



E. Falcon, C. Josserand
M. Lefranc & C. Letellier
Éditeurs

Poincaré

Résumés des exposés de la 15^e
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 2012



Institut Henri Poincaré

Non-Linéaire Publications

RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE
 Université Pierre et Marie Curie, PARIS
 14–16 Mars 2012

Nous remercions vivement l’Institut Henri Poincaré, l’Institut Jean le Rond d’Alembert, le Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules (PhLAM), le Complexe de Recherche Interprofessionnel en Aérothermochimie (CORIA), et le GDR 2984 “Contrôle et Dynamique des Ensembles Complexes” pour leur soutien matériel et financier.

Le comité scientifique est composé de :

Sébastien AUMAÎTRE	CEA — Saclay
Arezki BOUDAUD	RDP — ENS Lyon
Christel CHANDRE	CPT — Marseille
Silvia DE MONTE	Ecologie & Evolution — ENS Paris
Christophe FINOT	ICB — Dijon
Eric FALCON	MSC — Paris
Sébastien GALTIER	IAS — Orsay
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Anke LINDNER	PMMH — ESPCI, Paris
Patrice MEUNIER	IRPHE — Marseille
Mathis PLAPP	LPMC — Polytechnique
Laure SAINT-RAYMOND	DMA — ENS

Les *Rencontres annuelles du Non-linéaire* sont organisées par :

Eric FALCON	Matière et Systèmes Complexes — Paris 7
Christophe JOSSERAND	Institut Jean le Rond d’Alembert — Paris 6
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Christophe LETELLIER	CORIA — Université de Rouen

Le Colloque *Henri Poincaré* est organisé par :

Jean-Marc GINOUX	Université du Sud — Toulon
Christophe LETELLIER	CORIA — Université de Rouen
Jean MAHWIN	Université Catholique de Louvain

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non Linéaire Publications
 Avenue de l’Université, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray
 cedex

Toutes les informations concernant les *Rencontres* sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

rnl@nonlineaire.univ-lille1.fr

Table des matières

Les héritiers de Poincaré <i>Christian Mira</i>	1
Fluage et rupture dans un matériau granulaire <i>Axelle Amon, Van Bau Nguyen, Aary Bruand, Jérôme Crassous, Eric Clément</i>	19
Convergence géométrique à deux échelles dans le formalisme covariant. Applications à l'équation de Vlasov homogénéisée. <i>Back Aurore, Frénod Emmanuel</i>	25
Emergence de microstructures dans le cancer de la peau <i>Thibaut Balois, Clément Chatelain, Pasquale Ciarletta, Martine Ben Amar</i>	31
Propriétés spatio-temporelles de la Turbulence d'ondes capillaires <i>Michael Berhanu, Eric Falcon</i>	37
Influence d'une transition hydrodynamique sur la propagation d'un front de réaction-diffusion <i>Simona Bodea, Alain Pocheau</i>	43
Instanton trajectories for random transitions in turbulent flows <i>Freddy Bouchet, Jason Laurie</i>	49
Formes normales d'observabilités quadratiques de Poincaré <i>Driss Boutat, Latifa Boutat-Baddas, Jean-Pierre Barbot</i>	55
Analyse de séries temporelles de production éolienne : Loi de Taylor et propriétés multifractales <i>Rudy Calif, François G. Schmitt</i>	61
Etude numérique de la convection d'un liquide diélectrique sous l'effet de la force diélectrophorétique en géométrie annulaire <i>Olivier Crumeyrolle, S. Malik, Marlene Smieszek, Christoph Egbers, Innocent Mutabazi</i>	67
Ondes non linéaires à la surface d'un fluide recouvert d'une membrane élastique <i>Luc Deike, Eric Falcon</i>	73
Impact d'une goutte sans contact <i>Laurent Duchemin, Christophe Josserand</i>	79
Rotations d'une goutte dans un ressaut hydraulique circulaire <i>Alexis Duchesne, Clément Savaro, Luc Lebon, Christophe Pirat, Laurent Limat</i>	85
Une application récente et surprenante de l'effet de <i>plasma wave echo</i> : la génération de rayonnement X cohérent <i>C. Evain, M. Labat, A. Loulergue, M.-E. Couprie, A. Nadj, C. Szewaj, S. Bielauski</i>	91

Extensive clustering in populations of degrade-and-fire oscillators <i>Bastien Fernandez, Lev Tsimring</i>	97
Dynamique cardio-respiratoire de nourrissons vulnérables <i>Emeline Fresnel, Emad Yacoub, Ubiratan Freitas, Valérie Messenger, Eric Mallet, Christophe Letellier</i>	103
Numerical simulation of natural convection between two infinite differentially heated vertical plates <i>Zhenlan Gao, Bérengère Podvin, Anne Sergent, Shihe Xin, Patrick Le Quéré, Laurette S. Tuckerman</i>	109
Etude expérimentale de l'instabilité d'un jet de solution diluée de polymère <i>Martial Gassa Feuaign, Olivier Crumeyrolle, Gérard Gréhan, Innocent Mutabazi</i>	115
Analyse d'écoulements à partir de champs d'observables échantillonnés à des temps arbitraires <i>Florimond Guéniat, Lionel Mathelin, Luc Pastur</i>	121
Théorie de l'anharmonicité des phénomènes périodiques non-linéaires <i>Patrick Hanusse</i>	127
Spectres spatio-temporels d'un écoulement turbulent de von Kármán <i>Eric Herbert, Brice Saint-Michel, François Daviaud, Bérengère Dubrulle, Vincent Padilla</i>	133
Topologie et observabilité d'un modèle chaotique de cancer <i>Christophe Letellier, Fabrice Denis, Luis A. Aguirre</i>	139
Phénomènes non linéaires dans les plasmas poussiéreux : Apparition d'oscillations multimodales <i>Maxime Mikikian, Hagop Tawidian, Thomas Lecas, Olivier Vallée</i>	145
Microcavité non linéaire sous contrôle cohérent <i>Jérémy Oden, Stéphane Trebaol, Nicolas Dubreuil</i>	151
Écoulement dans un tube faiblement divergent : transition laminaire-turbulent <i>Jorge Peixinho</i>	157
Washboard road, instabilité de tôle ondulée <i>Baptiste Percier, Sébastien Manneville, Nicolas Taberlet</i>	161
Observation expérimentale d'une instabilité de Rayleigh-Plateau dans un jet granulaire en chute libre dans l'air <i>Gaël Prado, Yacine Amarouchene, Hamid Kellay</i>	167
Effets de la rotation sur la convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux soumis à un gradient radial de température <i>Clément Savaro, Arnaud Prigent, Innocent Mutabazi</i>	173
Rhéologie (plasticité) et blocage (jamming) d'un granulaire sec modélisé comme un graphe <i>Nicolas Rivier, Jean-Yves Fortin</i>	179
Topologie du chaos toroïdal produit par un double pendule actif <i>Martin Rosalie, Davidson Firmo, Leonardo Tôrres, Christophe Letellier</i>	185
Génération d'ondes à la surface d'un fluide par un fond mobile <i>Gerardo Ruiz-Chavarria, Michael Berhanu, Eric Falcon</i>	191

Accrochage de fréquence sans accrochage de phase de deux modes laser couplés <i>Jérémie Thévenin, Marco Romanelli, Marc Brunel, Marc Vallet, et Thomas Erneux</i>	197
Turbulence anisotrope des pseudo-ondes d'Alfvén en deux dimensions <i>Natalia Tronko, Sébastien Galtier, Sergey Nazarenko</i>	203
Etude de la croissance de la zone fluidifiée lors de l'injection d'air dans des grains immergés <i>Valérie Vidal, Germán Varas, Jean-Christophe Géminard</i>	209
Stochastic resonance in a self-repressing gene with transcriptional memory <i>Jinghui Wang, Quentin Thommen, Marc Lefranc</i>	215
Bifurcation par modulation d'enveloppe d'un cycle limite dans une dynamique non linéaire à double retard <i>Lionel Weicker, Thomas Erneux, Maxime Jacquot, Yanne Chembo, Laurent Larger</i>	221
Index	227

Les héritiers de Poincaré

Christian Mira

19 rue d'Occitanie, 31130 QUINT
c.mira@free.fr

1 Introduction

Dans le domaine scientifique, le terme « *dynamique* » se réfère à l'étude des processus évoluant dans le temps. L'équation, qui décrit l'évolution temporelle d'un tel processus, est généralement appelée « *système dynamique* ».

Dans le cas des processus continus, la théorie des systèmes dynamiques s'est essentiellement construite à partir des résultats de Poincaré (1878-1900), et de Liapunov (1893). Pour les processus à dynamique discrète donnant lieu à des modèles sous forme de *réurrence* (noms équivalents : *équation aux récurrences*, *itération*, *transformation ponctuelle*) les résultats sont ceux obtenus, à la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} siècle, par l'école française représentée en particulier par Grevy, Leau, Koenigs, Lemery, Lattes, Hadamard, Julia, Fatou. Les résultats de Poincaré [1,2,3] sur les solutions périodiques des équations différentielles ordinaires sont à la base du développement spectaculaire des études sur les systèmes dynamiques non linéaires qui a suivi. Ils ont donné lieu à deux approches différentes des problèmes. La première correspond aux *méthodes qualitatives*. Pour définir la « stratégie » de ces méthodes, on doit noter que les solutions des équations non linéaires de systèmes dynamiques sont en général des fonctions transcendentes non classiques de l'analyse mathématique (moins d'une dizaine ont été étudiées et tabulées). Cette « stratégie » est du même type que celui utilisé pour la caractérisation d'une fonction de la variable complexe par ses singularités : zéros, pôles, et singularités essentielles. Ici, les fonctions complexes transcendentes sont définies par les singularités des *systèmes dynamiques continus* (resp. *systèmes dynamiques discrets*) telles que :

- Les états stationnaires qui sont des *points d'équilibre* (resp. *points fixes*), ou des *solutions périodiques* (resp. *cycles*), qui peuvent être stables ou instables.
- Les *trajectoires de phase* (resp. *courbes invariantes*) passant par les singularités de type *col* pour les systèmes autonomes bidimensionnels.
- Les *variétés stable et instable* pour les systèmes de dimension supérieure à deux.
- La frontière, ou *séparatrice*, du domaine d'influence (domaine d'attraction, ou *bassin*) d'un état stationnaire stable (resp. *attracteur*).
- Les singularités *homoclines*, ou *hétéroclines*.
- Des singularités plus complexes de type *fractal*, ou non fractal.

Les méthodes qualitatives considèrent la nature de ces singularités dans l'espace de phase, et leur évolution, soit lorsque les paramètres du système varient, soit en présence d'une modification continue de la structure du système (étude des *bifurcations* définies dans l'espace des paramètres, ou dans un espace fonctionnel).

La seconde approche correspond aux *méthodes analytiques* de la dynamique non linéaire. Ici, les fonctions transcendentes complexes mentionnées ci-dessus sont définies par des développements en série, convergents, ou tout au moins asymptotiquement convergents, ou vus « en moyenne ». La *méthode de petit paramètre de Poincaré*, les *méthodes asymptotiques* de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski sont analytiques. Il en est de même de la *méthode de la moyenne*, et de la *méthode de linéarisation harmonique*. Ces méthodes sont largement utilisées dans la théorie des oscillations non linéaires.

Ces deux approches constituent deux branches relativement indépendantes de la théorie des oscillations non linéaires. Elles ont les mêmes objectifs : la construction d'outils mathématiques destinés à résoudre des problèmes concrets, et le développement d'une théorie générale des systèmes dynamiques.

2 Méthodes qualitatives, méthodes analytiques, résultats de Poincaré

Dans le cadre des méthodes qualitatives, l'idée directrice de Poincaré était au départ de ramener l'étude des trajectoires du plan de phase, engendrées par une équation différentielle autonome du deuxième ordre, à l'étude d'une *transformation d'une droite en elle-même* (voir sa théorie des conséquents sur les *arcs* « sans contact »), et à l'étude d'une *transformation d'un cercle en lui-même* pour les trajectoires sur le tore [1]. En bref, cette idée revenait à considérer un problème de dimension inférieure, donc plus simple. Elle lui permit ainsi de définir la notion de *cycle limite* (courbe fermée du plan de phase, image d'une solution périodique) associé à un point fixe de la transformation, dont la stabilité détermine celle de la solution périodique. L'intérêt de la méthode pour l'étude des propriétés qualitatives des solutions, et en particulier des problèmes de bifurcation, devait conduire tout naturellement ce grand mathématicien à la généraliser aux équations différentielles autonomes d'ordre trois, en réduisant le problème posé à l'étude d'une *transformation d'une surface en elle-même* [1,2]. Ces considérations ont conduit Poincaré à mettre en évidence une certaine analogie entre les points fixes d'une transformation ponctuelle bidimensionnelle, et les points d'équilibre de l'équation différentielle autonome de même dimension, en retrouvant localement, pour les courbes invariantes des transformations, les comportements de type *col*, *foyer*, *nœud* des trajectoires de phase engendrées par une équation différentielle autonome bidimensionnelle. Simultanément, il définissait analytiquement les courbes invariantes passant par un *col* (une variété stable, et une variété instable) par deux séries convergentes.

Cette idée est à l'origine de la vocation « interdisciplinaire » de l'outil transformation ponctuelle. Elle ouvrait, en effet, la voie à la résolution de nombreux problèmes liés à la détermination des solutions périodiques à propos desquelles Poincaré devait dire :

« ce qui nous rend ces solutions si précieuses, c'est qu'elles sont pour ainsi dire la seule brèche par où nous puissions pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. »

Cette brèche allait encore s'ouvrir un peu plus avec le *problème restreint des trois corps*. Ce problème, lié à celui des systèmes dynamiques conservatifs autonomes à deux degrés de liberté (équation différentielle autonome d'ordre quatre), se ramène à une équation différentielle de dimension trois par l'intermédiaire d'une intégrale connue, introduite par Euler. Poincaré [1,2,3] franchit une nouvelle étape de diminution de la dimension du problème en le réduisant à celui d'une transformation d'une surface de section en elle-même. Le même raisonnement le conduisit, en outre, à associer à une équation différentielle hamiltonienne non autonome du deuxième ordre, avec hamiltonien fonction périodique du temps, une transformation du plan en lui-même, permettant l'étude des mouvements voisins d'un mouvement périodique. Le lien entre ces deux problèmes est une conséquence du fait que les équations de systèmes dynamiques, conservatifs, autonomes, à deux degrés de liberté, peuvent se réduire dans le voisinage d'une trajectoire fermée à une équation différentielle du deuxième ordre avec hamiltonien fonction périodique du temps. Les trois volumes de son célèbre ouvrage *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* [2] sont en grande partie consacrés à ces questions, qui ont intérêt fondamental en Astronomie. Le même problème des trois corps devait, en outre, conduire Poincaré à établir, grâce à une étude plus fine des deux courbes invariantes passant par un point fixe *col* d'une transformation d'une surface en elle-même, les notions de points singuliers : *doublement asymptotiques*, *homoclines*, *hétéroclines*, et à annoncer l'extrême complexité de la figure obtenue sur la surface, qu'il décrivait comme un enchevêtrement inextricable de courbes. L'importance de ces notions, pour les recherches concernant les systèmes dynamiques, n'a fait que se confirmer depuis. Ces notions sont, en effet, directement liées à ce qu'on a appelé d'abord des comportements *stochastiques*, et à partir de 1975 *chaotiques*, rencontrés dans certains systèmes physiques. Les résultats dans ce domaine ont alors suivi une croissance exponentielle.

La contribution aux méthodes analytiques de la dynamique non linéaire a donné lieu à ce qui a été appelé par la suite la *méthode du petit paramètre de Poincaré*, basée la notion de *solution génératrice*,

choisie à partir de l'approximation linéaire (le petit paramètre est alors égal à zéro). La solution d'une équation différentielle non linéaire (fonction transcendante exceptionnellement tabulée), est donnée par un développement en série convergent. Comme ceci apparaîtra plus bas, cette approche a été considérablement développée et étendue par les écoles de dynamique non linéaire de l'ex-Union soviétique (Krylov, Bogoliubov, Mitropolski, Malkin, ...).

Il est moins connu que Poincaré a aussi consacré une partie de ses recherches aux problèmes des oscillations électriques. L'article [4] est consacré à ces questions, en particulier l'association de la notion de *cycle limite stable* aux oscillations libres d'un circuit électrique est due à Poincaré, et non à Andronov comme ceci est généralement admis. Cette question sera reprise ci-dessous (§ 5.2) à propos de la contribution d'Andronov à ce type de problème.

3 Les systèmes dynamiques à l'époque de Poincaré

La fin du 19^{ème} siècle et le début du 20^{ème} sont marqués par plusieurs résultats fondamentaux sur les systèmes dynamiques continus, ou discrets (équations aux récurrences, itération, transformations ponctuelles).

- Alexandre Ljapunov est le mathématicien qui a aussi fourni une importante contribution à cette époque. On lui doit les fondements de la *théorie de la stabilité des mouvements* avec un texte célèbre traduit en français au début du 20^{ème} siècle [5], le seul cité dans la littérature occidentale. A partir de la considération de l'équation du « *mouvement perturbé* », il a introduit la notion fondamentale de *nombre caractéristique*. La définition de deux classes de fonctions, dites *fonctions de Ljapunov de première espèce* (pour les équations différentielles autonomes) et *fonctions de Ljapunov de seconde espèce* (pour les équations différentielles non-autonomes), lui a permis de résoudre le problème de la stabilité dans les *cas critiques de stabilité*, ceux pour lesquels l'approximation linéaire ne permet pas une conclusion pour un état stationnaire (*mouvement non perturbé*). En 1954, un manuscrit inconnu, donnant de nouveaux résultats sur les cas critiques a été découvert. Immédiatement publié en russe, il a été ensuite traduit en anglais [6].
- Jacques Hadamard [7,8,9] s'est penché sur la caractérisation des courbes invariantes d'un point fixe col d'une transformation ponctuelle bidimensionnelle, lorsque l'hypothèse d'analyticité des données, utilisée par Poincaré, n'est pas satisfaite.
- Tullio Levi-Civita [10] s'est intéressé aux conditions suffisantes d'instabilité des solutions périodiques des systèmes dynamiques conservatifs à deux degrés de liberté, lorsque le point fixe de la transformation ponctuelle bidimensionnelle associée comporte des multiplicateurs (valeurs propres) $e^{\pm j\varphi}$, $j^2 = -1$, φ étant commensurable avec 2π .
- Raffaello Cigala [11] a examiné le même problème quand φ n'est pas commensurable avec 2π .
- Samuel Lattès [12,13] a développé des études sur les transformations ponctuelles multidimensionnelles dans le voisinage d'un point fixe (étude locale), ou d'un cycle (point périodique), en relation avec des recherches sur l'équation fonctionnelle multidimensionnelle de Schroeder. Cette analyse a été faite dans le cas où les données sont analytiques, ou non analytiques.
- Gaston Julia [14] et Pierre Fatou [15,16] (1918) sont à l'origine des premières études globales sur l'itération à une dimension avec une variable complexe, ce qui revient au cas particulier d'une transformation à variables réelles, bidimensionnelle qui satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann. Ils ont défini les propriétés d'auto similitude (appelé *fractales* à partir de 1975, date à laquelle ce problème a été de nouveau examiné) de la frontière du bassin d'un attracteur (frontière connue sous le nom d'*ensemble de Julia*).
- Luitzen Egbertus Jan Brouwer [17] s'est intéressé aux problèmes de l'existence de points fixes de transformations d'une surface en elle-même.
- Emile Cotton [18] a étendu la notion de nombre caractéristique de Ljapunov aux transformations ponctuelles.

4 G. D. Birkhoff et la théorie des systèmes dynamiques

Les recherches sur la théorie des systèmes dynamiques représentent une part importante de la contribution de Birkhoff aux sciences mathématiques [19,20]. Il est intéressant de noter que ces recherches ont été menées hors de ce que l'on peut appeler le domaine des « généralisations non essentielles » qui ont encombré depuis 1965 une grande partie des résultats de la « *théorie abstraite* » des systèmes dynamiques. En effet Birkhoff affirmait que [21]

« L'organisation systématique, ou l'exposition, d'une théorie mathématique est toujours d'importance secondaire par rapport à sa découverte, [...] quelques-unes des théories actuelles mathématiques n'étant que des élaborations relativement évidentes d'exemples concrets. »

C'est dans cet esprit qu'il a mené son travail, en étant le premier à exploiter le domaine ouvert par Poincaré. Bien que de formation universitaire américaine, il était intellectuellement un disciple du mathématicien français, sans doute le plus grand. Le mathématicien Marston Morse a pu ainsi dire « *Poincaré a été le véritable Maître de Birkhoff* ». Ses premiers travaux sur les systèmes dynamiques, en prenant le relais au point où l'avait laissé Poincaré à sa mort (1912), illustrent parfaitement ce point. En effet, dans sa dernière publication, Poincaré montrait que l'existence de solutions périodiques du problème restreint des trois corps pouvait être déduite d'un théorème relatif à une transformation ponctuelle, dont il ne put donner une démonstration que dans des cas très particuliers [2]. Cette démonstration, qui avait résisté à Poincaré, fut fournie par son disciple, en janvier 1913, sous une forme simple mais rigoureuse [22].

La « *brèche* » ouverte par Poincaré allait être alors considérablement élargie par Birkhoff avec l'introduction des notions de *mouvement récurrent*, *transitivité*, son célèbre *théorème ergodique*, ses larges études sur les *points fixes hyperboliques* (c'est-à-dire cols) avec points *homoclines* et *hétéroclines*, sur les *points fixes elliptiques* (centres) stables et instables. Ont suivi : le concept de *signature* pour la description qualitative d'un système dynamique, ceux d'*ensembles récurrents*, de *mouvements centraux*, *transitifs*, *errants*, sa contribution au problème des trois corps. Sa théorie qualitative des systèmes dynamiques est limitée aux systèmes conservatifs à deux degrés de liberté ($m = 2$) en raison de l'existence douteuse d'un « *surface régulière de section* » pour les systèmes à plus de deux degrés de liberté, et en admettant comme très probable l'existence générale de ces surfaces pour $m = 2$. Cette théorie qualitative a atteint son point culminant avec le long article, en langue française, *Nouvelles recherches sur les Systèmes Dynamiques* reprend et étend ses résultats antérieurs. C'est dans ce document qu'il présente la notion de « *signature* », symbole bidimensionnel qui définit la topologie d'une structure homocline ou hétérocline. Un tel symbole est la représentation qualitative la plus élaborée d'un système dynamique. Cet article mentionne également les analogies formelles entre les deux variétés, stable, et instable, se recoupant, et asymptotiques à un *point elliptique* (problème du *centre instable*) et les courbes invariantes passant par les *points hyperboliques* (col).

Le premier des trois volumes *Collected Mathematical Papers* [22] reproduit un article de Marston Morse [21], qui analyse l'ensemble de l'œuvre mathématique de Birkhoff. Dans son livre « *Systèmes Dynamiques* » [20], Birkhoff écrivait : « *le but final de la théorie des mouvements d'un système dynamique est la détermination qualitative de tous les types possibles de mouvements et de l'interrelation de ces mouvements le but final de la théorie des mouvements d'un système dynamique est la détermination qualitative de tous les types possibles de mouvements et de l'interrelation de ces mouvements* ». Aussi la définition et la classification des types possibles de mouvements dynamiques constituent une importante contribution de cet auteur, sujet repris ensuite par Aleksandr Andronov (§ 5.2) et Théodore Vogel (§ 6.2).

En France Arnaud Denjoy fut aussi un continuateur de l'œuvre de Poincaré en reprenant une question qu'il avait laissée en suspens. Il s'agit du problème des courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore, pour lequel la *transformation d'un cercle en lui-même* est l'outil de base [24]. Denjoy a pu ensuite élargir le problème au cas des tores dans des espaces de dimension supérieure à trois (1958-1966) [25].

5 Elaboration de la « théorie des oscillations non linéaires ». Vers une « théorie générale des systèmes dynamiques »

5.1 Cadre général

Sous le nom de « *théorie des oscillations non linéaires* », l'étude de la dynamique non linéaire a connu une nouvelle phase de croissance à partir de 1925, avec le développement des études de modèles des circuits électriques, électroniques, des systèmes de commande automatique, et avec les résultats de Lord Rayleigh, Van der Pol. Cette période est essentiellement marquée par la contribution exceptionnelle des équipes dirigées par Mandelstam et Andronov à Gorki, de Krylov-Bogoliubov à Kiev. Il s'agit de deux écoles scientifiques à la base du développement spectaculaire des résultats obtenus dans l'ex-Union Soviétique, à propos desquelles les américains Joseph P. La Salle et Solomon Lefschetz écrivaient en 1961 [26] :

« En URSS l'étude des équations différentielles a des racines profondes, et dans ce domaine l'Union soviétique occupe incontestablement la première place. On peut ajouter que les spécialistes soviétiques, loin de travailler dans le vide, sont en contact intime avec des mathématiciens et des ingénieurs au plus haut niveau. Cela a apporté de grands bénéfices à l'URSS et il est sûr de dire que ce pays ne renoncera pas à une telle supériorité. »

Une telle approche des problèmes de dynamique non linéaire est liée à ce qu'on peut appeler une « *théorie des systèmes dynamiques concrets* », en relation avec ce que disait Joseph Fourier [27]

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue; elle est encore un moyen assuré de former l'analyse elle-même et d'en découvrir les éléments qu'il importe le plus de connaître et de conserver. Ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. »

Dans le domaine des systèmes dynamiques « *concrets* », les recherches ont été essentiellement menées sur deux axes différents à partir de 1925. Le premier est classique depuis le 19^{ème} siècle. Il concerne l'élaboration de méthodes particulières adaptées à la solution des modèles rencontrés dans les sciences physiques, et dans les sciences de l'ingénieur. Le second n'est pas directement lié à l'étude d'un phénomène particulier d'un domaine scientifique donné. Son but est la recherche de comportements qualitativement semblables rencontrés dans les différentes branches de la dynamique, à partir d'un modèle commun, permettant la construction d'outils mathématiques adaptés à la forme de ce modèle. Le modèle est alors traité soit via l'approche des méthodes qualitatives, soit *via* l'approche des méthodes analytiques. Dans ce cadre les modèles considérés ne sont pas directement inspirés par des systèmes suggérés par une « existence physique », mais construits avec la plus petite dimension, et la structure la plus simple, qui permettent d'isoler dans la forme la plus pure un « *phénomène mathématique* » rencontré qualitativement dans le « monde réel », en éliminant les « *effets parasites* » d'une structure beaucoup plus complexe. La mise en évidence, par Myrberg (1963), du phénomène des cascades de bifurcations par doublement de la période, et leurs accumulations [28,29,30,31], dans la transformation ponctuelle très simple $x' = x^2 - c$ (x étant une variable réelle, et c un paramètre réel), est d'un tel type. Ce phénomène non linéaire, l'un des chemins vers la génération de phénomènes chaotiques, se rencontre dans les systèmes dynamiques de disciplines scientifiques fort diverses. Il en est également de même pour le fameux « *fer à cheval* » de Smale [32,33], lié aux propriétés fondamentales des structures homoclines.

5.2 L'école d'Andronov (ou école de Gorki). Sa naissance.

Cette école donne un exemple unique d'une organisation scientifique exceptionnellement productive. Cette organisation était liée à un projet de recherches à longue échéance, mises en œuvre simultanément dans le domaine des études théoriques, et celui de leurs applications aux sciences de l'ingénieur. Ceci s'est fait sur la base d'une collaboration étroite entre spécialistes des mathématiques pures et appliquées, pleinement conscients des problèmes posés par les applications, ingénieurs au plus haut niveau, et physiciens.

Le livre « *L'école de l'Académicien Andronov* » (en russe) [34] de E. C. Boïko, qui retrace cette épopée scientifique, avec sa bibliographie complète, constitue un document historique unique sur ce sujet.

Le problème de la construction des outils mathématiques, adaptés à l'étude des oscillations non linéaires a été tout d'abord formulé par Mandelstham à partir de 1920, dans le cadre de l'étude des systèmes dynamiques appartenant à la radio-ingénierie. En effet, avec Papaleski, Mandelstham a formulé les problèmes fondamentaux résolus ensuite par leurs disciples. De telles formulations ont constitué une étape décisive dans la compréhension des systèmes dynamiques « concrets ».

Au début dans cette école, l'approche la plus populaire des problèmes non linéaires était celle de la *méthode d'ajustement (fitting method)*. Cette méthode est basée sur l'approximation d'une caractéristique non linéaire par une caractéristique voisine linéaire par morceaux. La solution d'un problème non linéaire est ainsi ramenée à celle d'un ensemble de problèmes linéaires correspondant aux différents segments linéaires, avec des conditions de continuité à la jonction des segments linéaires. Jusqu'en 1927, c'est à l'aide de cette méthode que cette école a traité la plupart des problèmes des sciences physiques, et des sciences de l'ingénieur.

En 1927, Andronov, l'étudiant le plus célèbre de Mandelstham, soutient sa thèse avec un sujet formulé par Mandelstham : "*Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations*". Cette thèse est une contribution de premier plan à l'évolution de la théorie des oscillations non linéaires, car elle ouvre une nouvelle voie d'applications de la théorie qualitative de Poincaré. Avec ce travail, jusqu'à une date récente (2010), Andronov était considéré comme le premier à avoir montré que les phénomènes des oscillations libres d'un oscillateur (il s'agissait de celui de Van der Pol) correspondent à des cycles limites de Poincaré. En fait Poincaré avait montré bien avant que l'équation du circuit de l'arc électrique chantant (semblable à celle de l'oscillateur de van der Pol) a pour régime stationnaire un cycle limite stable [4]. Ce résultat a été donné dans le cadre d'une série de conférences longtemps oubliées [35].

Andronov a amplifié ensuite ses recherches avec un but précis : l'élaboration d'une théorie des oscillations non linéaires, afin de disposer d'outils mathématiques, communs aux différentes disciplines scientifiques traitant de systèmes à comportement évoluant dans le temps. Pour l'élaboration de cette théorie, il a utilisé, les bases suivantes :

- La théorie de la stabilité de Lyapunov,
- La théorie qualitative de Poincaré,
- Les transformations ponctuelles (outil de base pour l'utilisation des surfaces de section de Poincaré),
- La classification de Birkhoff [20] de tous les types possibles de mouvements dynamiques, classification qu'il a améliorée.

5.3 Contribution aux méthodes qualitatives.

Sur la base des idées développées par Poincaré, Andronov a montré [36] qu'il est possible de diviser le plan de phase (systèmes autonomes bidimensionnels) en cellules, chacune contenant des trajectoires de phase dont le comportement qualitatif est identique. Chaque cellule, bornée par une frontière, est le domaine d'attraction (ou *bassin*) d'un état stationnaire stable (point d'équilibre, ou cycle limite). Pour un système « concret », le sens physique d'une telle cellule correspond à une dynamique, ou à un mode de fonctionnement donné. Cependant, ce résultat n'a pas d'extension directe pour les espaces de phase de dimension supérieure à 2, en raison de difficultés pour définir la frontière de ces cellules dans le cas général. Ceci était ignoré à l'époque.

L'étude globale du plan de phase d'une équation différentielle autonome bidimensionnelle autonome est due à Andronov, et ensuite à Leontovich, Gordon et Mayer qui l'ont complétée. En donnant en particulier la structure des trajectoires dans les *cas critiques au sens de Liapunov*, et le comportement sur l'équateur de Poincaré (comportement à l'infini), les résultats correspondants sont développés dans le livre [37], écrit après la mort d'Andronov.

L'une des contributions les plus spectaculaires de l'école d'Andronov porte sur la *théorie des bifurcations*, branche de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. En 1937, Andronov a été le premier à étudier analytiquement la bifurcation du plan phase engendrant m cycles limites à partir d'un *foyer complexe* de multiplicité $k > 1$ (cas critique au sens de Ljapunov), $m \leq k$. Cette bifurcation avait été

seulement décrite par Poincaré (*solution périodique de seconde espèce*), et avait été également étudiée par Hopf en 1942 pour $m = 1$. D'autres types de bifurcations ont été ensuite analysés par Andronov, Leontovich, Gordon, Mayer [38] : naissance de m cycles limites à partir d'une boucle constituée par les séparatrices d'un point d'équilibre col, ou à partir d'un cycle limite complexe de multiplicité $k > 1$; ou d'une boucle constituée par les séparatrices d'un point de type *col-nœud*, ou à partir d'une trajectoire fermée d'un cas conservatif. Tous ces résultats sont détaillés dans [38].

Dans le cadre de la théorie des bifurcations, Andronov et Pontrjagin ont introduit en 1937 le concept de « *grossièreté* » (ou *stabilité structurelle*). L'importance de ce concept est essentielle tant pour les questions théoriques, que pour les applications. Brièvement un système dynamique est « *grossier* » (ou *structurellement stable*) si la structure topologique de sa dynamique ne change pas pour de petites variations des paramètres du système, ou de faibles modifications de structure des équations le décrivant. On peut noter que, pour avoir un « sens physique », un modèle de système dynamique doit respecter les conditions suivantes :

- Une solution doit exister,
- Cette solution doit être unique,
- La solution unique doit être continue par rapport aux données contenues dans les conditions initiales, ou dans les conditions aux limites,
- Le système dynamique doit être « *grossier* » (ou *structurellement stable*).

Les trois premières conditions ont été formulées par Hadamard en 1923. L'étude du problème de la « *grossièreté* » (ou *stabilité structurelle*) peut être considérée comme complète pour les systèmes dynamiques autonomes bidimensionnels. Andronov et Pontrjagin ont formulé en 1937 les théorèmes correspondants dans le cas analytique. En 1952, De Baggis a donné la démonstration de ces théorèmes dans le cas plus général des fonctions continues et continument différentiables. L'espace des paramètres d'un système dynamique bidimensionnel est aussi divisé en cellules (régions), à l'intérieur de chacune d'elle il a le même comportement qualitatif, c'est-à-dire qu'il est « *grossier* » (ou *structurellement stable*). Les frontières des cellules correspondent à des *bifurcations*, où le système est « *non grossier* » (ou *structurellement instable*). Un exposé sur la notion de *degré d'instabilité structurelle*, introduite en 1939 par Andronov et Pontrjagin, est disponible dans la référence [38].

La connaissance des cellules du plan de phase, et de l'espace des paramètres, est de première importance pour l'analyse et la synthèse de systèmes dynamiques en physique, ou en sciences de l'ingénieur. Sur la frontière d'une telle cellule, le système dynamique est structurellement instable. Pour les systèmes autonomes bidimensionnels (champs de vecteurs bidimensionnels), les systèmes structurellement stables sont denses dans l'espace fonctionnel. Jusqu'en 1966, la conjecture de l'extension de ce résultat pour les systèmes de dimension supérieure à deux a été admise. Cependant Smale [33] a montré que cette conjecture est fautive en général. En effet avec une augmentation de la dimension du problème, une augmentation de la complexité de l'espace paramétrique (ou fonctionnel) apparaît. Les limites des cellules définies dans l'espace de phase, ainsi que dans l'espace des paramètres, ont en général une structure complexe, qui peut être fractale pour les champs de vecteurs de dimension n , $n > 2$.

