta_T M_T - \delta_{P_T} \frac{K_{P_T} P_T}{K_{P_T} + P_T}, \quad (1b)$$

$$\dot{M}_C = \mu_C + \frac{\lambda_C (P_T/P_{T0})^{n_T}}{1 + (P_T/P_{T0})^{n_T}} - \delta_{M_C} \frac{K_{M_C} M_C}{K_{M_C} + M_C}, \quad (1c)$$

$$\dot{P}_C = \beta_C M_C - \delta_{P_C} \frac{K_{P_C} P_C}{K_{P_C} + P_C}. \quad (1d)$$

La boucle de rétroaction négative permet d'engendrer des oscillations autonomes des variables du système. Pour augmenter la variété des profils temporels accessibles, des dégradations enzymatiques de type Michaelis–Menten ont été utilisées pour chacun des acteurs. Il faut interpréter ces termes de dégradation comme des mécanismes effectifs permettant éventuellement de prendre en compte des interactions plus complexes et non encore identifiées.

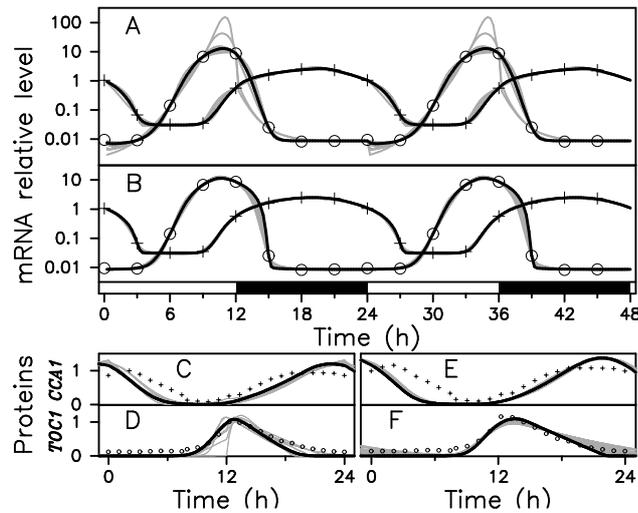
En l'absence d'éléments probant concernant les voix d'entrée de la lumière sur l'horloge d'*Ostreococcus* permettant la synchronisation, le couplage éclairement–horloge est modélisé par un nombre variable de couplages paramétriques (certains paramètres ont deux valeurs différentes à la lumière et à l'obscurité).

### 2.2 Stratégies d'optimisation des paramètres

La recherche des paramètres du modèle reproduisant au mieux les données expérimentales a été conduite en imposant l'oscillation avec une période de 24 heures des solutions en condition d'éclairage constant. La figure 1 présente les résultats de deux stratégies extrêmes : la première stratégie (Fig. 1A) utilise une modulation de tous les paramètres alors que la seconde (Fig. 1B) n'utilise aucune modulation (pas de couplage entre l'horloge et l'éclairage).

De manière surprenante, les deux stratégies permettent de décrire les données expérimentale avec une erreur quadratique moyenne de quelques pour-cent. Cependant l'accord se dégrade nettement lorsque le nombre de paramètres modulés est réduit.

Ce résultat est inconfortable : la modélisation reproduit presque parfaitement les données expérimentales dans deux cas limites inacceptables : dans l'un tous les paramètres sont modulés ce qui est irréaliste et dans l'autre, aucun couplage n'est présent ce qui exclut toute synchronisation de l'horloge sur l'éclairage alors que celle-ci est effective. Cependant, l'accord quantitatif est trop parfait pour être fortuit.



**Fig. 1.** Ajustement des données expérimentales. Les profils des ARN sont ajustés par le modèle (1) pour une période libre de 24 h. En (A) et (B), les croix (respectivement les cercles) sont les mesures de l'ARN de *Cca1* (respectivement *Toc1*) utilisées comme cible; les meilleurs ajustements sont représentés en gris tandis que le meilleur est en noir (échelle log.) lorsque le modèle est (A) couplé à travers tous ces paramètres; (B) sans couplage. (C) (resp. (E)) Prédiction du profil temporel de CCA1 (échelle linéaire) correspondant à (A) (resp. (B)) avec le même code de couleur; les croix correspondent au signal de luminescence. (D) et (F) sont similaires à (C) et (E) pour la protéine TOC1.

### 2.3 Couplages localisés

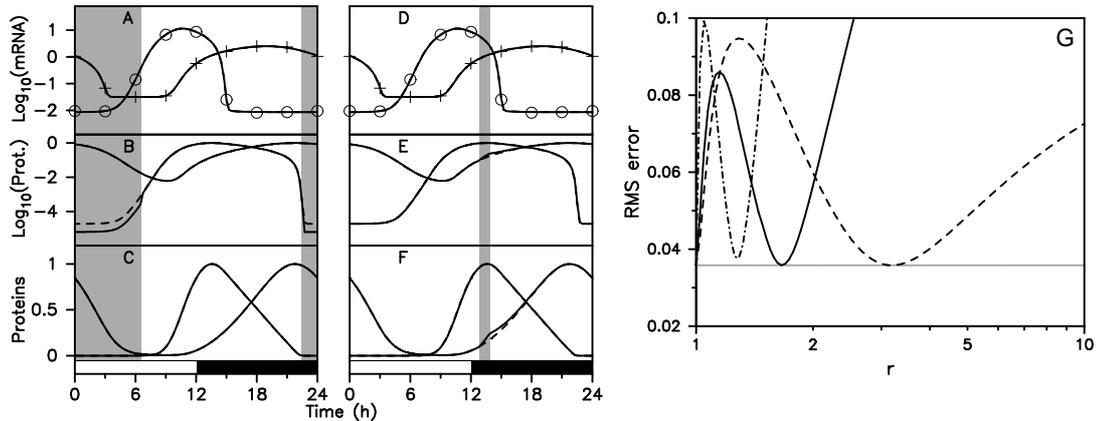
Puisque les données peuvent être décrites par un modèle d'oscillateur libre, cela suggère que le couplage de l'horloge à l'éclairement n'induit pas de signature sur les données ARN, ou encore que ce couplage est suffisamment ponctuel pour passer entre les mailles de l'échantillonnage. Une hypothèse séduisante est que l'horloge est couplée à la lumière *via* un médiateur présent durant une courte fenêtre temporelle, ce médiateur hypothétique pouvant soit être lié à la voie d'entrée du signal lumineux, soit être un photorecepteur dont l'expression est régulée par l'horloge.

La recherche de telles fenêtres de couplage a été menée en utilisant les jeux de paramètres conduisant au meilleur accord avec les données expérimentales en l'absence de couplage, et en supposant que le taux de dégradation d'une des protéines change durant un intervalle de temps donné. La recherche systématique montre l'existence de familles de fenêtres pour lesquelles l'accord aux données expérimentales est excellent (inférieur à 10%) pour toute une large gamme de modulation du taux de dégradation, induisant ainsi une grande souplesse dans le choix des fenêtres de couplage.

Par exemple, toute modulation de la dégradation de la protéine TOC1 intervenant entre 22,5 h et 6,5 h est indécélable sur les profils ARN et donc n'induit aucune variation de l'accord (Fig 2), quel que soit le taux de modulation (Fig 3). Ce cas est aisément compréhensible, car dans ce laps de temps la protéine est à son niveau minimum, attendant la décroissance du répresseur CCA1 pour augmenter à nouveau. Varier son taux de dégradation ne change donc pas l'état du système.

Plus surprenant est le cas des fenêtres portant sur le taux de dégradation de CCA1. Les fenêtres centrées autour de 13,33 h génèrent un accord inférieur à 10% en RMS dans une gamme de taux de modulation, d'autant plus vaste que leur durée est courte (Fig 3). Ce moment particulier du cycle de l'horloge (13,33 h) est déterminé en étudiant le déphasage induit sur l'horloge par une perturbation ponctuelle sur la variable protéine CCA1. On montre en effet qu'une telle perturbation placée à 13,33h n'induit aucun déphasage sur l'horloge.

Ainsi, un couplage localisé permet de décrire les données expérimentales à l'aide d'une solution proche de celle d'un oscillateur libre, sans que le taux de modulation n'ait d'influence notable.



**Fig. 2.** Ajustement par un couplage localisé. Solutions numérique du modèle (1) sans couplage (trait tirés, même paramètres que pour Fig. 1(B)) et avec couplage (trait plein). Les zones grisées matérialise les fenêtres de couplage. A gauche (resp. droite), le taux de dégradation de TOC1 (respectivement CCA1) est multiplié par 3 (respectivement divisé par 2) de 22,5 h à 6,5 h (respectivement de 12,8 à 13,95). (A), (D) profile temporel de l'ARN; les profils de protéines sont représentés en échelle logarithmique (B) et (E) ainsi qu'en échelle linéaire (C) et (F). (G) Variation de l'erreur quadratique moyenne en fonction de l'amplitude de couplage pour différente fenêtres. En gris,  $\delta_{P_T}$  est multiplié par  $r$  de 22,5 h à 6,5 h; en noir  $\delta_{P_c}$  est divisé par  $r$  de 12,8 h à 13,95 h (trait plein), de 13 h à 13,65 h (trait tiré), et de 12 h à 12,47 h (trait mixte).

## 2.4 Synchronisation à l'aide de couplages localisés

La question se pose maintenant sur les propriétés de synchronisation de ces fenêtres : puisqu'elles n'ont aucun effet en phase, sont-elles suffisantes pour réaliser une synchronisation rapide lorsque l'horloge est déphasée par rapport au cycle d'éclairement. Pour tester les propriétés de recalage, nous faisons l'hypothèse simplificatrice que les fenêtres de modulation sont positionnées par rapport au cycle d'éclairement.

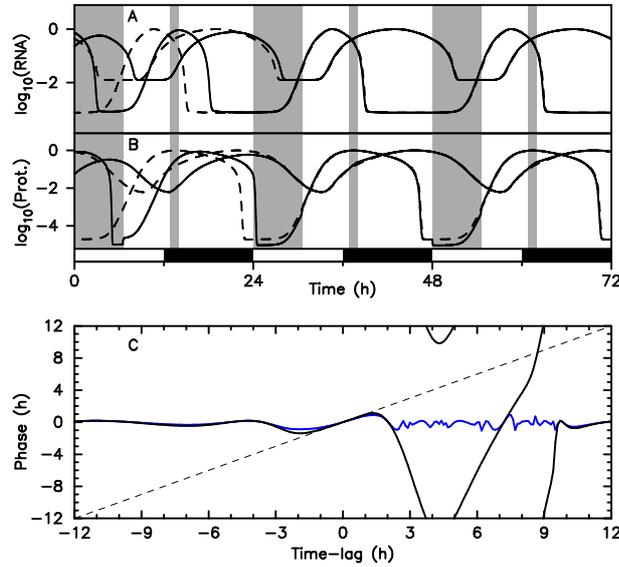
Puisque les fenêtres de couplage n'ont qu'une influence ponctuelle sur les variables dynamiques, il est possible d'en combiner plusieurs pour améliorer leurs propriétés de recalage de l'horloge sur l'éclairement. De plus, comme le taux de modulation est peu important lorsque l'horloge est en phase, il est possible de les optimiser dans chacune des fenêtres afin d'obtenir un déphasage résiduel minimal au bout de 5 cycles de modulation. La combinaison optimale permet ainsi d'abaisser le déphasage résiduel à 25 min quelque soit la phase initiale de l'horloge avec une erreur maximum d'une heure; ce qui, compte tenu des hypothèses très réductrices sur les profils de modulation ainsi que leurs comportement vis à vis du cycle d'éclairement constitue un recalage satisfaisant. La figure 4 présente un exemple d'un déphasage initiale de 12h (Fig. 4A et 4B) ainsi que le déphasage résiduel en fonction du déphasage initiale.

## 3 Robustesse de l'horloge aux fluctuations d'éclairement

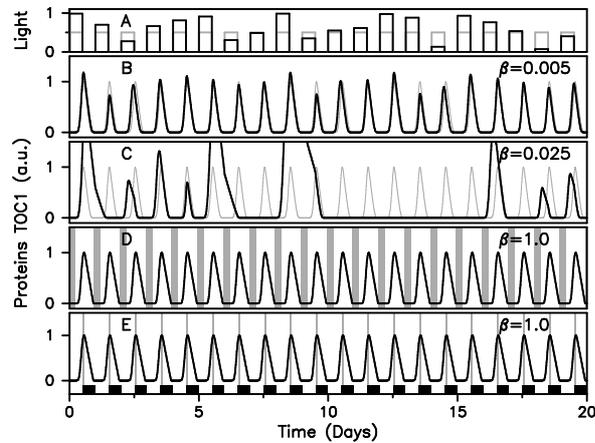
En supposant que les fenêtres de modulation identifiées reflètent un couplage de l'horloge à l'éclairement et que le taux de modulation soit le reflet de l'éclairement reçu, le résultat précédent implique l'hypothèse forte et non étudiée jusqu'à présent que l'horloge est insensible à l'éclairement reçu tout en étant capable de se recalibrer rapidement sur le cycle d'éclairement.