La notion de *frontière dangereuse de stabilité* et de *frontière non dangereuse* dans l'espace des paramètres, due à Bautin en 1949 est une amélioration du concept d'*instabilité structurelle*. Elle est particulièrement importante dans les sciences de l'ingénieur, dans le cadre de la conception de systèmes à grande fiabilité. En effet, par variation des paramètres du système, la traversée d'une *frontière dangereuse de stabilité* donne lieu à un changement discontinu, brutal du comportement qualitatif du système dynamique, avec possibilité d'irréversibilité, c'est-à-dire en parcourant le chemin inverse dans l'espace paramétrique, on aboutit à un état différent de celui que l'on avait au départ de la variation. Dans le cas de la traversée d'une *frontière non dangereuse de stabilité*, le changement de comportement qualitatif est progressif, continu, et réversible. Cette question est développée dans [39]. Sachant que durant la « *vie* » d'un système dynamique des sciences de l'ingénieur, ses paramètres sont soumis à des variations dues au vieillissement des composants, et à l'action diverses perturbations, sa synthèse, implique un choix de ses paramètres suffisamment éloignés d'une *frontière dangereuse de stabilité*, afin d'éviter des pannes, ou même des dommages pour le système.

La notion de stabilité structurelle a une extension pour les systèmes dynamiques décrits par les équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \mu \frac{dy}{dt} = g(x, y), \mu > 0, \end{cases} \quad (1)$$

où x, y , sont des vecteurs ayant respectivement les dimensions s et m , μ étant un vecteur « petit paramètre » représentant l'influence d'éléments parasites du système, $f(x, y), g(x, y)$ étant deux fonctions bornées et continues dans le domaine considéré Ω de l'espace de phase de dimension $n = s + m$. On suppose aussi que, si $f(x, y), g(x, y)$ dépendent de μ , elles admettent des limites finies pour $\mu \rightarrow 0$.

Si $\mu = 0$, (1) se réduit à un système dynamique de dimension inférieure :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Les états possibles de (2) se situent maintenant dans un sous espace ω de Ω , ω étant défini par $g(x, y) = 0$. Le problème fondamental qui se pose est de savoir dans quelles conditions il est possible de ne pas tenir compte de certaines dérivées de (1), les termes $\mu dy/dt$ représentant les effets négligeables d'éléments parasites (capacités et inductances dans un système électrique, inerties et frottements dans un système mécanique). En d'autres termes, la question suivante se pose : quand la dynamique décrite par (1) est-elle suffisamment proche de celle décrite par (2), de sorte qu'elle peut être représentée par la solution de (2) définie pour une dimension inférieure ? Un tel problème, a eu une première solution mathématique « générale » avec Tikhonov [40], mais sa solution la plus élégante est due à Pontrjagin [41] en 1957, solution donnée aussi en France par Haag en 1943 (cf. plus bas le §.6.2).

Il est intéressant de noter que la formulation de cet important problème a son origine dans une discussion (1929) entre Andronov et Mandelstham, à propos du modèle du multivibrateur électronique à une seule constante de temps. En négligeant les éléments parasites tels que capacités et inductances parasites, le modèle est donc directement une équation différentielle autonome d'ordre un telle que (2), x étant un scalaire, dont la solution ne peut pas être une solution périodique. Or ce circuit électronique oscille avec une forme d'onde périodique et continue. Si l'on impose la condition que $y(t)$ est une fonction continue du temps, alors (2) n'admet aucune solution périodique. Dans la discussion de ce paradoxe entre Mandelstham-Andronov, l'alternative suivante a été formulée :

- (a) soit le modèle utilisé (2) n'est pas approprié pour décrire le multivibrateur,
- (b) soit son interprétation n'a pas de sens physique.

En 1930, Andronov a montré que les deux volets de l'alternative peuvent être utilisés pour résoudre le paradoxe, à condition de définir correctement l'espace des solutions admissibles (x, y) . En fait, en précisant que (x, y) doit être continu et continument différentiable, on aboutit à la conclusion que, sur des bases physiques, le modèle (2) est inapproprié parce que le multivibrateur réel contient des capacités (entre conducteurs de liaison voisins) et inductances (celles des conducteurs) très petites. Cependant le modèle de dimension plus élevée tenant compte des éléments parasites n'est pas totalement satisfaisant, car l'existence et la stabilité de la solution périodique cherchée dépend non seulement de la présence de paramètres parasites difficiles à mesurer, mais aussi de leur grandeurs relatives.

Andronov a montré qu'il est possible de s'affranchir de la dépendance sur les éléments parasites sur la base du volet (b) de l'alternative, en généralisant l'espace U des solutions admissibles (x, y) . En effet, si U est maintenant défini comme l'ensemble des fonctions continues par morceaux, et différentiables par morceaux, et si le système différentiel du premier ordre (2) est complété par des conditions appropriées de « saut » (*conditions Mandelstham*), permettant de joindre les divers morceaux de (x, y) , alors (2) admet une solution périodique continue par morceaux. Pour le multivibrateur, les conditions de « saut » se réduisent à dire que la différence de potentiel aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps. Physiquement, cela signifie que le courant électrique chargeant ce condensateur doit toujours être fini.

Les résultats de Mandelstam-Andronov-Tikhonov-Pontrjagin concernant la forme du modèle (1)-(2) sont particulièrement importants en relation avec deux problèmes : le premier est celui de la réduction de la dimension d'un modèle mathématique en fonction d'un critère de précision fixé à l'avance, le second concerne la théorie des oscillations de relaxation. Le livre de Michenko & Rozov [42], qui cite les résultats de Haag en 1943 (cf. plus bas le §.6.2), est entièrement consacré à ces questions.

Les résultats les plus importants de l'école d'Andronov, obtenus jusqu'en 1940, sont exposés dans l'ouvrage [36] (qui cite aussi les résultats de Haag) tout d'abord édité en russe (1937, et 1959), et ensuite traduit en anglais dans sa forme complète (1966). Avec une partie théorique de haut niveau, ce livre contient un grand nombre d'applications aux différentes sciences de l'ingénieur.

5.4 Développement des méthodes analytiques

Pour l'école de Gorki, les *méthodes analytiques* de la dynamique non linéaire ont aussi été un outil auxiliaire associé aux *méthodes qualitatives*, avec application à des problèmes spécifiques issus de la physique, et des sciences de l'ingénieur. Ainsi, dès 1932, Mandelstam et Papaleski ont utilisé la *méthode du petit paramètre de Poincaré* pour l'étude des *résonances non linéaires*, des *résonances sous-harmoniques*, et des *phénomènes de synchronisation* des oscillateurs.

En 1956, I. G. Malkin a publié un ouvrage [43] consacré à la *méthode de petit paramètre de Poincaré*, en ajoutant une méthode d'approximations successives dans le cas non analytique. Malkin a également publié une étude des *cas critiques au sens de Liapunov* par des méthodes analytiques [44].

Kiev a été le siège d'une école très active dans le domaine des méthodes analytiques d'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Les résultats sont un développement de la méthode classique des perturbations, qui a été généralisée aux systèmes non conservatifs. En 1932, Krylov et Bogoliubov ont apporté un fondement rigoureux aux études de Van der Pol sur les oscillateurs. Ce travail a ensuite conduit Mitropolski [45,46] à élaborer la *méthode asymptotique*. Dans le cas où les développements en série des solutions ne convergent pas, cette méthode résout le problème en utilisant des développements en série seulement asymptotiquement convergents. Il en est de même pour la *méthode de la moyenne* [47], et les *méthodes d'accélération de la convergence* [48]. Ces méthodes analytiques constituent une importante amélioration de la méthode du petit paramètre de Poincaré. Par rapport à cette dernière elles présentent l'avantage d'une détermination exacte de chaque harmonique d'une solution périodique, car cette détermination ne dépend plus maintenant de l'évaluation des harmoniques supérieures. Dans la méthode du petit paramètre de Poincaré, en particulier l'expression du premier harmonique est améliorée par les termes d'un développement où le petit paramètre intervient à des puissances croissantes.

La contribution de cette école aux méthodes analytiques est de première importance. Elle concerne : les systèmes avec un ou plusieurs degrés de liberté, la détermination des solutions périodiques, quasi et presque périodiques, la détermination des régimes transitoires, les propriétés des variétés intégrales, les résonances non linéaires, les résonances sous-harmoniques, le phénomène de synchronisation. Cette école s'est également orientée vers les systèmes dynamiques ayant des retards purs, dont les résultats ont servi de base aux recherches faites à Toulouse, décrites dans [49].

5.5 L'école de Gorki après la mort d'Andronov

Les études sur les équations différentielles autonomes menées par Andronov, sous l'angle des méthodes qualitatives, ont été poursuivies par Yu. I. Neïmark et ses collaborateurs, qui ont apporté une contribution importante à la *théorie des transformations ponctuelles* et à ses applications. La bibliographie de son livre [50], consacré à cette contribution, donne les références des résultats obtenus, dont ceux relatifs aux variétés invariantes. Les cas critiques (au sens de Ljapunov) des transformations ponctuelles, et les bifurcations par variation de paramètres lors de leur traversée, ont été aussi traités dans les cas les plus simples. En particulier, Neïmark a été le premier (1959) à décrire la bifurcation engendrant une courbe invariante fermée, à partir d'un *foyer complexe de multiplicité un*. Cette bifurcation a été longtemps indûment attribuée à Sacker sur la base d'une note interne (1964) de l'université de New York, donc non

publiée dans un journal (elle a même parfois été attribuée à Hopf). Elle est maintenant le plus souvent appelée *bifurcation de Neïmark-Sacker*. Neïmark a appliqué ses résultats sur les transformations ponctuelles à de nombreux problèmes d'équations différentielles ordinaires, tels que : l'influence des paramètres sur les solutions périodiques, les solutions d'équations linéaires par morceaux, la méthode du petit paramètre Poincaré considérée du point de vue des transformations ponctuelles, certaines extensions aux équations différentielles avec second membre discontinu, la méthode de la moyenne, la méthode de la transformation auxiliaire. Il faut aussi noter la contribution de N. N. Leonov (1959-1962) sur la structure des bifurcations des transformations unidimensionnelles discontinues, linéaires par morceaux [51], ou non linéaires [52]. Dans certains cas cette structure de bifurcation est fractale de type « *escalier du diable* » (voir [53, pp. 418-423]). En dehors d'un groupe à Toulouse, ces résultats ont été ignorés jusqu'aux années 2008 avec, avant cette date, des résultats partiellement redécouverts dans de nombreuses publications.

Sur la base des résultats concernant les systèmes dynamiques autonomes bidimensionnels obtenus par Andronov et ses collaborateurs, et celle des conditions suffisantes de stabilité structurelle énoncées par Smale [32,33], les études des systèmes dynamiques de dimension supérieur à 2 ont connu un développement spectaculaire en particulier avec les contributions de premier plan de Gavrilov, Shilnikov, Afraïmovitch, Gonchenko, Arnold. Ces contributions sont résumées dans le paragraphe 4 de [54].

5.6 L'école japonaise (Hayashi)

Cette école, dont le chef de file est Hayashi (Kyoto), a développé de nombreuses études, notamment orientées vers les circuits électriques et électroniques. Ses résultats, obtenus jusqu'en 1964, sont présentés dans [55,56]. Les méthodes analytiques, ainsi que les méthodes qualitatives, ont été intensivement utilisées par cet auteur et ses deux disciples Ueda (Kyoto) [57] et Kawakami (Tokushima) [58]. Les comportements complexes des oscillateurs autonomes, et des oscillateurs à excitations périodiques (externe ou paramétrique) ont fait l'objet d'un grand nombre de publications de ces auteurs et de leurs étudiants.

Par rapport aux publications de cette époque, on peut dire que c'est cette école qui a poussé le plus loin les études des phénomènes de *résonance non linéaire*, de *synchronisation de type harmonique*, *sous-harmonique*, *sur-harmonique*, et *fractionnaire*, ceci dans l'espace de phase et dans l'espace des paramètres. Les problèmes de comportements chaotiques, associés aux structures homoclines et hétéroclines, études directement liées à des modèles de circuits électroniques et électriques, ont aussi fait l'objet de publications. En 1961, Ueda avait déjà observé un comportement chaotique lors de la simulation (sur calculatrice analogique) d'une équation différentielle non autonome (à excitation périodique externe) bidimensionnelle [57, pp. 186-191].

6 France : contributions diverses

Ces contributions se sont faites essentiellement sur la base des résultats de Poincaré, et des méthodes analytiques, généralement en ignorant l'ensemble des travaux des écoles de Gorke et Kiev, sauf pour un groupe à Toulouse (à partir de 1959) qui s'est appuyé sur leurs résultats pour développer ses recherches. Il est impossible de citer tous les trop nombreux auteurs. Un petit nombre est retenu.

6.1 Théorie de la stabilité, régimes périodiques, points singuliers, trajectoires (1911-1948)

On peut noter :

- Emile Cotton avec les solutions asymptotiques des équations différentielles [59], les nombres caractéristiques [18].
- Henri Dulac et les solutions au voisinage de valeurs singulières [60]; sur les cycles limites [61,62].
- Alfred Liénard pour les oscillations entretenues [63].
- Philippe Le Corbeiller pour les oscillations entretenues et les oscillations de relaxations [64].
- Pierre Fatou [65].

- Notons aussi les extensions des résultats de Poincaré (points singuliers, trajectoires, méthode du petit paramètre) par G. Reeb (solution périodiques de systèmes à plusieurs degrés de liberté), Mme Dubois-Violette (trajectoires sur la sphère, et sur une surface de genre $p > 1$).

6.2 Travaux de Haag et Vogel. Régimes périodiques, oscillations de relaxation, systèmes héréditaires

Au siècle dernier deux chercheurs français, Haag et Vogel ont apporté une contribution de premier plan à l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Publiés en français ces travaux sont restés quasiment inconnus dans les publications en langue anglaise, ou française, après 1975 date du début du développement "explosif" des recherches en dynamique non linéaire. Pour cette raison cet article réserve un plus grand nombre de références à ces résultats, d'où un déséquilibre des citations par rapport aux autres auteurs..

Jules Haag (Besançon) a apporté une importante contribution, citée par les auteurs de l'école de Gorki. Il s'agit :

- Des *oscillations auto-entretenues* (ou *oscillations libres*) [66]. Cette note est citée dans le livre d'Andronov [36].
- Des solutions et de la stabilité de systèmes non linéaires [67].
- De la stabilité des points invariants d'une transformation [68].
- De l'extension des notions de cols, nœuds, foyer aux dimensions supérieures à 2 [69].
- Des *oscillations de relaxation* [70], résultats cités dans le livre d'Andronov [36].
- De la *synchronisation* des systèmes oscillants non linéaires [71].
- Des systèmes dynamiques à plusieurs degrés de liberté [72].

A Besançon, Jules Haag & Raymond Chaléat ont publié le livre *Problèmes de la théorie générale des oscillations, et de chronométrie* (Gauthier-Villars, 1960, Paris).

Théodore Vogel (Marseille) s'est intéressé aux problèmes des oscillations de relaxation dans le cadre plus général de ce qu'il nomme "*oscillations à déferlement*" (1951-1961). Ces résultats sont contemporains de ceux de Pontrjagin. A l'inverse de Haag, cette contribution n'est pas citée dans les publications de l'école de Gorki [36] et [42]. Il propose une théorie générale des dynamiques donnant lieu à « *déferlement* », associées à deux lois dynamiques différentes, avec passage brutal, soudain, d'une loi d'évolution à une autre, lors de la rencontre d'une variété donnée de l'espace de phase. Cet auteur propose une méthode géométrique qui permet l'étude qualitative de tels comportements, et des oscillations périodiques qu'elles peuvent engendrer. Le « *déferlement* » est alors représenté par une discontinuité mathématique d'un certain ordre, complétée par une condition de continuité. La méthode a été appliquée au multivibrateur à deux constantes de temps, cas particulier de dynamique à « *déferlement* ». Pour les oscillations de relaxation les résultats sont équivalents à ceux de l'école de Gorki, avec une démarche relativement différente, se voulant plus générale. A ce sujet on peut noter :

- La topologie des oscillations à déferlement [74] ;
- L'étude de certaines oscillations à déferlement [75] ;
- Examen de neuf *cas singuliers* de systèmes déferlants, [76].

Vogel avait aussi en vue l'extension de la théorie générale des systèmes dynamiques, avec la définition des différentes classes de systèmes évolutifs [73]. Dans ce cadre, les « *systèmes héréditaires* » (notion due à Volterra) ont constitué pour lui un sujet important d'études. Pour ces systèmes la loi d'évolution varie graduellement. Un tel système est régi par une équation intégral-différentielle où figurent, à côté de termes différentiels indiquant la tendance vers un certain état, des termes intégraux traduisant l'expérience accumulée par le système au cours de son mouvement antérieur. Vogel remplace, pour leur donner un sens physique, deux des quatre hypothèses de Volterra par celles de mémoire totale, et d'hérédité non linéaire. L'équation intégral-différentielle revient à considérer un système dynamique de plus grande dimension [77]. Cet auteur a été amené à associer « *systèmes héréditaires* » et « *systèmes à déferlement* ». Quatre articles présentent cette démarche [78,79,80,81]. Les systèmes à retard sont vus comme un cas particulier de ces systèmes [82]. Vogel a dirigé le *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille* de 1962 à 1973.

A Marseille, certains aspects de ces résultats ont été utilisés pour des études particulières, cf. par exemple Sidériades [83]. Cet auteur a aussi considéré, indépendamment des résultats antérieurs des écoles de Kiev, Gorki, et de l'école japonaise, le problème des oscillations forcées de l'équation de van der Pol [84].

6.3 Le groupe de Toulouse

Son activité s'est développée de 1958 à 1999. Elle a impliqué de nombreux chercheurs, dans le cadre de préparation de thèses, et publications postdoctorales, avec en vue des applications aux systèmes des sciences de l'ingénieur. Publiées au départ en français, les résultats de ce groupe sont restés longtemps peu connus, avant de faire l'objet d'un chapitre du livre *The chaos avant-garde* [85] qui donne une vue historique de l'évolution des recherches menées de 1958 à 1975. Ces recherches ont été lancées en 1958-1959 par Igor Gumowski. A cette époque, avec La Salle, Lefschetz et Minorsky aux USA, Gumowski était l'un des très rares scientifiques occidentaux ayant une connaissance approfondie des résultats du domaine de la dynamique non linéaire, obtenus dans l'ex-Union Soviétique. Les recherches du groupe se sont faites sur la base des travaux de Poincaré, de Ljapunov, des écoles de Kiev et de Gorki. En 1960-1961, à Toulouse des recherches sur les équations différentielles avec retard pur ont conduit Gumowski à une série de résultats originaux, dont ceux relatifs à un retard pur fonction de la variable dépendante avec application au modèle de l'amplificateur à transistor. Ces résultats, basés sur les méthodes analytiques, ont été publiés dans les *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences* (cf. [49] qui les récapitule). Plus tard, Gumowski a abordé le problème de la solution d'un système dynamique (variables réelles) décrit par

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad t > t_0, x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

où x est un vecteur, t , t_0 , et μ (paramètre) des scalaires, f un vecteur fonction au moins continue par rapport au temps t , analytique par rapport à x et à μ au moins pour des valeurs absolues de x , et μ inférieures à des valeurs données. Gumowski s'est penché sur le théorème d'analyticité de Poincaré, en notant qu'il est souvent utilisé de façon erronée pour prouver la dépendance continue et continument différentiable du paramètre dans la détermination d'une solution périodique de (3), cette dépendance étant supposée résulter de l'analyticité de f par rapport à x et à μ . En fait le théorème de Poincaré affirme que la solution de (3) peut être exprimée sous forme d'un développement en série en puissance de μ , dans un intervalle de temps borné par une fonction $\tau(t_0, x_0, \mu)$. Cette limitation liée aux propriétés de f , autre que la dépendance continue et continument différentiable, a une profonde influence sur la détermination des solutions périodiques, car en général le théorème ne peut être étendu pour $\tau \rightarrow \infty$, ou même pour $\tau > T$, T étant la période de la solution périodique considérée. Sur cette base, Gumowski améliore le recours aux méthodes analytiques par l'utilisation de substitutions paramétriques convenables, consistant en une récriture des paramètres de (3). Un résumé de cette question est donné [54, § 5.4].

Dans le cadre des méthodes qualitatives, les résultats de Neimark, sur les bifurcations des transformations ponctuelles par traversée de cas critiques, ont été généralisés de 1968   1974 (cf. [85,86], et leur bibliographie). En particulier, la traversée d'un cas critique avec multiplicateurs complexes (valeurs propres) $e^{\pm j\varphi}$, $j^2 = -1$, φ étant, ou n'étant pas commensurable, avec 2π , dans le cas général d'un foyer complexe de multiplicité supérieure à un, a été étudiée (1969-1971) en utilisant une forme normale, obtenue à partir d'une extension de la transformation Cigala [11] au cas non conservatif. La naissance de courbes fermées invariantes à partir d'un cas conservatif (sans, ou avec situation homocline) a été aussi considérée. Les transformations ponctuelles non inversibles ont été l'objet d'études poussées. Dans ce cadre, les travaux de Julia et Fatou sur les transformations à variable complexe, c' st-à-dire dans le cas particulier d'une transformation bidimensionnelle définie par des fonctions à variables réelles vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann, ont été étendus au cas général des transformations ne vérifiant pas ces conditions. Ainsi la notion de point critique d'une transformation à variable complexe a été généralisée en ligne critique, puis en variété critique pour des dimensions supérieures. Les bifurcations de bassin « *simplement connexe* \leftrightarrow *non connexe* », « *simplement connexe* \leftrightarrow *multiplement connexe* » ont alors pu être identifiées. Les résultats de Myrberg (1959-1963), le premier à avoir défini les cascades de bifurcations par

doublément de période dans une transformation unidimensionnelle quadratique (résultat généralement attribué à Feigenbaum, publié en 1978), ont conduit en 1975 à la mise en évidence de la structure fractale de bifurcation dite « boîtes emboîtées », qui pour une transformation bidimensionnelle se définit dans un plan paramétrique feuilleté. Un résumé de ces résultats et de leurs conséquences (avec références) est donné dans [85]. Ils sont détaillés dans les publications [86,54].

En septembre 1973, le groupe de Toulouse a organisé, dans cette ville, le colloque international *Transformations Ponctuelles et leurs Applications* [88], probablement le premier sur ce thème. Il s'est voulu un hommage à Poincaré (cf. l'exposé d'introduction qui fait en même temps un historique des résultats obtenus à cette époque [88, pp. 19-27]). Plusieurs communications sur les structures homoclines et hétéroclines présentaient des résultats nouveaux. Ensuite, sur ce modèle Targonski a poursuivi ce type de rencontre scientifique qui a lieu tous les deux ans, en lui donnant le nom de *European Conference on Iteration Theory* où le groupe de Toulouse figurait parmi les organisateurs.

7 Conclusion

La théorie des systèmes dynamiques non linéaires s'est essentiellement construite sur la base de la considération des phénomènes rencontrés dans le « monde réel ». A ce sujet, on peut parler de « théorie concrète » des systèmes dynamiques, élaborée par des mathématiciens au contact de ce « monde réel », par opposition à une « théorie abstraite » qui s'est développée par la suite dans le champ des mathématiques pures, car considérée comme une activité plus « noble ». La démarche de Poincaré [89], celles de Ljapunov, des écoles de Gorki et Kiev, celle de l'école japonaise, celles de Haag, de Vogel, du groupe de Toulouse en France, se situent dans le cadre d'une « théorie concrète », annoncée au 19^{ème} siècle par Joseph Fourier (cf. § 5.1, *L'étude de la nature est la source la plus productive des découvertes mathématiques*). Il est également intéressant de noter que la majorité des scientifiques (y compris les mathématiciens) n'ont pas été amenés à leurs découvertes par un processus de déduction à partir de postulats généraux, ou de principes généraux, mais plutôt par un examen approfondi de cas particuliers bien choisis. Les généralisations sont venues plus tard, car il est beaucoup plus facile de généraliser un résultat établi que de découvrir une nouvelle ligne d'argumentation. Il y a une centaine d'années, le mathématicien Halphen est connu pour s'être souvent plaint des généralisations non essentielles qui encombrant les publications. Depuis Poincaré, le développement important de la théorie des systèmes dynamiques a essentiellement ses origines dans l'étude des « effets naturels » rencontrés dans ces systèmes, et le rejet des généralisations non-essentielles.

Poincaré avait ce contact avec le « monde réel », comme le montrent en particulier ses études sur l'arc électrique, la télégraphie sans fil, les ondes électromagnétiques, et autres problèmes de la physique, où il manifestait son intérêt pour la physique expérimentale. A ce sujet Paty écrit [90]

« Nous le voyons alors déployer sa manière originale d'aborder les problèmes de physique, où l'attention la plus précise aux résultats d'expérience s'accompagne du raisonnement physique guidé par une attention aux principes et orienté vers la recherche d'une formulation mathématique ».

Plusieurs auteurs voient dans son étude de 1905 « *Sur la dynamique de l'électron* » [91], en même temps qu'Einstein, la prise en compte du principe de relativité pour l'électromagnétisme, et une théorie relativiste (au sens restreint) de la gravitation [92,93]. Dans [94] et [95, chap. 8], on peut trouver une réflexion sur le problème de l'établissement du modèle mathématique d'un système physique. Les écoles de Gorki et Kiev ont aussi eu ce contact avec le « monde réel », ce qui a conduit J. P. La Salle et S. Lefschetz à leur attribuer la première place en dynamique non linéaire (§ 5.1) à partir de 1935. De même en France, Haag et Vogel ont eu ce contact. Pour Vogel, la théorie des systèmes héréditaires est née en donnant un sens physique à deux quatre hypothèses formulées par Volterra pour sa célèbre équation intégral-différentielle.

Remerciements. Christophe Letellier a relu ce texte, et a apporté des améliorations.

Références

1. H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1**, 167-244, (1885)
2. H. POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Tomes 1, 2 & 3, (1892), (1893) & (1899)
3. H. POINCARÉ, *Oeuvres Complètes*, publiées par P. Appel (tome 1), G. Darboux (tome 2), J. Drach (tome 3), Gauthier-Villars, Paris
4. J.-M. GINOUX & L. PETITGIRARD, Poincaré's forgotten conferences on wireless telegraphy, *International Journal of Bifurcations & Chaos*, **20** (11), 3617-3626 (2010)
5. A. M. LJAPUNOV, Problème général de la stabilité du mouvement, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **9**, 203-474 (1907)
6. A. M. LJAPUNOV, *Stability of motion* (translated from Russian), Academic Press, New York (1966)
7. J. HADAMARD, Sur l'itération et solutions asymptotiques des équations différentielles, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **29**, 224-228 (1901)
8. J. HADAMARD, Sur les transformations ponctuelles, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **34**, 349-363 (1906)
9. J. HADAMARD, Two works on iteration and related questions, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **50**, 67-75 (1944)
10. T. LEVI-CIVITA, Sopra alcuni criteri di instabilità, *Annali di Matematica*, III, **5**, 221-305 (1901)
11. A. R. CIGALA, Sopra un criterio di instabilità, *Annali di Matematica*, III, **11**, 67-75 (1905)
12. S. LATTÈS, Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation, *Annali di Matematica*, III, **13**, 1-137 (1906)
13. S. LATTÈS, Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **39**, 309-345 (1911)
14. G. JULIA, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, VII, **4** (1), 47-245 (1918)
15. P. FATOU, Mémoire sur les équations fonctionnelles, *Bulletin de la Société de Mathématique de France*, **47**, 161-271 (1919)
16. P. FATOU, Mémoire sur les équations fonctionnelles, *Bulletin de la Société de Mathématique de France*, **48**, 33-94 et 208-314 (1920)
17. L. E. J. BROUWER, Continuous one-one transformations in themselves, *K. Akad. van Wetenschappen Amsterdam*, **11**, 788-798 (1909) — **12**, 286-297 (1909) — **13**, 767-777 (1910) — **14**, 300-310 (1911) — **15**, 352-360 (1912)
18. E. COTTON, Sur la notion de nombre caractéristique de Ljapunov, *Annales de l'Ecole Normale*, **3** (36), 128-185 (1919)
19. G. D. BIRKHOFF & P. A. SMITH, Structure analysis of surface transformations, *Journal de Mathématiques (Liouville)*, IX, **7**, 345-379 (1926)
20. G. D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, **9** (1927)
21. M. MORSE, George David Birkhoff and his mathematical work, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **52** (5), Part 1, 357-391 (1946)
22. G. D. BIRKHOFF, *G. D. Birkhoff's Collected Mathematical Papers*, Dover (1968)
23. G. D. BIRKHOFF, Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques, *Memoriae Pontifical Academia Scientia Novi Lyncaei*, **53** (1), 85-216 (1935)
24. A. DENJOY, Sur les courbes définies par des équations différentielles à la surface du tore, *Journal de Mathématique*, XI **4**, 333-375 (1932)
25. A. DENJOY, *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences de Paris*, **247**, 1072-1075 — **247**, 1096-1099 — **247**, 1923-1926 — **248**, 325-328 — **248**, 497-501 — **248**, 1253-1256 — **261**, 3917-3920 — **261**, 4293-4296 — **261**, 4579-4582 — **263**, 67-70 (1958-1966)
26. J. P. LASALLE & S. LEFSCHETZ, Recent Soviet contributions to ordinary differential equations and non-linear mechanics, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **2** (3), 467-499 (1961)

27. J. FOURRIER, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Firmin Didot Ed., Paris, (1822), réédité par J. Gabay (1988)
28. P. J. MYRBERG, Iteration von Quadratwurzeloperationen. I, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, **256**, 1-10 (1958)
29. P. J. MYRBERG, Iteration von Quadratwurzeloperationen. II, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, **268**, 1-10 (1959)
30. P. J. MYRBERG, Sur l'itération des polynômes réels quadratiques, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, IX, **41**, 339-351 (1962)
31. P. J. MYRBERG, Iteration von Quadratwurzeloperationen. III, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, **336**, 1-10 (1963)
32. S. SMALE, Diffeomorphisms with many periodic points, In *Differential Combinatorial Topology*, S. S. Cairns ed., Princeton University Press, pp. 63-80 (1963)
33. S. SMALE, Differentiable dynamical systems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 747-817 (1967)
34. E. C. BOÏKO, *L'école de l'Académicien Andronov* (en russe), Editions Nauka, Moscou (1983)
35. H. POINCARÉ, *Conférences sur la Télégraphie sans fil*, Éditions Lumière Électrique (1909)
36. A. A. ANDRONOV, A. A. WITT & S. E. KHAÏKIN, *Théorie des oscillations* (en russe), Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moscou (1959), Traduit en anglais, Pergamon Press (1966)
37. A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON & A. G. MAYER *Théorie qualitative des systèmes dynamiques* (en Russe), Ed. Nauka, Moscow (1966)
38. A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON I.I. & A. G. MAYER, *Théorie des bifurcations des systèmes dynamiques dans le plan* (in Russian), Ed. Nauka, Moscow (1967)
39. N. N. BAUTIN & E. A. LEONTOVITCH, *Méthodes et techniques de l'étude qualitative des systèmes dynamiques dans le plan* (en russe), Nauka, SMB, 1976, Moscou (1976)
40. A. N. TIKHONOV, Systèmes d'équations différentielles contenant des petits paramètres dans les dérivées, *Mat. Sbornik*, sc xxxi, **73**, 575-586 (1952)
41. L. S. PONTRJAGIN, Comportement asymptotique des solutions des systèmes d'équations différentielles quand les dérivées d'ordre le plus élevé contiennent un petit paramètre, *Izv. Acad. Nauk, Mat Ser.*, **21**, 605-626 (1957)
42. E. F. MICHENKO & N. K. ROZOV, Differential equations with small parameter and relaxation oscillations (in Russian), Nauka, Moscow (1975)
43. I. G. MALKIN, *Some problems in the theory of nonlinear oscillations*, Moscow (1956), traduit en anglais : AEC-tr-3766 (books 1 & 2), United States Atomic Energy Commission (1959)
44. I. G. MALKIN, *Théorie de la stabilité du mouvement* (en Russe), Izd. Nauka, Moscou. (1966)
45. N. BOGOLIUBOV & YU A. MITROPOLSKI, *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires* (traduction en français à partir de la seconde édition en russe). Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, Gauthier-Villars, Paris (1962)
46. YU A. MITROPOLSKI, *Problèmes de la théorie asymptotique en théorie des oscillations stationnaires* (traduction en français à partir de la seconde édition en russe). Monographies Internationales de Mathématiques Modernes Gauthier-Villars, Paris (1966)
47. N. BOGOLIUBOV & YU A. MITROPOLSKI & A. M. SAMOILENKO, *Méthode de l'accélération de la convergence en mécanique non linéaire* (en Russe), Naukova Dumka, Kiev (1969)
48. YU A. MITROPOLSKI, *La méthode de la moyenne en mécanique non linéaire* (en Russe). Naukova Dumka, Kiev (1971)
49. I. GUMOWSKI, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, **249**, 2514-2517 (1959) — **250**, 822-825 (1960) — **250**, 1995-1998 (1960) — **250**, 3142-3145 (1960) — **250**, 4322-4325 (1960) — **253**, 1671-1674 (1961) — **253**, 2207-2210 (1961)
50. YU I. NEÏMARK, *La méthode des transformations ponctuelles dans la théorie des oscillations non linéaires* (en Russe), Nauka, Moscou (1972)
51. N. N. LEONOV, Map of the line onto itself, *Radiofizika*, **2** (6), 942-956 (1959) — **3** (3), 496-510 (1960) **3** (5), 872-886 (1960)

52. N. N. LEONOV, Discontinuous map of the line, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **143** (5), 1038-1041 (1962)
53. I. GUMOWSKI & C. MIRA *Dynamique chaotique*, Ed. Cépadues, Toulouse (1980)
54. C. MIRA, Some historical aspects of nonlinear dynamics. Possible trends for the future, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **7** (9), 2145-2173 (1997)
55. C. HAYASHI, *Nonlinear oscillations in physical systems*, Mc Graw-Hill, New York (1964)
56. C. HAYASHI, *Selected papers on nonlinear oscillations*, Nippon Printing and publishing Company, Osaka (1991)
57. Y. UEDA, *The road to chaos*, Aerial Press, Santa Cruz (1992)
58. H. KAWAKAMI *Collected papers*, Publication 585 50 234 of the faculty of Sciences of the Tokushima University (1986)
59. E. COTTON, Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III, **28**, 473-521 (1911)
60. H. DULAC, Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **40**, 324-383 (1912)
61. H. DULAC, Sur les cycles limites, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **51**, 45-188 (1923)
62. H. DULAC, Recherche des cycles limites, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **204**, 1703-1706 (1937)
63. A. LIÉNARD, Etude des oscillations entretenues, *Revue Générale de l'Electricité*, **23**, 901-948 (1928)
64. P. LE CORBEILLER, *Les oscillations entretenues et oscillations de relaxation*, Hermann, Paris (1931)
65. P. FATOU, Mouvement d'un système soumis à des forces de courte période, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **56**, 98-139 (1928)
66. J. HAAG, Sur les oscillations auto-entretenues, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **199**, 906-909 (1934)
67. J. HAAG, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Sur la stabilité des solutions de certains systèmes d'équations différentielles, II, **70** 21-36 (1946) — Sur certains systèmes d'équations différentielles définis par des fonctions périodiques et continues, II, **71**, 205-219 (1947) — Sur l'apparition des solutions associées d'un système différentiel à coefficients périodiques, II, **72**, 69-72 (1948) — Sur certains systèmes différentiels à solutions périodiques, II, **70**, 155-172 (1946) — Sur certains systèmes différentiels à solutions périodiques lentement variable, II, **75**, 15-21 (1951)
68. J. HAAG, Sur la stabilité des points invariants d'une transformation, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, II, **73**, 123-134 (1949)
69. J. HAAG, Cols, Noeuds et Foyers, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, II, **74**, 167-192 (1950)
70. J. HAAG, Sur l'étude asymptotique des oscillations de relaxation, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **292**, 102-105 (1936) — Etude asymptotique des oscillations de relaxation, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III **60**, 35-64 et 65-111 (1943) — Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillation de relaxation, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III, **61**, 73-117 (1944)
71. J. HAAG, Sur la synchronisation des systèmes oscillations non linéaires, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III, **67**, 321-392 (1950)
72. J. HAAG, Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, III, **64**, 285-338 (1947)
73. T. VOGEL, Sur différentes classes de systèmes évolutifs. *Buletinul Institutului Politehnic din Iasi*, IX, **10**, 28-36 (1964)
74. T. VOGEL, Topologie des oscillations de déferlement, Actes du *Colloque International des Vibrations non linéaires*. Ile de Porquerolles, 237-256 (1951)
75. T. VOGEL, Sur certaines oscillations à déferlement, *Annales de Télécommunication*, **6** (7), 182-189 (1951)
76. T. VOGEL, Sur les systèmes déferlants, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **81** (1), 63-75 (1953)
77. T. VOGEL, Sur des systèmes dynamiques à hérédité non linéaires et à mémoire totale, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **245**, 1224-1226 (1957) — Systèmes dynamiques héréditaires, *Cahiers de Physique*, **107-108**, 319-328 (1959) — Solutions périodiques des systèmes héréditaires, *Proceedings of Vibration problems* (Warsaw), **3** (1), 3-21 (1962) — Théorie des systèmes périssables : application à la fatigues des métaux, *Journal de Mécanique*, II, **4**, 475-492

78. T. VOGEL, Systèmes dynamiques héréditaires à déferlement, *Rendiconti del Seminario Matematici della Università di Padova*, **22**, 64-80 (1953)
79. T. VOGEL, Systèmes dynamiques à hérédité non linéaire et à mémoire totale, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **246**, 59-61 (1958) — Hérédité discontinue dans les systèmes dynamiques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **246**, 1379-1381 (1958)
80. T. VOGEL, Dynamique théorique et hérédité, *Rendiconti del Seminario Matematici dell'Università e del Politecnico di Torino*, **21**, 87-98 (1961-1962)
81. T. VOGEL, Systèmes déferlants, systèmes héréditaires, systèmes dynamiques, *Trudy Miedzunarodowo Simposiuma po Nelinei Kolebaniam* (Kiev) **2**, 123-130 (1963)
82. T. VOGEL, Systèmes à retard, *Colloques Internationaux du CNRS*, n°**148**, 39-55, Editions du CNRS (1965)
83. M. L. SIDÉRIADÈS, Systèmes couplés non linéaires, *Le Journal de Physique et le Radium*, supplément au n°11 (tome 17), 159-175 (1956)
84. M. L. SIDÉRIADÈS Les solutions forcées de l'équation de van der Pol, *L'Onde Electrique*, **463**, 1216-1224 (1965)
85. R. Abraham & Y. Ueda Y. Ed., I. Gumowski and a Toulouse research group in the "prehistoric" times of chaotic dynamics, In *The chaos avant-garde. Memories of the early days of chaos theory*, World Scientific series on nonlinear sciences A, **20** pp. 95-197 (2000)
86. C. MIRA, *Chaotic dynamics*, World Scientific Publishing (1987)
87. C. MIRA, L. GARDINI, A. BARUGOLA & J. C. CATHALA, *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*, World Scientific Publishing (Nonlinear Science Series A), **20**, (1996)
88. *Transformations Ponctuelles et leurs Applications* (Toulouse 10-14 septembre 1973), Colloques internationaux du CNRS **229** Editions du CNRS (1976)
89. *La science et l'hypothèse*, Flammarion (1902)
90. M. PATY, La place des principes dans la physique mathématique au sens de Poincaré, *Fundamenta philosophiæ*, **3** (2), 61-74 (1998-1999)
91. H. POINCARÉ, La dynamique de l'électron, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, **19**, 386-402 (1908)
92. H. POINCARÉ, Sur la dynamique de l'électron, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **140**, 1504-1508 (1905)
93. H. POINCARÉ, Sur la dynamique de l'électron, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **21**, 129-175 (1906)
94. H. POINCARÉ *Science et méthode*, Flammarion (1908)
95. H. POINCARÉ *Dernières pensées* Flammarion (1919)

Fluage et rupture dans un matériau granulaire

Axelle Amon¹, Van Bau Nguyen², Aary Bruand³, Jérôme Crassous¹, & Eric Clément²

¹ Institut de Physique de Rennes, UMR 6251 et Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France

² PMMH, ESPCI, UMR 7636 et Université Paris 6 & Paris 7, 75005 Paris, France

³ ISTO, UMR 6113, 45000 Orléans, France

axelle.amon@univ-rennes1.fr

Résumé. Nous présentons des résultats expérimentaux sur la localisation de la déformation survenant dans un empilement granulaire à faible taux de cisaillement. Nous utilisons une méthode originale de mesure de la déformation basée sur la diffusion multiple de la lumière. Grâce à cette méthode, nous avons mis en évidence des hétérogénéités dynamiques d'une taille typique d'une dizaine de tailles de grains. Nous montrons que le taux d'apparition de ces structures correspond à une variable phénoménologique, la *fluidité*, introduite dans de nombreux modèles récents de rhéologie des matériaux amorphes.

Abstract. We study experimentally the localization of deformation occurring at slow shear, in a 3D granular packing. We use an original method of measurement of deformation based on Diffusive Wave Spectroscopy. We evidence localized regions of strong deformations spanning a mesoscopic size of about 10 grains. We link the apparition rate of those spots to the concept of *fluidity*, recently used to describe the local and non-local rheology of soft glassy materials.

1 Introduction

Une large classe de matériaux désordonnés (mousses, milieux granulaires, verres métalliques, verres colloïdaux, émulsions concentrées...) présentent une phénoménologie commune lorsqu'ils sont soumis à une sollicitation. A faible contrainte, leur réponse est semblable à celle d'un solide alors qu'à fort taux de cisaillement ils se mettent à couler, la déformation ayant alors tendance à être localisée sous la forme de bandes de cisaillement. Récemment, plusieurs modèles [1,2] décrivant cette rhéologie complexe introduisent une variable nommée *fluidité*. Reprenant des hypothèses introduites originalement par Argon [3], ces modèles supposent l'existence de réarrangements locaux couplés élastiquement à grande distance.

Une caractéristique de la plupart de ces milieux hétérogènes est de diffuser fortement la lumière. Nous utilisons une méthode de mesure de déformation originale [4,5] mettant à profit cette caractéristique dans le cas d'un empilement de billes de verre soumis à un cisaillement [6,7]. Cette méthode nous a permis de mettre en évidence l'existence de zones de déformation localisée d'une taille typique d'une dizaine de diamètres de grains. Lorsque le taux de déformation est imposé, des ruptures successives ont lieu dans le matériau. Avant une de ces ruptures, ces zones de déformations sont plus nombreuses et groupées dans une région où la bande de cisaillement apparaît. Dans le cas d'expériences en contrainte imposée, une déformation plastique globale de type fluage a lieu dans le matériau. Nous montrons que cette déformation plastique est le résultat de l'accumulation de ces zones de déformation localisée.

Dans cet article, nous décrivons en premier lieu notre dispositif expérimental, notamment notre méthode optique de mesure de micro-déformations. Nous présentons ensuite les résultats obtenus dans deux configurations de sollicitation mécanique : à taux de déformation imposé et à contrainte imposée. Nous discutons finalement ces résultats expérimentaux à la lumière des modèles actuels de rhéologie des matériaux amorphes.

2 Dispositif expérimental

Notre dispositif expérimental est une cellule de cisaillement de type scissomètre dont un schéma est donné Fig. 1 [6]. La cellule est un cylindre de hauteur 10 cm et de diamètre 10 cm. Il est rempli de billes

de verre de diamètre $200 \mu\text{m}$. L'empilement est préparé de manière à obtenir une compacité de 0.60. Un système de quatre pales plongé au milieu de la cellule peut être mis en rotation à l'aide d'un moteur. Le couple exercé est mesuré, ainsi que l'angle de rotation du système de pales (Fig. 1). Une boucle de rétroaction permet d'imposer une contrainte.

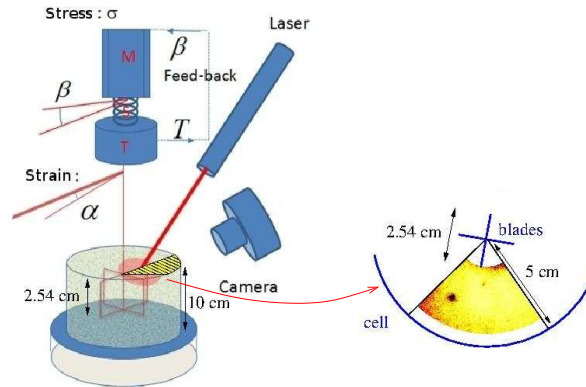


Figure 1. Schéma du dispositif expérimental. M : moteur, T : capteur de mesure du couple. Le dispositif optique de détection comprend une lentille et un diaphragme (Fig. 2). Un extrait de carte de corrélation en intensité est montré sur la partie droite de la figure, dans toutes les représentations utilisées, l'échelle de couleur correspond à une corrélation $g_I = 1$ pour le jaune le plus clair et $g_I \leq 0.95$ pour le noir.

De manière complémentaire à ces mesures macroscopiques de la déformation et de la contrainte cisailante, un dispositif optique permet d'obtenir une carte résolue spatialement des déformations ayant lieu à proximité de la surface supérieure de la cellule [7]. La surface de l'empilement est éclairée par un laser et la lumière rétrodiffusée est collectée par une caméra fonctionnant à 1 image par seconde (Figs 1 et 2). Comme la lumière incidente est cohérente, le motif ainsi collecté est une image de *speckle*, résultat des interférences entre les rayons lumineux ayant suivi une marche aléatoire dans le milieu. L'extension typique du volume exploré par les rayons avant de ressortir est la *longueur de transport* $l^* \sim 3$ tailles de billes. Lorsque la position des diffuseurs est modifiée, la différence de marche entre les rayons l'est aussi et la figure de speckle change. En calculant la corrélation en intensité entre deux images de *speckle* correspondant à deux états différents du matériau, on peut remonter à des informations concernant le déplacement de ces diffuseurs.

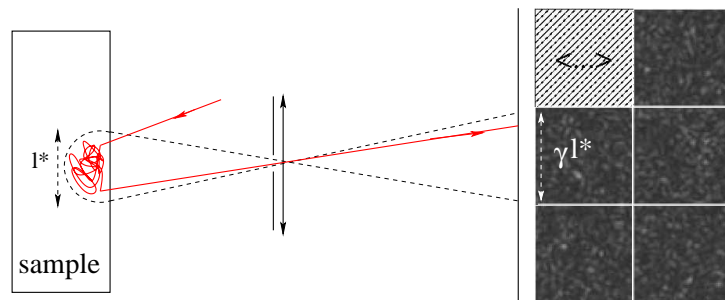


Figure 2. Schéma du dispositif de détection optique : une lentille fait l'image de la surface de l'empilement sur la caméra avec un grandissement γ et un diaphragme permet de contrôler la taille des taches de speckle obtenues sur la matrice CCD. A droite : extrait d'une figure de speckle sur laquelle sont représentées les zones utilisées pour les moyennes d'ensemble dans le calcul de corrélation en intensité entre deux images successives.

Dans le cas d'un matériau contenant des diffuseurs de Mie et lorsque la déformation peut être considérée comme affine à l'échelle de l^* , nous avons montré [4] que la corrélation en intensité dépend de la manière suivante du champ de déformation :

$$g_I \simeq \exp(-c\bar{\epsilon}) \quad (1)$$

où $\bar{\epsilon} = \sqrt{(1/2) \times \text{Tr}^2(\epsilon) + \text{Tr}(\epsilon^2)}$ est lié aux invariants quadratiques du tenseur des déformations ϵ et $c \simeq 1.5 \cdot 10^4$ est une constante dépendant des caractéristiques mécaniques du matériau et de paramètres optiques [5]. Typiquement, les déformations mesurées sont dans la gamme $10^{-5} - 10^{-6}$. Cette méthode permet donc d'avoir accès à des déformations beaucoup plus faible que celles mesurées par des méthodes de mesures traditionnelles. Dans le cas de l'échelle de couleur utilisée dans les figures, la couleur la plus claire (blanc) correspond à une déformation $\bar{\epsilon} \leq 10^{-7}$ et la couleur la plus foncée à $\bar{\epsilon} \geq 10^{-5}$.

Les corrélations sont prises entre deux images successives et les moyennes sont faites sur un ensemble de pixels correspondant à une zone de taille l^* sur l'échantillon (Fig. 2). En effet, le processus de diffusion ayant lieu typiquement sur cette taille, il fixe la limite de résolution spatiale de la méthode, de l'ordre de $3l^* = 600 \mu\text{m}$ dans notre cas. La carte de corrélation ainsi obtenue donne une carte incrémentale des déformations locales ayant eu lieu pendant une seconde.

3 Rupture

La figure 3a montre une courbe typique de réponse en contrainte lorsque la rotation du moteur est imposée. On observe une charge du matériau dans un premier temps linéaire, interrompue par des chutes de contrainte qui correspondent à des événements macroscopiques précurseurs à la rupture. Arrivé à un certain niveau de contrainte (noté σ_Y sur la figure 3(a)), le matériau rompt et la réponse présente ensuite des oscillations globalement régulières du type *stick-slip*. La figure 3(b) montre la séquence de cartes de déformations précédant la première chute de contrainte dans le matériau, à σ_r . On observe que des zones de déformations localisées, d'abord disséminées et intermittentes, se regroupent en une large zone qui décorrèle brutalement au moment de la chute de contrainte.

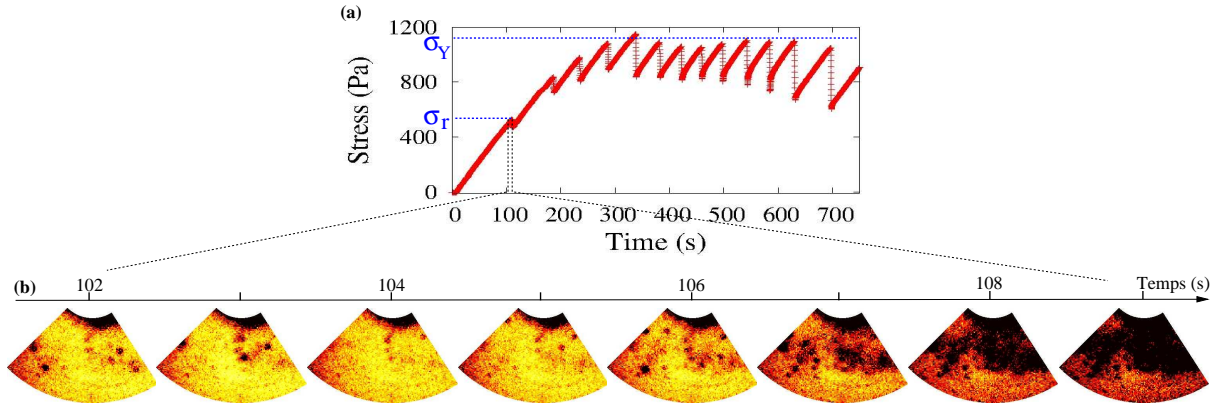


Figure 3. Charge du matériau granulaire à rotation du moteur imposée. (a) Réponse en contrainte : σ_r est le premier précurseur à la rupture, σ_Y désigne la contrainte de rupture du matériau au-delà de laquelle la réponse correspond à un régime de *stick-slip*. (b) série de cartes de corrélations successives montrant la déformation locale. L'échelle de couleur est la même que celle de la figure 1.

4 Fluage

Lorsqu'une contrainte cisailante constante est imposée au matériau, on observe une déformation plastique lente du matériau, du type fluage. La mesure macroscopique de cette déformation est représentée

par les triangles bleus sur la figure 4. On observe une déformation qui croît logarithmiquement avec le temps. Une telle évolution peut être modélisée par un ensemble d'équations proposé par Derec *et al.* [2] pour la rhéologie des matériaux amorphes :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -f\sigma + G\dot{\gamma} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -af^2 + r\dot{\gamma}^2 \quad (3)$$

où f est une variable phénoménologique correspondant au taux de relaxation de la contrainte, généralement appelée *fluidité*. G est le module de cisaillement, σ la contrainte (constante dans les expériences de la figure 4) et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement. Les paramètres a et r sont phénoménologiques, avec $-af^2$ un terme de vieillissement entraînant une augmentation du temps caractéristique de relaxation de la contrainte et $r\dot{\gamma}^2$ un terme de rajeunissement de la *fluidité* induit par le taux de cisaillement. La courbe bleue de la figure 4 est un ajustement des points expérimentaux par une loi logarithmique obtenue à partir des équations 2 et 3.

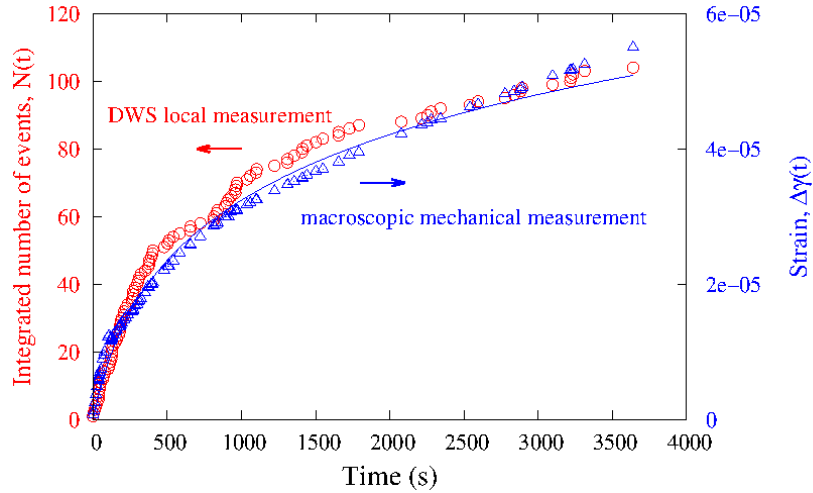


Figure 4. En bleu : déformation macroscopique globale mesurée lors d’une expérience à contrainte imposée. La courbe en trait continu bleu est un ajustement par une loi logarithmique correspondant à la résolution des équations 2 et 3. En rouge, intégration du nombre de points observés simultanément sur les cartes de déformation.

L’observation des cartes de déformation lors de ce lent phénomène de fluage montre l’apparition d’évènements de déformation localisée dont le taux diminue au cours du temps. La majorité de ces évènements ne sont observés que durant une carte de corrélation, montrant que leur durée typique est inférieure à la seconde. Un tel évènement peut être vu sur la partie droite de la figure 1 : leur taille est de l’ordre d’une dizaine de taille de grains et la déformation correspondant à la chute de corrélation est en moyenne $\bar{\epsilon} \simeq 5 \times 10^{-6}$. Le comptage du nombre de ces points depuis le début du processus de fluage montre que la déformation macroscopique globale est proportionnelle au nombre cumulé de réarrangements locaux observés dans le système.

Cette proportionnalité nous conduit à identifier le taux d’apparition des zones de déformation localisées \dot{N} à la fluidité f dans les équations 2 et 3. On obtient alors que le nombre cumulé de zones réarrangées depuis le début du processus est proportionnel à la déformation globale du matériau. On s’attend en effet à ce que la déformation globale $\Delta\gamma$ soit alors de la forme :

$$\Delta\gamma \propto \frac{\sigma}{G}N(t). \quad (4)$$

Cette dépendance peut être vérifiée dans un premier temps en faisant varier la contrainte imposée. La figure 5 regroupe des expériences à différentes contraintes imposées montrant la dépendance linéaire de N en fonction de $\Delta\gamma$. Comme attendu par l'équation 4, la pente de ces droites diminue quand la contrainte imposée augmente. Dans l'insert est reporté le produit σN en fonction de $\Delta\gamma$ montrant une superposition raisonnable de tous les points de la figure principale sur une droite unique (symboles noirs).

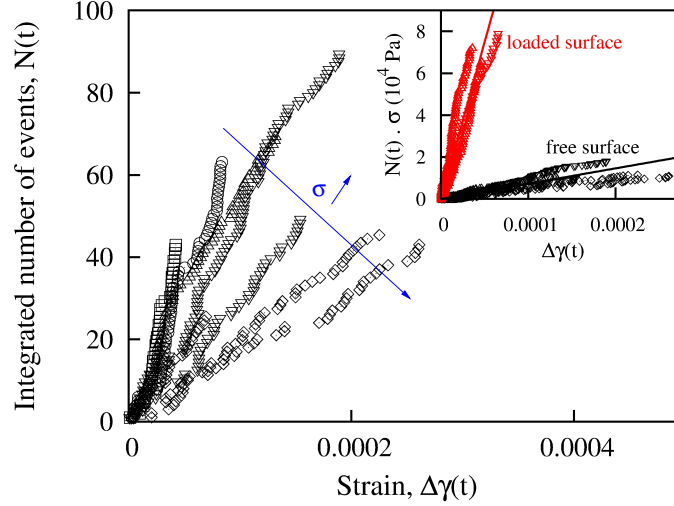


Figure 5. Nombre cumulé de zones de déformation localisée en fonction de la déformation globale, mesurée indépendamment, durant une expérience de fluage et pour différentes valeurs de la contrainte imposée σ . Insert : produit σN en fonction de $\Delta\gamma$ pour deux valeurs différentes du module de cisaillement G du matériau.

Dans un deuxième temps, pour tester la validité de l'équation 4, nous avons modifié le module de cisaillement du système. Comme le module de cisaillement d'un empilement granulaire dépend de la pression de confinement [6], nous avons ajouté une plaque de verre lestée sur la surface des granulaires. Nous avons ainsi pu simuler expérimentalement une pression de confinement plus grande sur la partie supérieure de l'empilement. Cette nouvelle série d'expérience confirme par ailleurs que les zones localisées observées ne sont pas un simple phénomène de surface libre. En effet, la phénoménologie générale n'est pas modifiée par l'ajout de cette plaque. D'autre part l'évolution de la dépendance de σN en fonction de $\Delta\gamma$ correspond à celle attendue : lorsque le module de cisaillement augmente, le nombre d'événements locaux augmente (voir encart de la figure 5).

5 Conclusion

Nous avons présenté des expériences concernant la réponse mécanique d'un empilement granulaire à un faible cisaillement. Nous avons montré que la déformation macroscopique globale est liée à des événements localisés dont le taux d'apparition peut être relié à une variable phénoménologique introduite dans de nombreux modèles de rhéologie des milieux amorphes : la *fluidité*. L'apparition de ces événements localisés s'accélère lorsqu'une bande de cisaillement apparaît dans le système.

Références

1. P. SOLLICH, F. LEQUEUX, P. HÉBRAUD & M. E. CATES, Rheology of soft glassy materials, *Physical Review Letters*, **78**, 2020–2023 (1997).

2. C. DEREK, A. AJDARI & F. LEQUEUX, Rheology and aging : A simple approach, *European Physical Journal E* **4**, 355-361 (2001).
3. A. S. ARGON, Plastic deformation in metallic glasses, *Acta Metallurgica*, **27**, 47-58 (1979).
4. M. ERPELDING, A. AMON & J. CRASSOUS, Diffusive wave spectroscopy applied to the spatially resolved deformation of a solid, *Physical Review E*, **78**, 046104 (2008).
5. M. ERPELDING, A. AMON & J. CRASSOUS, Mechanical response of granular media : New insights from Diffusing-Wave spectroscopy, *Europhysics Letters*, **91**, 18002 (2010).
6. V. B. NGUYEN, T. DARNIGE, A. BRUAND & E. CLÉMENT, Creep and fluidity of a real granular packing near jamming, *Physical Review Letters*, **107**, 138303 (2011).
7. A. AMON, V. B. NGUYEN, A. BRUANT, J. CRASSOUS & E. CLEMENT, *Physical Review Letters*, à paraître.

Convergence géométrique à deux échelles dans le formalisme covariant. Applications à l'équation de Vlasov homogénéisée.

Back Aurore¹ & Frénod Emmanuel²

¹ Centre de physique théorique-CNRS, Marseille

² Université de Bretagne-Sud, Vannes

aurore.back@cpt.univ-mrs.fr

Résumé. On développe et on explique la convergence à deux échelles dans le formalisme covariant, c'est-à-dire en utilisant les formes différentielles sur des variétés riemanniennes. Pour cela, on va considérer deux variétés riemanniennes notées M qui contiendra les variables positions, et Y qui contiendra les oscillations. On établira alors des résultats de convergence en travaillant sur les géodésiques et on appliquera nos résultats sur des exemples.

Abstract. We develop and we explain the two-scale convergence in the covariant formalism, i.e. using differential forms on a Riemannian manifold. For that purpose, we consider two manifolds M and Y , first will contain the positions and the other one the oscillations and we establish some convergence results working on the geodesic on the manifold Y . Then we transpose these work on an example describe in article [2] and we also establish some results on some examples.

1 Introduction

La convergence à deux échelles initiée par Nguetseng [6] et reprise par Allaire [5] permet d'établir des résultats de convergence pour une suite de fonctions $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie dans un ouvert W de \mathbb{R}^n et présentant des oscillations de période ϵ vers une fonction $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ définie sur $W \times \mathbb{R}^n$ et périodique en \mathbf{y} . Le principe est le suivant : on fixe la période et on a u^ϵ qui est solution d'une équation de la forme $L^\epsilon u^\epsilon = f$, sur l'ouvert W avec L^ϵ est un opérateur différentiel présentant des oscillations de période ϵ et f un terme source indépendant de ϵ (on peut ajouter également des conditions au bords appropriées). On dira alors que la suite de fonction $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans $L^r(W)$ pour $r \in]1, +\infty]$ converge à deux échelles vers une fonction U dans l'espace $L^r(W, L^r_{per}(Y))$ si pour toute fonction $\psi \in C_c^0(W, C^0_{per}(Y))$ on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_W u^\epsilon(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}) d\mathbf{x} = \int_Y \int_W U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dx dy .$$

U est alors appelé la limite à deux échelles de u^ϵ dans $L^r(W, L^r_{per}(Y))$. Nguetseng [6] et Allaire [5] ont établi un critère de convergence à deux échelles qui sera très utile pour établir un système d'équations différentielles vérifié par la limite deux échelles. Frénod, Sonnendrücker [4], Han-Kwan [12] et bien d'autres ont utilisé ces outils dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson.

Comme les équations de la Physique peuvent s'écrire en utilisant les formes différentielles, on propose ici de développer la convergence à deux échelles dans le cadre de la géométrie différentielle [1,2]. Ceci permet de travailler dans un cadre plus adapté pour les équations (sur des les variétés différentielles). Pour ce faire on devra utiliser l'analyse fonctionnelle dans le cadre du formalisme covariant, théorie développée par Scott [3] et appelée L^r -cohomologie. On verra que cette convergence géométrique à deux échelles résulte du théorème de Birkhoff et permet de faire de l'analyse asymptotique en utilisant des objets géométriques. Cette étude a été commencée récemment par Pak [2]. On expliquera cette nouvelle théorie ainsi que les notions de convergence forte et faible dans ce formalisme.

Il est alors intéressant d'appliquer cette théorie sur l'équation de Vlasov. En adimensionnant celle-ci, on arrive à mettre en évidence le rayon de Larmor fini [4] et on fait donc apparaître dans cette équation les oscillations de période ϵ . On peut ainsi l'écrire sous la forme $L^\epsilon u^\epsilon = 0$. On utilisera alors la convergence géométrique à deux échelles sur l'équation de Vlasov et on établira une équation différentielle vérifiée par la limite deux échelles.

2 La convergence géométrique à deux échelles

Les formes différentielles ne sont pas obligatoirement des objets réguliers. On va donc tout d'abord rappeler quelques notions utiles à l'analyse fonctionnelle et les adapter pour les formes différentielles. Ceci nous permettra de définir une analyse fonctionnelle utilisant des éléments géométriques tels que les formes différentielles. Cette théorie est la L^r -cohomologie. On note une k -forme différentielle sur M , $\omega^k : M \rightarrow \bigwedge^k(T^*M)$ et l'ensemble des k -formes différentielles sur M , $\Omega^k(M)$. Au dessus d'une carte locale de M on a (x_1, \dots, x_n) le système de coordonnées local de p un point de M , toute k -forme différentielle sur M peut s'écrire $\omega_p^k = \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}^k(x) dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}$. On notera également par $L^r(M, \bigwedge^k)$ l'espace des k -formes différentielles r -intégrables. Il est défini par : $L^r(M, \bigwedge^k) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \text{ mesurable tel que } \|\alpha\|_{L^r(M, \bigwedge^k)} < +\infty\}$, pour $1 \leq r \leq +\infty$, avec $\|\alpha\|_{L^r(M, \bigwedge^k)} := \left(\int_M |\alpha|_p^r \text{vol}_p\right)^{\frac{1}{r}}$, pour $1 \leq r < \infty$ et $\|\alpha\|_{L^{+\infty}(M, \bigwedge^k)} := \sup_{p \in M} \text{ess}|\alpha|_p$, où $|\alpha|_p^r = (\star(\alpha_p^k \wedge \star\alpha_p^k))^{\frac{r}{2}} = \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} (\alpha_{i_1, \dots, i_k}(x))^2\right)^{\frac{r}{2}}$. On associe un produit scalaire à la norme $\|\alpha\|_{L^2(M, \bigwedge^k)}$ de la façon suivante $\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} := \int_M \alpha \wedge \star\beta$, avec $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ mesurables. On a $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui sont bien définis car ils ne dépendent pas des cartes sur M .

Soient maintenant M et Y des variétés riemanniennes de dimension n , on définit des formes différentielles qui sont des k -formes sur M et l -formes sur Y :

$$\begin{aligned} \omega^{k,l} : M \times Y &\longrightarrow \bigwedge^k(T^*M) \times \bigwedge^l(T^*Y) \\ (p, q) &\longmapsto (p, q, \omega_{(p,q)}^{k,l}) \end{aligned}$$

$L^r(M, \bigwedge^k L^s(Y, \bigwedge^l))$ représente l'ensemble des k -formes différentielles L^r sur M et l -formes différentielles L^s sur Y avec $r \in [1, \infty]$. Par exemple une forme différentielle : $\alpha^{k,l} \in L^r(M, \bigwedge^k L^s(Y, \bigwedge^l))$ a pour valeur $\alpha_{(p,q)}^{k,l} = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} \alpha_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}(x, y) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l}$, en tout $p \in M$ et $q \in Y$ avec x et y respectivement coordonnées locales de q et p . Soient $p_0 \in M$, $q_0 \in Y$ et un isomorphisme j tel que $T_{p_0}M \stackrel{j}{\cong} T_{q_0}Y$. Le théorème de Hopf-Rinow nous dit que pour tout point $q \in Y$, il existe $v_{p_0} \in V_0 \subset T_{p_0}M$ (où V_0 est le plus grand ouvert contenant 0 dans $T_{p_0}M$) tel que, pour ϵ petit, q s'écrit $q = \exp_{p_0}(\frac{1}{\epsilon} j(v_{p_0}))$, où \exp_{p_0} représente l'application exponentielle de V_0 dans M [13]. Dans la suite, on notera $p^\epsilon = \exp_{p_0}(\frac{1}{\epsilon} j(v))$ avec $v \in T_{p_0}M$.

La convergence géométrique à deux échelles résulte de l'application du théorème de Birkhoff (1931), du théorème de Hopf (1939) et du théorème de Mautner (1957). Le théorème de Birkhoff [8] dit que pour (Ω, μ) un espace probabilisé et φ^t un flot ergodique on a alors, pour $f \in L^r(\Omega, \mu)$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t) dt \xrightarrow{+\infty} \int_M f(x) d\mu.$$

Pour faire de la convergence géométrique à deux échelles, on observe alors qu'on a besoin que le flot géodésique soit ergodique sur Y . Les théorèmes de Hopf [10] et de Mautner [9] nous donnent des conditions sur M pour que l'on ait l'ergodicité du flot. Le théorème de Hopf [10] stipule que dans une variété riemannienne compacte de volume fini à courbure négative, les flots géodésiques sont ergodiques. Et Mautner a montré que dans une variété riemannienne symétrique, les flots géodésiques sont également ergodiques. Voici quelques exemples de variétés riemanniennes symétriques : les tores, les espaces projectifs, les espaces hyperboliques, les espaces d'Heisenberg, $Sl(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$, l'espace symétrique quaternion-Kähler (qui est compacte si la courbure de Ricci est positive).

De plus, si les variétés vérifient ces conditions, alors elles sont géodésiquement complètes, et donc on a encore le fait que tout point q appartenant à ces variétés peut s'écrire sous la forme $q = p^\epsilon = \exp_{p_0}(\frac{1}{\epsilon} j(v_{p_0}))$. Afin d'avoir les conditions optimales pour pouvoir utiliser le théorème de Birkhoff, dans la suite on suppose que M et Y sont des variétés riemanniennes de dimension n , que M est complet avec bords et que Y est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf. On va maintenant pouvoir expliquer la convergence géométrique à deux échelles dans le formalisme covariant en commençant par la définition suivante :

Définition 1 Soit $(\alpha^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une suite de k -formes différentielles dans $L^r(M, \Lambda^k)$, on dit qu'elle converge vers la limite à deux échelles $\alpha^0 \in L^r(M, \Lambda^k L^r(Y))$ si pour toute k -forme différentielle $\psi \in C_0^2(M, \Lambda^k \Omega^0(Y))$, on a

$$\langle \alpha^\epsilon, \psi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^r(M, \Lambda^k)} \longrightarrow \langle \alpha^0, \psi \rangle_{L^r(M, \Lambda^k L^r(Y))},$$

où α^0 est appelé limite deux échelles α^ϵ in $L^r(M, \Lambda^k L^r(Y))$. On dira que α^ϵ converge fortement à deux échelles vers α^0 si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\alpha^\epsilon - \alpha_{(p,p^\epsilon)}^0\|_{L^r(M, \Lambda^k)} = 0$.

On peut alors avoir la proposition suivante [1,2] :

Proposition 1 On suppose que M et Y sont des variétés riemanniennes de dimension n , que M est complet avec bords et que Y est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf. Soit $\psi \in L^2(M, \Lambda^k C^2(Y))$, on a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\psi_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \Lambda^k)} = \|\psi\|_{L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))}$.

Grâce à cette proposition, Pak formula le théorème de la convergence à deux échelles avec un paramètre.