Cela suggère en particulier qu'un tel couplage permet à l'horloge d'être insensible aux fluctuations d'éclairement présentes en conditions réelles, tout en étant sensible aux fluctuations de phase. Le modèle présentant des couplages sur tous les paramètres serait quant à lui beaucoup plus sensible à de telles fluctuations. Cependant il n'est pas exclu que l'information sur l'éclairement puisse être transmise à l'horloge au travers d'une cascade ultra sensible de sorte qu'un signal d'entrée fluctuant se rapproche en sortie d'un signal créneau.

Pour tester leurs comportements, les deux modèles (couplage localisé sur un paramètre, et couplage de tous les paramètres) ont été soumis à une séquence d'éclairements d'amplitude variable d'un cycle



**Fig. 3.** Recalage d'un modèle à fenêtres. Le taux de dégradation de TOC1 (resp. CCA1) est multiplié par 2,1 (respectivement par 0,6) de 0 h à 6,5 h (respectivement de 12,8 h à 13,95 h). La condition initiale correspond à un déphasage de 12 h ; la solution numérique converge rapidement vers le profil normal (traits tirés). Les profils temporels d'ARN (A) et de protéines (B) sont représentés en échelle logarithmique. (C) Le déphasage résiduel après un jour (en noir) et après cinq jour (bleue) pour une phase initiale entre -12 h et 12 h permet de juger de l'uniformité de la synchronisation.



**Fig. 4.** Réponse des modèles d'horloge aux fluctuations d'éclaircissement. (A) Intensité lumineuse variant aléatoirement d'un jour sur l'autre. (B) et (C) L'évolution temporelle de la concentration de TOC1 est représentée pour le modèle avec tous les paramètres couplés à différents niveaux de fluctuation caractérisés par le paramètre  $\beta$ . (D) Le modèle utilisé pour Fig. 2(A)-(C) ; (E) le modèle utilisé pour Fig. 2(D)-(F). La robustesse se déduit de la comparaison du profil temporel pour un éclaircissement aléatoire (en noir) à celui pour un éclaircissement standard (en gris).

à l'autre. Pour le modèle fortement couplé, il a été tenu compte d'un amortissement des fluctuations d'éclaircissement.

Le résultat montre que le modèle fortement couplé présente un comportement erratique pour des fluctuations d'éclaircissement de quelques pour cent tandis que le modèle avec un couplage localisé est parfaitement robuste.

Une question naturelle est de savoir si l'indépendance par rapport à l'éclairement des couplages localisés ne dépend pas du fait que nous ayons choisi un oscillateur ayant une période libre égale à celle de la modulation. En effet, lorsque la période de l'oscillateur libre est de 25h par exemple, le couplage est nécessaire, même lorsque l'horloge est en phase.

Pour tester cette hypothèse, nous avons renormalisé le temps du modèle non couplé afin d'obtenir un oscillateur libre de période variable. La recherche de fenêtres de modulation permettant de reproduire les profils ARN expérimentaux tout en synchronisant l'horloge montre que celles-ci sont à même de réaliser une compression ou dilatation temporelle homogène permettant de restaurer le bon accord tout en étant robuste aux fluctuations d'intensités.

## 4 Conclusion

Les profils temporels des acteurs principaux de l'horloge d'*Ostreococcus* sont compatibles avec un modèle élémentaire comportant une boucle de rétroaction négative. Le couplage de l'horloge au cycle d'éclairement peut être réalisé de manière optimale, pour la robustesse comme pour la synchronisation, en le supposant localisé dans des fenêtres temporelles.

Dans ce travail, le positionnement des fenêtres a été défini avec une totale liberté, car aucune certitude biologique n'existe sur les acteurs impliqués dans les voies d'entrée du signal lumineux chez *Ostreococcus*. L'objectif à court terme est d'identifier ces acteurs en mettant en correspondance leurs niveaux d'expression et les fenêtres possibles de modulation.

## Références

1. J. C. DUNLAP, Molecular bases for circadian clocks, *Cell*, **96**, 271 (1999).
2. M. W. YOUNG & S. KAY, Time zones : a comparative genetics of circadian clocks, *Nature Genetics*, **2**, 702 (2001).
3. F. CORELLOU, C. SCHWARTZ, J. P. MOTTA, E. B. DJOUANI-TAHRI, F. SANCHEZ, *et al.*, Clocks in the green lineage : comparative functional analysis of the circadian architecture in the picoeukaryote *ostreococcus*, *Plant Cell*, **21**, 3436 (2009).
4. Q. THOMMEN, P.-E. MORANT, F. CORELLOU, F.-Y. BOUGET & M. LEFRANC, Robustness of circadian clocks to daylight fluctuations : hints from the picoeukaryote *Ostreococcus tauri*, *PLoS Computational Biology*, soumis.

# Dynamique de dégazage dans un milieu granulaire immergé : différents aspects

Valérie Vidal, Germán Varas & Jean-Christophe Géminard

Laboratoire de Physique, Université de Lyon, Ecole Normale Supérieure de Lyon - CNRS  
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France  
Valerie.Vidal@ens-lyon.fr

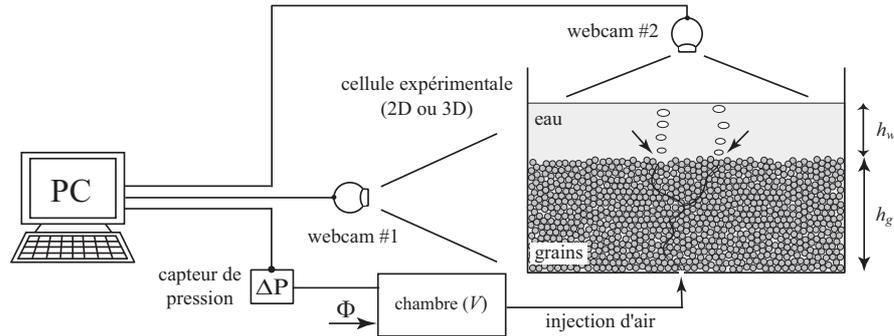
**Résumé.** Nous présentons ici une revue de plusieurs résultats expérimentaux concernant la dynamique de dégazage à travers un milieu granulaire immergé. Dans un premier temps, nous regardons comment le gaz pénètre le milieu à partir d'un point d'injection (expérience 2D). La localisation de l'émission en surface dépend fortement de la géométrie de l'invasion, et l'on observe, en 3D, la distribution des points de sortie du gaz. Aux temps longs, le gaz injecté forme une zone fluidisée au centre de la couche de grains immergée. On observe alors différents régimes de dégazage : émission de bulles, formation d'un canal ouvert, ou intermittence spontanée entre ces deux régimes. Pour une hauteur d'eau suffisamment grande au-dessus du lit granulaire, un cratère se forme, composé de deux talus symétriques par rapport au point d'injection du gaz. Contrairement à l'intuition, nous montrons que la dynamique de formation de ce cratère ne dépend pas du régime d'émission du gaz.

**Abstract.** We present a review of different experimental results about the outgassing through an immersed granular layer. First, we investigate how the gas penetrates the medium from the injection nozzle (2D experiment). The location of gas emission at the surface strongly depends on the invasion pattern and we observe, in 3D, the distribution of gas emission locii. In stationary regime, the injected gas generates a fluidized zone in the granular layer. We then observe different degassing regimes : bubbles, open channel, or spontaneous intermittence between the two previous regimes. For a water layer high enough above the granular bed, a crater forms, composed of two dunes symmetric respect to the gas injection point. Contrary to the intuition, we show that the crater formation dynamics does not depend on the gas emission regime.

## 1 Introduction et dispositif expérimental

Les phénomènes naturels mettant en jeu le passage d'un fluide (liquide ou gaz) dans un milieu granulaire immergé sont nombreux. On peut citer, parmi eux, l'émission d'hydrocarbures en surface des sédiments marins [1], les fractures hydrauliques [2], la formation de cratères par dépôts successifs d'éjecta en milieu océanique, ou les volcans de boue [3]. Comprendre la dynamique de ces systèmes a un intérêt géologique évident. Cependant, la difficulté de réaliser des mesures de terrain convenables dans les fonds marins ou sur les volcans rend leur étude particulièrement difficile. A ce titre, les expériences de laboratoire représentent un moyen de reproduire, à petite échelle, ces phénomènes naturels dans le but de comprendre et éventuellement prédire leur dynamique.

De nombreuses études ont été réalisées dans le cas des systèmes diphasiques (solide/liquide), pour mimer la remontée de fluide dans les sédiments marins (*'fluid venting'*), observée sur les marges continentales [3]. Trois principaux régimes sont rapportés lorsqu'on injecte un fluide avec un débit constant  $Q$  dans un matériau granulaire immergé : à faible  $Q$ , les grains restent immobiles et l'air percole à travers le milieu (équivalent à un milieu poreux rigide) ; quand  $Q$  augmente, le lit granulaire se déforme ; enfin, pour des  $Q$  importants, on observe une fluidisation locale du milieu, associée à l'apparition de conduits (*'pipes'*) et à des modes explosifs d'éjection du fluide [4,5,6]. Il est à noter que ces conduits ne sont pas stationnaires et peuvent migrer dans le lit de grains immergés, jusqu'à fluidiser une région de plus en plus grande. Ce phénomène est responsable de l'instabilité massive de certains sols saturés en eau [4]. Les systèmes mettant en jeu trois phases (solide, liquide, gaz) présentent une dynamique encore plus complexe, qui n'a pas été entièrement caractérisée à l'heure actuelle.



**Fig. 1.** Schéma du montage expérimental (2D ou 3D). On injecte de l'air à débit constant  $\Phi$ , via une chambre de volume  $V$ , en base d'une couche de granulaire immergée. On enregistre la surpression  $\Delta P$  dans la chambre au cours du temps, et on observe la dynamique du système. Les flèches noires indiquent le(s) point(s) de sortie de l'air en surface du lit granulaire.

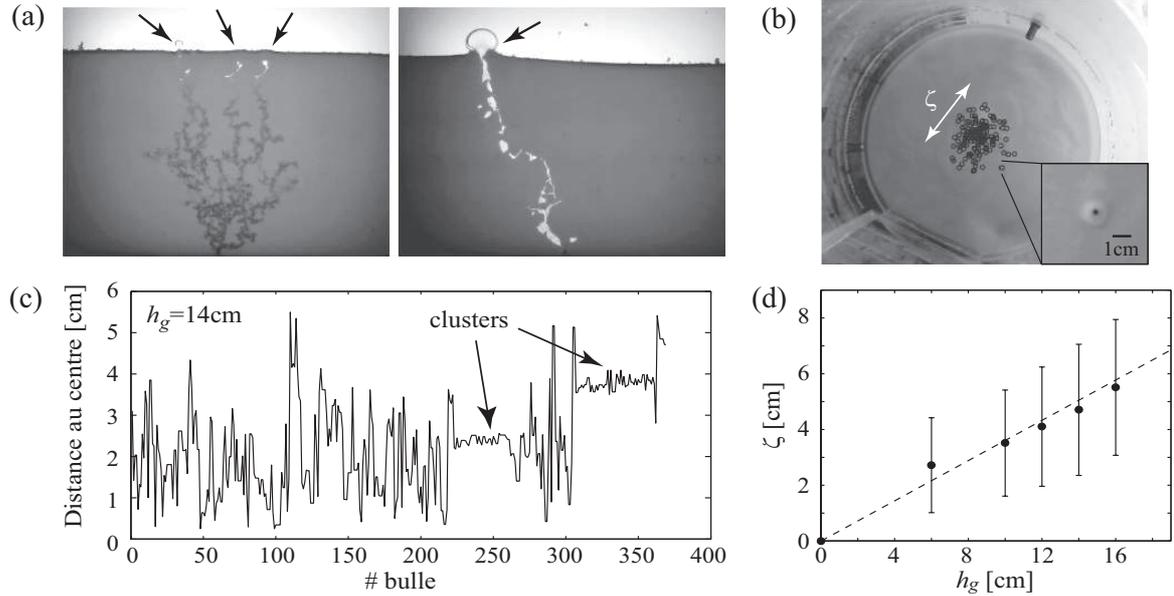
Nous présentons ici une revue de différents résultats expérimentaux, visant à caractériser la dynamique de passage d'un gaz à travers un matériau granulaire immergé (système triphasique). Le dispositif expérimental utilisé, commun à toutes ces expériences, est présenté Fig. 1. La cellule expérimentale peut être 3D (cylindre de plexiglas de diamètre 24 cm pour la localisation en surface, section 3, ou 7.4 cm pour l'étude des régimes, section 4) ou 2D (plaques de verre  $40 \times 30$  cm, espacées de 2 mm, sections 2 et 5). Les grains utilisés sont des billes de verre sphériques (USF Matrasur) tamisées afin d'obtenir des diamètres typiques 100–125, 200–250, 250–425 ou 400–500  $\mu\text{m}$ . Après immersion, la couche de grains est mélangée puis lissée à l'aide d'une tige mince (en 2D) ou d'une palette (en 3D). On note  $h_g$  la hauteur de grains, et  $h_w$  la hauteur d'eau au-dessus du lit granulaire. Un débit d'air constant  $\Phi$  est envoyé, via une chambre de volume  $V$ , en base de la couche de granulaire immergée par un système de valve et capillaire ( $\Phi$  entre 1.5 et 4.3 mL/s) ou par un contrôleur de débit (Bronkhorst, Mass-Stream Series D-5111,  $\Phi$  entre 0.17 et 1.74 mL/s). Un capteur de pression (MKS Instruments, 223 BD-00010 AB), connecté à une carte d'acquisition (National Instruments, PCI-6251) enregistre la surpression  $\Delta P$  dans la chambre (sensibilité  $\sim 10$  Pa). La cellule expérimentale est éclairée par un plan lumineux (Just NormLicht, Classic Line), assurant un éclairage homogène. Une visualisation directe du système est réalisée par deux caméras web positionnées sur le côté (webcam #1, Logitech QuickCam Express, expérience 2D) ou à la verticale (webcam #2, Logitech QuickCam S7500, expérience 3D).