Théorème 2 On suppose que M et Y sont des variétés riemanniennes de dimension n , que M est complet avec bords et que Y est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf. Soit (α^ϵ) une suite bornée dans $L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6))$, il existe une sous suite (α^{ϵ_j}) de (α^ϵ) et une forme $\alpha^0 \in L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y)))$ tel que pour tout $\psi \in L^2([0, +\infty), C_c^2(M, \Lambda^6 \Omega^6(Y)))$,

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_0^\infty \langle \alpha^{\epsilon_j}(t), \psi_{(p,p^{\epsilon_j})}(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} dt = \int_0^\infty \langle \alpha^0(t), \psi(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y))} dt.$$

Dans la suite, on ne pourra pas appliquer directement ce théorème car on veut effectuer la convergence à deux échelles en temps (et non en espace) comme l'ont fait Frénod et Sonnendrücker pour les équations de Vlasov-Poisson [7,4]. Pour ce faire, on adapte ce théorème à notre problème. Par hypothèse, la variété Y doit être une variété symétrique compacte de même dimension que la variété temporelle i.e. de dimension 1. Autrement dit, Y correspond au cercle S^1 (à difféomorphisme près). On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 3 Soit (α^ϵ) une suite bornée dans $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^6))$, où T peut être égale à $+\infty$. Il existe une sous suite (α^{ϵ_j}) de (α^ϵ) et $\alpha^0 \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(M, \Lambda^6))$, telle que, pour toute forme différentielle $\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(M, \Lambda^6))$ on ait

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_0^T \langle \alpha^{\epsilon_j}(t), \psi(t, t^\epsilon) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} dt = \int_0^T \int_{S^1} \langle \alpha^0(t, s), \psi(t, s) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} ds dt,$$

avec $t^\epsilon = \exp_t(\frac{1}{\epsilon} j(v))$ pour $v \in T_t[0, T)$, et j un isomorphisme tel qu'il existe q_0 tel que $T_t[0, T) \stackrel{j}{\cong} T_{q_0} Y$.

On peut remarquer, qu'on aurait pu énoncer ces théorèmes en utilisant les espaces $L^\infty([0, T], L^2(M, \Lambda^6))$ et $L^1([0, T], L^2(M, \Lambda^6))$.

De la même manière que pour la convergence à deux échelles au sens classique, on a une proposition qui nous renseigne sur la convergence géométrique à deux échelles de la dérivée d'une suite qui peut être également adaptée pour la convergence à deux échelles en temps.

Proposition 4 On suppose que les suites $\alpha^\epsilon \in L^2(M, \Lambda^k)$ et $d\alpha^\epsilon \in L^2(M, \Lambda^{k+1})$ sont bornées. Alors, il existe une sous suite α^{ϵ_j} de α^ϵ telle que α^{ϵ_j} converge à deux échelles vers α^0 dans $L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))$ et $d\alpha^{\epsilon_j}$ converge à deux échelles vers $d\alpha^0 + d_Y \alpha^1$ dans $L^2(M, \Lambda^{k+1} L^2(Y))$ pour α^0 dans $L^2(M, \Lambda^k H^{1,d}(Y))$ et $\alpha^1 \in L^2(M, \Lambda^{k+1} H^{1,d}(Y))$. De plus, $\alpha^0 \in \ker(d_Y)$.

3 Homogénéisation de l'équation de Vlasov

3.1 Avec un champ magnétique fort

Pour appliquer la convergence à deux échelles sur l'équation de Vlasov, on s'inspire des articles [7,4]. Soit M l'espace de dimension 3, on se place dans l'espace des phases découplé du temps : $P = T^*M = \{(x, v) | x \in M, v \in T_x^*M\}$. Dans cet espace, l'équation de Vlasov à homogénéiser est $\frac{\partial {}^6f^\epsilon}{\partial t}(t) + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6f^\epsilon(t) = 0$, avec τ^ϵ le champ de vecteurs égale à $v \frac{\partial}{\partial x} + \left(i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E}^\epsilon + i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} ({}^2\mathbf{B}^\epsilon + \frac{\mathcal{M}}{\epsilon}) \right) \frac{\partial}{\partial v}$, où \mathcal{M} est une 2-forme différentielle constante, ${}^6f^\epsilon(t)$ une forme volume sur P , plus précisément ${}^6f^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$ et i représente le produit intérieur [13]. On suppose que 1) ${}^6f^\epsilon(0)$ est bornée dans $L^2(P, \Lambda^6)$, 2°) que ${}^1\mathbf{E}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$ converge fortement vers ${}^1\mathbf{E}$ dans $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$, et 3°) ${}^2\mathbf{B}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$ vers ${}^2\mathbf{B}$ dans $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$. Avec ceci, on peut alors montrer que la norme de ${}^6f^\epsilon$ est conservée au cours du temps, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\|{}^6f^\epsilon\|_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} \leq c$. Pour ce faire, il suffit de multiplier l'équation de Vlasov par $\star {}^6f^\epsilon$ et de l'intégrer sur l'espace P . Après calculs, on obtient alors que la dérivée temporelle de la norme de ${}^6f^\epsilon$ dans $L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$ est égale à 0. Ce résultat permet d'appliquer le théorème 3 page 27. On a alors l'existence d'une sous suite de ${}^6f^\epsilon$, encore notée ${}^6f^\epsilon$ et d'une 6-forme différentielle ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$ telle que pour tout ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(P, \Lambda^6))$, on ait

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle {}^6f^\epsilon, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} dt = \langle {}^6F, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} .$$

Calculons alors le produit scalaire entre l'équation de Vlasov et ${}^6\psi_q^\epsilon = {}^6\psi_q(t, t^\epsilon)$ sur l'espace $[0, T] \times P$ (t^ϵ est expliqué page 27) et après quelques calculs, on obtient

$$\langle {}^6f^\epsilon, \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial s} + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6\psi^\epsilon \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6f^\epsilon(0), {}^6\psi^\epsilon(0) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)} . \quad (1)$$

Pour pouvoir passer à la limite, on multiplie cette équation par ϵ , ce qui nous donne

$$\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial s} + \mathcal{L} \left(i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v} {}^6\psi^\epsilon \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = 0,$$

avec ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$. De plus, d'après les articles de N'Guetseng [6] et Allaire [5], on a $\int_{S^1} {}^6F_q(t, s) ds = {}^6f_q(t)$, autrement dit, on a

$$\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L} \left(i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v} {}^6F = 0 \quad \text{dans} \quad \left(L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)) \right)' . \quad (2)$$

Ceci signifie que 6F est constante le long des caractéristiques. Les caractéristiques ont un mouvement hélicoïdale autour du vecteur magnétique \mathcal{M} . On va définir alors une transformation φ qui laisse invariant la projection de la vitesse v sur \mathcal{M} et effectue une rotation d'angle s pour la projection sur le plan orthogonal à \mathcal{M} : $\varphi(v, s) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \cos(s) - v_3 \sin(s) \\ v_2 \sin(s) + v_3 \cos(s) \end{pmatrix}$. On peut voir alors qu'en prenant en compte la condition de périodicité, Frénod et Sonnendrücker [11] ont montré le lemme suivant

Lemme 1. *On a ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$ qui satisfait $\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L} \left(i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v} {}^6F = 0$ dans $\left(L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)) \right)'$, si et seulement si il existe ${}^6G \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$ tel que ${}^6F_q(t, s) = (\varphi^\star {}^6G)_q(t, s)$.*

On montre que pour ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$ et ${}^6G \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$ vérifiant le lemme précédent, l'équation vérifiée par 6G est

$$\frac{\partial {}^6G}{\partial t} + \mathcal{L}_{u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial x} + \left(i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E}_{\parallel} + i \frac{\partial}{\partial x} i_u \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B}_{\parallel} \right) \frac{\partial}{\partial u}} {}^6G = 0, \quad (3)$$

avec ${}^6G(0) = \frac{{}^6f(0)}{\text{vol}(S^1)} = \frac{{}^6f(0)}{2\pi}$ et $u_{\parallel} = u_1 \mathbf{e}^1$ la projection dans la direction du champ magnétique \mathcal{M} . La solution de cette équation est unique. On a alors pour ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$ l'existence de ${}^6\phi \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$ vérifiant ${}^6\psi_q(t, s) = (\varphi^* {}^6\phi)_q(t, s)$ et tel que l'on a $\frac{\partial {}^6\psi}{\partial s} + \mathcal{L}_{\left(i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v}} {}^6\psi = 0$.

Pour une 6-forme test ${}^6\psi^\epsilon$, en utilisant la formule (1) de la page 28, on passe à la limite deux échelles et comme ${}^1\mathbf{E}^\epsilon$ et ${}^2\mathbf{B}^\epsilon$ converge fortement, on en déduit

$$\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6F(0), {}^6\psi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$

avec $\tau = v \frac{\partial}{\partial x} + \left(i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E} + i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial v}$. On utilise alors le lemme 1 et puisque $\mathcal{L}_\tau \varphi^*({}^6\phi) = \varphi^*(\mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi)$ et que $\frac{\partial \varphi^*({}^6\phi)}{\partial t} = \varphi^*\left(\frac{\partial {}^6\phi}{\partial t}\right)$, alors on peut simplifier cette égalité et on a :

$$\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$

avec $(\varphi^*)^{-1}(\tau) = \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} + \left(i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E} + i \frac{\partial}{\partial x} i_{\tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}$, où $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \cos(s) + u_3 \sin(s) \\ -u_2 \sin(s) + u_3 \cos(s) \end{pmatrix}$ et la dérivée

partielle $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ \cos(s) \frac{\partial}{\partial u_2} + \sin(s) \frac{\partial}{\partial u_3} \\ -\sin(s) \frac{\partial}{\partial u_2} + \cos(s) \frac{\partial}{\partial u_3} \end{pmatrix}$. De plus, comme 6G et ${}^6\phi$ ne dépendent pas de s , on peut

intégrer sur S^1 et on obtient $\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tilde{\tau}} {}^6\phi \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} = -\frac{1}{2\pi} \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}$,

avec $\tilde{\tau} = u_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \left((i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E})_1 + i \frac{\partial}{\partial x} i_{\tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} (B_x dy \wedge dz) \right) \frac{\partial}{\partial u}$. On en conclut, à l'aide de l'unicité de la solution de l'équation (3), que la suite ${}^6f^\epsilon$ converge à deux échelles vers 6F et comme on a l'égalité $\int_{S^1} {}^6F_q(t, s) ds = {}^6f_q(t)$, 6F converge faiblement à deux échelles vers 6f . On a alors obtenu une formulation faible de (3) et on a démontré le théorème suivant :

Théorème 5 *On suppose que 1°) ${}^6f^\epsilon(0)$ est bornée dans $L^2(P, \Lambda^6)$, 2°) que ${}^1\mathbf{E}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$ converge fortement vers ${}^1\mathbf{E}$ dans $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$, 3°) et ${}^2\mathbf{B}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$ vers ${}^2\mathbf{B}$ dans $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$. Sous ces conditions on peut extraire une sous suite ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$ de ${}^6f^\epsilon$ solution de $\frac{\partial {}^6F}{\partial t} + \mathcal{L}_{u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial x} + \left(i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E}_{\parallel} + i \frac{\partial}{\partial x} i_u \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B}_{\parallel} \right) \frac{\partial}{\partial u}} {}^6F = 0$, avec ${}^6F(0) = \frac{{}^6f(0)}{\text{vol}(S^1)} = \frac{{}^6f(0)}{2\pi}$.*

3.2 Avec un champ magnétique et électrique fort

On homogénéise l'équation de Vlasov avec un champ magnétique et électrique fort : $\frac{\partial {}^6f^\epsilon}{\partial t}(t) + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6f^\epsilon(t) = 0$, avec τ^ϵ le champ de vecteurs égale à $v \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial x} \left({}^1\mathbf{E}^\epsilon + \frac{\mathcal{N}}{\epsilon} + i_v \frac{\partial}{\partial x} \left({}^2\mathbf{B}^\epsilon + \frac{\mathcal{M}}{\epsilon} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v}$, où \mathcal{M} est une 2-forme différentielle constante, \mathcal{N} une 1-forme différentielle constante et ${}^6f^\epsilon(t)$ une forme volume sur P , plus précisément ${}^6f^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$. On suppose que l'on a les mêmes conditions initiales qu'à la section précédente. En procédant de la même manière que précédemment, on a l'existence d'une sous suite de ${}^6f^\epsilon$, encore notée ${}^6f^\epsilon$ et d'une 6-forme différentielle ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$ telle que pour tout ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(P, \Lambda^6))$, on ait

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle {}^6f^\epsilon, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} dt = \langle {}^6F, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))}.$$

On effectue le produit scalaire de l'équation de Vlasov avec ${}^6\psi_q^\epsilon = {}^6\psi_q(t, t^\epsilon)$, on multiplie par ϵ puis on passe à la limite. On obtient alors l'équation de contrainte $\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L}_{i_{\frac{\partial}{\partial x}}(\mathcal{N} + i_{v_{\frac{\partial}{\partial x}}}\mathcal{M})\frac{\partial}{\partial v}} {}^6F = 0$ dans $(L^2([0, T) \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)))'$. Cette équation signifie que 6F est constante le long de la caractéristique :

$$\frac{dV}{ds} = i_{\frac{\partial}{\partial x}}\mathcal{N} + i_{\frac{\partial}{\partial x}}i_{v_{\frac{\partial}{\partial x}}}\mathcal{M}. \text{ On va définir alors une transformation : } \varphi(v, s) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \cos(s) - (v_3 + 1) \sin(s) \\ v_2 \sin(s) + (v_3 + 1) \cos(s) - 1 \end{pmatrix}.$$

Alors il existe ${}^6G \in L^2([0, T), L^2(P, \Lambda^6))$ tel que l'on ait ${}^6F_q(t, s) = (\varphi^*{}^6G)_q(t, s)$. De plus, pour une 6-forme test ${}^6\psi^\epsilon$, on passe à la limite deux échelles en utilisant la formule (1) page 28 et comme ${}^1\mathbf{E}^\epsilon$ et ${}^2\mathbf{B}^\epsilon$ converge fortement, on en déduit $\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T) \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6F(0), {}^6\psi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}$, avec $\tau = v_{\frac{\partial}{\partial x}} + \left(i_{\frac{\partial}{\partial x}}{}^1\mathbf{E} + i_{\frac{\partial}{\partial x}}i_{v_{\frac{\partial}{\partial x}}}{}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial v}$. Pour obtenir l'équation vérifiée par 6G , on utilise la formule ci-dessus et on injecte les expressions de 6F et de ${}^6\psi$ qui font apparaître le changement de coordonnées $\varphi^* \cdot \mathcal{O}\mathbb{P}^q({}^6G), \frac{\partial \varphi^*({}^6\phi)}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau \varphi^*({}^6\phi) \rangle_{L^2([0, T) \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle \varphi^*({}^6G(0)), \varphi^*({}^6\phi)(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}$. Ce qui se simplifie par $\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi \rangle_{L^2([0, T) \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}$,

avec $(\varphi^*)^{-1}(\tau) = \tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}} + \left(i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}{}^1\mathbf{E} - i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}i_{\frac{\partial}{\partial x_3}}{}^2\mathbf{B} + i_{\frac{\partial}{\partial x}}i_{\tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}}}{}^2\mathbf{B}_1 dy \wedge dz \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}$, où $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}} =$

$u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (u_3 + 1) \frac{\partial}{\partial x_3}$ et ${}^6G(0) = \frac{1}{2\pi} {}^6f(0)$. Maintenant, on peut en déduire l'équation satisfait par la limite faible 6f en utilisant la relation entre 6F et 6f . On obtient, pour $\mathcal{M} = dy \wedge dz$ et $\mathcal{N} = dy$, que la limite faible étoile f de la sous suite satisfaisant l'équation de Vlasov est solution de $\frac{\partial {}^6f}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tilde{\tau}} {}^6f = 0$, avec $\tilde{\tau} = \tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}} + \left(i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}{}^1\mathbf{E} - i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}i_{\frac{\partial}{\partial x_3}}{}^2\mathbf{B} + i_{\frac{\partial}{\partial x}}i_{\tilde{u}_{\frac{\partial}{\partial x}}}{}^2\mathbf{B}_1 dy \wedge dz \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}$ et ${}^6f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \varphi^*{}^6f(0)$.

On remarque que $-i_{\frac{\partial}{\partial y}}\mathcal{N} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{M} = -dz$ est l'effet drift. On peut retrouver ce terme dans l'approximation centre guide quand on utilise les mêmes hypothèses sur le champ électrique et magnétique.

Références

1. A. BACK, *Étude théorique et numérique des équations de Vlasov-Maxwell dans le formalisme covariant*, Thèse (2011)
2. H. C. PAK, Geometric two-scale convergence on forms and its applications to Maxwell's equations, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A*, **135**, 133-147 (2005)
3. C. H. SCOTT, L^p theory of differential forms on manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, **347** (6), 2075-2096 (1995)
4. E. FRÉNOD & E. SONNENDRÜCKER, The finite Larmor radius approximation, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **32** (6), 1227-1247 (2001)
5. G. ALLAIRE, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **23**, 1482-1518 (1992)
6. G. NGUETSENG, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **23**, 1482-1518 (1989)
7. E. FRÉNOD, P.-A. RAVIART & E. SONNENDRÜCKER, Two-scale expansion of a singularly perturbed convection equation, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **80** (8), 815-843 (2001)
8. G. D. BIRKHOFF, What is the ergodic theorem?, *Amer. Mathematical Monthly*, **49** (4), 222-226 (1942)
9. F. I. MAUTNER, Geodesic flows on symmetric Riemann spaces, *Ann. Math.*, **65** (3), 416-431 (1957)
10. E. HOPF, *Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig (1939).
11. E. FRÉNOD & E. SONNENDRÜCKER, Homogenization of the Vlasov equation and of the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field, *Asymptotic Analysis*, **18** (3), 293-313 (1998)
12. D. HAN-KWAN, The three-dimensional finite Larmor radius approximation, *Asympt. Anal.*, **66**, 9-33 (2010)
13. J. JOST, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer (2008)

Emergence de microstructures dans le cancer de la peau

Thibaut Balois¹, Clément Chatelain¹, Pasquale Ciarletta² & Martine Ben Amar¹

¹ Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, Paris, France

² CNRS et Université Pierre et Marie Curie — Paris VI, Institut Jean le Rond d'Alembert, Paris, France
benamar@lps.ens.fr

Résumé. Le diagnostic clinique des cancers de la peau est notamment basé sur la présence de microstructures (i.e. petite pigmentation, nests) répartis de façon éparse sur la lésion tumorale. Dans cette étude, nous démontrons que ces microstructures peuvent provenir d'un procédé de séparation de phase à l'aide d'un modèle à deux phases où nous considérons les cellules cancéreuses d'une part, phase cellulaire, et une phase liquide rassemblant les autres constituants.

Abstract. Clinical diagnosis of skin cancers is based on several morphological criteria, among which the presence of microstructures (e.g. dots, nests). In this study, we demonstrate that these patterns might be originated by a phase separation process by using a two-phase model that may undergo a spinodal decomposition. The distribution and the evolution of such emerging cluster morphologies, as predicted by our model, are successfully compared to the clinical observation of microstructural patterns in tumour lesions.

1 Introduction

L'évolution d'une tumeur est souvent caractérisé par l'émergence de microstructures inhomogènes de cellules cancéreuses [1]. Cette aspect revêt une importance particulière du diagnostic de certains cancers de la peau [2](Fig. 1). Cependant, la plupart des analyses de ces structures se concentrent sur des études empiriques, mais peu se sont concentrés sur la compréhension de leur origine physique. Des travaux récents ont proposés des mécanismes physiques pour l'apparition des irrégularités de lésion de ces contours [4,5], à travers l'adhésion entre cellules et la diffusion des nutriments.

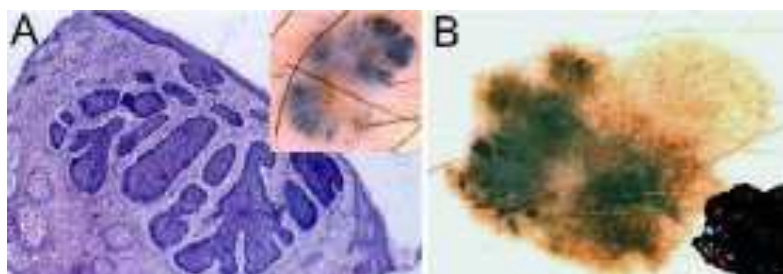


Figure 1. (A) Carcinome basocellulaire présentant des agrégats de cellules (de www.dermoscopy.org). (B) Mélanome présentant des glocules de différentes tailles et formes distribués aléatoirement sur la lésion(adapté de [3]).

Afin d'expliquer la formation d'agrégats de cellules, différentes approches théoriques ont utilisé des modèles discrets [6,8,9] uniquement adaptés aux petites tailles. Des modèles continus ont donc été développés afin de donner un aperçu analytique des phénomènes, notamment les modèles multiphasés largement utilisés [10,11,12]. Ces modèles peuvent modéliser la croissance de tumeurs dans différents media à de grandes échelles. Notre but est donc d'étudier analytiquement et numériquement l'apparition

d'une décomposition spinodale et d'aggrégats de cellules dans un modèle multiphase de croissance de tumeur.

2 Modèle multiphase de l'adhésion cellule-cellule pour le cancer de la peau

2.1 Biologie du cancer de la peau

La peau se constitue de trois principales couches : l'hypoderme (non représenté), le derme et l'épiderme. Dans ce travail, nous nous concentrons sur les premières étapes de développement du cancer de la peau qui se situent dans l'épiderme. L'épiderme est la couche la plus externe de la peau qui agit comme une barrière protectrice de l'environnement extérieur. Elle est principalement constituée d'un type de cellules appelé kératinocytes qui rendent le tissu imperméable aux agressions extérieures. La peau est aussi protégée du soleil par un autre type de cellule dans l'épiderme : les mélanocytes. Ces mélanocytes se situent sur la membrane basale et fournissent la mélanine aux cellules voisines, créant ainsi la pigmentation de la peau. Elles s'accrochent aux kératinocytes grâce à des molécules d'adhésion cellulaires (CAM) situées sur leur membrane plasmique, comme la cadhérine.

Le plus léthal des cancers de la peau est le mélanome qui provient d'une mutation des mélanocytes situés sur la membrane basale. Bien que peu fréquents (moins de 5% des cas), ils représentent à eux seuls 75% des décès du aux cancers de la peau. Les cellules du mélanome ne se lient plus aux kératinocytes pour leur fournir de la mélanine comme le font les mélanocytes, mais se lient très fortement entre elles, et envahissent les tissus environnants.

Nous nous intéressons à l'influence de cette adhésion sur la création de microstructures sur la lésion et la formation d'aggrégats qui sont un facteur clé du diagnostic de mélanomes. Dans ce but, nous proposons une étude théorique du phénomène de séparation de phase dans un modèle multiphase de la tumeur.

2.2 Modèle d'un mélange binaire du cancer de la peau

Par souci de simplicité, nous considérons un modèle multiphase simple de la tumeur : un mélange de la phase des cellules cancéreuses (provenant des kératinocytes ou des mélanocytes) avec une fraction volumique ϕ_c et une vitesse moyenne de \mathbf{v}_c , et une phase liquide (constituée du liquide interstitiel, de la matrice extracellulaire, des cellules mortes et éventuellement des cellules saines) avec une fraction volumique ϕ_l et une vitesse \mathbf{v}_l . Ces deux phases occupent tout l'espace imposant ainsi $\phi_c + \phi_l = 1$. En supposant que la densité des deux phases vaut la densité de l'eau ρ , la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_c \mathbf{v}_c) = \Gamma_c \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi_l \mathbf{v}_l) = \Gamma_l \quad (2)$$

avec $\rho \Gamma_c = -\rho \Gamma_l$ le transfert de masse entre la phase liquide et la phase cellulaire. La contrainte de saturation impose aussi la condition d'incompressibilité s'écrit : $\nabla \cdot (\phi_c \mathbf{v}_c + \phi_l \mathbf{v}_l) = 0$

Nous prenons en compte la dérégulation des protéines d'adhésion qui change l'énergie d'interaction entre cellules, en introduisant une énergie libre de la phase cellulaire de la forme :

$$F_c = \int_{\Omega} \left(\psi(\phi_c) + \frac{\epsilon^2}{2} |\nabla \phi_c|^2 \right) d\Omega \quad (3)$$

où ψ est l'énergie libre par unité de volume pour un tissu homogène et le terme en ϵ^2 représente une énergie de surface pénalisant les forts gradients de concentration cellulaire. Nous supposons que les interactions visqueuses entre les deux phases sont la principale source de dissipation d'énergie, s'écrivant

$$W = \int_{\Omega} \frac{M\phi_c}{2} (\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_l)^2 d\Omega \quad (4)$$

où M est un coefficient de pression, $M \sim 963 - 11571 \text{ mm}^{-2} \text{ Pa day}$. En appliquant un principe variationnelle au Rayleighien défini par $\mathcal{R} = W + dF_c/dt$ [14] et en utilisant l'incompressibilité et l'immobilité du centre de masse ($\phi_c \mathbf{v}_c + \phi_l \mathbf{v}_l = 0$), nous aboutissons à une équation par une loi à la Darcy, pour la vitesse des cellules :

$$\mathbf{v}_c = -K(\phi_c) \nabla \Sigma \quad (5)$$

où $K(\phi_c) = \frac{(1-\phi_c)^2}{M}$, et Σ l'excès de pression du à l'interaction entre cellules défini par :

$$\Sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \phi_c} - \epsilon^2 \Delta \phi_c = f(\phi_c) - \epsilon^2 \Delta \phi_c \quad (6)$$

Dans la suite, $f(\phi_c) = \partial \psi / \partial \phi_c$ représente la pression pour un système homogène. L'interaction entre cellules est nulle à concentration nulle, attractive à basse concentration et répulsive à forte concentration (donc il existe ϕ_e tel que $f(\phi_c) < 0$ pour $\phi_c < \phi_e$ et $f(\phi_c) > 0$ pour $\phi_c > \phi_e$ avec $\phi_e = 0.63 - 0.87$). La valeur typique de l'excès de pression χ est $\chi \sim 133 - 1330 \text{ Pa}$. La dynamique cellulaire se résume donc à

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial t} = \nabla \cdot K(\phi_c) \nabla (f(\phi_c) - \epsilon^2 \Delta \phi_c) + \Gamma_c \quad (7)$$

Il nous reste à exprimer les effets des nutriments, et plus particulièrement le taux d'échange Γ_c . Nous supposons une forme simple pour la prolifération proportionnelle à la concentration en nutriments et en cellule, et un taux de mort proportionnelle à la densité de cellules : $\Gamma_c = \gamma_c \phi_c (n/n_s - \delta_c)$, où n_s est une concentration typique du tissu (pour l'oxygène $n_s = 3320 - 10400 \text{ Pa}$), $\gamma_c n = 0.2 \text{ day}^{-1}$, δ_c un taux de mort typique $\delta_c = 0.1 - 0.33$. Il nous faut aussi caractériser les nutriments, nous considérons que les nutriments parviennent aux cellules par diffusion depuis le système vasculaire (et par l'atmosphère dans le cas de l'oxygène). Le système est en permanence à un équilibre de diffusion du à la faible vitesse de croissance, nous obtenons une expression pour régir le comportement des nutriments :

$$D_n \Delta n - \delta_n \phi_c n + S_n (n_s - n) = 0 \quad (8)$$

où D_n est la constante de diffusion dans le fluide interstitiel $D_n = 39.7 \text{ mm}^2 \text{ day}^{-1}$. δ_n est le taux de consommation des nutriments $\delta_n = 1190 - 3310 \text{ day}^{-1}$. S_n est la constante de diffusion venant des sources de nutriments (flux perpendiculaire au plan de l'épiderme), $S_n \sim 10^4 \text{ day}^{-1}$.

Nous définissons des quantités sans dimensions $\hat{x} = x/l_n$, $\hat{n} = n/n_s$, $\hat{t} = t\gamma$, $\hat{f} = f/\chi$, $\beta = S_n/\delta_n$, $\hat{K}(\phi_c) = (1 - \phi_c)^2$, $D = \chi/(M l_n^2 \gamma n_s)$, $\hat{\epsilon}^2 = \epsilon^2/(\chi l_n^2)$ où $l_n = \sqrt{D_n/\delta_n}$ est la longueur de pénétration des nutriments. Et nous obtenons les équations sans dimension qui s'écrivent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla \cdot (\phi K(\phi) \nabla [f(\phi) - \hat{\epsilon}^2 \Delta \phi]) + \phi(n - \delta) \quad (9)$$

$$\Delta n - \phi n + \beta(1 - n) = 0 \quad (10)$$

3 Analyse de la stabilité du mélange de phase et séparation de phase

Nous allons dans cette section considérer la stabilité d'un mélange binaire dont la concentration en cellule cancéreuse est réparti de façon homogène à l'instant initial. Nous allons faire une analyse de stabilité linéaire, et comparer les résultats obtenus aux simulations numériques

3.1 Analyse de stabilité linéaire en absence d'échange de masses

En l'absence d'échange de masse, $\Gamma_c = 0$, l'équation (9) peut être simplifié en redimensionnant les paramètres $\hat{x} = x/\epsilon$ et $\hat{t} = tD/\epsilon$, en obtient la relation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (\phi K(\phi) \nabla [f(\phi) - \Delta \phi]) \quad (11)$$

Nous faisons un développement perturbatif autour de la valeur ϕ_0 , $\phi = \phi_0 + \delta\phi \exp(\lambda t) \cos(kx)$, en remplaçant dans l'équation (11), nous obtenons le taux de croissance λ de la perturbation :

$$\lambda = -D\phi_0 K(\phi_0) [k^2 f'(\phi_0) + \epsilon^2 k^4] \quad (12)$$

La répartition homogène n'est stable aux grandes longueurs d'onde que si $f'(\phi_0) > 0$. Nous avons donc montré que l'interaction entre cellules peut conduire à une séparation de phase, où la force de l'interaction cellule D joue le même rôle que la température dans un modèle classique de séparation de phase.

3.2 Analyse de stabilité linéaire avec mort et prolifération des cellules

En prenant en compte l'interaction des cellules avec les nutriments, le paramètre d'ordre ϕ n'est plus conservé et l'on va donc étudier les équations (9) et (10) autour de la solution stationnaire et homogène donnée par :

$$\phi_0 = \frac{\beta(1-\delta)}{\delta} \text{ et } n_0 = \delta \quad (13)$$

qui correspond à un cas homeostatique où la division cellulaire (resp. la consommation de nutriment) équilibre la mort des cellules (resp. l'apport de nutriment par la basale). On effectue un développement perturbatif des équations (9) et (10) autour de ϕ_0 et n_0 : $\phi = \phi_0 + \delta\phi \exp(\lambda t) \cos(kx)$ et $n = n_0 + \delta n \exp(\lambda t) \cos(kx)$. Nous obtenons ainsi le taux de croissance de la perturbation λ

$$\lambda = -\phi_0 \left[DK(\phi_0)(f'(\phi_0)k^2 + \epsilon^2 k^4) + \frac{\delta^2}{k^2 \delta + \beta} \right] \quad (14)$$

L'équation (14) diffère de (12) uniquement par le dernier terme de (14) qui provient du couplage entre les cellules et les nutriments. Ce terme vient stabiliser la distribution homogène aux grandes longueurs d'ondes. Il introduit donc une nouvelle longueur caractéristique du système, tout comme les phénomènes de séparation de phase dans blocs de copolymères. Comme dans ces systèmes, on s'attend à une saturation de la croissance de ces domaines à taille finie, et ainsi le paramètre d'ordre devrait se conservé à grandes échelles.

3.3 Simulation numérique en négligeant le transfert de masse

Nous avons effectué des simulations numérique de (11) sur une grille périodique de taille $N \times N$ pour différentes concentrations initiales homogènes avec une perturbation aléatoire de $0.01\phi_0$. Nous discrétisons les équations en utilisant un schéma au premier ordre en temps et au deuxième ordre en espace. De plus nous utilisons, une forme phénoménologique pour Σ pour qu'il respecte les conditions physiques et biologiques énoncées dans le paragraphe 2.2 :

$$f(\phi) = \frac{\phi^P(\phi - \phi_e)}{1 - \phi} \quad (15)$$

La mobilité $M(\phi) = \phi K(\phi)$ disparaît pour $\phi \rightarrow 0$ ainsi les valeurs de ϕ restent toujours positive, assurant la consistance physique du modèle [16]. Cependant les fluctuations numériques peuvent conduire à des valeurs négatives nous avons donc remplacé toute valeur de ϕ négative par 0 dans l'algorithme, et nous utilisons une petite discrétisation $\Delta x = 0.15$ et $\Delta t = 10^{-4}$ pour s'assurer que la valeur moyenne de ϕ sur la grille soit conservé. Les résultats numériques montrent une séparation de phase avec une croissance de domaine sans limitation de taille comme pour Cahn-Hilliard.

3.4 Simulation numérique avec mort et prolifération des cellules

Nous appliquons le même protocole numérique (pour le calcul des dérivées et les conditions initiales et aux limites) que pour le cas précédent. Pour résoudre numériquement l'équation (10), nous l'avons réécrite ainsi :

$$\partial_t n = \bar{d}(\Delta n - \phi n + \beta(1 - n)) \quad (16)$$

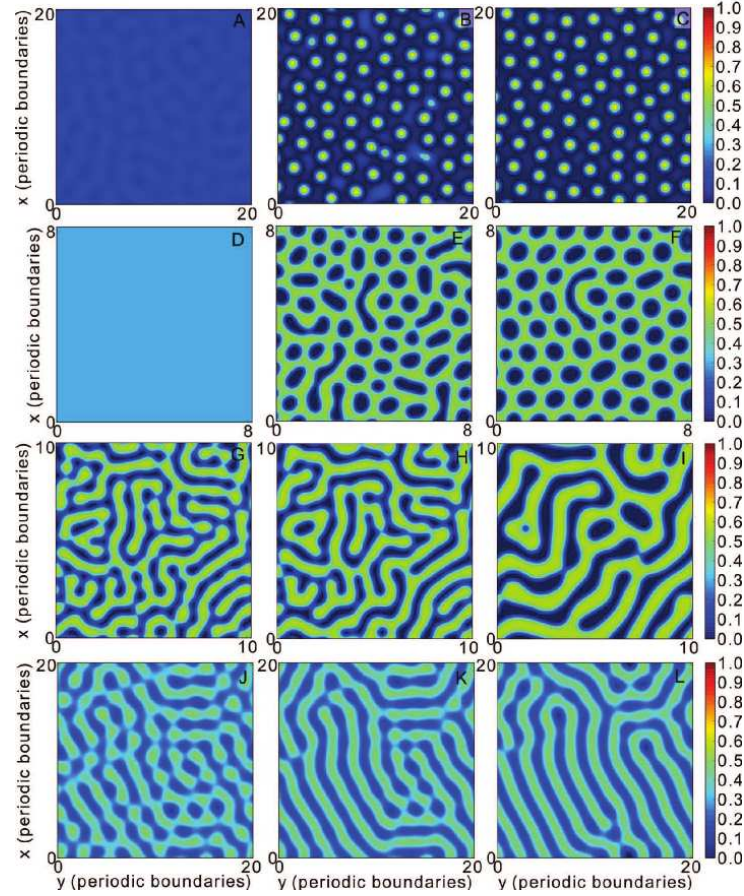


Figure 2. Décomposition spinodale avec prolifération des cellules à partir d'une concentration homogène des cellules à la concentration d'équilibre ϕ_0 , à différents instants(A,B,C) partent d'une concentration initiale faible $\phi_0 = 0.05$ (D,E,F) d'une concentration initiale plus importante $\phi_0 = 0.3$ (G,H,I) Structure labyrinthique durant un régime transitoire de croissance. $\phi_0 = 0.3$ (J,K,L) Structure labyrinthique bloqué $\phi_0 = 0.3$

en utilisant un temps de relaxation très rapide, $\bar{d} \gg 1$ (dans les simulations \bar{d} vaut 5).

La figure 2 montre les résultats de ces simulations. Nous observons que la décomposition spinodale peut conduire à différents formes, dépendant principalement de la valeur de la concentration d'équilibre. Comme nous l'avons prédit dans notre analyse linéaire, la croissance des domaines est limitée, nous constatons en pratique que la limitation est de l'ordre de grandeur de la pénétration des nutriments. Cela se comprend bien biologiquement, quand la taille des agrégats atteint deux fois la taille de pénétration des nutriments, la prolifération dans l'amas s'arrête du à un manque de nutriment. Nous devons donc maintenant comparer ces résultats aux observations biologiques.

4 Discussion et comparaison avec la biologie

En comparant les résultats numériques de la Figure 2f, et le mélanome de la Figure 1, nous observons le même type de forme d'aggrégats au sein de la tumeur. En effet, le mélanome montre des globules sans pigmentation à l'intérieur de la tumeur, ce qui laisse à penser que notre modèle explique qualitativement l'apparition de globules et de microstructures au sein d'une lésion tumorale de la peau. De plus, nous

observons que la taille des globules biologiques sont du même ordre de grandeur que ceux donnés par la simulation ($l_s \approx 0.2\text{mm}$).

En conclusion, nous avons montré que le modèle à deux phases que nous utilisons, aboutit à un phénomène de séparation de phase. Cette séparation de phase n'est pas sans rappeler la séparation de copolymères blocs. Nos résultats relient le changement phénotypique des protéines d'adhésion d'une cellule mélanome et l'organisation spatiale des cellules cancéreuses, ainsi que la distribution de la taille et de la forme de leurs agrégats. Cette étude propose un mécanisme d'émergence des microstructures dans les cancers de la peau, et peut à terme améliorer les diagnostics précoces de cancer de la peau.

Références

1. K.-A. NORTON, M. WININGER, G. BHANOT, S. GANESAN, N. BARNARD, T. SHINBROT, A 2D mechanistic model of breast ductal carcinoma in situ (DCIS) morphology and progression, *Journal of Theoretical Biology*, **263**, 393-406 (2010)
2. G. ARGENZIANO *et al*, Dermoscopy of pigmented skin lesions : results of a consensus meeting via internet, *Journal of the American Academy of Dermatology*, **48**, 679-693 (2003)
3. J. XU, KAPIL GUPTA, W. V. STOECKER, Y. KRISHNAMURTHY, H. S. RABINOVITZ, A. BANGERT, D. CALCARA, M. OLIVIERO, J. M. MALTERS, R. DRUGGE, R. J. STANLEY, R. H. MOSS & M. E. CELEBI, Analysis of globules types in malignant melanoma, *Archives of Dermatology*, **145**, 1245-1251 (2009)
4. P. CIARLETTA, L. FORET, & M. BEN AMAR, The radial growth phase of malignant melanoma, *Journal of the Royal Society Interface*, **8**, 345-368 (2011)
5. M. BEN AMAR, C. CHATELAIN & P. CIARLETTA, Contour instabilities in early tumor growth models, *Physical Review Letters*, **106**, 148101 (2011)
6. I. RAMIS-CONDE, D. DRASDO, A. R. A. ANDERSON & M. A. J. CHAPLAIN, Modeling the influence of the E-Cadherin- β -Catenin pathway in cancer cell invasion : a multiscale approach, *Biophysical Journal*, **95**, 155-165 (2008)
7. M. TAKEICHI, Cadherin cell adhesion receptors as a morphogenetic regulator, *Science*, **251**, 1451-1455 (1991)
8. S. HOEHME & D. DRASDO, A Cell-based simulation software for multi-cellular systems, *Bioinformatics*, **26**, 2641-2642 (2010)
9. S. TURNER & J. A. SHERRATT, Intercellular adhesion and cancer invasion : A discrete simulation using the extended pots model, *Journal of Theoretical Biology*, **216**, 85-100 (2002)
10. L. PREZIOSI & G. VITALE, Mechanics of tumor growth : multiphase models, adhesion, and evolving configurations, In *New Trends in the Physics and Mechanics of Biological Systems*, **177**, Oxford University Press (2009)
11. L. PREZIOSI & G. VITALE, Mechanics in tumor growth, In *Modeling of biological materials*, Birkhauser Boston, pp. 263-313 (2007)
12. J. S. LOWENGRUB AND OTHERS, Nonlinear modelling of cancer : Bridging the gap between cells and tumours, *Nonlinearity*, **23**, 1-91 (2010)
13. M. STUCKER, A. STRUK, P. ALTMAYER, M. HERDE, H. BAUMGÄRTL & D. W. LÜBBERS, The cutaneous uptake of atmospheric oxygen contributes significantly to the oxygen supply of human dermis and epidermis, *Journal of Physiology*, **538**, 985-994 (2002)
14. M. DOI & A. ONUKI, Dynamic coupling between stress and composition in polymer solutions and blends, *Journal de Physique II*, **2**, 1631-1656 (1992)
15. A. M. KLEIN, V. NIKOLAIDOU-NEOKOSMIDOU, D. P. DOUPÉ, P. H. JONES & B. D. SIMONS, Patterning as a signature of human epidermal stem cell, *Journal of the Royal Society Interface*, **8** (65), 1631-1656 (2011)
16. A. NOVICK-COHEN, The Cahn Hilliard Equation, *Handbook of differential equations : evolutionary equations*, **4**, 201-228 (2008)
17. C. CHATELAIN, P. CIARLETTA, & M. BEN AMAR, Morphological changes in early melanoma development : Influence of nutrients, growth inhibitors and cell-adhesion mechanisms, *Journal of Theoretical Biology*, **290**, 46-59 (2011)
18. C. CHATELAIN, T. BALOIS, P. CIARLETTA, & M. BEN AMAR, Emergence of microstructural patterns in skin cancer : a phase separation analysis in a binary mixture, *New Journal of Physics*, **13**, 115013 (2011)

Propriétés spatio-temporelles de la Turbulence d'ondes capillaires

Michael Berhanu & Eric Falcon

Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS - 75 013 Paris, France
 michael.berhanu@univ-paris-diderot.fr

Résumé. La turbulence d'ondes étudie les propriétés statistiques d'un ensemble d'ondes en interaction non linéaire. Les ondes à la surface d'un fluide constituent l'archétype de ce phénomène pouvant être traité analytiquement dans le cas faiblement non linéaire. Une difficulté expérimentale repose dans la nécessité d'utiliser une mesure du champ d'ondes simultanément dans l'espace bidimensionnel et dans l'espace temporel. Récemment Herbert et al. ont caractérisé la turbulence d'ondes de gravité en utilisant une méthode optique (Profilométrie par Transformée de Fourier). Ici l'utilisation d'une autre méthode optique (« *Diffusing Light Photography* ») associée à une caméra rapide nous permet d'atteindre une meilleure résolution spatiale et de caractériser les propriétés spatio-temporelles de la Turbulence d'ondes capillaires. On obtient la relation de dispersion des ondes capillaires ainsi que le spectre de hauteur de vagues à la fois en fonction du nombre d'onde k et de la pulsation ω . Les propriétés statistiques sont extraites et analysées dans le but d'évaluer la validité des théories faiblement non-linéaire. Enfin comme cette technique n'est pas limitée aux faibles amplitudes de déformation de la surface, nous pouvons aussi étudier la création de vagues capillaires parasites au sommet des vagues raides de gravité et déterminer l'influence de ces structures sur la Turbulence d'ondes.

Abstract. Wave Turbulence concerns the study of the statistical properties of a set of numerous nonlinear interacting waves. The archetype of this phenomenon are waves on the surface of a fluid. Analytical predictions can be brought in the weakly nonlinear case. One of the challenge of Wave Turbulence is to reach a simultaneous 2D-space and time measurement of the wave amplitude that goes further than usual spatially localized ones. Recently, Herbert et al. performs this measurement for gravity wave turbulence using an optical method (Fourier Transform Profilometry). Here, we used another optical technique (Diffusing Light Photography) with a fast camera, to reach a better spatial resolution that allows us to investigate spatio-temporal statistics of capillary wave turbulence. Dispersion relations of capillary waves are obtained as well as the full spectrum of wave amplitude both in the k and ω spaces. Statistical properties are extracted and analysed in order to test the validity of Weak Turbulence Theory. Moreover, as this technique is not limited to small amplitudes of surface deformation, we can observe appearance of small capillary waves on steep gravity waves, and to check the impact of this gravity to capillary conversion on Wave Turbulence.

1 Introduction

La Turbulence d'ondes se réfère aux états hors-équilibre, statistiquement stationnaires, d'un ensemble d'ondes en interaction non linéaire. Si ces interactions sont suffisamment intenses une cascade turbulente apparaît transférant l'énergie d'une échelle d'injection à une échelle de dissipation. Ce phénomène analogue à la turbulence de l'équation de Navier-Stokes, présente l'intérêt d'être abordable analytiquement de manière exacte dans le cas faiblement non-linéaire [1,2] et ainsi de clarifier de manière plus générale le concept de Turbulence. Cet intérêt fondamental a succité ces dernières années plusieurs expériences discutant de la pertinence de l'approche théorique, particulièrement dans le cas des ondes à la surface d'un fluide [1]. Par exemple des mesures locales au moyen d'une sonde capacitive ont ainsi pu montrer que les spectres de puissance temporels de hauteur de vague vérifient une loi de puissance en accord avec la prédiction théorique pour les ondes capillaires [3]. En revanche pour les ondes de gravité l'exposant dépend de l'intensité du forage en désaccord avec la théorie.

Pour aller plus loin et accéder aux mécanismes intimes de la turbulence, il s'avère nécessaire de connaître le champ de vagues à la fois en espace et en temps. Or la mesure de la topographie d'une

interface fluide en régime turbulent constitue une tâche difficile qui a pu bénéficier de développements expérimentaux récents. La méthode « *Free-Surface Synthetic Schlieren* » [4] repose sur la réfraction des rayons lumineux traversant une épaisseur d'un liquide transparent et permet par corrélation d'images de reconstruire très précisément et avec une grande sensibilité la surface. Néanmoins cette technique est limitée aux faibles déformations et aux faibles pentes et n'a pas pu être utilisée dans les régimes de turbulence d'ondes. La méthode de profilométrie par transformée de Fourier [5] repose quant-à-elle, sur la projection d'un réseau de franges sur le liquide rendu opaque par l'ajout de peinture. La forme de la surface au cours du temps est déduite de la déformation du réseau filmé par une caméra rapide. Cette technique a été utilisée pour obtenir la première caractérisation [6] spatio-temporelle de la Turbulence d'ondes, dans le régime d'ondes de gravité, montrant entre autres la possibilité pour des forçages suffisamment intenses d'observer une relation de dispersion non-linéaire dû à la présence d'ondes dites liées. La correspondance entre espace et temps fournie usuellement par la relation de dispersion linéaire est ainsi sujette à caution. Plus récemment en bénéficiant d'une amélioration technique de la méthode, la turbulence gravito-capillaire a pu être caractérisée sur une plus large étendue spectrale [7]. Néanmoins comme la résolution spatiale est limitée par la distance entre franges, le régime d'ondes capillaires n'est pas complètement résolu.

Nous proposons d'utiliser une autre méthode de mesure plus sensible, adaptée à la caractérisation du régime de Turbulence d'ondes capillaires et restant valable pour de fortes déformations de la surface. Il s'agit de la « *Diffusing Light Photography* » [8,9], qui fut utilisée au milieu des années 90 pour la première caractérisation spatiale de la turbulence d'ondes capillaires excitées paramétriquement. L'intensité lumineuse traversant un liquide diffusant éclairé par le dessous permet de reconstruire la déformation de la surface, sachant que plus l'épaisseur traversée est grande, plus l'intensité lumineuse mesurée en un point à la surface est faible. En revanche ces mesures correspondaient à des « instantanés » du champ de vague, illuminé par un flash, parce que le système CCD à faible bruit utilisé restait limité à des expositions longues et de faibles fréquences d'acquisition. Le progrès technologique des caméras rapides nous permettent de réutiliser cette méthode et de l'appliquer à l'étude spatio-temporelle de la Turbulence d'ondes capillaire.

2 Dispositif expérimental et méthode

Les ondes sont produites au moyen d'un batteur dans une cuve transparente (165×165 mm), représentée Fig. 1a. Le batteur est mis en mouvement horizontalement par un vibreur électromagnétique LDS V406, pouvant recevoir en entrée via une carte NI-DAQ des signaux définis par l'expérimentateur. L'intensité du forçage est quantifiée par l'écart type de la vitesse du batteur σ_v mesuré à la fois via un accéléromètre et par un capteur de vitesse. Pour mesurer la topographie spatiale du champ de vagues par « *Diffusing Light Photography* » (DLP), la cuve est éclairée par le dessous par un carré de diodes électroluminescentes Phlox (100×100 mm) et la surface du liquide est imagée par une caméra PCO-EDGE sensible permettant d'enregistrer des images de plus d'un mégapixel avec une fréquence d'acquisition de 200 Hz. Les travaux de Wright et al. [8,9] utilisaient comme liquide diffusant une suspension de sphères de polystyrène de diamètre 1 μm dans de l'eau. En raison du prix élevé de ces microsphères, nous proposons d'utiliser une émulsion commerciale de lipides l'*Intralipid 20%* (Fresenius Kabi), dont les solutions dans l'eau sont utilisées comme milieux diffusants modèles et dont les propriétés optiques ont été caractérisées [10]. Les résultats de cette mesure spatiale sont comparés avec une mesure locale de la hauteur du fluide, obtenue par une sonde capacitive [3] placée en dehors du champ de la caméra. La validité de la méthode DLP repose sur un choix adéquat de la concentration en particules diffusantes, de façon à adapter le libre parcours moyen \mathcal{L}^* de la lumière au sein du liquide de sorte qu'il soit plus petit que l'épaisseur totale de fluide et plus grand que l'amplitude des déformations à mesurer. Dans ce cas la focalisation des rayons lumineux due à la courbure des surfaces disparaît totalement [8].

Dans les expériences présentées par la suite pour une hauteur au repos du fluide de 30 mm, nous utilisons 6 mL d'*Intralipid 20%* dilué dans 1L d'eau distillée. Cette faible dilution ne modifie pas significativement la viscosité du fluide. Une variation de la hauteur de remplissage de la cuve, permet de calibrer la variation d'intensité lumineuse transmise en fonction de l'épaisseur traversée $h(x, y)$, pour chaque

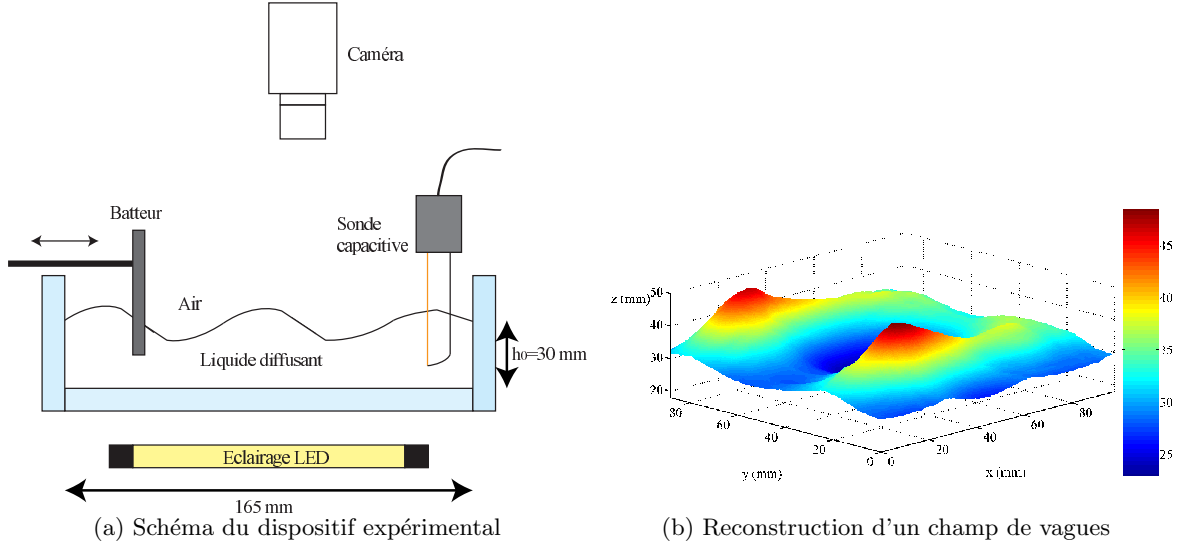


Figure 1. Schéma du dispositif expérimental (a). Une cuve transparente en Plexiglass de dimension 165×165 mm est remplie sur une hauteur $h_0 = 30$ mm d'un liquide diffusant (1 L d'eau + 6 mL d'Intralipid 20%). Des vagues sont produites par le mouvement horizontal d'un batteur rectangulaire de largeur 130 mm et plongeant dans le liquide sur une hauteur de 13 mm. La cuve est éclairée par le dessous par un système de diode électroluminescente Phlox produisant un éclairage homogène sur 100×100 mm. Une caméra rapide mise au point sur la surface, enregistre l'intensité lumineuse à la surface, pour reconstruire le champ de hauteur de vagues. Une sonde capacitive en dehors du champ de la caméra permet d'avoir une mesure au cours du temps de la hauteur du fluide en un point. (b) Exemple de reconstruction d'un champ de vagues, pour de fortes déformations de la surface libre. Les vagues sont produites dans ce cas par deux batteurs oscillant sinusoidalement à 5 Hz de façon à obtenir un mode stationnaire résonnant.

point de la surface libre $M(x, y)$. En notant $I_0(x, y)$ l'intensité lumineuse qui serait mesurée en l'absence de liquide, nous trouvons en première approximation une diminution en exponentielle décroissante de l'intensité lumineuse avec $h(x, y)$:

$$I(x, y) = I_0(x, y) \exp\left(\frac{-h(x, y)}{\mathcal{L}^*}\right)$$

Nous remarquons qu'une relation différente proposée dans le second article de Wright et al. [9] permet aussi de calibrer nos mesures, mais s'avère d'un emploi moins aisé. Des études complémentaires devraient permettre d'approfondir le comportement optique de ce liquide diffusant et d'améliorer la calibration de nos mesures. Nous utilisons la valeur de \mathcal{L}^* trouvé préalablement et le rapport de l'intensité $I(x, y)$ transmise en un point en présence de vagues par celle transmise pour la surface au repos quand $h_0(x, y) = 30$ mm pour reconstruire la forme de la déformation de surface à chaque instant. En raison du *Photon shot Noise* d'origine physique, il est nécessaire de filtrer spatialement les images par un noyau Gaussien de largeur 5 pixels, ce qui constitue une limite à la résolution spatiale (typiquement 0.5 mm). Un tel exemple de reconstruction dans un cas d'une vague de forte amplitude est montrée Fig. 1b. Contrairement aux autres techniques, des déformations correspondant à des pentes spatiales $\frac{\partial h}{\partial x}$ d'ordre un, sont très bien mesurées. Pour un mode résonant excité par un mouvement du batteur à une fréquence de 5 Hz, on a pu observer la création d'ondes capillaires parasites sur les crêtes de ces ondes raides de gravité, du fait de la forte courbure au sommet de ces vagues. L'influence de la présence de ces ondes parasites sur la relation de dispersion et sur les caractéristiques de la Turbulence d'ondes fera l'objet d'une étude ultérieure.

3 Forçage sinusoïdal et relation de dispersion

Nous commençons notre étude, par un cas d'excitation sinusoïdale du batteur à une fréquence de 10 Hz pour différentes intensités de forçage. Ces mesures sont effectuées sur une fenêtre de 54.2×54.2 mm correspondant à 960×960 pixels et une fréquence de 200 Hz. Le spectre spatio-temporel de puissance de hauteur de vagues $E(\mathbf{k}, \omega)$ est calculé en effectuant une transformée de Fourier à deux dimensions sur les dimensions d'espace conjointement avec une transformée de Fourier en temps, du signal de hauteur de vagues $h(x, y, t)$. En effectuant ensuite une intégration sur les différentes orientations de \mathbf{k} , on obtient le spectre spatio-temporel $E(k, \omega)$ en fonction de $k = \|\mathbf{k}\|$, montrant comment se répartit en moyenne l'énergie du signal de hauteur de vagues à travers les échelles d'espace et de temps.

Sur l'exemple représenté Fig. 2a obtenu à partir du traitement de 2000 images, on observe que la majeure partie de l'énergie se concentre sur des *tâches* discrètes dans l'espace (k, ω) situé à la fréquence du forçage et à ses harmoniques, matérialisant la relation de dispersion. Les interactions non-linéaires remplissent le spectre entre les pics de fréquences, mais restent insuffisantes pour faire disparaître la mémoire du forçage, lorsqu'on se déplace vers les petites échelles. En recherchant les maxima locaux du spectre, il est possible de tracer la relation de dispersion expérimentale (Fig. 2b) et de comparer avec la relation de dispersion linéaire $\omega^2 = \tanh(k h_0) [g k^2 + (\gamma/\rho) k^3]$ pour des valeurs plausibles de la tension de surface γ . Compte tenu de la résolution limitée en k due à la taille limitée de la fenêtre spatiale et du nombre de pixels, ces mesures ne mettent pas en évidence un déplacement de la relation de dispersion due aux non-linéarités. Toutefois on pourrait interpréter la branche secondaire visible sur le spectre à gauche comme la présence d'ondes liées d'ordre 2 [6]. Cette mesure valide ainsi l'emploi de la DLP dans l'étude des propriétés spectrales du champ de hauteur de vagues, en montrant qu'on retrouve la relation de dispersion linéaire pour une valeur de γ de l'ordre de 50 mN.m^{-1} . On remarque aussi que la sensibilité de cette méthode permet de mesurer un signal notable jusqu'à 100 Hz, limite donnée par la valeur de la fréquence d'acquisition de 200 Hz.

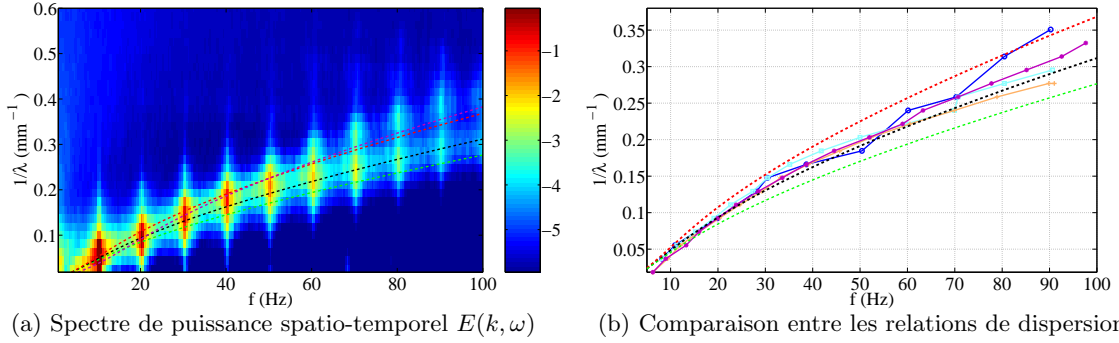


Figure 2. Spectre de puissance spatio-temporel $E(k, \omega)$ (a) de hauteur de vagues en fonction de $f = \omega/(2\pi)$ et $1/\lambda = k/(2\pi)$ pour un forçage sinusoïdal à 10 Hz et une vitesse du batteur d'amplitude $\sigma_v = 12.4 \text{ cm.s}^{-1}$. L'échelle de couleur correspond à $\log_{10}(E(k, \omega))$. La relation de dispersion linéaire est représentée en pointillé pour trois valeurs de la tension de surface, à savoir $\gamma = 72 \text{ mN.m}^{-1}$ en vert, $\gamma = 50 \text{ mN.m}^{-1}$ en noir et $\gamma = 30 \text{ mN.m}^{-1}$ en rouge. La relation de dispersion pour des ondes liées d'ordre 2 et $\gamma = 50 \text{ mN.m}^{-1}$ est tracée en magenta. Comparaison entre la relation de dispersion linéaire et la relation de dispersion extraite des maxima locaux de $E(k, \omega)$ (b) pour différentes amplitude de forçage ($\sigma_v = 9.1 \text{ cm.s}^{-1}$ en bleu, $\sigma_v = 55 \text{ cm.s}^{-1}$ en cyan, $\sigma_v = 12.4 \text{ cm.s}^{-1}$ en saumon et $\sigma_v = 15.9 \text{ cm.s}^{-1}$ en magenta). On note que le seuil d'apparition d'ondes sous harmoniques, appelées « *cross-waves* » [11], est situé entre ces deux dernières valeurs.

4 Forçage aléatoire et régime de Turbulence d'ondes.

Les régimes de Turbulence d'ondes, s'avèrent plus facile à obtenir, en excitant le batteur avec un signal stochastique en amplitude pour une bande de fréquence [3], permettant de favoriser le mélange initial entre ondes, donnant lieu à la cascade turbulente. Dans cette partie, nous nous concentrons sur les résultats d'une expérience obtenue pour un forçage compris entre 4 et 6 Hz, et un écart type de la vitesse du batteur valant $\sigma_v = 9.4 \text{ cm.s}^{-1}$. La fenêtre de mesure correspond désormais à un rectangle de $77.0 \times 61.6 \text{ mm}$ enregistré sur 1280×1024 pixels, la fréquence d'acquisition des images restant fixée à 200 Hz. L'écart type des vagues mesurées par DLP dans la fenêtre de mesure vaut 4 mm et l'inhomogénéité spatiale correspondante est de l'ordre de 13 %.

Le spectre spatio-temporel $E(k, \omega)$, calculé sur 5000 images, et représenté Fig. 3a, montre cette fois-ci que l'énergie se répartit continument le long de la relation de dispersion. En moyennant sur toutes les fréquences, on obtient le spectre spatial de hauteur de vagues $E(k)$ représenté Fig. 3b. Une loi de puissance traduisant la présence d'une cascade turbulente à travers les échelles est observée pour $k/(2\pi)$ compris entre 0.07 et 0.7 mm^{-1} , avec un exposant en accord avec la prédiction théorique $E(k) \sim k^{-15/4}$ [2]. De même en moyennant le spectre spatio-temporel $E(k, \omega)$ cette fois ci sur les nombres d'ondes k , on trouve le spectre temporel de hauteur de vague $E(\omega)$, représenté Fig. 4a. A nouveau le spectre obtenu exhibe une loi de puissance pour des fréquences f comprises entre 20 et 100 Hz en accord avec le spectre prédit analytiquement $E(\omega) \sim \omega^{-17/6}$ [1,2] et observé précédemment dans les expériences utilisant des mesures locales de hauteur de vagues [3]. En utilisant le signal temporel de la sonde capacitive, enregistré sur 200 s et échantillonné à 2000 Hz, nous pouvons comparer l'estimation des spectres temporels entre une mesure locale et globale. Pour cela, en enregistrant le signal de hauteur moyenné sur un carré de 5 pixels, on recrée un signal local à partir des mesures de DLP, dont le spectre temporel (en vert, Fig. 4b) se superpose avec le spectre $E(\omega)$ global. Le spectre donné par DLP local est aussi très proche du spectre obtenu par la sonde capacitive, après redimensionnement par l'écart type pour avoir des signaux de même intensité. On remarque de plus que si le spectre donné par la sonde capacitive rejoint le niveau de bruit vers 300 Hz, l'écart à la loi de puissance commence à partir de 100 Hz, ce qui signifie qu'à partir de cette échelle la dissipation visqueuse commence à agir et brise l'invariance d'échelle. Il apparaît souhaitable d'utiliser la DLP pour de plus grandes fréquences d'acquisition, pour étudier les échelles de dissipation des ondes capillaires.

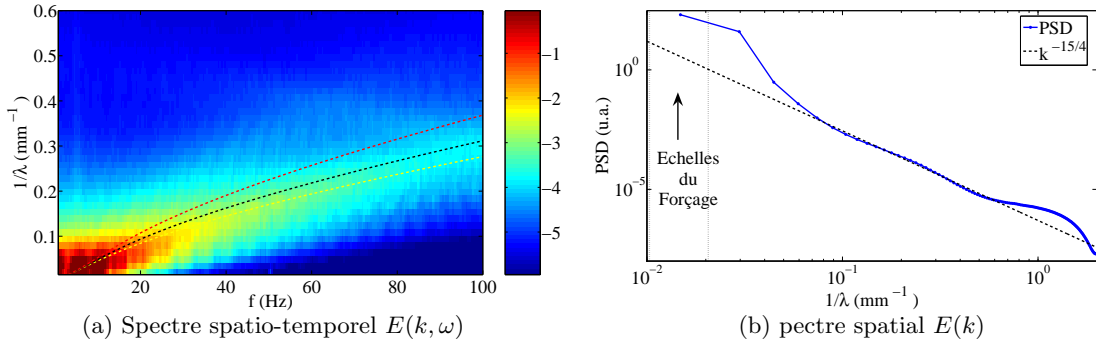


Figure 3. Spectre spatio-temporel $E(k, \omega)$ (a) de hauteur de vagues pour un forçage aléatoire dans une bande de fréquence comprise entre 4 et 6 Hz. Le spectre continu le long de la relation de dispersion traduit que les interactions non-linéaires sont suffisamment intenses en régime de turbulence d'ondes pour effacer la mémoire du forçage à l'intérieur de la cascade turbulente. Spectre spatial $E(k)$ (b) de hauteur de vagues en fonction de $1/\lambda = k/(2\pi)$. Une loi de puissance en accord avec la prédiction théorique $E(k) \sim k^{-15/4}$ est observée pour $k/(2\pi)$ compris entre 0.07 et 0.7 mm^{-1} .

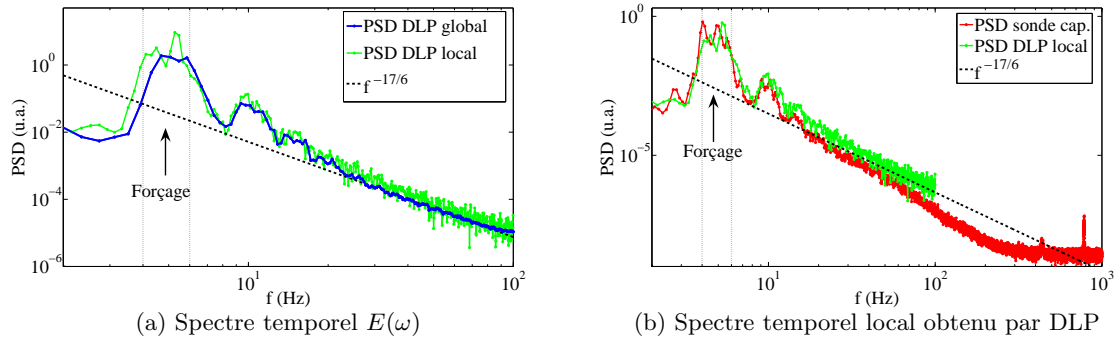


Figure 4. Spectre temporel $E(\omega)$ (a) en fonction de la fréquence. Le spectre global estimé sur tout le champ de vagues et le spectre local estimé sur un carré de 10 pixels au centre de la fenêtre de mesures sont comparés et sont tous deux en accord avec la loi de puissance théorique $E(\omega) \sim \omega^{-17/6}$ pour des fréquences comprises entre 20 et 100 Hz. Le spectre temporel local obtenu par DLP (b) est cette fois-ci comparé au spectre temporel donné par la sonde capacitive.

5 Conclusion

Les mesures présentées valident l'utilisation de la méthode de « *Diffusing Light Photography* » dans l'étude de la Turbulence d'ondes capillaires, assez sensible pour résoudre de faibles déformations à petite échelle. Ce travail confirme en utilisant une mesure spatio-temporelle, les résultats obtenus précédemment par des méthodes de mesure locale. La suite consistera à les compléter en cherchant à identifier les mécanismes en jeu dans l'interaction entre ondes et en étudiant les régimes fortement non-linéaires.

Remerciements : Nous remercions Alexandre Lantheaume et Jacques Servais pour leur aide technique dans la réalisation de l'expérience ainsi que Nicolas Mordant (LEGI UJF Grenoble) pour son apport dans le traitement des données. Ce travail a été financé par l'ANR Turbonde BLAN07-3-197846.

Références

1. A. C. NEWELL & B. RUMPF, Wave turbulence, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **43**, 59 (2011)
2. S. NAZARENKO, *Wave Turbulence* Springer, Berlin (2011)
3. E. FALCON, C. LAROCHE & S. FAUVE, Observation of gravity-capillary wave turbulence, *Physical Review Letters*, **98**, 094503 (2007)
4. F. MOISY, M. RABAUD & K. SALSAC, Measurement by digital image correlation of the topography of a liquid surface, *Experiments in Fluids*, **46**, 1021 (2009)
5. P. COBELLI, A. MAUREL, V. PAGNEUX & P. PETITJEANS, Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry, *Experiments in Fluids*, **46**, 1037 (2009)
6. E. HERBERT, N. MORDANT & E. FALCON, Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid, *Physical Review Letters*, **105**, 144502 (2010)
7. P. COBELLI, A. PRZADKA, P. PETITJEANS, G. LAGUBEAU, V. PAGNEUX & A. MAUREL, Different regimes for water wave turbulence, *Physical Review Letters*, **107**, 214503 (2011)
8. W. B. WRIGHT, R. BUDAKIAN & S. J. PUTTERMAN, Diffusing light photography of fully developed isotropic ripple turbulence, *Physical Review Letters*, **76**, 4528 (1996)
9. W. B. WRIGHT, R. BUDAKIAN, D. J. PINE & S. J. PUTTERMAN, Imaging of intermittency in ripple-Wave turbulence, *Science*, **278** 1609 (1997)
10. R. MICHELS, F. FOSCHUM & A. KIENLE, Optical properties of fat emulsions, *Optics Express*, **16** (8), 5909 (2008)
11. B. J. S. BARNARD & W. G. PRITCHARD, Cross-waves. II Experiments, *Journal of Fluids Mechanics*, **55** (2), 245 (1972)

Influence d'une transition hydrodynamique sur la propagation d'un front de réaction-diffusion

Simona Bodea¹ & Alain Pocheau¹

IRPHE, CNRS & Aix-Marseille Université, 49 rue Joliot-Curie, B.P. 146, Technopôle de Château-Gombert, F-13384 Marseille, Cedex 13, France
bodea@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Cette étude expérimentale porte sur la propagation d'un front de réaction-diffusion dans un écoulement cellulaire composé d'une rangée de vortex contra-rotatifs. Le front est obtenu par la réaction autocatalytique chlorite-iodure et l'écoulement par électroconvection. Nous mettons en évidence ici l'influence d'une transition hydrodynamique sur la propagation du front. En particulier, le passage d'un écoulement bi-dimensionnel à tri-dimensionnel s'avère être néfaste pour le transport en stoppant l'augmentation de vitesse de propagation avec l'intensité de l'écoulement. Ceci révèle la grande sensibilité des fronts de réaction à la structure des écoulements.