## 2 Pénétration de l'air dans le milieu granulaire immergé

Dans cette première expérience, nous considérons les chemins formés par l'air injecté dans le milieu granulaire immergé. Nous utilisons une cellule 2D, qui permet d'observer la dynamique du gaz aux premiers instants d'injection - typiquement, entre le moment où l'air commence à pénétrer dans le milieu par la buse d'injection placée en bas de la cellule, et l'instant où il atteint la surface.

A faible débit  $\Phi$ , l'air pénètre dans le milieu en chassant le fluide environnant (eau), sans déplacer les grains de manière notable (Fig. 2a, gauche) ; on a une pénétration de type milieu poreux. L'air explore différents chemins, de manière simultanée, et vient s'échapper en surface du matériau granulaire immergé en un ou plusieurs points d'émission. Les chemins ainsi formés ('branches') évoluent au cours du temps. Pour des débits plus forts, l'air fracture le milieu : le fluide environnant, ainsi que les grains qui forment la matrice du milieu, sont déplacés (Fig. 2a, droite). On observe également la formation de plusieurs branches, mais dans ce cas, seule la branche principale atteint la surface du lit granulaire (un seul point d'émission de l'air). Sur des temps longs, cette branche peut se déplacer et se pincer, donnant naissance à de nouvelles branches actives (différents points d'émission du gaz en surface du lit granulaire).

Ces observations sont similaires à l'instabilité de Saffman-Taylor observée dans des systèmes biphasiques non-miscibles (pénétration d'un fluide dans un milieu granulaire non-cohésif à l'horizontale, par



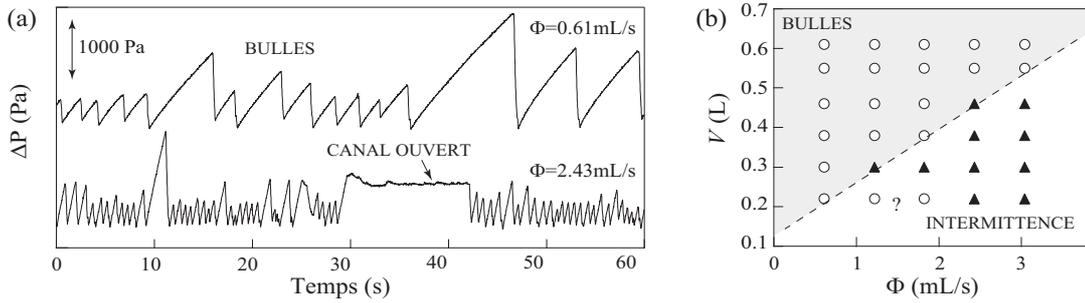
**Fig. 2.** (a) Injection de l'air à travers la couche de granulaire immergée pour différents débits (gauche,  $\Phi = 0.30 \text{ mL/s}$ ); droite,  $\Phi = 3.04 \text{ mL/s}$ ). Les flèches noires indiquent le(s) point(s) de sortie de l'air en surface du lit granulaire [expérience 2D, grains  $200\text{--}250 \mu\text{m}$ ]. (b) Détection des points de sortie (*Inset* : exemple de sortie d'une bulle). (c) Evolution de la distance au centre pour une série de bulles ( $h_g = 14 \text{ cm}$ ). Noter l'apparition de clusters. (d) La taille moyenne  $\zeta$  de la distribution des points de sortie augmente linéairement avec la hauteur du lit granulaire [expérience 3D, grains  $250\text{--}425 \mu\text{m}$ ,  $\Phi = 4.3 \text{ mL/s}$ ].

exemple). Dans ce cas, la force responsable du mouvement des grains est le gradient de pression généré par le passage du fluide. Ce gradient de pression est maximum à la pointe des fractures qui se développent dans le milieu, expliquant pourquoi la branche la plus avancée voit sa croissance favorisée, alors que la croissance des branches latérales ralentit puis s'arrête [7]. Dans notre cas d'étude (système triphasique vertical), la présence d'une part, de la gravité, et d'autre part, du fluide interstitiel, rend le système plus complexe. Le seul effet du gradient de pression prédirait une unique branche, à la verticale du point d'injection. On observe cependant des branches latérales, qui se développent à cause des hétérogénéités locales du matériau (Fig. 2a, gauche), et un cheminement complexe du gaz à travers le milieu (Fig. 2a, droite). Une étude précise des différents régimes d'invasion en fonction des paramètres du système ( $h_g$ ,  $h_w$ , taille des grains et  $\Phi$ ) est actuellement en cours.

### 3 Localisation des points de sortie en surface

L'expérience précédente montre que pour un point d'injection fixé, l'air non seulement n'est pas émis à la verticale de ce point, mais peut explorer des points de sortie différents, dans l'espace (Fig. 2a) et dans le temps. Afin d'étudier la localisation des points de sortie de l'air en surface du lit granulaire immergé, nous sommes donc passés à une étude 3D, dans laquelle on observe au cours du temps, pour différents paramètres expérimentaux, les points d'émission du gaz (webcam #2, Fig. 1).

Pour une hauteur de grains fixée  $h_g$ , on injecte à l'instant  $t = 0$  de l'air à débit constant  $\Phi$  par un point d'injection centré en base du lit granulaire immergé. La hauteur d'eau  $h_w$  est choisie de manière à juste recouvrir le lit granulaire ( $h_w \sim h_g$ ), afin que la remontée des bulles dans l'eau ne perturbe pas la visualisation. On enregistre les images pendant  $\sim 10 \text{ min}$ , puis on change de hauteur de grains, on prépare cette nouvelle couche afin d'avoir une condition initiale reproductible (voir section 1) et on recommence. La figure 2b (inset) montre un exemple d'émission de bulle en surface du lit granulaire immergé. Lors



**Fig. 3.** Différents régimes de dégazage observés à travers une couche de grains immergée (expérience 3D, grains 315–400  $\mu\text{m}$ ,  $h_g = 2$  cm,  $h_w = 10$  cm). (a) À faible débit, le gaz est émis sous forme de bulles successives ; à débit plus fort, on observe une intermittence entre le régime bulles et le régime canal ouvert. (b) Diagramme des régimes lorsque l'on fait varier le volume  $V$  de la chambre et le débit  $\Phi$  (cercles=bulles, triangles=intermittence). La ligne pointillée indique la séparation des deux régimes. Noter la difficulté à établir la limite avec précision, due au temps d'acquisition fini (1 min).

de l'éclatement de la bulle, pendant un bref instant (typiquement, une fraction de seconde), on observe sur les images une région circulaire noire, bien contrastée, correspondant au corps de la bulle qui vient de s'ouvrir - qui s'effondre rapidement après l'explosion de cette dernière. Ce contraste permet de procéder à une détection automatique précise, à l'aide du logiciel Matlab (*The MathWorks*) (Fig. 2b). On peut alors déterminer l'évolution de la distance au centre des bulles, sur une série donnée (Fig. 2c).

Lorsque l'on augmente la hauteur de la couche de grains ( $h_g$ ) à débit fixé, on observe que les points d'émission du gaz en surface du lit granulaire explorent une zone de plus en plus grande. On définit la taille caractéristique de cette zone,  $\zeta$ , comme la valeur moyenne de la distance au centre. On trouve que  $\zeta$  varie linéairement avec la hauteur de la couche de grains  $h_g$  (Fig. 2d). Il est à noter que pour des hauteurs suffisamment grandes (typiquement,  $h_g > 10$  cm), on observe la formation de clusters : les bulles sont émises dans une zone déterminée (Fig. 2c). Dans la gamme de paramètres considérés, cette localisation ne modifie pas la variation de la taille de la distribution globale  $\zeta$  (Fig. 2d).

#### 4 Différents régimes de dégazage

Les expériences précédentes montrent que l'air, aux premiers instants, pénètre en général dans le milieu sous forme de doigt (section 2). Selon les paramètres de l'expérience (en particulier, la hauteur de la couche de grains), il peut également traverser le système sous forme de bulles individuelles (section 3). Ces différents régimes ont été rapportés dans la littérature, que ce soit pour des milieux granulaires immergés [8,9] ou pour des fluides complexes, par exemple des gels [10,11]. De manière générale, dans les fluides complexes présentant des propriétés rhéofluidifiantes (la viscosité diminue avec la contrainte appliquée), on observe trois régimes d'émission du gaz : à bas débit, l'air est émis sous forme de bulles successives, remontant indépendamment les unes des autres (régime *bulles*) ; pour des débits très importants, l'air s'échappe par un canal ouvert, stabilisé grâce aux propriétés rhéologiques du milieu (régime *canal ouvert*) ; enfin, pour des débits intermédiaires, le système alterne spontanément entre les régimes bulles et canal ouvert (régime *intermittent*). Dans ce dernier cas, les bulles émises successivement dans le milieu peuvent se connecter entre elles pour former un canal ouvert ; après un temps fini, ce canal se pince, le système repasse en régime bulles, etc.

Nous avons repris l'étude de Gostiaux et al. [8], qui avaient observé ces régimes lors de l'injection d'air dans un milieu granulaire immergé (expérience 3D). Pour une hauteur de grains donnée ( $h_g = 2$  cm) et une hauteur d'eau pouvant être considérée grande par rapport à la couche de grains ( $h_w = 10$  cm), nous avons étudié les différents régimes d'émission du gaz, en fonction du débit  $\Phi$  et du volume de la chambre  $V$ , ce dernier représentant l'élasticité du système. Les régimes sont caractérisés à partir de l'enregistrement de la surpression  $\Delta P$  dans la chambre (Fig. 3a). Dans le régime bulles, on observe un signal de pression

en dents de scie, avec des montées quasi-linéaires et des descentes bien marquées, chacune de ces dernières correspondant à l'émission d'une bulle (Fig. 3a, signal du haut). Lorsqu'un canal ouvert se forme et se maintient dans le temps, l'air peut s'échapper continûment et la surpression dans la chambre est alors quasi-constante, et égale à la pression hydrostatique, à la perte de charge dans le canal près.

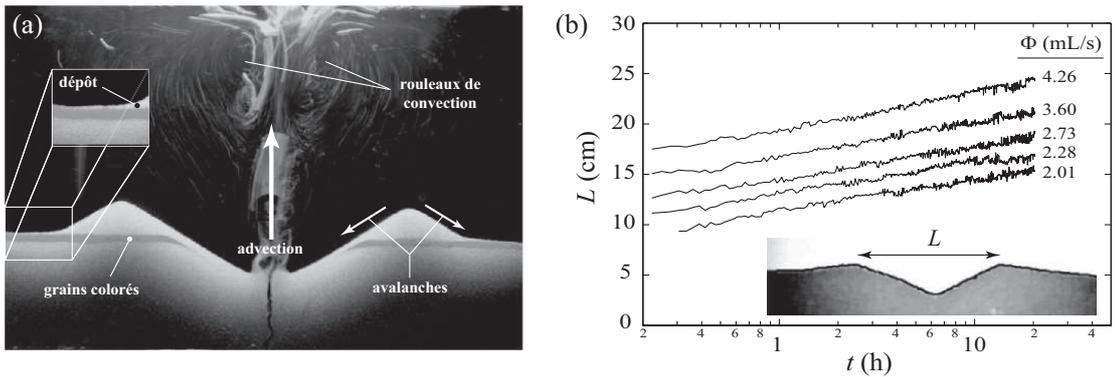
Le diagramme des régimes ( $V, \Phi$ ) montre une séparation bien marquée entre le régime bulles et intermittent, pointant ces deux paramètres comme responsables de la dynamique du système (Fig. 3b). Notons que dans la gamme de paramètres utilisée, nous n'avons pas observé de régime où le canal ouvert reste stable dans le temps. Il est important de noter la difficulté à séparer clairement les deux régimes (Fig. 3b, point d'interrogation). En effet, la durée d'acquisition finie (10 min) peut ne pas être suffisante pour observer le passage d'une émission de bulles à la formation d'un canal ouvert, qui prend plus de temps pour des débits faibles. On ne peut cependant pas caractériser, pour une hauteur de grains donnée, le régime de dégazage pour des temps trop longs, comme expliqué dans la section suivante.