Abstract. We experimentally study the propagation of a chemical reaction front in a chain composed of counter-rotating vortices. The reaction front is induced by an autocatalytical reaction and the flow is generated by electroconvection. We evidence here the effect of a hydrodynamical transition on the front propagation. In particular, the flow evolution from two dimensional to three dimensional appears to be detrimental for the transport since the front speed surprisingly stops increasing with the flow speed. This points out the sensitivity of the front propagation to the flow structure.

1 Introduction

Les fronts de réaction-diffusion se rencontrent dans divers systèmes physiques, chimiques et biologiques comme, par exemple, la propagation des feux de forêt ou des infections, la progression du trou de la couche d'ozone ou encore le développement du phytoplancton [1,2]. Souvent, ils se trouvent soumis à un écoulement dont les propriétés de transport advectives s'avèrent très efficaces devant celles de réaction-diffusion. De ce fait, il apparaît essentiel de déterminer comment un écoulement influence la propagation effective d'un front au travers de son amplitude et de sa structure.

Récemment, la propagation de fronts dans des écoulements cellulaires a été très étudiée du point de vue théorique [3] et expérimental, en utilisant un écoulement stationnaire [4] ou un écoulement dépendant de temps [5]. Ces écoulements sont alors en général représentés par un écoulement modèle à deux dimensions (2D), composé d'une chaîne de vortex contra-rotatifs.

Les études expérimentales de propagation de front dans un écoulement stationnaire 2D cellulaires ont montré que la vitesse de propagation du front de réaction était augmentée sensiblement, de manière non-linéaire [4]. Cette non-linéarité résulte de la compétition entre les diverses échelles de temps d'advection, de réaction, de diffusion. En particulier, il apparaît que le front de réaction-diffusion suit, parmi les trajectoires possibles, celle qui lui permet d'optimiser le temps de parcours dans la structure imposée. Ceci souligne bien le rôle essentiel joué par la structure advective.

Notre étude s'inscrit dans la continuité de ces résultats et s'interroge en particulier sur l'effet d'une évolution propre des structures advectives sur la propagation du front de réaction-diffusion.

Parmi les évolutions possibles, le changement de dimension mérite une attention accrue. Dans le cas des forts régimes turbulents, comme en combustion turbulente, le transport réactif croît avec l'augmentation des modes et des amplitudes des composantes de l'écoulement. En revanche, à plus faible régime, comme celui considéré ici, les structures d'écoulement peuvent donner lieu à des barrières de transport et donc à des problématiques différentes. En particulier, dans l'étude menée ici, une transition hydrodynamique entre un écoulement cellulaire plan 2D et un écoulement cellulaire tridimensionnel (3D) conduit à un

changement de dimension de l'écoulement. Une des questions importantes est alors de savoir si ce passage à un écoulement 3D, de dimension et d'intensité plus élevée, conduit comme souvent à une augmentation du transport réactif et si oui via quel mécanisme. Contrairement au comportement attendu, nous allons montrer ici que le transport se voit en fait pénalisé par l'apparition d'écoulements 3D.

Par ailleurs, l'écoulement de type électroconvectif utilisé pour notre étude suscite de nombreux intérêts notamment vis à vis de sa transition à la tridimensionnalité [6,7]. Le front de propagation peut alors s'avérer un très bon révélateur de telles transitions et conduire à une caractérisation fine des effets 3D. Il permettra ainsi de préciser dans quelle mesure les modélisations 2D utilisés sont pertinentes ou non vis à vis d'une réalité qui est génériquement 3D.

2 Expérience

Toutes nos expériences ont été effectuées dans un canal fermé, de forme rectangulaire et de faible épaisseur d . Plusieurs dimensions ont été considérées lors de l'étude : largeur $L_y = 10$ ou 15 mm, épaisseur $d = 3$ ou 4 mm et longueur constante 400 mm. Le front de réaction-diffusion est obtenu à partir de la réaction auto catalytique chlorite-iodure [8]. La concentration des ions chlorite et iodure est fixée à $3,75 \cdot 10^{-4}$ et $3 \cdot 10^{-4}$ mole/l et le pH de la solution est stabilisé à 5 grâce à l'ajout d'une solution tampon. Afin de pouvoir visualiser le front, nous rajoutons également de l'amidon qui, en présence des ions I_2 et I^- , forme un complexe colorant la solution en bleu. Lorsque la réaction a lieu, elle produit une chute brutale en I_2 et I^- , faisant ainsi disparaître la coloration bleue. De cette manière, le front de réaction sépare une zone colorée en bleu (où la réaction n'a pas encore eu lieu) d'une zone incolore (où la réaction a déjà eu lieu) (Fig. 1-gauche).

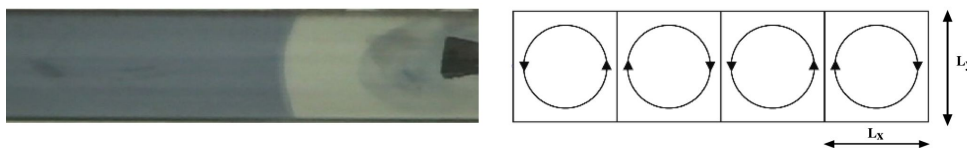


Figure 1. A gauche : vue de dessus du front chlorite-iodure en absence d'écoulements. Le front se propage de droite à gauche. A droite : schéma de l'écoulement cellulaire. $L_x = L_y = 10$ ou 15 mm.

L'écoulement est obtenu par électroconvection grâce à une rangée d'aimants de même largeur que le canal et placés sous celui-ci. Leur champ magnétique est vertical mais de sens alterné. La taille $L_x \times L_y \times d$ des aimants est $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ ou $15 \text{ mm} \times 15 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$. Lorsqu'un courant électrique se propage entre les deux extrémités du canal, les forces de Laplace induites donnent naissance à une rangée de vortex contra-rotatifs (Fig. 1-droite). Les courants appliqués sont de l'ordre du mA et les vitesses d'écoulement obtenues varient entre 10 et 130 mm/min. Ceci correspond à des nombres de Reynolds $Re = UL/\nu$ allant de 0 à 25 maximum, avec $L = L_x = L_y$.

Pour des vitesses d'écoulement modérées, le régime est de type Hele-Shaw avec des couches limites aux parois horizontales superposées et occupant toute l'épaisseur du fluide. On s'attend dans ce cas à un écoulement plan 2D, avec un profil de type Poiseuille. La vitesse de l'écoulement est alors maximale en $z^* = d/2$ ¹. Dans un tel écoulement, un front de réaction-diffusion sera advecté de manière différente suivant z mais maximale en $z = z^*$, conduisant ainsi a priori à un point le plus avancé en $z = z^*$. Pour cette raison, nous considérerons dans la suite $U(x, y)$ à cette côte, $U(x, y) = U(x, y, z^*)$, et nous appellerons U sa valeur maximale dans un vortex.

L'avancée du front est enregistrée par un caméscope placé au-dessus du canal et de résolution 1024×768 pixels. Ses enregistrements nous permettent de mesurer les différentes vitesses de l'étude, à savoir, la

1. En réalité, la décroissance en z du champ magnétique B induit un léger décalage du maximum de vitesse d'écoulement à une côte z^* légèrement plus petite que $d/2$, sans conséquence majeure pour l'étude.

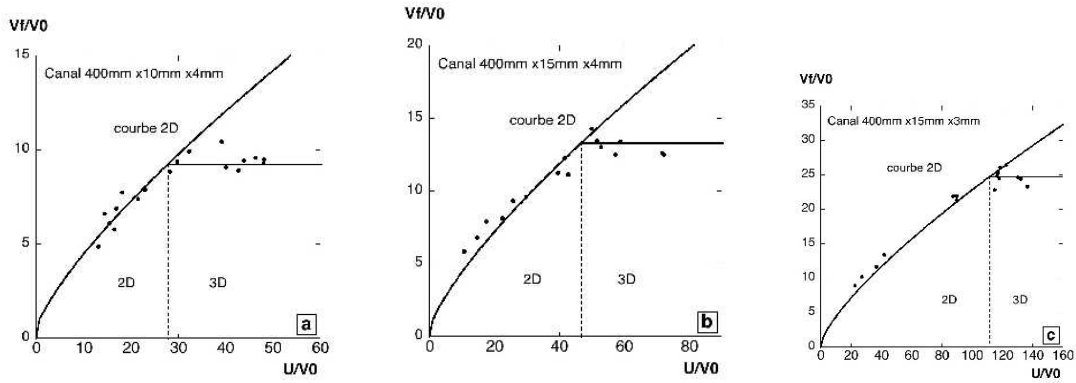
vitesse propre du front V_0 , la vitesse d'écoulement U et la vitesse moyenne d'avancement du front V_f . La vitesse propre V_0 , hors écoulement ou courant électrique et à $T = 20^\circ\text{C}$ (maintenue constante), est 1, 2 mm/min. Comme un courant électrique modifie les transports ioniques, il agit aussi sur V_0 par son intensité I . Cet effet a été étalonné et pris en compte de manière systématique dans l'étude.

La vitesse de l'écoulement U est mesurée en utilisant le front comme traceur. A l'intérieur d'une cellule et pour un écoulement plan 2D, le front adopte une forme de langue qui se propage le long d'une ligne de courant à vitesse $U + V_0$, ainsi que vers le centre de la cellule à vitesse V_0 . La trajectoire décrite par la tête du front à l'intérieur du vortex est alors de type spirale logarithmique. Elle permet ainsi de remonter à la vitesse de rotation solide de l'écoulement puis à la vitesse de l'écoulement. Tant que les vitesses d'écoulement restent modérées, les non-linéarités advectives restent négligeables. La vitesse de l'écoulement croît alors, comme les forces de Laplace, avec l'intensité I du courant de manière linéaire et avec des lignes de courant inchangées. Ces évolutions linéaires $U(I)$ ont été déterminées pour chaque canal par le procédé décrit précédemment. En revanche, dans le régime 3D, il ne sera plus possible de mesurer ainsi la vitesse de l'écoulement. Des études [6] ont cependant montré que lors de ce passage à la tridimensionnalité, et pour des Re pas trop importants, la composante horizontale de l'écoulement ne change pas d'évolution et varie ainsi toujours linéairement avec I et avec la même pente. Ceci nous a permis de prolonger la courbe $U(I)$ mesurée expérimentalement au domaine 3D.

La vitesse du front, V_f , est définie comme la vitesse moyenne d'avancement de la tête du front pendant une période, i.e. sur deux vortex. Pour une meilleure précision, elle est mesurée sur quelques périodes. Les mesures de V_0 , U et V_f ont permis de relier la vitesse effective réduite V_f/V_0 à l'intensité réduite d'écoulement U/V_0 , et de quantifier ainsi l'influence de l'advection sur la propagation du front.

3 Régimes de propagation

La figure 2a, relative à un canal de largeur 10 mm et d'épaisseur 4 mm, montre deux régimes de propagation. Pour des vitesses U/V_0 plus petites qu'une vitesse seuil $U_c/V_0 = 28$, la vitesse du front montre une augmentation concave avec la vitesse de l'écoulement. Ceci correspond à la propagation du front en présence d'un écoulement 2D, de type Hele-Shaw.



(a) $L_x = L_y = 10$ mm, $d = 4$ mm (b) $L_x = L_y = 15$ mm, $d = 4$ mm (c) $L_x = L_y = 15$ mm, $d = 3$ mm

Figure 2. Variation de la vitesse de propagation réduite du front, V_f/V_0 , en fonction de la vitesse réduite de l'écoulement, U/V_0 , pour différents canaux. Une augmentation concave est suivie d'une stagnation. Ce changement est corrélé à un changement de régime hydrodynamique et de trajectoire du front.

De manière très surprenante, au delà de U_c/V_0 , la vitesse du front V_f/V_0 cesse d'augmenter avec la vitesse d'écoulement et stagne. Nous verrons que ce régime correspond à un écoulement devenu 3D, avec

des écoulements secondaires transverses aux vortex. Le même type de variation de vitesse de propagation est mesuré pour les deux autres canaux avec des vitesses seuil différentes (Figs 2b et 2c).

Nous allons décrire par la suite ces deux régimes de propagation afin d'apporter des éléments de réponse quant à la compréhension de ce brusque changement. La figure 3 gauche, présente une séquence typique de propagation du front de réaction dans un écoulement plan obtenu à basse vitesse et représentatif de la propagation jusqu'à la vitesse seuil U_c . Les images montrent une propagation connexe du front de réaction, bien compatible avec une propagation de la tête du front dans le plan $z = z^*$. La propagation est alors composée de zones d'avancement rapide, là où l'écoulement advecte le front, et de zones de propagation lentes, où le front avance à sa vitesse propre V_0 normalement à l'écoulement. La vitesse finale d'avancement du front dans cette structure sera donnée par la compétition entre ces deux phases et leurs poids respectifs dans la propagation. Ce processus conduit à la variation non-linéaire observée pour la vitesse du front, bien en accord avec le modèle d'optimisation à deux dimensions proposé précédemment [4].

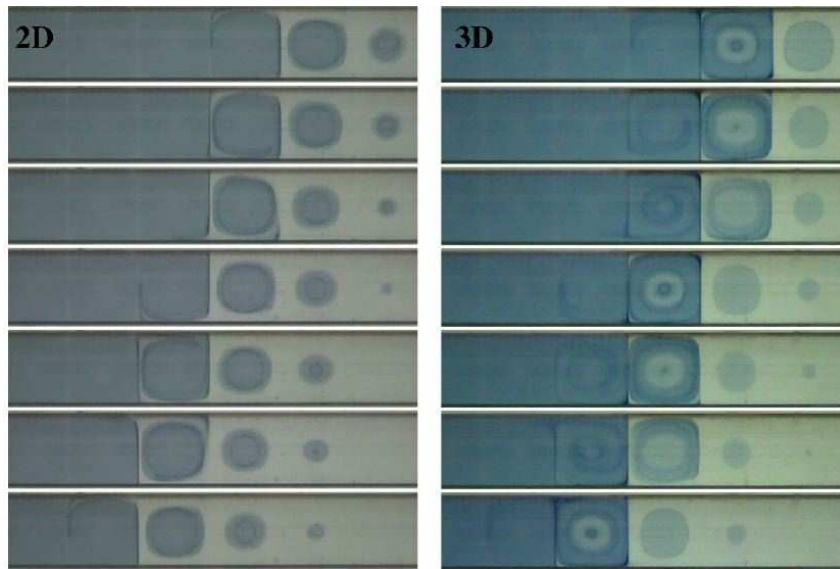


Figure 3. Séquence typique de propagation du front en présence d'écoulement. Gauche : vitesse modérée (2D). Droite, vitesse élevée (3D). Le front se propage de droite à gauche dans le canal de dimensions $10\text{mm} \times 4\text{mm}$.

Lorsque la vitesse d'écoulement augmente, les images de propagation du front (Fig. 3 droite) montrent l'apparition de domaines non connexes. Ceci suggère que la propagation de la tête du front ne se fait plus dans un seul plan, mais en explorant l'épaisseur du canal, conduisant ainsi sur les images intégrées en z à des intensités variables donnant l'impression de front non connexe. Ce changement dans la propagation est consistant avec la présence d'écoulements en épaisseur et donc d'un écoulement devenu 3D. Par rapport au régime précédent, nous observons que la contamination de l'intérieur d'une cellule se fait de manière bien différente. Au lieu d'une progression radiale à la vitesse V_0 de la périphérie vers le centre, le front est cette fois-ci advecté d'abord vers le centre de la cellule qu'il contamine avant que la périphérie ne soit entièrement brûlée.

4 Nature de la tridimensionnalité et mécanismes de propagation

Quelle peut être l'origine de cette transition hydrodynamique ? Quand les vitesses d'écoulement sont faibles, le fluide est dans le régime de Hele-Shaw décrit précédemment où l'écoulement est 2D. Lorsque la vitesse de l'écoulement augmente, les deux couches limites aux parois horizontales se séparent. Entre les

deux, une couche non-visqueuse apparaît dans laquelle le terme d'advection induit une force centrifuge radiale compensée par les gradients de pression : $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} \sim \frac{1}{\rho}\nabla P$. Cette force disparaît cependant aux abords des parois du canal car \mathbf{U} s'y annule, de sorte que les gradients de pression ne sont alors plus compensés. Comme la diffusion visqueuse ne peut les compenser non plus, des écoulements radiaux centripètes sont ainsi générés qui, par conservation de masse, remontent le long de l'axe du vortex dans la zone non-visqueuse. Superposés à l'écoulement primaire, ces écoulements secondaires donnent ainsi naissance à un mouvement global en spirale le long de l'axe du vortex.

Une analyse qualitative simple nous permet de quantifier la transition à la tridimensionnalité. En désignant par δ l'épaisseur naturelle de la couche limite à une paroi, la transition doit avoir lieu pour $\delta \sim d/2$. Elle se caractérise alors par : inertie \sim forces visqueuses \sim gradients de pression, soit, pour la vorticité Ω , par : inertie \sim forces visqueuses, i.e. $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\Omega \sim \nu\Delta\Omega$. En projetant cette équation sur l'axe Oz on obtient la relation $(\mathbf{U}_h \cdot \nabla_h)\Omega_z + w\frac{\partial\Omega_z}{\partial z} \sim \nu\Delta\Omega_z$, où les indices h et z indiquent les composantes horizontales et verticales et w la composante verticale de l'écoulement.

Exprimons maintenant le scaling des différents termes au travers de celui des dérivées. A la paroi, $\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{\delta/2}$ et à la frontière de la couche limite $\frac{\partial}{\partial z} \sim 0$, soit en moyenne, $\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{\delta}$. Pour les directions horizontales, on note que la zone inertielle correspond au vortex diminué de ses couches limites aux parois. Ainsi $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L_x/2}$ et $\frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{L_y/2-\delta}$ vu la couche limite d'épaisseur δ   la paroi verticale du canal. Comme $L_x = L_y$ la seconde variation est la plus forte. Ce scaling des dérivées donne ainsi dans l'équation de la vorticité verticale $\frac{U}{L_y/2-\delta}\Omega_z + w\frac{\Omega_z}{\delta} \sim \nu\frac{\Omega_z}{\delta^2}$ et dans celle d'incompressibilité $\frac{U}{L_y/2-\delta} \sim \frac{w}{\delta}$. Au total, on obtient ainsi : $\frac{U}{L_y/2-\delta} \sim \frac{\nu}{\delta^2}$. La séparation des couches limites survient pour $\delta \sim d/2$, soit pour $U_c \sim \frac{(L_y-d)\nu}{d^2}$. Cette relation montre ainsi la dépendance de la transition et de sa vitesse seuil U_c   la géométrie du canal. Ces seuils, déterminés dans les trois différents canaux, s'avèrent en très bon accord avec cette expression (Fig. 4).

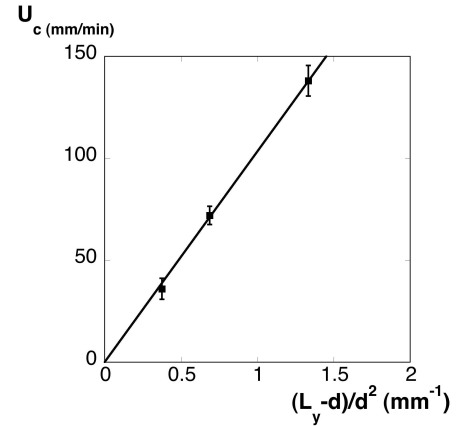


Figure 4. Dépendance de la vitesse seuil d'écoulement U_c avec $\frac{(L_y-d)}{d^2}$. Les points expérimentaux sont ajustés par une droite de pente 103 mm²/min.

Après la transition, l'écoulement peut être décrit comme composé de l'écoulement de base 2D et d'un écoulement secondaire d'intensité croissante avec la distance à la transition. Lorsque le front de réaction, étalé dans la profondeur z du canal, se propage dans cet écoulement 3D, son point le plus en avant ne se trouve a priori plus en z^* comme il l'était dans le cas 2D. En effet, la présence des écoulements secondaires transverses semble le pousser à changer de côte lors de sa propagation (Fig. 5). Ceci est confirmé par des expériences réalisées en filmant la propagation de coté dans un canal en verre. Ainsi la figure 5 montre à titre comparatif l'avancement de la tête du front juste après le passage dans une nouvelle cellule dans les cas 2D et 3D respectivement. Dans le cas 2D, la tête du front se propage bien en accord avec un profil de Poiseuille à une hauteur égale à z^* où $U(z)$ est maximal [?]. Dans le cas 3D, la propagation de cette tête du front ne change pas de nature, mais se propage à une côte z_1 légèrement plus grande que précédemment. Ceci conduit à penser que le front 'voit' alors une vitesse d'écoulement horizontale plus faible $U(z_1) < U(z^*)$. Sa vitesse moyenne d'avancement en est alors affectée et ne croît plus avec U comme dans le régime 2D.

Ceci suggère que l'apparition du régime 3D ne modifie pas fortement le mécanisme de propagation du front de vortex en vortex mais fait se décaler en z le point le plus en avant du front, conduisant ainsi à un abaissement de V_f par un abaissement effectif de l'écoulement plan rencontré. Dans ce scénario, le fait que V_f/V_0 reste quasiment constant alors que U/V_0 continue d'augmenter, signifie que le décalage en z de l'avant du front augmente de manière continue avec U . L'origine de ce décalage reste à préciser.

Un autre mécanisme serait cependant envisageable : lors de son excursion en z , l'avant du front pourrait être également éloigné de la séparatrice et mettre ainsi plus de temps à la traverser. Les expériences réalisées sur le coté, dans une gamme réduite de paramètres, ne semble pas valider cette hypothèse. Des expériences supplémentaires, en réalisant une observation sur le coté, pourraient permettre de conclure si ce genre de mécanisme joue un rôle important dans le changement de régime de propagation observé.

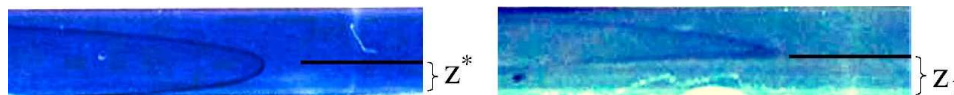


Figure 5. Vue de coté de l'avancement de la tête du front. A gauche l'écoulement est 2D et le front se propage à $z = z^*$. A droite, l'écoulement est 3D et le front se propage maintenant à $z = z_1 > z^*$.

5 Conclusion

Nous avons étudié la propagation d'un front de réaction-diffusion en présence d'un écoulement cellulaire, en géométrie confinée de Hele-Shaw. A vitesse modérée, les vortex présentent un profil de Poiseuille d'écoulement plan. A plus haute vitesse, ils développent des écoulements secondaires transverses qui brisent la bi-dimensionnalité. Cette transition conduit à stopper l'augmentation de la vitesse du front avec l'intensité des vortex. Le seuil d'apparition des écoulements secondaires peut être déterminé en considérant la séparation des couches limites dans l'épaisseur du canal. Ceci conduit à une loi d'échelle reliant l'intensité critique des vortex aux paramètres géométriques du canal et qui a été validée par nos expériences.

Cette étude révèle ainsi la sensibilité des fronts de réaction à la structure des écoulements dans lesquels ils se propagent, faisant de ceux-ci des révélateurs très fins de transitions hydrodynamiques. Ceci suggère qu'un front de réaction pourrait être utilisé pour dévoiler les structures fines d'un écoulement complexe, propriété potentiellement intéressante par exemple en microfluidique. Par ailleurs, nous avons montré que, de manière assez inattendue, l'apparition d'un écoulement structuré 3D pouvait pénaliser le transport. Cette propriété pourrait se révéler intéressante dans les situations où on désire limiter le transport en présence d'un écoulement d'intensité croissante.

Références

1. F. SAGUES AND I.R. EPSTEIN, Nonlinear Chemical dynamics, *Dalton Trans.*, 1201-1217 (2003).
2. T. TÉL, A DE MOURA, C. GREBOGI, G. KÁROLYI, Chemical and biological activity in open flows : a dynamical system approach, *Physics Reports*, **413**, 91-196 (2005)
3. M. ABEL, M. CENCINI, D. VERGNI & A. VULPIANI, Front speed enhancement in cellular flows, *Chaos*, **12**, 481-488 (2002)
N. VLADIMIROVA, A. KISELEV, P. CONSTANTI, O. RUCHAYSKIY, & L. RYZHIK, Flame enhancement and quenching in fluid flows, *Combustion Theory Modelling*, **7**, 485-508 (2003)
4. A. POCHÉAU & F. HARAMBAT, Effective front propagation in steady cellular flows : A least time criterion, *Physical Review E*, **73**, 065304 (2006)
5. M. S. PAOLETTI & T. H. SOLOMON, Front propagation and mode-locking in an advection-reaction-diffusion system, *Physical Review E*, **72**, 046204 (2005)
6. D. H. KELLEY & N. T. OUELLETTE, Onset of three-dimensionality in electromagnetically driven thin-layer flows, *Physics of Fluids*, **23**, 045103 (2011)
7. M. P. SATIJN, A. W. CENSE, R. VERZICCO, H. J. H. CLERCX & G. J. F. VAN HEIJST, Three-dimensional structure and decay properties of vortices in shallow fluid layers, *Physics of Fluids*, **13**, 1932-1945 (2011)
8. D. M. WEITZ & I. R. EPSTEIN, Spatial waves in the reaction of chlorite with iodide, *Journal of Physical Chemistry*, **88**, 5300-5304 (1984)

Instanton trajectories for random transitions in turbulent flows

Freddy Bouchet & Jason Laurie

Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, CNRS, UMR 5672, Université de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007, Lyon, France
 freddy.bouchet@ens-lyon.fr

Résumé. De nombreux écoulements turbulents ont plusieurs attracteurs et un comportement bistable ou multistable (la transition entre deux attracteurs est un évènement rare). C'est le cas par exemple pour la dynamique du champ magnétique terrestre, cycles de Milankovich pour le climat, la multistabilité des courants océaniques, les écoulements de Couette et de Rayleigh–Besnard turbulents, un grand nombre d'autres exemples expérimentaux, etc. Pour aucun écoulement turbulents, il n'existe actuellement de théorie satisfaisante pour décrire les attracteurs eux mêmes et la dynamique et le taux de transition du passage d'un attracteur à un autre. Les méthodes traditionnelles pour les systèmes proches de l'équilibre (théorie de Kramer) ou pour des systèmes avec un nombre de degrés de liberté relativement petit (grandes déviations) ne s'appliquent pas aux écoulements turbulents. Dans cet exposé, nous décrirons des résultats récents dans le cadre de la turbulence bidimensionnelle, basés sur des approches de mécanique statistique et de théorie des instantons en théorie des champs (prédisant des grandes déviations).

1 Introduction

Many turbulent flows can evolve and self-organize towards two or more very different states. In some of these systems, the transition between two of such states is rare and occurs relatively rapidly. Such systems include magnetic field reversals in the Earth or in MHD experiments [1], 2D turbulence [2], atmospheric flows [3], and for paths of ocean currents [4], Van Karman flows [5], and many other experiments. The understanding of these transitions is an extremely difficult problem due to the large number of degrees of freedoms, large separation of timescales and the non-equilibrium nature of these flows. It is important to develop a non-equilibrium theory in order to understand this phenomena.

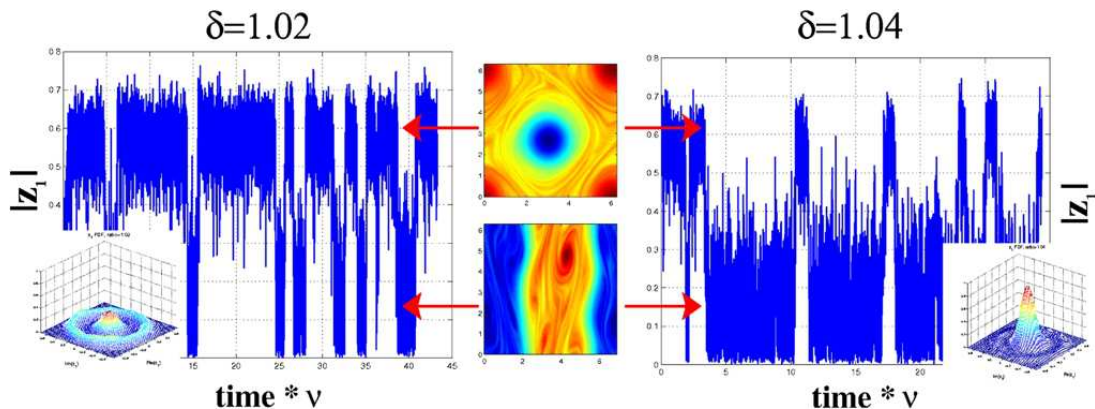


Figure 1. Figure taken from [8] showing rare transitions (illustrated by the Fourier component of the largest y mode) between two large scale attractors of the periodic 2D Navier-Stokes equations. The system spends the majority of its time close to the vortex dipole and parallel flows configurations.

However, for forced-dissipated turbulent systems it is unclear how to define the set of attractors for the dynamics. Although, in the limit of weak forcing and dissipation, one would expect that the set of

attractors would converge to the ones of the deterministic equation. In the case of the 2D Euler equations, equilibrium statistical mechanics in the form of the Robert–Miller–Sommeria (RMS) theory [6,7] allows the prediction of the set of attractors for the dynamics. These attractors are a subset of the steady states of the 2D Euler equations.

Moreover, simulations of the 2D Navier-Stokes equations in the weak force and dissipation limit showed that the dynamics actually concentrate around precisely the set attractors for the 2D Euler equations [8]. Interestingly, the same simulation showed sporadic non-equilibrium phase transitions, where the system spontaneously switches between two apparently stable steady states resulting in a complete change in the macroscopic behaviour. If the forcing and dissipation is weak, then these transitions are actually extremely rare, occurring on a timescale much longer than the dynamical timescale.

In this proceeding, will discuss how instanton theory can explain these non-equilibrium phase transitions by allowing for the computation of the transition probability for observing such a rare transition and determining the most probable trajectory (instanton) between two sets of attractors. These results are of fundamental importance as the transition probability contains a vast amount of information, for instance, one can estimate the timescale of observing such a trajectory and compute the reaction rate of the transition - a key quantity used in the field of transitions in chemical reactions.

The main objective is to present the initial applications of instanton theory to non-equilibrium phase transitions in the 2D Navier-Stokes equations, where we wish to predict the transition probability and compute the instantons for transitions between two steady states of the 2D Euler equations. The motivation for this was the observation of rare transitions in the numerical simulation of the 2D Navier-Stokes equations in [8]. Fig. 1 shows bistability and rare transitions between two attractors in a numerical simulation of the stochastically forced 2D Navier-Stokes equation in a periodic rectangular box taken from [8]. The system has evolved to an apparent non-equilibrium steady state, in which most of the time, the system's dynamics is concentrated around two sets of attractors, namely the vortex dipole and parallel flow. However, at long time intervals, the system sporadically switches between these two large scale attractors. Our aim is to understand this switching behaviour with instanton theory.

As preliminary results, we prove that transitions between two steady states are not rare events in the weak forcing-dissipation limit for the 2D Navier-Stokes equations with non-degenerate noise. This is a consequence of the fact that there are no two well-defined sets of attractors in the 2D Navier-Stokes equations. However, independently of this transition problem, we can show that transitions to high energy steady states are rare events and derive a non-trivial large deviation result for these transitions in the 2D Navier-Stokes equations. For this, the energy of the states $\mathcal{E}[\omega] = E$ has the role of the large deviation parameter in the limit as $E \rightarrow \infty$.

2 The 2D Euler and stochastic Navier-Stokes equations

We present the equations of motion for describing 2D and geophysical turbulent flows, described by the 2D Navier-Stokes equations with stochastic forcing. In the limit when forcing and dissipation goes to zero, the 2D Navier-Stokes equations reduce to the 2D Euler equations. We will give some details on the special properties that both of these equations have and how they influence the dynamics. Equilibrium statistical mechanics in the form of the RMS theory can be used to predict the most probable macrostate in which the flow will self-organize for the 2D Euler equations. Unfortunately, this theory cannot be applied for non-equilibrium systems where forcing and dissipation are present. Instead, we plan on utilizing instanton theory to gain insight into the non-equilibrium behaviour of these systems. We are interested in the non-equilibrium dynamics associated to the 2D stochastically forced Navier-Stokes equations on a periodic domain $\mathcal{D} = [0, 2\delta\pi) \times [0, 2\pi)$ with aspect ratio δ :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\omega = -\alpha\omega + \nu\Delta\omega + \sqrt{2\alpha}\eta, \quad (1a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla\psi, \quad \omega = \Delta\psi, \quad (1b)$$

where ω , \mathbf{v} and ψ are respectively the vorticity, the non-divergent velocity and the streamfunction defined up to a constant, which is set to zero without loss of generality. We have included an addition linear friction

term $-\alpha\omega$ to describe large scale dissipation. We consider non-dimensional equations, where a typical energy is of order 1 (see [9]) such that ν is the inverse of the Reynold's number and α is the inverse of a Reynold's number based on the large scale friction. We assume that the Reynold's numbers satisfy $\nu \ll \alpha \ll 1$. In the limit of weak forcing and dissipation : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0}$, the 2D Navier-Stokes equations converge to the 2D Euler equations for finite time, but the type of forcing and dissipation determines to which set of attractors the dynamics evolve to over a very long time. The curl of the forcing $\eta(\mathbf{x}, t)$ is a white in time Gaussian field defined by $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$, where C is the correlation function of a stochastically homogeneous noise.

The 2D Euler equations are given by Eq. (1) with forcing and dissipation set to zero, i.e. when $\alpha = \nu = 0$. The kinetic energy of the flow is given by

$$\mathcal{E}[\omega] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \omega \psi,$$

The energy is conserved, i.e. $d\mathcal{E}/dt = 0$, and is one of the invariants of the 2D Euler equations. The 2D Euler equations also conserve an infinite number of functionals, called Casimirs. They are related to the degenerate structure of the infinite-dimensional Hamiltonian system and can be understood as invariants arising from Noether's theorem. These functionals are of the form

$$\mathcal{C}_s[\omega] = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} s(\omega), \quad (2)$$

where s is any sufficiently regular function. These infinite number of conserved quantities are responsible for the equations having an infinite (continuous) set of steady states (see section 2 in [9]). Physically, these states are important because some of them act as attractors for the dynamics. Any of the infinite number of steady states of the 2D Euler equation satisfy $\mathbf{v} \cdot \nabla \omega = 0$.