## 5 Dynamique de formation d'un cratère

Aux temps longs, le passage de l'air forme une zone fluidisée au centre du système. Les grains éjectés sont advectés par la remontée des bulles dans la couche d'eau, et on observe la formation d'un cratère par dépôts successifs de grains. Dans l'expérience 2D menée ici, le cratère est formé de deux talus symétriques, qui grandissent au cours du temps (Fig. 4a). On s'intéresse ici à la dynamique de formation de ce cratère et, en particulier, à l'évolution de sa taille  $L$ , prise comme la distance entre les maxima des talus (Fig. 4b, insert). On se place toujours dans le cas d'une hauteur d'eau suffisante pour que l'advection des grains soit considérée en milieu infini. Une simple considération géométrique montre que la valeur maximale accessible pour la taille du cratère, limitée par la hauteur d'eau, est  $L_{max}^w = 2(1 + \sqrt{2})h_w / \tan \alpha$ , où  $\alpha$  est l'angle d'avalanche des grains sur la partie interne du cratère. De même, la taille du cratère limitée par une hauteur de grains insuffisante est donnée par  $L_{max}^g = (2 + \sqrt{2})h_g / \tan \alpha$ . Dans nos expériences, on a typiquement  $h_g = 8$  cm et  $h_w = 16$  cm, qui donne  $L_{max}^w = 64$  cm et  $L_{max}^g = 50$  cm, bien supérieurs à la largeur de la cellule expérimentale (40 cm). On montre que la taille du cratère augmente logarithmiquement dans le temps (Fig. 4b), et on peut écrire :

$$\frac{L}{L_0} = \ln \left( \frac{\Phi t}{V_0} \right) \quad (1)$$

où  $V_0$  est un volume typique [9]. Cette loi empirique peut être expliquée en considérant le dépôt des grains loin du centre. On propose que le flux déposé, à grande distance, s'écrive  $Q(x) = a(x/L_c) \exp(-x/L_c)$ .



**Fig. 4.** Dynamique de formation d'un cratère (expérience 2D,  $h_g = 8$  cm,  $h_w = 16$  cm). (a) Les grains sont emportés, puis redéposés soit à l'intérieur du cratère (ils avalanchent au centre, et sont de nouveau entraînés), soit à l'extérieur du cratère (ils participent alors à sa croissance) [grains 400–500  $\mu\text{m}$ ,  $\Phi = 3.6$  mL/s]. (b) La taille  $L$  du cratère augmente en logarithme du temps [grains 400–500  $\mu\text{m}$ ]. *Insert* : Exemple de détection de contour et détermination de  $L$ .

Une analyse géométrique simple donne le volume  $v$  des grains déposés sur la partie externe de l'un des talus :  $v = (L^2/8) \tan \alpha / (1 + \sqrt{2})^2$ . En notant que seul le dépôt des grains sur les flancs extérieurs du cratère contribue à sa croissance, on peut écrire  $\frac{dv}{dt} = \int_{L/2}^{\infty} Q(x) dx$ , ce qui mène à l'équation gouvernant la croissance des talus :

$$\frac{1}{4} \frac{\tan \alpha}{(1 + \sqrt{2})^2} L \frac{dL}{dt} = a \int_{L/2}^{\infty} \frac{x}{L_c} \exp\left(-\frac{x}{L_c}\right) dx \quad (2)$$

En supposant  $L \gg L_c$  (toujours satisfait expérimentalement) on retrouve, asymptotiquement,  $L(t) \simeq L_0 \ln(\Phi t/V_0)$  avec  $L_0 = 2L_c$  et  $\Phi/V_0 = a(1 + \sqrt{2})^2/\tan \alpha$ , en accord avec les résultats expérimentaux. Comme précédemment, on observe différents régimes de dégazage : bulles ou intermittence. Les bulles entraînent une grande quantité de grains dans l'eau, alors que le canal ouvert donne lieu à la remontée dans l'eau de petites bulles, de fréquence d'émission plus élevée, mais entraînant une quantité de grains beaucoup plus faible. De manière surprenante, on trouve que contrairement à l'intuition, la dynamique de croissance des talus en logarithme du temps est indépendante du régime de dégazage [9].

## 6 Conclusion

Cet article présente une revue non exhaustive des expériences menées dans notre laboratoire, concernant la dynamique de passage de l'air dans un milieu granulaire immergé. Si certaines de ces études ont donné lieu à une bonne compréhension du phénomène étudié (par exemple, la formation d'un cratère [9]), d'autres sont encore en cours, et devraient amener plus d'informations sur la dynamique complexe de ces systèmes. Si la quantification et, éventuellement, le piégeage des gaz (bien souvent hydrocarbures) émis en surface des sédiments marins est un enjeu économique évident, il est également nécessaire de souligner les enjeux géophysiques. Une meilleure connaissance des mécanismes conduisant au dégazage au fond des océans pourrait en effet avoir des implications importantes sur la prédiction des séismes sous-marins [12].

## Références

1. L. NAUDTS *et al.*, Anomalous sea-floor backscatter patterns in methane venting areas, Dnepr paleo-delta, NW Black Sea, *Marine Geology*, **251**, 253-267 (2008).
2. E. G. FLEKKØY, A. MALTHER-SØRENSEN & B. JAMTVEIT, Modeling hydrofracture, *Journal of Geophysical Research*, **107**, 2151 (2002).
3. T. MÖRZ, E. A. KARLIK, S. KREITER & A. KOPF, An experimental setup for fluid venting in unconsolidated sediments : New insights to fluid mechanics and structures, *Sedimentary Geology*, **196**, 251-267 (2007).
4. T. WILHELM & K. WILMAŃSKI, On the onset of flow instabilities in granular media due to porosity inhomogeneities, *International Journal of Multiphase Flow*, **28**, 1929-1944 (2002).
5. P. RIGORD, A. GUARINO, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Localized instability of a granular layer submitted to an ascending liquid flow, *Granular Matter*, **7**, 191-197 (2005).
6. F. ZOUESHTIAGH & A. MERLEN, Effects of a vertically flowing water jet underneath a granular bed, *Physical Review E*, **75**, 056313 (2007).
7. Ø. JOHNSEN, R. TOUSSAINT, K. J. MÅLØY, E. G. FLEKKØY & J. SCHMITTBUHL, Coupled air/granular flow in a linear Hele-Shaw cell, *Phys. Rev. E*, **77**, 011301 (2008).
8. L. GOSTIAUX, H. GAYVALLET & J.-C. GÉMINARD, Dynamics of a gas bubble rising through a thin immersed layer of granular material : an experimental study, *Granular Matter*, **4**, 39-44 (2002).
9. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Dynamics of crater formations in immersed granular materials, *Physical Review E*, **79**, 021301 (2009).
10. I.L. KLIAKHANDLER, Continuous chain of bubbles in concentrated polymeric solutions, *Physics of Fluids*, **14**, 3375-3379 (2002).
11. T. DIVOUX, E. BERTIN, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Intermittent outgassing through a non-Newtonian fluid, *Physical Review E*, **79**, 056204 (2009).
12. L. GÉLI *et al.*, Gas emissions and active tectonics within the submerged section of the North Anatolian Fault zone in the Sea of Marmara, *Earth and Planetary Science Letters*, **274**, 34-39 (2008).

## « Compressive Sensing » en utilisant le Chaos

Lei Yu<sup>1,2,3</sup>, Jean-Pierre Barbot<sup>2,3</sup> Gang Zheng<sup>3</sup> & Hong Sun<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Signal Processing Laboratory, Whuan University, China

<sup>2</sup> ECS-EA 3649, ENSEA, 6 Avenue du Ponceau, 95014, Cergy-Pontoise

<sup>3</sup> EPI-ALIEN INRIA

barbot@ensea.fr

### Résumé

La méthode dite de l'acquisition comprimée plus connue sous le vocable anglo-saxon de 'Compressive Sensing' est une nouvelle méthode qui permet de capturer et de retrouver par la suite un signal échantillonné à des fréquences sous Nyquist. Afin de garantir la reconstitution parfaite du signal, cette méthode requière la construction d'une matrice dite 'sensing' matrice, possédant des propriétés d'inversion particulières. Ici, une construction de cette matrice à l'aide de séquences issues d'un système chaotique est proposée et il est prouvé que cette matrice vérifie avec une écrasante probabilité (supérieure à une construction aléatoire de type Gaussien) les propriétés de reconstruction requises.

## 1 Introduction et Préliminaires

Le concept récemment développé en traitement du signal dit du 'Compressive Sensing CS', attire l'attention de nombreux chercheurs. À la différence de la théorie traditionnelle d'échantillonnage des données, l'acquisition des signaux et la compression de ces derniers se font en même temps avec le C.S., ceci permet aux signaux d'être échantillonnés à des fréquences inférieures à la fréquence de Nyquist et de conserver une reconstruction exacte après décompression [6].

La procédure du 'Compressive Sensing' peut être exprimée comme une projection linéaire

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{v} \quad (1)$$

où les  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  sont les signaux originaux,  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice d'acquisition compression et  $y \in \mathbb{R}^m$  est la mesure. En CS  $m$  est toujours très petit par rapport à  $n$ , ce qui réduit considérablement la longueur des signaux. Mais, cela a pour conséquence que l'inversion de l'équation (1) est grandement indéterminée. Ceci conduit à l'hypothèse fondamentale en CS, dite de l'éparpillement 'sparsity' des signaux. De façon simple les signaux sont supposés être constitués d'une majorité de zéros dans une 'base appropriée' (frequentiel, ondelette,..), sous cette hypothèse à partir de (1) et de la connaissance de  $\mathbf{y}$  les signaux  $\mathbf{v}$  peuvent être retrouvés.

**Définition 1 (Sparsity)** Soit le vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  et notons  $Card(\mathbf{v}) = Card\{v_i \neq 0, i \in [1, n]\}$  le nombre d'éléments de  $\mathbf{v}$  différent de Zéro, alors le vecteur  $\mathbf{v}$  est dit un 's-sparsity' vecteur, si  $Card(v) \leq s \ll n$ .

La Définition 1, nous permet de définir l'ensemble  $\Sigma_s$  des vecteurs éparpillés 's-sparsity' comme suit :

$$\Sigma_s = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid Card(\mathbf{v}) \leq s\} \quad (2)$$

Intuitivement, l'inversion de l'équation (1) peut être résolu par la recherche du plus petit vecteur au sens de l'éparpillement vérifiant (1) pour un  $\mathbf{y}$  donné, c a d le  $\mathbf{v} \in \Sigma_s$  avec le plus petit  $s$ . Ce qui s'écrit [6] :

$$\mathbf{v}^* = \arg \min_{\Phi \mathbf{v} = \mathbf{y}} \|\mathbf{v}\|_0 \quad (3)$$

où  $\|\mathbf{v}\|_0$  est la norme  $\ell_0$  et désigne le nombre d'éléments de  $\mathbf{v}$  non identiquement nul. Toutefois, il a été montré en [6] que ce problème est un problème NP-Hard, ce qui a conduit à la réécriture du problème sous des conditions moins contraignantes [6], ce qui donne :

$$\mathbf{v}^* = \arg \min_{\Phi \mathbf{v} = \mathbf{y}} \|\mathbf{v}\|_1 \quad (4)$$

où  $\|\mathbf{v}\|_1$  est la norme  $\ell_1$  et désigne la somme des valeurs absolues de toutes les entrées de  $\mathbf{v}$ .

**DÃ©finition 2 (Restricted Isometry Property [4])** *Si pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in \Sigma_s$ , la matrice  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  vÃ©rifie l'inÃ©galitÃ© suivante :*

$$(1 - \delta_s)\|\mathbf{v}\|_2^2 \leq \|\Phi\mathbf{v}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s)\|\mathbf{v}\|_2^2 \quad (5)$$

avec  $\delta_s > 0$  la plus petite constante satisfaisant (5), alors la matrice  $\Phi$  satisfait la Restricted Isometry Property RIP à l'ordre  $s$  avec une constante  $\delta_s$ .

La dÃ©finition 2 et plus particuliÃ©rement l'Ã©quation (5) ont permis d'Ã©noncer le thÃ©orÃ©me suivant :

**ThÃ©orÃ©me 1 (Exact Recovery Theorem [4])**

- Si la RIP est vÃ©rifiÃ©e à l'ordre  $2s$  pour la matrice  $\Phi$  satisfaisant la condition suivante  $\delta_{2s} < 1$ , alors pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in \Sigma_s$ , il existe une solution unique pour le problÃ©me (3).
- Si de plus  $\delta_{2s}$  vÃ©rifie l'inÃ©galitÃ©  $\delta_{2s} < \sqrt{2}-1$ , alors pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in \Sigma_s$ , la solution au problÃ©me (3) est Ã©quivalente à la solution au problÃ©me (4).

La consÃ©quence directe du thÃ©orÃ©me 1 est que le problÃ©me d'exhiber une matrice d'acquisition compressÃ©e  $\Phi$  RIP satisfaisant les conditions du thÃ©orÃ©me est devenue l'un des plus importants problÃ©me en CS. Ainsi, Candès et Tao ont proposÃ© que la matrice  $\Phi$  soit construite avec des Ã©lÃ©ments provenant d'une distribution Gaussienne ou de Bernoulli. Ceci a conduit à ce que  $\Phi$  vÃ©rifie la RIP avec une grande probabilitÃ©, sous la condition d'Ã©parpillement  $s \leq O(m/\log n)$  [5]. De mÃªme  $\Phi$  construit sur une base de Fourier aleatoire vÃ©rifie la RIP avec une grande probabilitÃ© sous l'hypothÃ©se d'Ã©parpillement  $s \leq O(m/(\log n)^6)$  [5]. MÃªme s'il existe certaines matrices  $\Phi$  dÃ©terministes d'acquisition compression, telles que *Chirp Sensing Codes* par L. Applebaum, *et al.* [2] ou bien en utilisant des corps finis par R. A. Devore [8] ou encore en utilisant des Reed-Muller codes du second ordre par S. Howard *et al.* [9], leur RIP n'est pas, jusqu'à prÃ©sent ou du moins à notre connaissance, garantie de faÃ§on certaine. Ce qui fait que la majoritÃ© des matrices utilisÃ©es en CS sont des matrices alÃ©atoires.

Dans cette communication, notre objectif est d'employer une sÃ©quence chaotique particuliÃ©re pour construire la matrice  $\Phi$  d'acquisition compression, nous nommerons, par abus de langage, cette matrice 'matrice chaotique' (elle est plus exactement construite sur la base d'une sÃ©quence chaotique en tenant compte de bonnes propriÃ©tÃ©s dÃ©veloppÃ©es ci-dessous). Ainsi basÃ© sur *Ergodicity* et sur des bonnes propriÃ©tÃ©s de la sÃ©quence chaotique, nous prouvons que la matrice chaotique  $\Phi$  vÃ©rifie la RIP avec une Ã©crasante probabilitÃ©, à condition que l'hypothÃ©se d'Ã©parpillement  $s \leq O(m/\log(n/s))$  soit vÃ©rifiÃ©e. Nous avons aussi montrÃ© que la probabilitÃ© de satisfaire la RIP pour la matrice chaotique proposÃ©e est plus grande que celle obtenue pour la matrice alÃ©atoire Gaussienne [5] et la matrice alÃ©atoire de Bernoulli [5].

Cette communication est organisÃ©e comme suit, dans le paragraphe 2, les contributions principales de ce travail sont prÃ©sentÃ©es. Dans le paragraphe 3, Les preuves des principaux rÃ©sultats sont donnÃ©es.

## 2 RÃ©sultats principaux

### 2.1 Quasi Beta Distribution

Ici nous introduisons la notion de quasi Beta distribution qui comme nous le verrons par la suite est un Beta distribution particuliÃ©re à une translation prÃ©s.

**DÃ©finition 3 (Beta-like distribution)** *Une variable alÃ©atoire  $x$  satisfaisant la fonction de densitÃ© de probabilitÃ© suivante :*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(0.25 - x^2)^{-1/2} \quad (6)$$

*est dite quasi Beta distribution.*

**DÃ©finition 4 (Beta-like matrix)** *Pour  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$  et  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , la matrice  $\Phi$  est dite Ãªtre une quasi Beta matrice si ses composantes vÃ©rifient  $\phi_{ij} = \sqrt{\frac{8}{m}}r_{ij}$  pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ , oÃ¹ les  $r_{ij}$  sont des variables alÃ©atoires indÃ©pendantes et identiquement distribuÃ©es (*iid*) (*independent distribution distributed*) de type quasi Beta distribution (6).*

## 2.2 Matrice Chaotique

Considérons l'équation logistique [7] suivante :

$$z_+ = rz(1 - z), \quad \text{with } r \in ]0, 4] \quad (7)$$

où  $z \in ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$  est l'état discret. L'équation logistique (7) avec le paramètre  $r$  égale à 4 a une séquence  $z(k)$  aléatoire avec une Beta distribution avec les coefficients  $\alpha = 0.5$  et  $\beta = 0.5$  [11], avec la fonction de densité probabiliste suivante  $f(x; 0.5, 0.5) = \frac{1}{\pi}(x - x^2)^{-1/2}$ .

Considérons  $z_i(k)$  la séquence générée par l'équation logistique (7) avec comme condition initiale  $z_i(0)$ , et soit  $x_i(k)$  la variable régularisée de  $z_i(k)$  de la façon suivante :  $x_i(k) = z_i(k) - 0.5$ , alors, la séquence  $x_i(k)$  peut être considérée comme une 'variable aléatoire' de type quasi Beta distribution. Ainsi, en choisissant  $n$  conditions initiales différentes  $z(0) \in ]0, 1[ \subset \mathbb{R}^n$ ,<sup>1</sup> nous obtenons  $n$  vecteurs de dimension  $m$ , avec lesquels il est possible de construire une matrice  $\Phi_{chaos}$  si nous appliquons le facteur d'échelle suivant  $\sqrt{8/m}$

$$\Phi_{chaos} = \sqrt{\frac{8}{m}} \begin{bmatrix} x_0(0) & \dots & x_{n-1}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0(m-1) & \dots & x_{n-1}(m-1) \end{bmatrix}$$

Evidemment,  $\Phi_{chaos}$  est une quasi Beta matrice.

## 2.3 Matrice Chaotique et RIP

Au lieu d'analyser la RIP pour la matrice Chaotique  $\Phi_{chaos}$ , nous allons analyser la RIP pour les quasi Beta matrices  $\Phi$ , puisque statistiquement,  $\Phi_{chaos}$  a le même comportement par rapport à la RIP que  $\Phi$ . Pour ceci, nous utilisons le théorème suivant :

**Théorème 2** Soit une quasi Beta matrice  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , il existe une constante  $\delta > 0$ ,<sup>2</sup> et  $n \gg s > 0$ , tel que, pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in \Sigma_s$ , si  $s \leq O(m/\log(n/s))$ , alors l'équation suivante est vérifiée avec une écrasante probabilité :

$$(1 - \delta)\|\mathbf{v}\|_2^2 \leq \|\Phi\mathbf{v}\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|\mathbf{v}\|_2^2 \quad (8)$$

Remarquons que le Théorème 2 implique la RIP pour la matrice chaotique  $\Phi_{chaos}$ , ceci va être prouvé au paragraphe suivant.

## 3 Preuves

Avant d'analyser la RIP pour la quasi Beta matrice, considérons l'une de ses sous matrices, appelée Beta-T matrice, qui est définie comme suit :

**Définition 5 (Beta-T matrix)** Pour une quasi Beta matrice  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , définissons  $T \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , et pour  $i \in T$  dénotons  $\Phi_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $\Phi$ , et notons  $\Phi_T \in \mathbb{R}^{m \times s}$ , où  $s = \text{Card}(T)$ , alors la sous matrice  $\Phi_T$  de  $\Phi$  est dite être une Beta-T matrice.

En [1], il a été prouvé que ce type de projections avec des matrices satisfaisant des conditions de distribution spéciale<sup>3</sup> sont Johnson-Lindenstrauss (J-L) conservatives [10] avec une écrasante probabilité. Dans le sous paragraphe 3.1, nous allons aussi prouver que la Beta-T matrice est aussi J-L conservative.

Ainsi en considérant toutes les possibilités de sélection de Beta-T matrice  $\Phi_T$  à partir d'une quasi Beta matrice  $\Phi$ , nous pouvons donner une preuve du Théorème 2, ceci va être présenté à la section 3.2.

<sup>1</sup> Les conditions initiales  $z(0)$  sont supposées aussi vérifier la Beta distribution.

<sup>2</sup>  $s$  est omis pour ne pas alourdir les notations.

<sup>3</sup> Bernoulli distribution et quasi Bernoulli distribution, voir [1].

### 3.1 Beta-T Matrice J-L Conservative

**Théorème 3 (J-L Embedding with Beta-T Matrix)** Soit une Beta-T matrice  $\Phi_T \in \mathbb{R}^{m \times s}$ , il existe une constante  $\delta \in ]0, 1[$ , telle que, pour tout vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$ , l'inégalité suivante

$$(1 - \delta) \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq \|\Phi_T \mathbf{u}\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|\mathbf{u}\|_2^2 \tag{9}$$

est satisfaite avec une écrasante probabilité.

Afin de prouver ceci, nous avons besoin en premier de borner la valeur du moment pour la quasi Beta distribution définie par (6).

**Les bornes des moments :** Avant de donner les résultats, introduisons quelques notations utiles à l'exposé. Pour toute Beta-T matrice  $\Phi_T \in \mathbb{R}^{m \times s}$  et tout vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$ , nous notons  $\|\Phi_T \mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \langle \phi_i, \mathbf{u} \rangle^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Q_i^2$ , où  $Q_i = \sqrt{8} \sum_{j=1}^s u_j c_{ij}$ , avec  $c_{ij}$  satisfaisant (6). Par la suite, pour simplifier, nous omettons les indices sur  $Q$  et  $c_i$  pour représenter respectivement  $Q_i$  et  $c_{ij}$ .

**Lemme 1.** Soit  $t_i$  et  $c_i$  des variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) satisfaisant respectivement une distribution Gaussienne normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et une quasi Beta distribution (6), pour  $1 \leq i \leq s$ , alors  $E[8^l c_i^{2l}] \leq E[t_i^{2l}]$  pour tout  $2l^{\text{ème}}$  moment de chaque distribution. De plus, pour chaque vecteur de norme unitaire  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$  et chaque  $k \in \mathbb{Z}^+$ , nous avons  $E[Q^{2k}] \leq E[T^{2k}]$ , où  $Q = \sum_{i=1}^s u_i c_i$  et  $T = \sum_{i=1}^s u_i t_i$ .

*Démonstration.* Avant tout, rappelons nous que tout  $2l^{\text{ème}}$  moment de  $\mathcal{N}(0, 1)$ , est égal à  $(2l - 1)!!$  et pour la distribution (6), le  $2l^{\text{ème}}$  moment est égal à  $(2l - 1)!! / (8^l l!)!$ , wce qui implique que  $E[8^l c_i^{2l}] \leq E[t_i^{2l}]$ .

Ainsi, pour tout vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$  de norme unitaire et tout  $k \in \mathbb{Z}^+$ , nous avons

$$E[Q^{2k}] = E \left[ 8^k \left( \sum_{i=1}^s u_i c_i \right)^{2k} \right] = \sum_{\mathcal{T}} \binom{2k}{2l_1, \dots, 2l_s} \prod_{i=1}^s u_i^{2l_i} E[8^{l_i} c_i^{2l_i}] \tag{10}$$

où  $l_i$  est l'exposant pour le  $i^{\text{ème}}$  term et  $\mathcal{T}$  représente l'ensemble des termes polynomiaux avec seulement des exposants paire, car par symétrie les termes impaire sont tous nuls.

De plus, nous avons  $T = \sum_{i=1}^s u_i \cdot t_i$  où  $u_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  composant de  $\mathbf{u}$  et  $t_i$  est une variable indépendante et identiquement distribuée (iid) satisfaisant une distribution Gaussienne normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , en raison de la caractéristique de 2-stabilité de cette distribution,  $T$  a aussi une distribution Gaussienne normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Ainsi, nous avons

$$E[T^{2k}] = \sum_{\mathcal{T}} \binom{2k}{2l_1, \dots, 2l_s} \prod_{i=1}^s u_i^{2l_i} E[t_i^{2l_i}] \tag{11}$$

Alors l'inégalité du lemme 1 peut être déduite en comparant (10) et (11) en tenant compte que le lemme 1 est satisfait.

**Remarque 1** Si la variable aléatoire  $b_i$  satisfait une distribution de Bernoulli, son  $(2l^{\text{ème}})$  moment peut être calculé  $E[b_i^{2l}] = 1$ . Alors, nous avons  $E[8^l c_i^{2l}] \leq E[b_i^{2l}]$ , ce qui donne des inégalités identiques au lemme 1 entre la quasi Beta distribution et la distribution de Bernoulli.