3 Instanton theory

The application of instanton theory to non-equilibrium problems has been studied theoretically for gradient dynamics of Brownian particles in a potential [10], and numerically for non-interacting system of magnetic particles [11] and for thermally activated reversals in the Ginzburg-Landau model [12]. Instanton theory utilizes the saddle-point approximation to a path integral representation for the transition probability. This results in the most probable trajectory (instanton) being given by the minimizer of an action functional \mathcal{A} . This is analogous to the more mathematically rigorous theory developed by Freidlin and Wentzell [13]. To illustrate instanton theory, let us consider a diffusion process described by an Itô stochastic differential equation (SDE)

$$\dot{\omega}_i = -F_i(\omega) + \sqrt{2\alpha} \eta_i, \quad (3)$$

where η_i , $1 \leq i \leq n$ are independent Gaussian white noises with $\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{i,j} \delta(t - t')$, α is the noise amplitude and $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a uniformly Lipschitz function. Then one can represent the transition probability for observing a trajectory between two states, $\omega(0) = \omega_0$ and $\omega(T) = \omega_T$, in time T as

$$P(\omega_T, T; \omega_0, 0) = \int \mathcal{D}[\omega] e^{-\frac{1}{2\alpha} \mathcal{A}[\omega]}. \quad (4)$$

Formula (4) is a path integral for the transition probability of observing a trajectory from state ω_0 at time $t = 0$ to state ω_T at time $t = T$. The right-hand side represents a summation over all possible paths linking the two states which have some probability distribution represented by the exponential. The action \mathcal{A} of the SDE (3) is given by $\mathcal{A}[\omega] = (1/2) \int_0^T dt [\dot{\omega} + \mathbf{F}(\omega)]^2$. The quadratic form of the action \mathcal{A} is a consequence of the Gaussian statistics of the noises η_i .

A large deviation result can be derived in the limit of vanishing noise $\alpha \rightarrow 0$ by application of the saddle-point approximation of the path integral, which states that in the limit of $\alpha \rightarrow 0$, the main

contribution to the path integral will arise from the trajectory that globally minimizes the action $\mathcal{A}[\omega]$. This leads to the large deviation principle

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} -\alpha \log(P) = \frac{1}{2} \inf_{T > 0} A[\omega_0, \omega_T, T], \quad (5)$$

where $A[\omega_0, \omega_T, T] = \mathcal{A}[\omega^*]$ is the minimum of the action $\mathcal{A}[\omega]$ with ω satisfying the boundary conditions $\omega(0) = \omega_0$ and $\omega(T) = \omega_T$. The minimizer ω^* is known as the instanton and corresponds to the most probable transition trajectory between the two states in time T .

3.1 The 2D Navier-Stokes action

In this subsection, we discuss the application of large deviation theory to the 2D Navier-Stokes equations (1). The initial step is the construction of the action functional associated to Eqs. (1). The action functional is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\omega] &= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{\mathcal{D}} dx dx' [\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \alpha \omega - \nu \Delta \omega](\mathbf{x}) C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \alpha \omega - \nu \Delta \omega](\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} dt \mathcal{L}[\omega, \dot{\omega}], \end{aligned} \quad (6)$$

where \mathcal{L} is the Lagrangian associated to the action \mathcal{A} .

If a large deviation result exists, then departure from the optimal trajectory is rare and the optimal action $\mathcal{A}[\omega^*]$ gives the large deviation result. The minimizer, or instanton, ω^* satisfies the Euler-Lagrange equations associated to the Lagrangian (6). Specifically, this instanton trajectory is a solution of

$$\dot{q} + \mathbf{v} \cdot \nabla q = \Delta^{-1}(\mathbf{e}_z \cdot [\nabla \omega \times \nabla q]) + \alpha q - \nu \Delta q, \quad (7a)$$

$$q(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}} dx' p(\mathbf{x}') C(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (7b)$$

$$p = \dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \alpha \omega - \nu \Delta \omega, \quad (7c)$$

subject to the boundary conditions $\omega(0) = \omega_0$ and $\omega(T) = \omega_T$. The Euler-Lagrange equations (7) are usually ill-posed for initial value problems. However, they should be verified by all critical points of \mathcal{A} which correspond to a special set of initial conditions that solve the boundary value problem.

3.2 Transitions between steady states

We have already mentioned that the 2D Navier-Stokes equations with weak forcing and dissipation evolves towards steady states, which are attractors of the 2D Euler dynamics. Rare transitions have been numerically observed between a vortex dipole and a parallel flow (see Fig. 1 and [8]). We present in the following subsections several simplified cases of transitions in the 2D Navier-Stokes equations that can be treated analytically [14].

One of the key properties of the 2D Euler equations is that the ensemble of steady states are connected. This is readily seen by the fact that any steady state ω_T (such that $\mathbf{v}_T \cdot \nabla \omega_T = 0$) is connected to zero through the path $\omega(\mathbf{x}, t) = \gamma(t)\omega_T$ with $\gamma(0) = 0$ and $\gamma(T) = 1$. This places the 2D Navier-stokes equations (in the limit of weak forcing and dissipation) outside the scope of applying Freidlin–Wentzell theory. The consequence of this, is that for large times the minimum of \mathcal{A} is of order α . Therefore, transitions from one state to another are not rare events and there is no large deviation result. We will now present a simple example to illustrate this.

3.3 Instanton from 0 to ω_T with zero viscosity and Gaussian white noise forcing

We will consider an instanton trajectory starting at zero and going to a final steady state ω_T such that $\mathbf{v}_T \cdot \nabla \omega_T = 0$.

In order for us to obtain an explicitly solvable solution, we consider the 2D Navier-Stokes action with a forcing profile corresponding to white in space noise : $C(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. A further simplification we consider is to set viscosity to zero : $\nu = 0$, this is to ensure that the dissipation for any arbitrary state remains uniform on all the modes¹. For Gaussian white noise, the Euler-Lagrange equations (7) simplify to

$$\dot{p} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = \Delta^{-1}(\mathbf{e}_z \cdot [\nabla \omega \times \nabla p]) + \alpha p, \quad (8a)$$

$$p = \dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \alpha \omega. \quad (8b)$$

We make an ansatz for the instanton trajectory, and show that this satisfies the Euler-Lagrange equations (8). We consider the ansatz :

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \gamma(t)\omega_T(\mathbf{x}), \quad \text{then} \quad p(\mathbf{x}, t) = [\dot{\gamma}(t) + \alpha\gamma(t)]\omega_T(\mathbf{x}), \quad (9)$$

where γ parametrizes the path and has the following boundary conditions : $\gamma(0) = 0$ and $\gamma(T) = 1$. The ansatz states that the instanton will diffuse through the continuous set of steady states. Substitution of the ansatz (9) into the Euler-Lagrange equations (8), we find that Eq. (9) is an instanton (solution to the Euler-Lagrange equation) if

$$\ddot{\gamma} = \alpha^2 \gamma, \quad \text{with} \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(T) = 1. \quad (10)$$

We can solve the evolution equation (10) subject to the boundary conditions to determine the instanton trajectory. The instanton trajectory is then given by

$$\omega^*(\mathbf{x}, t) = \frac{\sinh(\alpha t)}{\sinh(\alpha T)} \omega_T(\mathbf{x}). \quad (11)$$

We remark, that by showing the instanton solves the Euler-Lagrange equation, we have only proved that the trajectory (11) is a critical point of the action, and not the global minimizer.

Now that we have the formula for the instanton, Eq. (11), we can compute the action corresponding to the instanton trajectory (11)

$$A[\omega_T, T] = \mathcal{A}[\omega^*] = \frac{\alpha e^{\alpha T}}{2 \sinh(\alpha T)} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \omega_T^2. \quad (12)$$

We observe that the action (12) is proportional to the enstrophy of the final state ω_T . However, there is no large deviation principle for (12), as the right-hand side of Eq. (5) will vanish. This is because the instanton trajectory does not correspond to a rare event, as it corresponds to the diffusion across a continuous set of steady states via an Ornstein–Uhlenbeck process.

We expect to observe a similar result for any non-degenerate force correlation $C(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, non-degenerate in the sense that the force acts over all modes of ω . This is because the optimum transition trajectories will always correspond to the diffusion across continuous sets of steady states via an Ornstein–Uhlenbeck process linking two states. These types of transitions are not rare events. We expect a large deviation result to exist when the saddle–point approximation is valid, i.e. there exists a large parameter corresponding to a rare trajectory.

We conjecture, that if there are degeneracies in $C(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, i.e. such that the forcing does not directly influence the modes in which the transition must occur, then we expect that other modes must be excited, via the nonlinear term $\mathbf{v} \cdot \nabla \omega$, in order to influence the modes involved in the transition. In this case, it should produce a non-trivial instanton transition trajectory that isn't described by an Ornstein–Uhlenbeck process through a continuous set of steady states. Subsequently, a large deviation result consistent with formula (5) should exist.

1. For more specific types of ω_T , we can include viscosity and a arbitrary $C(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, e.g. instantons between parallel flows.

3.4 Rare trajectories to high energy states

In the previous subsection, we showed an example of a transition between zero and an arbitrary steady states will not produce a large deviation result in the vanishing forcing-dissipation limit $\alpha \rightarrow 0$. However, by considering another large deviation parameter, namely the energy E , we can derive a large deviation principle for a rare transition between zero and a high energy steady state. To show the large deviation result, we are required to parametrize a steady state with respect to its energy $\mathcal{E}(\omega) = E$. For any given steady state $\omega(\mathbf{x})$, we can parametrize it such that $\omega(\mathbf{x}) = \sqrt{E}\omega_1(\mathbf{x})$, where ω_1 is the corresponding steady state that has unit energy $\mathcal{E}(\omega_1) = 1$. By considering the result from the previous subsection, namely Eq. (12), then for an instanton trajectory starting at zero, one can derive a large deviation principle (5) for transitions to final states with $E \rightarrow \infty$, i.e.

$$\lim_{E \rightarrow \infty} -\frac{1}{E} \log(P) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \omega_1^2. \quad (13)$$

Eq. (13) states that in the limit of large energy states, the logarithm of the transition probability is proportional to the energy E times the enstrophy of the state. Physically, this implies that the most probable rare transitions will occur between steady states which have minimum enstrophy. The above result can be generalized to an arbitrary forces defined by an arbitrary correlation $C(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ for several types of transitions, i.e. for the rare transitions between two parallel flows or between two vortex steady states with the same eigenmodes in both spatial dimensions [14].

Références

1. M. BERHANU, R. MONCHAUX, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PETRELIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, L. MARIE & F. RAVELET, Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo, *Europhysics Letters* **77**, 59001 (2007)
2. J. SOMMERIA, Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box, *Journal of Fluid Mechanics*, **170**, 139-168 (1986)
3. R. E. WEEKS, Y. TIAN, J. S. URBACH, K. IDE, H. L. SWINNEY & M. GHIL, Transitions between blocked and zonal flows in a rotating annulus with topography, *Science*, **278**, 1598-1601 (1997)
4. M. J. SCHMEITS & H. A. DIJKSTRA, Bimodal behavior of the Kuroshio and the Gulf stream, *Journal of Physical Oceanography*, **31**, 3435-3456 (2001)
5. F. RAVELET, L. MARIÉ, A. CHIFFAUDEL & F. DAVIAUD, Multistability and memory effect in a highly turbulent flow : experimental evidence for a global bifurcation, *Physical Review Letters*, **93**, 164501 (2004)
6. J. MILLER, Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions, *Physical Review Letters* **65**, 2137-2140 (1990)
7. R. ROBERT & J. SOMMERIA, Statistical equilibrium states for two-dimensional flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **229**, 291-310 (1991)
8. F. BOUCHET & E. SIMMONET, Random changes of flow topology in two-dimensional and geophysical turbulence, *Physical Review Letters*, **102**, 1-4, (2009)
9. F. BOUCHET & A. VENAILLE, Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows, *Physics Reports*, à paraître.
10. B. CAROLI, C. CAROLI & B. ROULET, Diffusion in a bistable potential : The functional integral approach, *Journal of Statistical Physics*, **26**, 83-111 (1981)
11. D. BERKOV, Numerical calculation of the energy barrier distribution in disordered many-particle systems : the path integral method, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **186**, 199-213 (1998)
12. W. E, W. REN & E. VANDEN-EIJNDEN, Minimum action method for the study of rare events, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **57**, 637-656 (2004)
13. M. I. FREIDLIN & A. S. WENTZELL, *Random perturbations of dynamical systems*, Springer (1998)
14. F. BOUCHET & J. LAURIE, Instanton theory and rare transitions in the 2D Navier-Stokes equations, en préparation.

Formes normales d'observabilités quadratiques de Poincaré

Driss Boutat¹, Latifa Boutat-Baddas² & Jean-Pierre Barbot³

¹ Loire Valley University, ENSI de Bourges, Institut PRISME, 88, Boulevard Lahitolle 18020 Bourges Cedex

² CRAN-CNRS, UHP NancyI, IUT de Longwy 186, rue de Lorraine, 54400 Cosnes-et-Romain

³ ECS ENSEA, 6, avenue du Ponceau 95014 Cergy-Pontoise Cedex, et EPI Non-A, INRIA Lille-Nord Europe, France

driss.boutat@ensi-bourges.fr

Résumé. Les conditions géométriques, introduites par Krener et Isidori [2], pour la mise sous forme normale d'observabilité de Brunovsky [7] d'un système non linéaire, sont souvent trop restrictives. En théorie du contrôle, l'observabilité est la propriété structurelle de pouvoir retrouver toutes les variables d'état d'une dynamique à partir d'un ensemble de variables mesurées. Pour les systèmes linéairement observables avec un mode inobservable, dans [6], nous nous sommes basés sur l'approche de l'approximation quadratique de Poincaré [1] pour mettre au point une forme normale modulo l'injection de termes quadratiques entrées-sorties. Cette forme permet de concevoir des observateurs non-linéaires simples (souvent appelés, dans l'industrie, capteurs logiciels). Ceci est due aux faits que les propriétés d'observabilité sont clairement exprimées sous cette forme et que la structure choisie pour représenter chaque classe d'équivalence est dédiée à la synthèse d'observateurs. Grâce à ceci, nous avons donné plusieurs applications en cryptographie [5]. Dans cette communication, comme un complément de notre précédente approche, nous revenons au concept de base géométrique pour les systèmes mono sortie linéairement observables, afin de mettre en évidence les propriétés structurelles géométriques par rapport à la sortie. Nous mettons en évidence une caractérisation géométrique des systèmes non linéaires dont la partie quadratique s'annule grâce un changement de coordonnées. Nous proposons la même analyse, que celle de Kang et Krener [3] et celle de Boutat et Barbot [4] pour les systèmes commandables.

Abstract. This paper deals with observability quadratic normal forms for linearly observable systems. Particularly, we will give necessary and sufficient geometrical conditions which guarantee the existence of a quadratic transformation that cancels all quadratic terms, modulo those are functions of the output. In the end of this paper, we give an example to highlight our purpose.

1 Introduction

L'une des formes normales d'observabilité la plus connue s'écrit comme suit [2]

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(y) \\ y = z_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

où $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ est l'état du système et y est la sortie (l'état mesuré). L'intérêt essentiel de cette forme est qu'elle supporte un observateur de type Luenberger à savoir :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(y) + K(y - \hat{y}) \quad (2)$$

de sorte que l'erreur d'observation $e = z - \hat{z}$ entre l'état réel z du système et son état estimé \hat{z} est régie par une dynamique linéaire :

$$\dot{e} = (A + KC)e \quad (3)$$

où le gain K est choisi afin de faire converger l'état estimé vers l'état réel.

En général, la mise sous forme normale d'un système non linéaire à l'aide d'un changement de coordonnées est soumise à des conditions géométriques très restrictives. C'est pour cela que la recherche d'une forme quadratique observable est utile pour l'analyse de l'observabilité. Dans cet article, nous allons donner une caractérisation géométrique de la nullité des termes quadratiques d'un système non linéaire modulo des termes qui ne dépendent que de la sortie. Ce document est organisé comme suit : la section 2 est dédiée aux notations, définitions et à la présentation du problème à résoudre. La section 3 est dédiée à la linéarisation quadratique modulo une injection des grandeurs mesurées. La section 4 présente brièvement un exemple académique.

2 Notations et définitions

On considère dans un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^n le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4)$$

où $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont supposés analytiques avec $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$. On suppose que ce système est observable, c'est-à-dire que la codistribution $\text{span} \{dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h\}$ est de rang n en 0. Dans ce cas, le système (4) peut s'écrire comme suit [7]

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + f^{[2]}(\xi) + O^{[3]}(\xi) \\ y = \xi_n \end{cases} \quad (5)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix} \text{ et } f^{[2]}(\xi) = \begin{bmatrix} f_1^{[2]}(\xi) \\ f_2^{[2]}(\xi) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n^{[2]}(\xi) \end{bmatrix}$$

pour $1 \leq i \leq n$, avec $f_i^{[2]}(\xi)$ un polynôme homogène de degré 2 en ξ .

Définition 1.

1. Le terme $f^{[2]}(\xi)$ s'appelle la partie quadratique du système (5).
2. Une transformation quadratique de Poincaré est un changement de coordonnées de la forme suivante :

$$z = \xi + \psi^{[2]}(\xi)$$

où

$$\psi^{[2]}(\xi) = \left(\psi_1^{[2]}(\xi), \psi_2^{[2]}(\xi), \dots, \psi_n^{[2]}(\xi) \right)^T$$

pour $1 \leq i \leq n$, avec $\psi_i^{[2]}(\xi)$ un polynôme homogène de degré 2 en ξ .

Soit $E = \mathbb{R}^n [y^2]$ l'espace vectoriel dont les éléments sont $(b_1, \dots, b_n)^T y^2$ avec $(b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2. On dit que le système (5) est quadratiquement équivalent à un autre système de la forme

$$\dot{z} = Az + g^{[2]}(z) + O^{[3]}(z)$$

s'il existe une transformation quadratique de Poincaré qui transforme $f^{[2]}(\xi)$ en $g^{[2]}(z)$.

si $g^{[2]}(z)$ est définie modulo E , on dit que l'équivalence est définie modulo une injection de sortie.

Si $g^{[2]}(z) = 0$, on dit que (5) est quadratiquement linéarisable.

Si $g^{[2]}(z) \in E$, alors on dit (5) est quadratiquement linéarisable modulo une injection de sortie.

La méthode algébrique de caractérisation des équivalences quadratiques modulo une injection de sortie est donnée dans [3,4,6,5,8,9] en utilisant les équations homologiques de Poincaré :

$$A\psi^{[2]}(z) - \frac{\partial\psi^{[2]}(z)}{\partial z}Az = f^{[2]}(z) - g^{[2]}(z) \text{ modulo } E \quad (6)$$

Dans ce document, on propose une méthode géométrique pour déterminer la transformation de Poincaré qui élimine la partie quadratique sous des conditions liées au système non linéaire.

3 Linéarisation quadratique

Dans cette section, on présente les outils de la linéarisation exacte modulo l'injection de sortie due à [2], puis on donnera le résultat correspondant pour la linéarisation quadratique modulo l'injection de sortie. On pose

$$\theta = \left(dh, dL_f h, \dots, dL_f^{n-1} h \right)^T := (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n).$$

Les 1-formes θ s'appellent les 1-formes d'observabilité. Elles constituent une base du fibré cotangent T^*U de U .

Soit Y_1 le champ de vecteur défini par :

$$\begin{aligned} \theta_i(Y_1) &= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ \theta_n(Y_1) &= 1. \end{aligned}$$

et par induction soit

$$Y_k = (-1)^k ad_f^{k-1}(Y_1) \text{ pour } 2 \leq k \leq n,$$

où $ad_f^0 Y_1 = Y_1$ et $ad_f^{k-1}(Y_1) = [Y_{k-1}, f]$ le crochet de Lie de Y_{k-1} et f .

Il est clair que $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ est une base du fibré tangent TU de U . On a :

$$\theta(Y_1, \dots, Y_n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \dots & 1 & l_{2,n-1} \\ \vdots & \dots & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & l_{n,2} & \dots & \dots & l_{n,n} \end{bmatrix} := A$$

où $l_{i,j} = \theta_i(Y_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$. En posant $\omega = A^{-1}\theta := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ pour $1 \leq s \leq n$, nous donnons les composantes de ω par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} \omega_n &= \theta_1 \\ \omega_{n-r} &= (\theta_{r+1} - \sum_{i=n-r+1}^n l_{r+1,i} \omega_i) \text{ for } 1 \leq r \leq n-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Le théorème suivant est dû à [2].

Théorème 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Le système (4) est linéarisable modulo l'injection de sortie*
- ii) *$[Y_i, Y_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$,*
- iii) *$d\omega = 0$.*

Dans ce cas, le difféomorphisme est donné par $\phi(x) = z$ avec

$$z_i = \phi_i(x) = \int_{\gamma} \omega_i + \phi_i(0) \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

où γ est un chemin reliant 0 à x dans un voisinage $V_0 \subseteq U$ de 0.

Le résultat qui suit est le correspondant de la linéarisation quadratique modulo l'injection de sortie. En particulier, la condition de commutativité dans le théorème 1 est remplacée par la commutativité d'ordre 1.

Théorème 2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) le système (5) est quadratiquement linéarisable modulo une injection de sortie,
- ii) $[Y_i, Y_j] = O^1(\xi)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$,
- iii) $[Y_i, Y_{i+1}] = O^1(\xi)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$,
- iv) $d\omega = O^1(\xi)$
- v) $\omega = \beta + O^2(\xi)$ avec $d\beta = 0$

Dans ce cas, la transformation quadratique de Poincaré

$$z = \xi + \phi^{[2]}(\xi) := \varphi(\xi)$$

est telle qu'on a $\beta = d\varphi$. La partie φ supprime les termes d'ordre 2 modulo la sortie. Dans ces nouvelles coordonnées, le système (5) a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_1 z_n + b_1 z_n^2 + O^{[3]}(z) \\ \dot{z}_j = z_{j-1} + a_j z_n + b_j z_n^2 + O^{[3]}(z) \\ \text{pour tout } 2 \leq j \leq n \end{cases} \quad (8)$$

Démonstration. Les 1-formes d'observabilité du système (8) sont :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= dz_n \text{ et} \\ \alpha_j &= dz_{n-j+1} + \sum_{s=0}^{j-2} k_s^j dz_{n-s} + O^2 := d\mu_j + O^{[2]} \end{aligned}$$

où $k_s^j \in R$ pour tout $2 \leq j \leq n$ et $0 \leq s \leq j-2$. On suppose que le système (5) est quadratiquement linéarisable modulo une injection de sortie à l'aide d'une transformation quadratique de Poincaré $\varphi(\xi) = z$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, les 1-formes d'observabilité du système (8) sont les pull-back des 1-formes d'observabilité θ_i du système (5) i.e. $\varphi^*(\theta_i) = \alpha_i$. or, pour le système (8), on a $\varphi^*(\theta_i) = d\mu_i + O^2$ et par l'algorithme de l'équation (7), on a aussi $\varphi^*(\omega_i) = d\nu_i + O^2$. Ce qui donne, en appliquant $(\varphi^*)^{-1}$, $\omega_i = d(\nu_i \circ \varphi) + O^2$. Ce qui montre (i) \iff (iv) \iff (v).

Maintenant on a (ii) \iff (iii). En effet, en utilisant l'identité de Jacobi sur les crochets de Lie on a

$$[Y_i, Y_{i+2}] = -[f, [Y_i, Y_{i+1}]] \text{ pour } 1 \leq i \leq n-2$$

Comme $f = O^1(\xi)$, alors $[Y_i, Y_{i+1}] = O^1(\xi)$ est équivalent à $[Y_i, Y_{i+2}] = O^1(\xi)$. Le résultat s'obtient par récurrence pour $i < j$ par le fait que

$$[Y_i, Y_j] = -[f, [Y_i, Y_{j-1}]] - [Y_{j-1}, Y_{i+1}].$$

Maintenant (ii) \iff (v). Comme $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ est une base, alors $d\omega = O^1(\xi)$ est équivalent à $d\omega(Y_i, Y_j) = O^1(\xi)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On rappelle :

$$d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]). \quad (9)$$

Maintenant pour tout $1 \leq i \leq n$ la fonction $\omega(Y_i)$ est constante et on obtient à partir de (9) :

$$d\omega(Y_i, Y_j) = -\omega([Y_i, Y_j]) = O^{[1]}(\xi). \quad (10)$$

Puisque les composantes $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ de ω forment une base du fibré cotangent T^*U de U , alors (10) est équivalente à $[Y_i, Y_j] = O^{[1]}(\xi)$.

Maintenant, on va montrer que la transformation quadratique φ est donnée par $d\varphi = \beta$ et que cela élimine tous les termes d'ordre 2 modulo E .

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \varphi_*(f) = -\varphi_* [f, Y_j] = -\varphi_*(Y_{j+1}) = -\beta(Y_{j+1})$$

comme $\beta = \omega + O^{[2]}(\xi)$ et $\omega(Y_j) = \frac{\partial}{\partial z_{j+1}}$ pour $1 \leq j \leq n-1$, alors

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \varphi_*(f) = \frac{\partial}{\partial z_{j+1}} + O^{[2]}(z).$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_1 z_n + b_1 z_n^2 + O^{[3]}(z) \\ \dot{z}_j &= z_{j-1} + a_j z_n + b_j z_n^2 + O^{[3]}(z) \text{ pour } 2 \leq j \leq n \end{aligned}$$

parce que :

$$\frac{\partial}{\partial z_n} \varphi_*(f) = -\varphi_* [f, Y_n] = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial z_i} + O^{[1]}.$$

Remarque 1. Si $a_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$ alors le système est quadratiquement linéarisable si et seulement si

$$[Y_i, Y_{i+1}] = O^1(\xi) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n,$$

où $Y_{n+1} = [Y_n, f]$.

Remarque 2. Dans le théorème 2 (i) \iff (iv) \iff (v) est vérifiée à n'importe quel ordre $r \geq 2$.

4 Exemple

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_3 \end{cases} \quad (11)$$

Les 1-formes d'observabilité sont

$$\theta_1 = dx_3, \quad \theta_2 = dx_2 \quad \text{et} \quad \theta_3 = dx_1 - 2x_3 dx_2 - 2x_2 dx_3.$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \text{ et} \\ Y_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_3 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Un simple calcul donne :

$$[Y_1, Y_2] = [Y_1, Y_3] = 0 \quad \text{et} \quad [Y_2, Y_3] = 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} = O^1(x).$$

Donc il existe une transformation de Poincaré qui linéarise ce système. Maintenant, on va calculer la transformée de Poincaré. Pour cela, on calcule Λ :

$$\Lambda = \theta(Y_1, Y_2, Y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2x_3 \\ 1 & -2x_3 & 4x_3^2 + 2x_3x_2 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

On va calculer les composantes de $\omega = \Lambda^{-1}\theta$ et on a : $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -2x_2x_3 + 2x_2 & 2x_3 & 1 \\ 2x_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où

$$\begin{aligned} \theta_1 &= dx_3, \theta_2 = dx_2, \\ \theta_3 &= dx_1 - 2x_3dx_2 - 2x_2dx_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx_1 - 2x_2x_3(dx_3) \\ \omega_2 &= 2x_3dx_3 + dx_2 \\ \omega_3 &= dx_3. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= O^1 \\ d\omega_2 &= 0 \\ d\omega_3 &= 0. \end{aligned}$$

D'où la transformation de Poincaré :

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 + x_3^2 \quad \text{et} \quad z_3 = x_3$$

5 Conclusion

Par cette modeste note, nous voulons participer à l'hommage de Henri Poincaré et démontrer que ses travaux sont aussi d'une très grande actualité et pertinence en théorie du contrôle.

Références

1. H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars (1899)
2. A. KRENER & A. ISIDORI, Linearization by output injection and nonlinear observer, *Systems & Control Letters*, **3**, 47-52 (1983)
3. W. KANG & A. J. KRENER, Extended quadratic controller normal form and dynamic state feedback linearization of non linear systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **30** (6), 1319-1337 (1992)
4. D. BOUTAT & J.-P. BARBOT, Poincaré normal form for a class of driftless systems in a one dimensional submanifold neighborhood, *Mathematic of Control, Signals & Systems*, **15**, 256-274 (2002)
5. L. BOUTAT-BADDAS, J.-P. BARBOT, D. BOUTAT & R. TAULEIGNE, Observability bifurcation versus observing bifurcations, *Proceedings of the 15th IFAC* (2002)
6. L. BOUTAT-BADDAS, D. BOUTAT & J.-P. BARBOT, Observability analysis by Poincaré normal forms, *Mathematics of Control Signals and Systems*, **21** (2), 147-170 (2009)
7. P. BRUNOVSKY, A classification of linear controllable systems, *Kybernetika*, **6**, 173-188 (1970)
8. L. BOUTAT-BADDAS, D. BOUTAT, J.-P. BARBOT & R. TAULEIGNE, Quadratic Observability normal form, *Proceeding of IEEE CDC 01* (2001)
9. L. BOUTAT-BADDAS, *Analyses des singularités d'observabilité et de détectabilité : applications à la synchronisation des circuits électroniques chaotiques*, Thèse de l'Université de Cergy-Pontoise, (2002)

Analyse de séries temporelles de production éolienne : Loi de Taylor et propriétés multifractales

Rudy Calif¹ & François G. Schmitt²

¹ EA 4098, LARGE laboratoire en Géosciences et énergétique université des Antilles et de la Guyane 97170 P-à-P, France

² CNRS, UMR 8187 LOG Laboratoire d'Océanologie et de Géosciences, Université de Lille 1, 28 avenue Foch, 62930 Wimereux, France

rcalif@univ-ag.fr

Résumé. Depuis quelques décennies, l'énergie éolienne connaît une croissance considérable. Cependant cette énergie est dépendante de la vitesse du vent variant en intensité sur des échelles de temps qui incluent l'année, la journée à quelques secondes. L'objectif de ce travail est de caractériser les fluctuations d'une série temporelle de production éolienne. Dans un premier temps, nous vérifions l'utilisation de la Loi de Taylor, relation entre l'écart type σ_P^2 et la moyenne $\langle p \rangle : \sigma_P^2 = C \langle p \rangle^\alpha$. Cette relation fut observée en écologie, en finance, dans les sciences du vivant et pour des données de trafic internet [1]. De récents travaux fournissent des hypothèses d'explication quant à l'origine de cette loi [2,3]. L'exposant α caractérise le type de dynamique du processus considéré et varie entre 1/2 et 1. Dans notre cas d'étude, l'estimation de l'exposant α est proche de 1. Quand $\alpha = 1$, les processus considérés sont à invariance d'échelle [1]. Pour mettre en évidence les propriétés d'invariance d'échelle de notre série temporelle, nous effectuons une analyse multifractale pour estimer la fonction exposant d'échelle $\phi(h)$ à l'aide des moments d'ordre h de l'incrément temporel des données de production éolienne $\Delta P = P(t + \tau) - P(t)$, telle que $\langle \Delta P_\tau^q \rangle \approx \tau^{\phi(h)}$ [5]. La fonction $\phi(h)$ est concave et non-linéaire : plus elle est concave, plus la série analysée sera intermittente. Nous montrons que la série temporelle de la production éolienne considérée est intermittente et possède des propriétés multifractales. De plus le modèle de cascades aléatoires log-normal se révèle pertinent pour décrire ces fluctuations.

Abstract. In recent decades, wind energy is growing significantly. However this energy is dependent on the atmospheric wind speed varying in intensity over time scales that include the year, the day at few seconds. The objective of this work is to characterize the fluctuations of time series of the aggregate output power from a wind farm. At first, we check the use of the Taylor power law, relationship between the variance σ_P^2 and the mean value $\langle p \rangle : \sigma_P^2 = C \langle p \rangle^\alpha$. This relationship was observed in ecology, in finance, in the life sciences and internet traffic data [1]. Recent studies provide explanatory hypotheses about the origin of this law [2,3]. The exponent α characterizes the type of dynamics of the process considered and varies between 1/2 and 1. When $\alpha = 1$, processes are considered to be scale of invariance. To demonstrate the properties of scale invariance of our time series, we perform a multifractal analysis to estimate the scale function exponent $\phi(h)$ with q-order moments of the time increment of the aggregate output power $\Delta P = P(t + \tau) - P(t)$, as $\langle \Delta P_\tau^q \rangle \approx \tau^{\phi(h)}$ [5]. The function $\phi(h)$ is concave and non-linear : the more it is concave, the more the analyzed series is intermittent. We show that the time series of the aggregate output power is intermittent and possesses multifractal properties. Furthermore the log-normal random cascades model proves relevant to describe these fluctuations.

1 Introduction

La Guadeloupe fait partie est sans doute des régions de France dans lesquelles la proportion et la diversité des énergies renouvelables est la plus importante. En ce qui concerne l'énergie éolienne, la Guadeloupe soumise aux alizés, présente un fort potentiel grâce à un régime de vent moyen, relativement constant en direction et en module, durant toute l'année avec une période considérée comme favorable, située de décembre à avril. Actuellement, la puissance électrique installée d'origine éolienne ne cesse de croître. Cependant comme le souligne Weisser dans [6] une forte pénétration d'énergie éolienne dans un réseau électrique autonome sans stockage préalable, peut provoquer de fortes instabilités sur le réseau de distribution d'électricité : la conséquence ultime étant l'écroulement du réseau. Ce pourrait être le

cas du réseau insulaire de la Guadeloupe qui n'est pas interconnecté avec ceux des pays voisins. De fait l'utilisation de l'énergie éolienne pour un fort pourcentage nécessite l'existence de systèmes de substitution. L'emploi rationnel de ces derniers nécessite de disposer d'un outil de prédiction. La première étape consiste à caractériser les fluctuations de la production éolienne. La dynamique des fluctuations de ce type série reste complexe.

L'étude de systèmes complexes en écologie, en physique, dans les sciences du vivant et les sciences de l'ingénieur, a mis en évidence l'universalité de la loi de puissance de Taylor établit par L.R. Taylor en 1961 [7]. En Physique, ce phénomène est connue sous la loi d'échelle des fluctuations [1,2]. La loi de puissance de Taylor met en relation la variance et la valeur moyenne du processus considéré : $variance = constante \times moyenne^\alpha$. Suivant la valeur de l'exposant α , on peut caractériser la dynamique des fluctuations du moins pour $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 1$. Pour les processus fractales ou multifractales, on a souvent $\alpha = 1$. Dans cette étude, nous vérifions si la loi de puissance de Taylor s'applique à notre enregistrement de données de production et une analyse est menée dans un cadre multifractal.

2 Description des données expérimentales

Le site sur lequel sont effectuées les mesures est un site de falaise à Gros-Cap Petit-Canal situé en Guadeloupe (Antilles françaises). Les machines éoliennes sont implantées sur une centaine de mètres en aval du sommet d'une falaise qui mesure environ 60 mètres de hauteur et dont la ligne de crête est approximativement perpendiculaire à la direction moyenne du vent. Les données de production en sortie de la ferme éolienne sont recueillies avec une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz sur une période de 3 ans. La figure 1 illustre un exemple de signal de production normalisé par la production maximale, en sortie de la ferme éolienne. Ceci met en évidence la forte variabilité de la production éolienne.