**Lemme 2.** Soit  $Q = \sum_{i=1}^s u_i c_i$  où  $u_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  composant de  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^s$  et  $c_i$  est une (iid) variable satisfaisant une quasi Beta distribution (6), alors, pour  $h \in ]0, 1/2[$  nous avons

$$E[\exp(hQ^2)] \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2h}} \quad \text{et} \quad E[Q^4] \leq 3 \tag{12}$$

*Démonstration.* Un développement de Taylor et l'inégalité du lemme 1 nous donnent

$$\begin{aligned} E[\exp(hQ^2)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} E[Q^{2k}] \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} E[T^{2k}] = E[\exp(hT^2)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) \exp(ht^2) dt = \frac{1}{\sqrt{1-2h}} \end{aligned}$$

Pour  $E[Q^4]$ , du lemme 1 nous obtenons

$$E[Q^4] \leq E[T^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) t^4 dt = 3$$

**Preuve du Théorème 3** De l'inégalité de Chernoff [3], et en prenant des valeurs de  $h$  positives, nous avons

$$\begin{aligned} \Pr \left[ \|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 \geq 1 + \delta \right] &\leq \exp(-hm(1+\delta)) E \left[ \exp(hm \|\Phi_T \mathbf{u}\|^2) \right] \\ &= \exp(-hm(1+\delta)) (E[\exp(hQ^2)])^m \\ &\leq \exp(-hm(1+\delta)) \left( \frac{1}{\sqrt{1-2h}} \right)^m \end{aligned} \quad (13)$$

Il est naturel que l'extremum de (13) soit obtenu quant sa dérivée par rapport à  $h$  est égale à 0, nous en déduisons  $h_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{1+\delta}$ . Reportant ce résultat dans (13), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Pr \left[ \|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 \geq 1 + \delta \right] &\leq \left( \frac{1}{\sqrt{1-2h}} \right)^m \exp(-hm(1+\delta)) \\ &= ((1+\delta) \exp(-\delta))^{m/2} \\ &< \exp\left(-\frac{m}{2} (\delta^2/2 - \delta^3/3)\right) = \exp(-c_1(\delta)m) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue par un développement de Taylor et en tenant compte que  $c_1(\delta) = \delta^2/4 - \delta^3/6$ .

De façon similaire, à partir de l'inégalité de Chernoff, nous pouvons calculer la borne inférieure de sa probabilité :

$$\begin{aligned} \Pr \left[ \|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 \leq 1 - \delta \right] &\leq \exp(hm(1+\delta)) E \left[ \exp(-hm \|\Phi_T \mathbf{u}\|^2) \right] \\ &= \exp(hm(1+\delta)) (E[\exp(-hQ^2)])^m \end{aligned} \quad (14)$$

Le développement de Taylor du terme  $\exp(-hQ^2)$ , nous donne

$$E[\exp(-hQ^2)] < 1 - h + \frac{h^2}{2} E[Q^4]$$

avec  $E[Q^2] = 1$ .

Ainsi, à partir du Lemme 2, nous obtenons

$$E[\exp(-hQ^2)] \leq 1 - h + \frac{3}{2} h^2$$

Alors en remplaçant (14) par cette inégalité, et en imposant que la dérivée par rapport à  $h$  de la borne soit égale à 0, nous trouvons la valeur optimale  $h_{\text{opt}} = \frac{-2-\delta+\sqrt{4+8\delta-5\delta^2}}{3(1-\delta)}$ , ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \Pr \left[ \|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 \leq 1 - \delta \right] &\leq \exp(hm(1-\delta)) (E[\exp(-hQ^2)])^m \\ &< \exp(hm(1-\delta)) \left( 1 - h + \frac{3}{2} h^2 \right)^m = \exp(-c_2(\delta)m) \end{aligned}$$

où  $c_2(\delta) = h_{\text{opt}}(1 - \delta) \left(1 - h_{\text{opt}} + \frac{3}{2}h_{\text{opt}}^2\right)$ .

En prenant  $c(\delta) = \min(c_1(\delta), c_2(\delta))$ , nous trouvons

$$\Pr \left[ \left| \|\Phi_T \mathbf{u}\|^2 - 1 \right| \geq \delta \right] \leq 2 \exp(-c(\delta)m) \quad (15)$$

### Remarque 2

1. La probabilité en (15) est très faible pour des  $m$  et  $\delta$  donnés.
2. Le lemme 1 implique que la probabilité en (15) est plus petite pour la Beta-T matrice que pour les matrices aléatoires avec distribution Gaussienne ou Bernoulli. Ceci, implique que la probabilité de satisfaire la RIP est plus forte pour la matrice chaotique que pour ces deux types de matrice aléatoire.

### 3.2 Preuve du Théorème 2

*Démonstration.* Pour une Beta matrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  donnée et un vecteur éparpillé  $\mathbf{v} \in \Sigma_s$ , nous notons  $T$  l'ensemble des index des composants non nuls du vecteur  $\mathbf{v}$ , où  $\text{Card}(T) = k \leq s \ll n$ . Alors avec cet ensemble d'index  $T$  et la définition 5 nous pouvons toujours construire une Beta-T matrix  $\Phi_T \in \mathbb{R}^{m \times s}$ . Notons  $\mathcal{E}_k$  la probabilité pour que la condition (5) ne soit pas vérifiée, c a d,  $\mathcal{E}_k = \{\|\Phi_T \mathbf{v}\|_2^2 \geq (1 + \delta) \cup \|\Phi_T \mathbf{v}\|_2^2 \leq (1 - \delta)\}$  et notons  $\mathcal{E}$  l'union de ces possibilités, c a d,  $\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^s \mathcal{E}_k$ .

En utilisant le résultat du Théorème 3, nous obtenons.

$$\begin{aligned} \Pr[\mathcal{E}] &= \Pr \left[ \bigcup_{k=1}^s \mathcal{E}_k \right] \leq 2 \exp(-c(\delta)m) \sum_{k=1}^s \binom{n}{k} \leq 2s \binom{n}{s} \exp(-c(\delta)m) \\ &\leq \exp(\log 2 - c(\delta)m + s(\log(n/s) + 1) + \log s) \end{aligned}$$

Où, pour  $c_3 > 0$  et  $s \leq c_3 m / \log(n/s)$ , la borne à un exponentielle d'exposant  $\leq -c_4 m$  avec  $c_4 \leq c(\delta) - c_3[1 + (1 + (\log s)/s)/\log n/s]$ . Ainsi, nous pouvons choisir  $c_3$  suffisamment petit pour que  $c_4 > 0$ .

Nous en déduisons que la probabilité de vérifier l'inégalité (8) est égale à  $\Pr[\bar{\mathcal{E}}] \geq 1 - \Pr[\mathcal{E}] = 1 - 2e^{-c_4 m}$  où  $\bar{\mathcal{E}}$  est le complémentaire de  $\mathcal{E}$ .

### Références

1. D. ACHLIOPTAS, Database-friendly random projections. In *Proceedings of the 20th ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART symposium on Principles of database systems (PODS)*, (New York, USA), pp. 274-281, 2001.
2. L. APPLEBAUM, S. HOWARD, S. SEARLE & R. CALDERBANK, Chirp sensing codes : Deterministic compressed sensing measurements for fast recovery, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26 (2), March 2009.
3. S. BOUCHERON, O. BOUSQUET & G. LUGOSI, *Advanced Lectures in Machine Learning*, Chap. Concentration Inequalities (Springer) pp. 208-240, 2004.
4. E. J. CANDÈS, The restricted isometry property and its implications for compressed sensing, *Compte Rendus de l'Academie des Sciences, Serie I*, 346 (9-10), May 2008.
5. E. J. CANDÈS & T. TAO, Near-optimal signal recovery from random projections : Universal encoding strategies???, 52 (12), 5406-5425, 2006.
6. E. J. CANDÈS & M. B. WAKIN, An introduction to compressive sampling.??, 25 (2), 21-30, 2008.
7. H. DANG-VU & C. DELCARTE, *Bifurcations et chaos*, Ellipses, Paris, 2000.
8. R. A. DEVORE, Deterministic constructions of compressed sensing matrices, *Journal of Complexity*, 23 (4-6), August 2007.
9. S. HOWARD, R. CALDERBANK & S. SEARLE, A fast reconstruction algorithm for deterministic compressive sensing using second order reed-muller codes, *Conference on Information Sciences and Systems???*, March 2008.
10. W. JOHNSON & J. LINDENSTRAUSS, Extensions of Lipschitz maps into a Hilbert space. *Contemporary Mathematics*, 26, 189-206, 1984.
11. A. VLAD, A. LUCA & M. FRUNZETE, Computational measurements of the transient time and of the sampling distance that enables statistical independence in the logistic map, In *Proc. International Conference on Computational Science and Its Applications (ICCSA)*, Springer-Verlag, pp. 703-718, 2009.

# Oscillations d'expression d'un gène auto-régulé : interaction d'un délai de transport avec la réponse transcriptionnelle

Jingkui Wang<sup>1,2</sup>, Quentin Thommen<sup>1,2</sup> & Marc Lefranc<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Université Lille 1, Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules, UMR CNRS 8523, UFR de Physique, Cité Scientifique, F-59655 Villeneuve d'Ascq

<sup>2</sup> Université Lille 1, Institut de Recherche Interdisciplinaire, USR CNRS 3078, Cité Scientifique, F-59655 Villeneuve d'Ascq

marc.lefranc@univ-lille1.fr

**Résumé.** Les fonctions cellulaires reposent en grande partie sur des réseaux de gènes et de protéines en interaction. Ces réseaux peuvent présenter des comportements dynamiques complexes, en particulier des oscillations. Nous étudions ici l'apparition d'oscillations dans un modèle minimal de circuit génétique, où un gène est réprimé par sa propre protéine. Un travail récent [6] a montré qu'une dynamique transcriptionnelle lente pouvait induire un délai et déclencher des oscillations, ce qui confirme que de tels délais jouent un rôle crucial dans la dynamique des réseaux génétiques. Mais d'autres sources de délai existent (transport des molécules, transcription, traduction, etc). Nous étudions donc des extensions du modèle précédent, où le délai lié au transport de la protéine est pris en compte de deux manières différentes, par un retard explicite et par une étape réactionnelle supplémentaire. Nous comparons les influences de ces deux types de délai sur la dynamique du gène auto-régulé.

**Abstract.** Most cell functions depend on networks of interacting genes and proteins. Such networks may display complex dynamical behavior, in particular oscillations. Here we study how oscillations appear in a minimal genetic circuit model where expression of a single gene is repressed by its own protein. A recent work showed that the transcriptional response of the gene can induce a delay and trigger oscillations, which confirms that delays play a crucial role in genetic networks. However, other sources of delay exist (e.g., molecule transport, transcription, translation,...). We study extensions of the previous model, where a delay due to protein transport is taken into account in two different way, as an explicit delay and as an additional reactional step. We compare the influences of these two types of delay on the dynamics of a autoinhibited gene.

## 1 Introduction

Au coeur de la cellule se trouvent des réseaux de régulation génétique constitués par des gènes et des protéines en interaction. Les gènes, portés par la molécules d'ADN, contrôlent la synthèse des protéines, dont certaines modulent en retour l'activité du gène en se fixant sur leur zone régulatrice. Les boucles de rétroaction ainsi formées, qui impliquent parfois un très grand nombre de gènes, peuvent présenter des comportements dynamiques typiquement non linéaires, tels que bistabilité ou oscillations.

Afin de mieux comprendre ces phénomènes dynamiques dans un cadre simple, des modèles minimaux de réseaux génétiques ont été largement étudiés, dont celui où l'activité d'un gène isolé est réprimée par sa propre protéine, formant ainsi la plus simple des boucles de rétroaction négative [1,2,3,4]. Ces travaux théoriques ont de manière générale supposé que l'activité d'un gène réagit immédiatement aux variations de concentration des protéines qui le régulent. Or des expériences récentes ont montré l'existence d'une dynamique transcriptionnelle intrinsèque, à des échelles de temps comparables aux autres processus cellulaires [5]. Dans un travail récent [6], nous avons donc étudié comment la prise en compte d'un temps de réponse fini du gène pouvait modifier la dynamique de ce circuit génétique minimal et en particulier induire des oscillations. Ce travail a montré que la rétroaction négative, le délai introduit par le temps de réponse du gène [4] et la non-linéarité des mécanismes de dégradation de la protéine, qui résultent de cinétiques enzymatiques parfois complexes [7], sont les ingrédients clés déclenchant les oscillations [6]. Une expression analytique du seuil d'instabilité a permis de comprendre le rôle joué par les différents paramètres.

Mais le délai d'activation du gène coexiste dans ce circuit avec plusieurs autres délais, qui correspondent au temps nécessaire à plusieurs processus importants de la machinerie cellulaire : transcription (recopie de l'information génétique dans une molécule d'ARN messenger), traduction (synthèse de la protéine à partir de l'ARN), transport entre noyau et cytoplasme et réciproquement,.... Or ces différents délais peuvent être significativement plus grands que le temps de réponse du gène. On peut donc légitimement se demander si leur prise en compte n'est pas susceptible de modifier profondément les conclusions du travail précédent. Est-ce, comme on le suppose souvent, la somme totale des délais qui est le paramètre clé? De quelle manière deux délais différents interagissent-ils? Est-il toujours vrai qu'un délai plus long soit plus déstabilisant? Par ailleurs, les modèles de la littérature représentent un délai de deux manières différentes, soit comme un délai explicite (équation à retard) [8], soit comme le temps associé au temps de réalisation d'une réaction élémentaire, que nous appellerons ici délai réactionnel [9]. Quelle influence ce choix a-t-il sur la dynamique? Pour répondre à toutes ces questions, nous considérons deux extensions du modèle du gène auto-réprimé où sont pris en compte les temps de transport de molécules dans la cellule, et nous déterminons comment les seuils d'instabilité sont modifiés.

## 2 Modèle avec délai de transport explicite

Le modèle de Morant *et al.* [6], est tout d'abord modifié pour prendre en compte deux délais explicites  $\tau_1$ , correspondant au délai de transcription de la séquence génétique en ARN et  $\tau_2$ , lié aux processus de transport de l'ARN du noyau au cytoplasme et à la traduction de l'ARN. Ces délais se rajoutent à un temps de réponse fini du gène contrôlé par la constante  $\theta$ , qui tend vers l'infini lorsque la réponse devient instantanée. Les équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g(t) &= \theta (1 - g(1 + p)) \\ \frac{d}{dt}m(t) &= \lambda g(t - \tau_1) - h(m) \\ \frac{d}{dt}p(t) &= \delta (m(t - \tau_2) - f(p))\end{aligned}\quad (1)$$

où  $g, m, p$  sont respectivement l'activité du gène, le nombre de molécules d'ARN et de protéines;  $h(m)$  et  $f(p)$  sont des fonctions décrivant la cinétique de dégradation, que nous ne précisons pas par souci de généralité, et qui peuvent être fortement non linéaires. Les paramètres  $\lambda$  et  $\delta$  caractérisent le taux maximal de transcription et le taux de dégradation de la protéine relativement à l'ARN.

Comme la solution stationnaire ne dépend pas des délais  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , le point fixe  $(g_*, m_*, p_*)$  est celui du modèle original. Nous étudions la stabilité de ce point fixe en linéarisant les équations dans son voisinage, ce qui nous mène à l'équation caractéristique à laquelle obéissent les valeurs propres  $\xi$  de la matrice Jacobienne :

$$\xi^3 + \frac{1 + \tau_g(\delta s + u)}{\tau_g}\xi^2 + \frac{\delta s + u + \tau_g\delta s u}{\tau_g}\xi + \frac{\delta s u + \delta \lambda g_*^2 \exp[-(\tau_1 + \tau_2)\xi]}{\tau_g} = 0 \quad (2)$$

où  $\tau_g = g_*/\theta$  est le temps de réponse du gène et  $\delta s$  et  $u$  sont respectivement les taux de dégradation de la protéine et de l'ARN en régime stationnaire. L'équation (2) montre qu'avec des délais explicites, c'est toujours leur somme qui détermine la dynamique, quelle que soit la manière dont ils sont répartis, dans la transcription, la traduction, le transport ou ailleurs.

Puisque nous nous intéressons à l'apparition d'oscillations, nous cherchons les jeux de paramètres où le point fixe se déstabilise en donnant naissance à une solution périodique par une bifurcation de Hopf. Nous supposons donc que  $\xi = i\omega$  dans (2) et séparons les parties réelles et imaginaires. Après les changements de paramètres suivants :

$$\sigma_c = g_* \sqrt{\delta \lambda}, \quad \sigma = \sigma_c \Sigma, \quad \gamma = \frac{\epsilon^2 \Sigma^2 \sigma_c^2}{4}, \quad (\tau_1 + \tau_2) = \frac{E}{\sigma_c}, \quad \tau_g = \frac{T_g}{\sigma_c}, \quad \omega = \Omega \sigma_c \quad (3)$$

le critère d'oscillation s'écrit :

$$\begin{aligned}\cos(\Omega E) &= (1 + \Sigma T_g)\Omega^2 - \frac{\epsilon^2 \Sigma^2}{4} \\ \sin(\Omega E) &= -T_g \Omega^3 + \left(\Sigma + \frac{\epsilon^2 \Sigma^2 T_g}{4}\right) \Omega\end{aligned}\quad (4)$$

où  $\Sigma$  est la somme des taux de dégradation réduits de l'ARN et de la protéine au point fixe ;  $\epsilon$  quantifie l'asymétrie des deux taux de dégradation [ $\epsilon = 1$  (resp.  $\epsilon = 0$ ) lorsqu'ils sont égaux (resp. lorsque l'un des deux est nul)] ;  $T_g$  est le temps de réponse du gène ;  $E$  est la somme des délais explicites ;  $\Omega$  est la pulsation de Hopf. Il n'est pas facile d'éliminer  $\Omega$ , qui vérifie une équation polynomiale, pour obtenir une expression simple du critère d'instabilité, mais nous pouvons obtenir numériquement le taux total de dégradation  $\Sigma_H(T_g, E)$  en-dessous duquel les oscillations apparaissent en fonction du temps de réponse du gène  $T_g$  et du délai total  $E$ . Nous discuterons les résultats obtenus dans la section 4.

### 3 Etude du modèle avec un délai réactionnel supplémentaire

Nous considérons maintenant l'ajout d'un délai lié à une étape réactionnelle supplémentaire. En introduisant un tel délai, nous rajoutons une dimension au système. Par souci de simplicité, nous nous limitons donc ici à un seul délai, associé au transport de la protéine du cytoplasme, où elle est synthétisée, au noyau où elle réprime l'expression du gène. Ce transport est modélisé par une réaction élémentaire de transformation d'une protéine cytoplasmique en une protéine nucléaire, et dont la cinétique peut être vue comme une réaction de diffusion. Par ailleurs, nous supposons que la dégradation de la protéine n'a lieu que dans le noyau. Le modèle correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g(t) &= \theta (1 - g(1 + p_n)) \\ \frac{d}{dt}m(t) &= \lambda g - h(m) \\ \frac{d}{dt}p_c(t) &= \delta m - \frac{p_c}{\tau_p} \\ \frac{d}{dt}p_n(t) &= \frac{p_c}{\tau_p} - \delta f_n(p_n)\end{aligned}\quad (5)$$

où  $g, m, p_c, p_n$  sont respectivement l'activité du gène, le nombre de molécules d'ARN, de protéines dans le cytoplasme et dans le noyau ; le terme  $p_c/\tau_p$  représente le transport de la protéine du cytoplasme au noyau ; comme précédemment  $\theta$  caractérise la rapidité de réponse du gène,  $\tau_p$  représente le délai de transport ;  $f_n(p_n)$  décrit la dégradation de la protéine dans le noyau.

La solution stationnaire ( $g_*, m_*, p_{n*}$ ) ainsi que les taux de dégradation en ce point ne dépendent pas du délai du transport  $\tau_p$ . Nous pouvons donc varier ce dernier sans modifier l'activité moyenne du gène  $g_*$  ni les taux de dégradation, qui sont des paramètres importants pour l'apparition d'oscillations.

Pour examiner si le système peut présenter des oscillations, nous déterminons à nouveau le critère de passage par une bifurcation de Hopf. Après une mise à l'échelle des paramètres semblable à (3), nous obtenons la condition suivante pour que le point fixe se déstabilise vers un cycle limite :

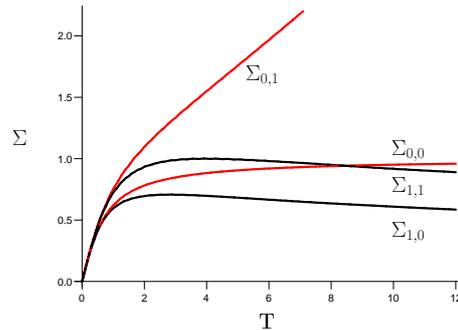
$$H_{\epsilon, \eta}(\Sigma, T) = \left[\frac{\epsilon^2 \Sigma^2}{4} T^2 + \left(\Sigma - \frac{1}{\Sigma}\right) T + 1\right] + \Sigma T \eta^2 \left(\frac{\epsilon^4 \Sigma^3 T^3 \eta^2 - 64 - 32\epsilon^2 \Sigma T}{64(\Sigma T \eta^2 + 4)} - \frac{T}{4}\right) < 0 \quad (6)$$

où  $\Sigma$  et  $\epsilon$  caractérisent comme précédemment les taux de dégradation ;  $T$  est le délai total (temps de réponse du gène plus délai de transport). L'indicateur  $\eta$  joue un rôle semblable à celui de  $\epsilon$  et quantifie l'asymétrie des deux délais :  $\eta = 1$  (resp.  $\eta = 0$ ) quand ils sont égaux (resp. quand l'un des deux est nul).

On voit que le délai total  $T$  joue un rôle important pour l'apparition des oscillations. Quand  $\eta = 0$ , l'expression (6) se ramène d'ailleurs à l'expression obtenue par Morant *et al.* pour le gène auto-réprimé simple [6]. Le délai de réponse du gène et le délai de transport ont donc des actions très semblables, puisqu'ils ont, pris isolément, le même pouvoir déstabilisant pour une même valeur du délai. Mais le fait que l'expression (6) dépende aussi de  $\eta$  montre que ce n'est pas seulement le délai total  $T$  qui influe sur la dynamique, mais également la manière dont il se répartit en un temps de réponse du gène et un temps

de transport. Le dernier terme de (6) caractérise donc l'interaction entre les deux types de délai. On voit que selon le signe positif ou négatif de ce terme, la coexistence des délais peut stabiliser ou déstabiliser le circuit.

L'équation (6) détermine une série de courbes  $\Sigma_{\epsilon, \eta}(T)$  paramétrées par les deux indicateurs de symétrie  $\epsilon$  et  $\eta$ . Pour  $\epsilon$  et  $\eta$  fixés, le système oscille si  $\Sigma \leq \Sigma_{\epsilon, \eta}(T)$ , c'est-à-dire si le point de fonctionnement du système se trouve sous la courbe. Nous avons tracé dans la figure 1 les quatre courbes correspondant aux quatre cas limites de l'expression (6), selon que les deux indicateurs  $\epsilon$  et  $\eta$  prennent leur valeur minimale (0) ou maximale (1).



**Fig. 1.** Diagramme de bifurcation pour quatre cas limites des deux indicateurs de symétrie  $\epsilon$  et  $\eta$ . Un système avec  $\Sigma < \Sigma_{\epsilon, \eta}$  est oscillant. Les courbes correspondant à des taux de dégradation identiques sont représentées en noir, les courbes rouges correspondant au cas où l'un des deux taux de dégradation est nul.

Les courbes  $\Sigma_{1,0}$  et  $\Sigma_{0,0}$  correspondent au cas d'un seul délai, et ont été discutées dans la référence [6]. Pour étudier l'effet d'un délai supplémentaire, comparons à présent les courbes  $\Sigma_{1,0}$  et  $\Sigma_{1,1}$  qui correspondent à des taux de dégradation équilibrés ( $\epsilon = 1$ ), avec un délai total se décomposant soit en deux délais identiques ( $\Sigma_{1,1}$ ), soit en un délai unique ( $\Sigma_{1,0}$ ). Pour un délai total petit, les deux courbes sont confondues, c'est alors la somme des délais qui contrôle uniquement la dynamique. Pour des délais plus grands, les deux courbes se séparent, celle à deux délais étant toujours au-dessus de l'autre. L'interaction de deux délais favorise donc systématiquement les oscillations. Par ailleurs, on note que l'existence d'une résonance est préservée : il existe toujours un temps de réponse du gène pour lequel la déstabilisation est maximale et ce temps caractéristique est peu modifié quand on passe à deux délais. De cette première comparaison, nous pouvons conclure que deux délais identiques induisent des oscillations plus facilement qu'un seul délai égal à leur somme, autrement dit, un même délai total réparti en plusieurs endroits favorise l'oscillation par rapport à un délai unique localisé dans une étape précise.

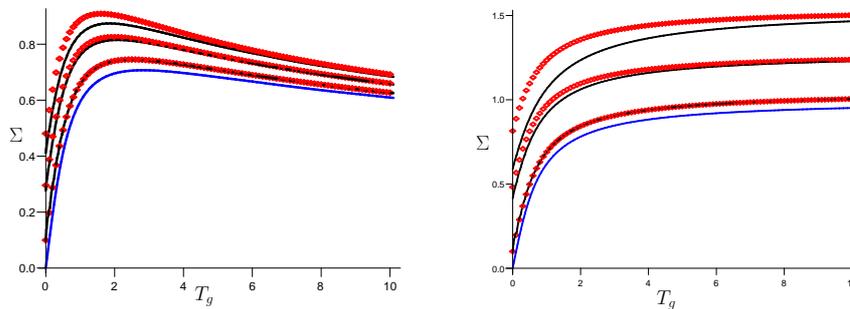
Enfin, considérons le cas où l'un des taux de dégradation est nul, ce qui correspond aux deux courbes rouges de la figure 1. On remarque immédiatement que contrairement aux autres courbes, la courbe  $\Sigma_{0,1}$ , qui indique la frontière d'instabilité avec deux délais égaux en séquence, croît sans borne quand le délai total augmente. Cela implique qu'un comportement oscillant peut être obtenu même pour des taux de dégradation élevés, à condition que le délai total soit suffisamment grand. Un tel comportement dynamique rappelle celui d'une équation à retard. Notre étude révèle donc comment reproduire le comportement de ces dernières avec des équations différentielles ordinaires.

#### 4 Comparaison des effets d'un délai explicite et d'un délai réactionnel

Dans les deux sections précédentes, nous avons discuté respectivement l'influence d'un délai explicite et d'un délai réactionnel sur l'apparition d'oscillations. Dans la littérature, les auteurs modélisent un système biologique donné en utilisant soit l'un, soit l'autre, généralement sans motiver leur choix. Il est légitime de se demander si le choix d'un type de délai plutôt qu'un autre a une influence sur le comportement du modèle et dans quelles conditions apparaissent les différences quand il y en a, ou encore quel est le type de délai qui est le plus déstabilisant. Pour répondre à ces questions, nous avons comparé les influences des deux types de délais.

#### 4.1 Diagrammes de bifurcation dégradation-délai

Le modèle de la référence [6] ne comporte qu'un délai de réponse transcriptionnelle du gène. Nous étudions maintenant comme le comportement de ce modèle se modifie quand on rajoute progressivement un type de délai ou bien l'autre. Nous analysons ces modifications dans le plan dégradation-délai. Comme précédemment, nous devons distinguer deux cas limites : les taux de dégradation symétriques et déséquilibrés (Fig. 2). Dans un cas comme l'autre, nous vérifions qu'ajouter un délai, soit explicite, soit réactionnel, étend progressivement la région d'oscillation. Lorsque le délai supplémentaire est suffisamment petit, l'influence des deux types de délais est la même. Lorsque le délai supplémentaire est suffisamment grand, par contre, le délai explicite est toujours plus déstabilisant que le délai réactionnel, même si la différence s'estompe quand le temps de réponse du gène est grand. De plus, dans le cas de taux de dégradation égaux, les deux types de délai préservent le phénomène de résonance et ont donc des propriétés dynamiques communes.



**Fig. 2.** A gauche, les taux de dégradation sont identiques, à droite l'un d'entre eux est nul. Le seuil d'instabilité est indiqué pour le cas sans délai supplémentaire par la courbe bleue ; en présence d'un délai explicite supplémentaire de valeur  $E = 0.1, 0.3, 0.5$  par les points rouges ; en présence d'un délai réactionnel supplémentaire égal au délai explicite par les courbes noires.

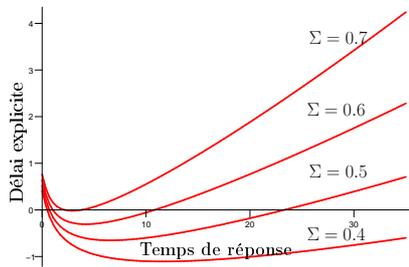
#### 4.2 Diagrammes de bifurcation temps de réponse-délai

Nous nous intéressons ici également à la géométrie de la zone d'oscillation, mais visualisée cette fois dans le plan des deux temps caractéristiques, le temps de réponse du gène et le délai supplémentaire, explicite ou réactionnel. Cette représentation est plus adaptée pour comprendre l'interaction des deux délais dans une grande gamme. Pour simplifier, nous nous limitons au cas de taux de dégradation identiques.

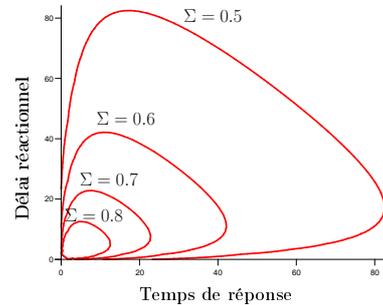
On voit tout de suite la différence entre les deux types de délai en comparant les figures 3 et 4. Dans le modèle avec réponse du gène et délai explicite, la zone d'oscillation n'est pas symétrique par rapport aux deux délais. Si l'on augmente la dégradation, la zone d'oscillation diminue. Lorsque les taux de dégradation sont suffisamment faibles, une partie de la zone d'oscillation correspond à un délai explicite négatif, ce qui indique que le système oscille systématiquement dans cette zone même sans délai explicite. Lorsque nous fixons un délai explicite et que nous augmentons le temps de réponse du gène progressivement, le système traverse la zone d'oscillation puis redevient stable ; par contre, lorsque nous fixons le temps de réponse et que nous augmentons progressivement le délai explicite, nous arrivons tôt ou tard dans la zone d'oscillation et nous y restons ensuite pour toute valeur du délai.

Dans le cas d'un délai réactionnel rajouté au temps de réponse du gène, la figure 4 indique que la zone d'oscillation est complètement symétrique. Lorsque la somme des taux de dégradation  $\Sigma$  augmente, la zone d'oscillation diminue, comme pour le délai explicite. Dans le cas limite  $\Sigma = 1$ , la zone se réduit à un point. Il faut également remarquer que si le temps de réponse du gène est fixé et que nous augmentons progressivement le délai réactionnel supplémentaire, l'oscillation se renforce d'abord puis disparaît progressivement. Donc, un délai réactionnel trop important peut supprimer les oscillations. Plus intéressant, on voit également qu'il est possible qu'un délai de transport ne déclenche pas les oscillations à lui tout seul lorsqu'il est très grand, mais qu'il suffit d'ajouter un petit délai de réponse transcriptionnelle pour

revenir dans la zone d'oscillation. De tels effets d'interaction font que le temps de réponse du gène, même petit devant les autres délais, peut avoir un effet important sur la dynamique.



**Fig. 3.** Interaction entre le temps de réponse du gène et un délai explicite. Pour chaque valeur de  $\Sigma$  indiquée, la zone d'oscillation est située au-dessus de la courbe associée.



**Fig. 4.** Interaction entre le temps de réponse du gène et un délai réactionnel. Pour chaque valeur de  $\Sigma$  indiquée, la zone d'oscillation est située à l'intérieur de la courbe associée.

En analysant le diagramme de bifurcation dans le plan temps de réponse du gène-délai de transport, nous avons comparé les effets des deux types de délai, explicite et réactionnel. En augmentant un délai explicite, le système tend toujours à se déstabiliser, donc le délai explicite favorise toujours les oscillations. Par contre, en augmentant progressivement un délai réactionnel, le système peut être déstabilisé d'abord puis finalement stabilisé. Donc, l'ajout d'un délai réactionnel complique la modélisation, puisqu'il peut déstabiliser le système mais aussi le stabiliser.

## 5 Conclusion

Nous avons étendu le modèle proposé par [6] en prenant en compte des délais supplémentaires liés au transport de la protéine de deux manières, comme un délai explicite et comme un délai réactionnel. Nous avons montré que les conclusions de la référence [6] restent pertinentes. Un point remarquable est aussi la manière dont un délai réactionnel interagit avec un temps de réponse fini pour déstabiliser le système bien plus que ne le ferait un délai unique, ou bien supprimer au contraire les oscillations.

## Références

1. J. LEWIS, Autoinhibition with Transcriptional Delay : A Simple Mechanism for the Zebrafish Somitogenesis Oscillator, *Current Biology*, **13**, 1398 (2003).
2. J. S. GRIFFITH, Mathematics of cellular control processes I. Negative feedback to one gene, *Journal of Theoretical Biology*, **20**, 202 (1968).
3. H. HIRATA *et al.*, Oscillatory expression of the bHLH factor Hes1 regulated by a negative feedback loop, *Science*, **298**, 840 (2002).
4. G. TIANA, S. KRISHNA, S. PIGOLATTI, M. H. JENSEN & K. SNEPPEN, Oscillations and temporal signalling in cells, *Physical Biology*, **4**, R1 (2007).
5. I. GOLDING, J. PAULSSON, S. M. ZAWILSKI & E.C. COX, *CELL*, **123**, 1025-1036 (2005).
6. P.-E. MORANT, Q. THOMMEN, F. LEMAIRE, C. VANDERMOERE, B. PARENT & M. LEFRANC, *Physical Review Letters*, **102**, 183901 (2009).
7. B. NOVAK & J. TYSON, Design principles of biochemical oscillators, *Nature Review/Molecular Cell Biology* **9**, 981 (2008).
8. B. S. BERNARD, B. CAJAVEC, L. PUJO-MENJOUET, M. C. MACKEY & H. HERZEL, Modelling transcriptional feedback loops : the role of Gro/TLE1 in Hes1 oscillations, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **364**, 1155 (2006).
9. J.-C. LELOUP, D. GONZE & A. GOLDBETER, Limit cycle models for circadian rhythms based on transcription regulation in *Drosophila* and *Neurospora*, *Journal of Biological Rhythms* **14**, 433 (1999).

# Index

- Aguirre Luis, 145  
Amon Axelle, 175  
Amri Mohamed Hédi, 1  
Amroun Aliane Dalila, 7  
Antkowiak Arnaud, 139  
Audoly Basile, 139  
Aziz-Alaoui M. A., 55, 115
- Balev Stefan, 55  
Barbot Jean-Pierre, 205  
Bauchire Jean-Marc, 25  
Ben Amar Martine, 37  
Bickel Thomas, 187  
Bico José, 91  
Blossey Ralf, 163  
Blumenthal Ralf, 85  
Bouget François-Yves, 193  
Bounoïare Dounia, 121  
Boutat Driss, 13  
Boyer François, 19  
Brandt Luca, 61  
Brault Pascal, 25  
Brunel Marc, 151
- Candel Sébastien, 167  
Chandre Cristel, 109  
Chapman Thomas, 31  
Chatelain Clément, 37  
Chossat Pascal, 43  
Chouli Souad, 49  
Ciarletta Pasquale, 37  
Corellou Florence, 193  
Corson Nathalie, 55  
Courbin Laurent, 175  
Cuvelier Antoine, 121, 145
- Ducruix Sébastien, 167  
Duguet Yohann, 61  
Durox Daniel, 167
- Falcon Eric, 19  
Faugeras Olivier, 43  
Freitas Ubiratan Santos, 67, 121, 157
- Géminard Jean-Christophe, 199  
Gilmore Robert, 67
- Ginoux Jean-Marc, 67, 73  
Grelu Philippe, 49  
Guillerm Raphaël, 79
- Hüller Stefan, 31  
Hoepffner Jérôme, 85  
Hure Jérémy, 91
- James François, 25  
Jauslin Hans R., 181  
Jones Timothy, 67  
Josserand Christophe, 25, 139
- Kirill Volyanskiy, 127
- Larger Laurent, 127  
Larsson Robin B., 61  
Lefranc Marc, 133, 193, 211  
Letellier Christophe, 7, 67, 97, 103, 121, 145, 157
- Malasoma Jean-Marc, 103  
Masson-Laborde Paul-Edouard, 31  
Mauger François, 109  
Messenger Valérie, 97  
Morant Pierre-Emmanuel, 193  
Moulay Djamila, 115  
Muir Jean-François, 121, 145  
Mutabazi Innocent, 79
- Naeck Roomila, 121  
Neukirch Sébastien, 139  
Noiray Nicolas, 167  
Nourine Mourad, 127
- Panizza Pascal, 175  
Pastur Luc, 7  
Peil Michael, 127  
Petitgirard Loïc, 73  
Pfeuty Benjamin, 133, 193  
Picozzi Antonio, 181  
Portier Florence, 121  
Portmann Adriana, 121  
Prigent Arnaud, 79
- Rabarimanantsoa Herinaina, 121  
Randoux Stéphane, 181  
Rivetti Marco, 139

Rodrigues Giovanni, 145  
Roman Benoît, 91  
Romanelli Marco, 151  
Roulin Elise, 157  
Rozmus Wojciech, 31  
Russo Christophe, 163

Schuller Thierry, 167  
Sessoms David, 175  
Sun Hong, 205  
Suret Pierre, 181

Thiébaud Marine, 187  
Thommen Quentin, 133, 193, 211  
Tran Nicolas, 167

Uzer Turgay, 109

Vallet Marc, 151  
Varas Germán, 199  
Vidal Valérie, 199

Wang Jingkui, 211

Yanne Kouomou Chembo, 127  
Yu Lei, 205

Zaleski Stéphane, 85  
Zheng Gang, 13, 205