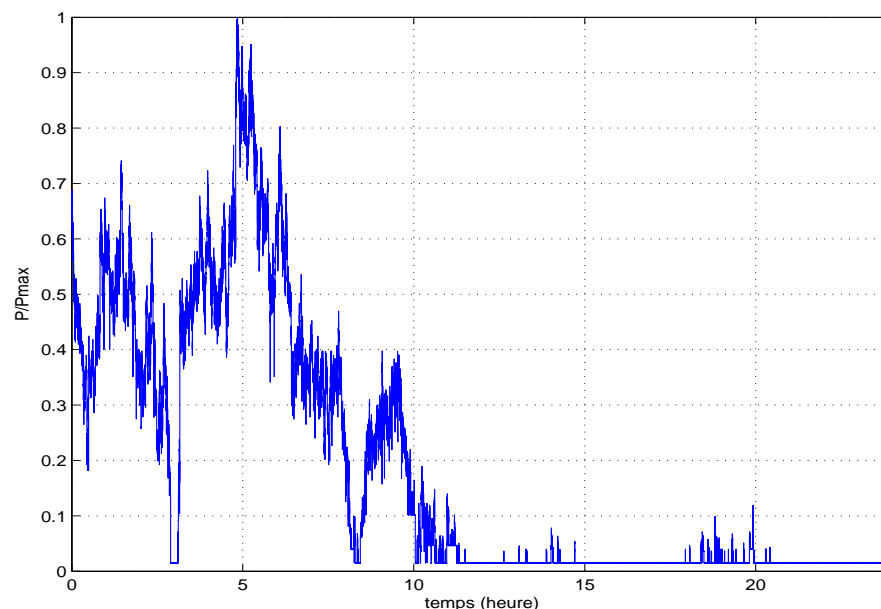


Figure 1. Exemple d'une série temporelle de production en sortie de la ferme éolienne considérée.

3 Loi de puissance de Taylor et multifractalité

Afin de vérifier si une série temporelle non-linéaire telle que la production en sortie d'une ferme éolienne, obéit à la loi de puissance de Taylor, nous avons étudié cette loi dans un contexte temporel, soit la loi d'échelle des fluctuations temporelles (Temporal Fluctuation Scaling ou TFS). Cette loi indique que la relation entre l'écart-type $\sigma_\tau = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (p(t) - \langle p_\tau \rangle)^2}$ et la moyenne temporelle $\langle p_\tau \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p(t)$ d'un processus $p(t)$ (estimés sur une certaine portion de longueur N de la série temporelle) suit, quel que soit l'échelle de temps τ , une loi de puissance de la forme suivante [1] :

$$\sigma_\tau^2 = C \langle p \rangle^\alpha \quad (1)$$

avec α l'exposant compris dans l'intervalle $[1/2, 1]$. De récents travaux proposent des explications quant à l'origine de cette loi de puissance. A. Fronczak and P. Fronczak in [2] émettent l'hypothèse que la loi de puissance de Taylor résulte du deuxième principe de la thermodynamique et du comportement de la densité des états. Cette hypothèse est basée sur des quantités physiques telles que l'énergie libre et d'un champ extérieur. Cependant W. Kendall et B. Jørgensen remarquent que la fonction génératrice des cumulants dérivés de ce modèle thermodynamique correspondent à une classe de modèle probabiliste appelées modèles Tweedie. Leur fondement phénoménologique repose sur le théorème central limite qui conduit de nombreux systèmes statistiques vers un modèle probabiliste Tweedie [3]. Le théorème de convergence Tweedie fournit une explication mathématique pour l'origine de la loi de Taylor et de bruit $1/f$ applicable à un large éventail de processus biologiques, physiques et mathématiques, ainsi que pour la multifractalité [4]. Pour des champs passifs possédant des propriétés fractales ou multifractales résultant directement d'une cascade multiplicative, l'exposant $\alpha = 1$. Pour des processus non stationnaires à incréments stationnaires multifractals tels que le vent ou la production, la fonction $\phi(h)$ caractérise l'invariance d'échelle des moments d'ordre q de l'incrément temporel du processus : $\Delta p = p(t + \tau) - p(t)$, telle que $\langle \Delta p^q \rangle \approx \tau^{\phi(h)}$ [5]. Cette fonction décrit l'invariance d'échelle des fluctuations, à toutes les échelles et à toutes les intensités. La fonction $\phi(h)$ renseigne sur la nature de l'invariance d'échelle d'une série non linéaire : i) si $\phi(h)$ est linéaire, le processus considéré est fractal, ii) si $\phi(h)$ est non-linéaire, le processus considéré est multifractal. En outre la concavité de cette fonction est une caractéristique de l'intermittence : plus la fonction est concave, plus l'intermittence du processus considéré est forte.

4 Résultats

Dans cette partie, pour la première fois, nous vérifions si la loi de puissance de Taylor s'applique à des données de production éolienne. Pour ce faire, l'enregistrement de mesures est divisé en séquence de mesures consécutives de durée τ ($\tau \in [10^3 \text{ s}; 10^5 \text{ s}]$). Pour chacune de ces séquences, nous avons calculé la valeur moyenne $\langle p \rangle$ et la variance σ^2 , σ étant l'écart-type. La figure 2 illustre l'évolution de la variance en fonction de la valeur moyenne en échelle log-log, pour des échelles de temps $\tau = 1500 \text{ s}$, 10^3 s , $5 \cdot 10^4 \text{ s}$ et 10^5 s . Nous observons l'existence d'une loi de puissance entre σ^2 et $\langle p \rangle$, représenté par une droite des moindres carrés pondérées [8,9], tracée en échelle log-log. Cette loi est en accord avec la loi de puissance de Taylor. Pour les cas présentés dans la figure 2, l'exposant α de la loi de puissance de Taylor varie de 0.87 pour $\tau = 1500 \text{ s}$ à 1.1 pour $\tau = 10^5 \text{ s}$.

La figure 3a présente les valeurs de l'exposant α estimées en fonction des échelles de temps τ . La dispersion de l'exposant est dépendante du nombre de séquences considérées : plus l'échelle de temps τ augmente, plus le nombre de séquences obtenues pour estimer α diminue. En moyenne, $\alpha = 1.02 \pm 0.06$. La figure 3b illustre l'histogramme de l'exposant α : les valeurs les plus fréquentes se trouvent entre 1 et 1.05, par conséquent proche de la valeur 1. Ainsi, une analyse spectrale et multifractale a été effectuée sur les incréments temporels des données de production éolienne $\Delta p = p(t + \tau) - p(t)$ en utilisant les fonctions de structure. La figure 4a illustre la densité spectrale $E(f)$ pour la production éolienne en sortie de la ferme. Ce spectre met en évidence l'existence de deux régimes d'invariance d'échelle : i) pour des fréquences $6.10^{-4} < f < 0.5 \text{ Hz}$ correspondant à des échelles de temps $2 < \tau < 6.10^4 \text{ s}$, $E(f)$ suit une loi

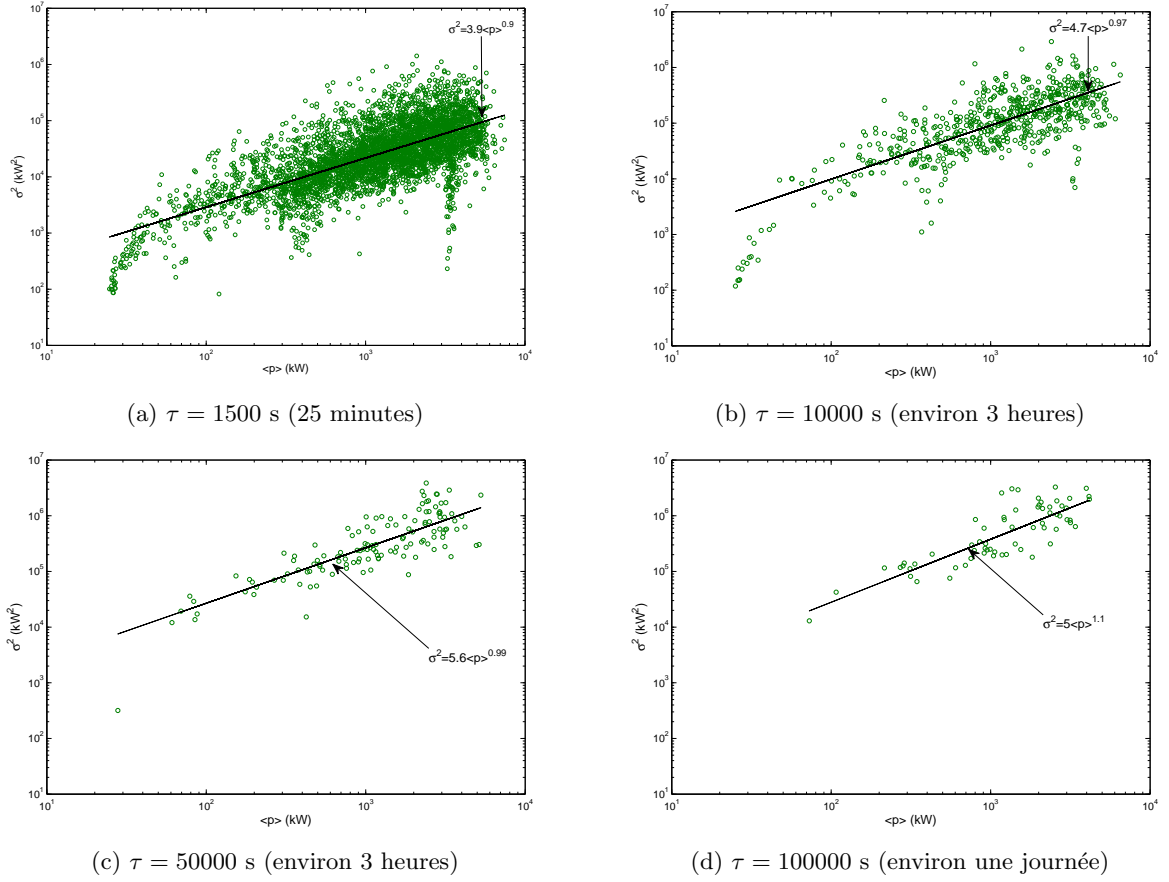
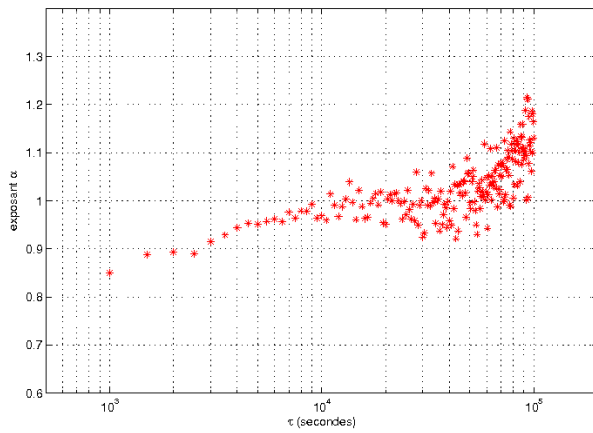
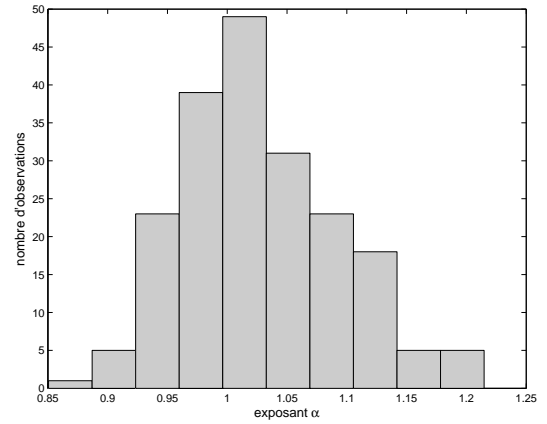


Figure 2. Evolution de la variance σ_p^2 en fonction de la valeur moyenne $\langle p \rangle$ des séries temporelles de production éolienne, pour différentes échelles de temps τ , représentée en échelle log-log. Le couple $(\langle p \rangle, \sigma_p^2)$ est modélisé par une loi de puissance de la forme $\sigma_p^2 = C \langle p \rangle^\alpha$.

de puissance $E(f) \simeq f^{-\beta}$, avec $\beta = 1.67$ proche de la valeur exacte $5/3$, ii) pour des fréquences $f < 6.10^{-4}$ Hz correspondant à des échelles de temps $\tau > 6.10^4$ s (approximativement 17 heures), $E(f)$ suit une loi de puissance $E(f) \simeq f^{-\beta}$, avec $\beta = 1.27$. La figure 4b présente les fonctions exposant d'échelle $\phi_1(q)$ et $\phi_2(q)$ respectivement pour des échelles de temps $\tau < 6.10^4$ s et $\tau > 6.10^4$ s. La concavité et la non-linéarité de ces deux fonctions, mettent en évidence les propriétés d'intermittence et de multifractalité de la production éolienne. Par ailleurs pour les échelles de temps $\tau < 6.10^4$ s, le modèle log-normal $\phi(h) = h/3 + \mu/18(3h - h^2)$ proposé par Kolmogorov [10], s'avère pertinent pour décrire ces fluctuations. La valeur de l'exposant de la loi de puissance de Taylor et l'analyse multifractale révèle les propriétés multifractales et d'intermittence de la production en sortie d'une ferme éolienne. Une simulation basée sur la résolution d'une équation stochastique log-normal [11,12], peut être envisagée pour ce type de série.

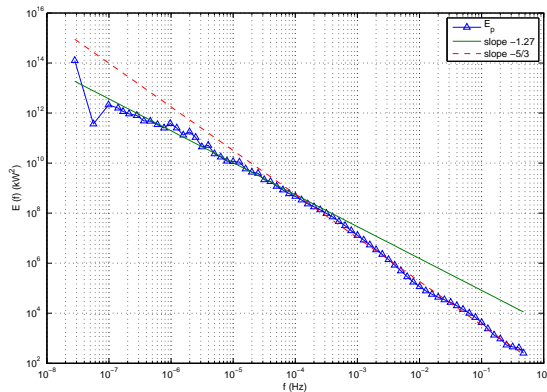


(a) Exposant α

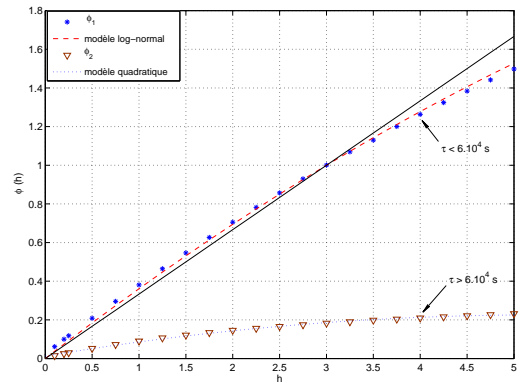


(b) Histogramme de l'exposant α

Figure 3. Valeurs de l'exposant α en fonction des échelles de temps $\tau \in [10^3 s; 10^5 s]$ et histogramme des valeurs de l'exposant α .



(a) Densité spectrale $E(f)$



(b) Fonctions exposant d'échelle ϕ_1 et ϕ_2

Figure 4. (a) Densité spectrale pour la production éolienne, en échelle log-log, et fonctions exposant d'échelle $\phi(h)$ pour la production éolienne de la ferme considérée : i) ϕ_1 estimée pour des échelles de temps inférieures à $6.10^4 s$, et modélisée par le modèle log-normal (courbe en pointillés rouge). ii) ϕ_2 estimée pour des échelles de temps supérieures à $6.10^4 s$, et modélisée par une fonction quadratique (courbe en pointillés bleue).

Références

1. Z. EISLER, I. BARTOS & J. KERTESZ, Fluctuation scaling in complex systems : Taylor's law and beyond, *Advances in Physics*, **57** (1), 89-142 (2008)
2. A. FRONCZAK & P. FRONCZAK, Origins of Taylor's power law for fluctuation scaling in complex systems, *Physical Review E*, **81**, 1 (2010)
3. W. S. KENDAL & B. JØRGENSEN, Taylor's power law and fluctuation scaling explained by a central-limit-like convergence, *Physical Review E*, **83**, 6 (2011)
4. W. S. KENDAL & B. JØRGENSEN, Tweedie convergence : A mathematical basis for Taylor's law power, $1/f$ noise and multifractality, *Physical Review E*, **84**, 6 (2011)
5. D. SCHERTZER, S. LOVEJOY, F. G. SCHMITT, Y. CHIGIRINSKAYA & D. MARSAN, Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency, *Fractals*, **5** (3), 427-471 (1997)
6. D. WEISSER & R. S. GARCIA, Instantaneous wind energy penetration in isolated electricity grids : concepts and review, *Renewable Energy*, **30**, 1299-1308 (2004)
7. L. TAYLOR, Aggregation, variance and the mean, *Nature*, **189**, 732-735 (1961)
8. J. O. STREET, R. J. CARROLL & D. RUPPERT, A note on computing robust regression estimates via iteratively reweighted least squares, *The American Statistician*, **42**, 152-154 (1988)
9. N. R. DRAPER & H. SMITH, *Applied Regression Analysis*, Wiley series in probability and statistics (1998)
10. A. N. KOLMOGOROV, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, **13**, 82-85 (1962)
11. Y. X. HUANG, F. G. SCHMITT, Z. M. LU & Y. L. LIU, Analyse de l'invariance d'échelle de séries temporelles par la décomposition modale empirique et l'analyse spectrale de Hilbert. *Traitement du Signal*, **25**, 481-492 (2008)
12. R. CALIF & F. G. SCHMITT, Modeling of atmospheric wind speed sequence using a lognormal continuous stochastic equation, *soumis*.

Etude numérique de la convection d'un liquide diélectrique sous l'effet de la force diélectrophorétique en géométrie annulaire

Olivier Crumeyrolle¹, S. Malik¹, Marlene Smieszek¹, Christoph Egbers², & Innocent Mutabazi¹

¹ LOMC, UMR 6294, CNRS-Université du Havre, BP 540, F-76058 Le Havre cedex

² LAS, Brandenburg Technical University, Siemens-Halske-Ring 14, D-03046 Cottbus, Germany

olivier.crumeyrolle@univ-lehavre.fr

Résumé. Nous étudions numériquement la convection thermique dans une couche annulaire d'un liquide diélectrique soumis à une force diélectrophorétique, autorisant ainsi le transfert thermique convectif "naturel" même en apesanteur. L'étude de stabilité linéaire 1D montre que le mode le plus critique est en forme d'hélice, soit une structure non-axisymétrique, et non des rouleaux tels que prédits dans les travaux antérieurs qui partaient de l'hypothèse d'axisymétrie. L'étude est poussée plus avant dans le cas d'un rapport des rayons de 0,5, paramètre étudié expérimentalement au LAS², au sol et en vol parabolique. L'étude de stabilité linéaire 3D montre que la structure critique en hélice résiste assez bien à la taille finie de l'expérience. Mais en raison de la très courte durée de microgravité en vol parabolique (22 s), il est nécessaire de réaliser des simulations DNS instationnaires avec un état de base initial réaliste dans le cadre d'un vol parabolique, à savoir une convection naturelle en hyper-gravité. Les simulations montrent que la structure en hélice est alors bien moins visible, supplantée par le développement de panaches localisés de convection. On relève que le transfert thermique transitoire aux parois est très fortement favorisé par ces structures près du cylindre intérieur -où la force diélectrophorétique électrique est la plus élevée- tandis que le transfert thermique près du cylindre extérieur est plus faible.

Abstract. We investigate numerically the thermal convection of an annular dielectric liquid sheet under the effect of the dielectrophoretic force. Such setup allows "natural" thermal convection under weightless conditions. The 1D linear stability analysis shows that the critical mode is non-axisymmetric and is helix shaped, rather than under the form of rolls as predicted in past investigations that were assuming axisymmetry as granted. We further investigate the case of a radius ratio equal to 0.5, as such setup is under experimental investigation at LAS², both on ground and during parabolic flight. The 3D linear stability analysis shows that the critical mode is still dominantly an helix structure although the finite size of the experiment is now taken into account. However, due to the short duration of microgravity during parabolic flight (22 s), time-dependant DNS simulations were required with realistic initial base state, that is natural convection under hyper-gravity. Simulations show that the helix structure is difficult to observe, as it is overwhelmed by convection plumes. We report that transient thermal transfer at the boundaries is strongly influenced by those structures close to the inner cylinder -where the dielectrophoretic force is the strong- while the thermal transfer close to the outer cylinder is weaker.

1 Introduction

En apesanteur, l'absence de poussée d'Archimède rend impossible la convection naturelle. Ceci complice la réalisation d'échangeurs thermiques, et une des pistes possible consiste à recréer une gravité artificielle à l'aide de l'effet diélectrophorétique. Celui-ci est observé quand la polarisation du milieu diélectrique est inhomogène dans l'espace. Ainsi la variabilité de la permittivité diélectrique sous l'effet d'un gradient de température combiné à l'application d'un champ électrique haute tension permet l'obtention entre deux parois cylindriques d'une force diélectrophorétique, force en volume de caractère centripète, qui permet de créer une gravité que nous qualifierons d'électrique, dans la direction radiale. On peut s'attendre, si la force est suffisante, à ce que la viscosité ne suffise plus à maintenir le liquide diélectrique au repos. Les mouvements de convections sont alors de nature à renforcer le transfert thermique dans le fluide.

Ceci est particulièrement intéressant pour les applications en apesanteur, où, de manière plus générale, en microgravité. En effet le recours à la convection forcée implique l'utilisation de pièces en mouvements,

de pompes, etc. qui sont indésirables de par leur encombrement, usure, etc. Ainsi l'utilisation d'échangeurs thermiques employant l'effet diélectrophorétique pourrait fournir des dispositifs compacts, léger et fiables pour les dispositifs de refroidissement des secteurs aéronautiques et spatiaux [1].

2 Travaux antérieurs

Remarquons tout d'abord quand condition terrestre ("1g") et en considérant le cas d'un espace annulaire vertical, la force diélectrophorétique, radiale, entre en compétition avec la gravité terrestre, chaque force poussant le fluide dans des directions initialement orthogonale (Fig. 1(a)). Il est possible de réaliser des dispositifs suffisamment petits pour que la force diélectrophorétique y domine largement la gravité terrestre, tel que dans les travaux de Chandra et Smylie [2].

L'étude de stabilité linéaire a été réalisée par ces auteurs [2] dans le cas de l'apesanteur, en supposant l'axisymétrie dans la direction azimutale, et en supposant le système comme infini le long de l'axe vertical Oz (problème 1D dans la direction radiale). Les effets de rétroaction de la température sur le champ électrique ont été négligés. Les résultats expérimentaux, obtenus rappelés au sol mais dans un dispositif très petit, montrent, par l'étude du nombre de Nusselt, un bon accord quand à la prédiction de la déstabilisation de l'état de base conductif, fût-il imparfait dans cette expérience en raison de la gravité terrestre.

La bonne coïncidence apparaît surprenante à la lecture des travaux de Takashima [3], qui a étudié le problème de stabilité linéaire 1D, axisymétrique, infini, en apesanteur, pour les petits entrefers, mais en prenant en compte les effets de couplages entre champs électrique et thermique. D'après les résultats de Takashima, on s'attendrait à un seuil de déstabilisation significativement plus faible (-12%) que le seuil observé et prédit par Chandra et Smylie. De plus des résultats expérimentaux obtenus en microgravité [4] (vol parabolique) suggèrent qu'un comportement non-axisymétrique est possible, au moins de manière transitoire. Enfin il faut remarquer que [2] ne purent rapporter les motifs d'écoulement de leur expérience, qui était totalement opaque.

L'étude de la convection dans un espace annulaire sous l'effet de la force diélectrophorétique est donc très incomplète, aussi bien au sol ($\ll 1g \gg$) qu'en apesanteur ($\ll 0g \gg$). De nombreux aspects peuvent ou doivent être pris en compte : abandon de l'hypothèse d'axisymétrie, de l'hypothèse de hauteur infinie du système, prise en compte d'entrefers « non-petit », de la convection naturelle en 1g, ainsi que des comportements transitoires, en particulier dans le contexte des expériences en vol parabolique. Dans ces dernières en effet la durée de la microgravité n'est que de 22 s, un délai bien plus court que le temps de diffusion thermique des huiles silicones employées dans les expériences comme liquide diélectrique. De plus ces 22 s sont précédées et suivies d'une phase d'hyper-gravité ($\ll 2g \gg$) d'environ 30s.

3 Formulation du problème et méthodes

Nous étudions numériquement le cas où le liquide diélectrique est confiné dans un espace annulaire cylindrique d'entrefers $d = b - a$, de rapport des rayons $\eta = a/b$ et de rapport d'aspect $\Gamma = L/(b - a)$. La formulation du problème emploie les équations de la convection thermique d'un liquide incompressible, couplées à une équation stationnaire du champ électrique. En effet les expériences emploient un champ électrique alternatif suffisamment rapide (50Hz [4] à 200Hz [5]) pour que l'on puisse négliger tout mouvement de charges résiduelles. Ainsi le liquide reste un isolant, et la prise en compte de la valeur quadratique moyenne du champ électrique est suffisante. La dépendance de la permittivité électrique à la température est traitée de manière similaire à la masse volumique dans l'approximation de Boussinesq. Nous veillons à inclure les effets rétroaction de la température sur le champ électrique contrairement aux travaux théoriques de [2], et n'employons pas l'hypothèse d'axisymétrie, précédemment supposée [3]. On impose sur les cylindres un écart de température fixe, une différence de potentiel électrique r.m.s, et le non-glissement du liquide aux parois.

Après l'introduction de $d, d^2/\nu$ et ν/d comme échelles respectivement de longueur, de temps et de vitesse, nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mu Ra_E}{Pr} (\nabla V)^2 \nabla T + Gr T \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \\ \nabla \cdot ((1 - BT) \nabla V) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Gr &= \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\nu^2} & \rho &= \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) \\ Ra_E &= \frac{\alpha g_{Eb} \Delta T d^3}{\nu \kappa} & \epsilon &= \epsilon_1 (1 - \gamma (T - T_0)) \\ Pr &= \frac{\nu}{\kappa} & \mathbf{g}_E(r) &= \frac{\epsilon_1 \gamma}{\rho_0 \alpha} \left(\frac{\Delta V_{rms}}{\ln(a/b)} \right)^2 \frac{\mathbf{e}_r}{r^3} \\ B &= \gamma \Delta T & g_{Eb} &= \|\mathbf{g}_E(b)\| \\ \mu &= \frac{1}{2} (1 - \eta)^{-3} \ln(\eta)^2 & \eta &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Ici, Ra_E est le nombre de Rayleigh électrique, Gr le nombre de Grashof de la convection naturelle ($Gr=0$ en 0g), et B le paramètre sans dimension qui définit l'influence de la dépendance de la permittivité à la température [3]. On impose sur les parois cylindriques un écart de température fixe ΔT , la différence de potentiel électrique r.m.s ΔV_{rms} , et le non-glisement du liquide aux parois. Les frontières planes aux extrémités de l'espace annulaire sont supposées adiabatiques et électriquement isolantes.

L'analyse de stabilité linéaire (LSA) emploie un code pseudo-spectral [9]. Elle a été conduite pour différentes valeurs du rapport des rayons et de nombreuses valeurs du nombre de Prandtl Pr et à B fixé.

Les simulations numériques directes instationnaires (DNS) ont été conduites [6,7,8] en 2D (0, 1 et 2g) et 3D (0g) à l'aide du code industriel d'éléments finis COMSOL v3.5.

Ces calculs ont été poursuivis présentement en 3D sur le cas particulier des vols paraboliques. L'étude LSA 3D a de même été menée sous COMSOL v3.5. Les paramètres en DNS et LSA 3D sont $\Gamma = 10$, $\eta = 0,5$ et $Pr = 65$, et sont issus des expériences qui sont menées en vol paraboliques telles que réalisées par le LAS (BTU Cottbus, Allemagne) [5]. Pour les simulations DNS 3D instationnaires réalisées pour déterminer le comportement dans des conditions comparables à celles d'un vol parabolique, nous visons en particulier à simuler le comportement à partir d'un état initial réaliste lors du démarrage de la phase parabolique de microgravité de 22 s, seule phase au cours de laquelle la force diélectrophorétique est appliquée. Cette phase est en effet précédée d'une phase d'hyper-gravité à 2g de 30s au cours de laquelle un état de convection naturelle accentuée est obtenu dans l'expérience. La raison en est que le temps de diffusion thermique est environ 15 fois plus long que les 22 s de microgravité accessibles pendant la parabole, de part la nature du liquide diélectrique employé. La démarche choisie consiste donc à imposer en permanence un écart de température, soit B fixé dans nos simulations. Un état stationnaire à 1g est tout d'abord recherché, et conduit à une unique cellule de convection verticale, qui est calculée pour représenter la phase de vol plan de l'avion, au sein duquel l'expérience est disposée verticalement. Puis une étape de 30 s à 2g est appliquée pour simuler la phase d'hyper-gravité, ce qui renforce la cellule de convection et conduit à l'état de convection accentuée précédemment mentionné. Enfin est simulée l'étape de microgravité de 22 s pendant laquelle le champ électrique est appliqué. On relève en particulier les comportements pendant cette étape, dont l'état initial est donc l'état de convection accentuée (Fig. 3(a)). La phase de microgravité de 22 s est simulée pour différents Rayleigh Ra_E largement au-delà du seuil, comme dans les expériences, l'objectif étant de compenser la courte durée des 22 s de microgravité par une croissance plus rapide des motifs d'écoulement. Nous évaluons l'évolution du nombre de Nusselt

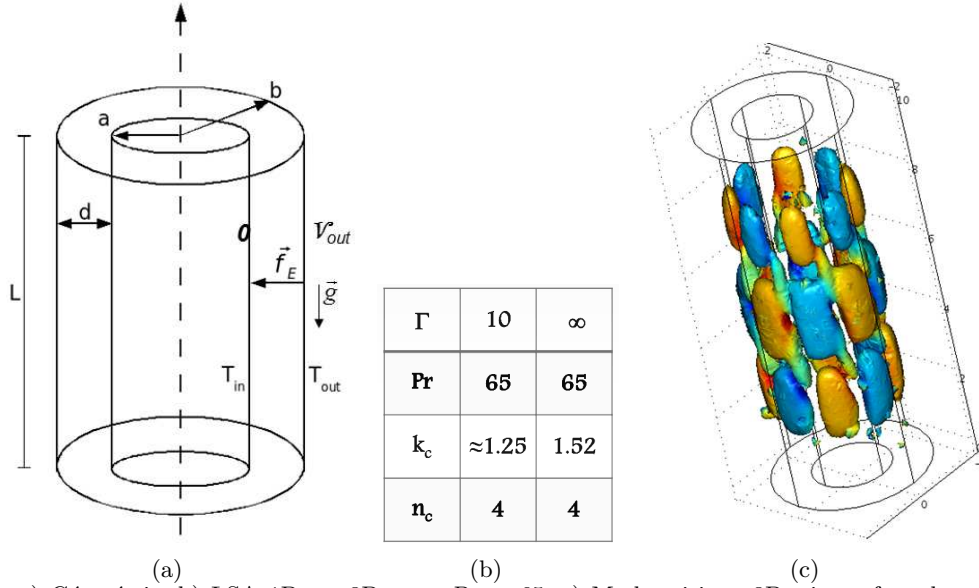


Figure 1. a) Géométrie, b) LSA 1D vs. 3D pour $Pr = 65$, c) Mode critique 3D : isosurface du module de la vorticité, coloré selon la composante axiale de la vorticité.

Nu , ratio du flux thermique total calculé numériquement au flux thermique théorique de l'état purement conductif, donc dépourvu de mouvement de convection. Ce ratio est calculé tout au long des des 22 s aux deux parois cylindrique afin d'identifier l'importance des échanges thermiques obtenus grâce à la convection provoquée par la force diélectrophorétique. Le paramètre de contrôle de l'étude est alors l'état de base/l'état initial d'une part, et d'autre part le nombre de Rayleigh  lectrique Ra_E , ratio entre le produit du temps de diffusion thermique par le temps de diffusion visqueux et le carré du temps de convection sous l'effet de la gravité électrique.

4 Résultats

Nous résumons tout d'abord les résultats obtenus en apesanteur, c'est-à-dire avec un état de base purement conductif (0g). La LSA 1D [9], qui suppose de fait que l'état de base est purement conductif et que la géométrie est infiniment longue dans la direction axiale Oz , prédit que le mode critique se présente sous forme d'hélices, c'est-à-dire un mode non-axisymétrique possédant à la fois un nombre d'onde axial et un nombre d'onde azimutal. (tab. 1(b)) Etant donnée la symétrie des équations aux perturbations obtenues, il est prédit que les deux orientations sont toutes deux critiques. Pour différents Pr , le seuil Ra_c relevé est toujours le même. La LSA 3D (Fig. 1(c)), qui prend en compte la taille finie de l'expérience ($\Gamma = 10, \eta = 0.5, B = 10^{-2}$) mais suppose toujours un état de base purement conductif, montre un mode critique constitué de deux hélices contraorient es avec un nombre d'onde axial adimensionné $q \simeq 1.25$ et un nombre d'onde azimutal $m = 4$. Ce mode est critique pour $Ra_{E,c} = 627.4$ et présente une enveloppe d'environ une longueur d'onde et demie seulement dans la direction axiale, résultant de la taille de la géométrie et de la relative faible valeur de q , proche de la valeur obtenue par l'étude LSA 1D ($q = 1.52$).

Les simulations DNS ont montré [6,7,8] à l'aide de calculs instationnaires 2D en situation d'apesanteur d'une part, qu'un régime initial conductif est supplanté à partir d'une valeur critique $Ra_{E,c1} = 652,5$ par un régime non-axisymétrique de rouleaux contrarotatifs, d'axe vertical, appelés colonnes (Fig. 2(b)), tandis que d'autre part l'étude 3D toujours en apesanteur montre que l'état de base conductif perd bien sa stabilité pour $Ra_{E,c} \approx Ra_{E,c1}$. Après un temps de calcul suffisamment long, même pour $Ra_E \approx 1.6Ra_{E,c1}$ bien au-delà du seuil, on observe (Fig. 2(d)) un couplage significatif entre deux hélices contraorient es bien visibles, la compétition entre ces hélices résultant en une séparation spatiale, chacune occupant une

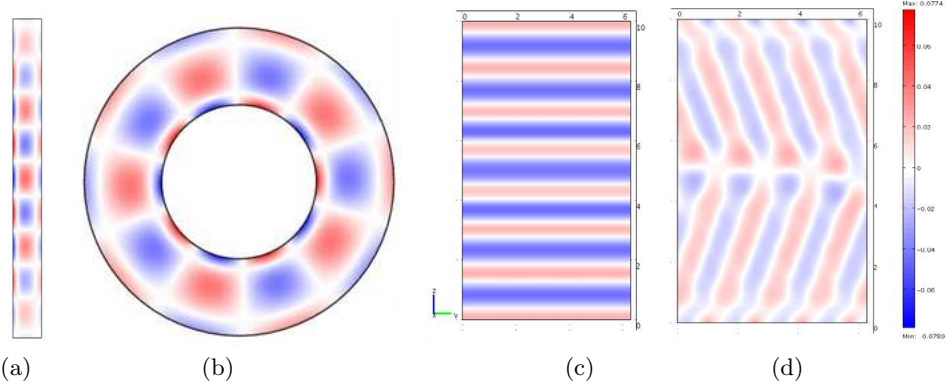


Figure 2. a) Vorticité $\omega(r, z)$ ($Ra_{E,c2} = 680.6$) de l'écoulement critique en DNS 2D axisymétrique, b) Vorticité $\omega(x, y)$ ($Ra_{E,c1} = 652.5$) de l'écoulement critique en DNS 2D avec invariance axiale, c) Vorticité $\omega(y, z, r = 0.5)$ en DNS 3D à $Ra_E = 1046$ après $1 \cdot \tau_\kappa$ (l'axe y est la direction azimutale), d) idem après $10 \tau_\kappa$.

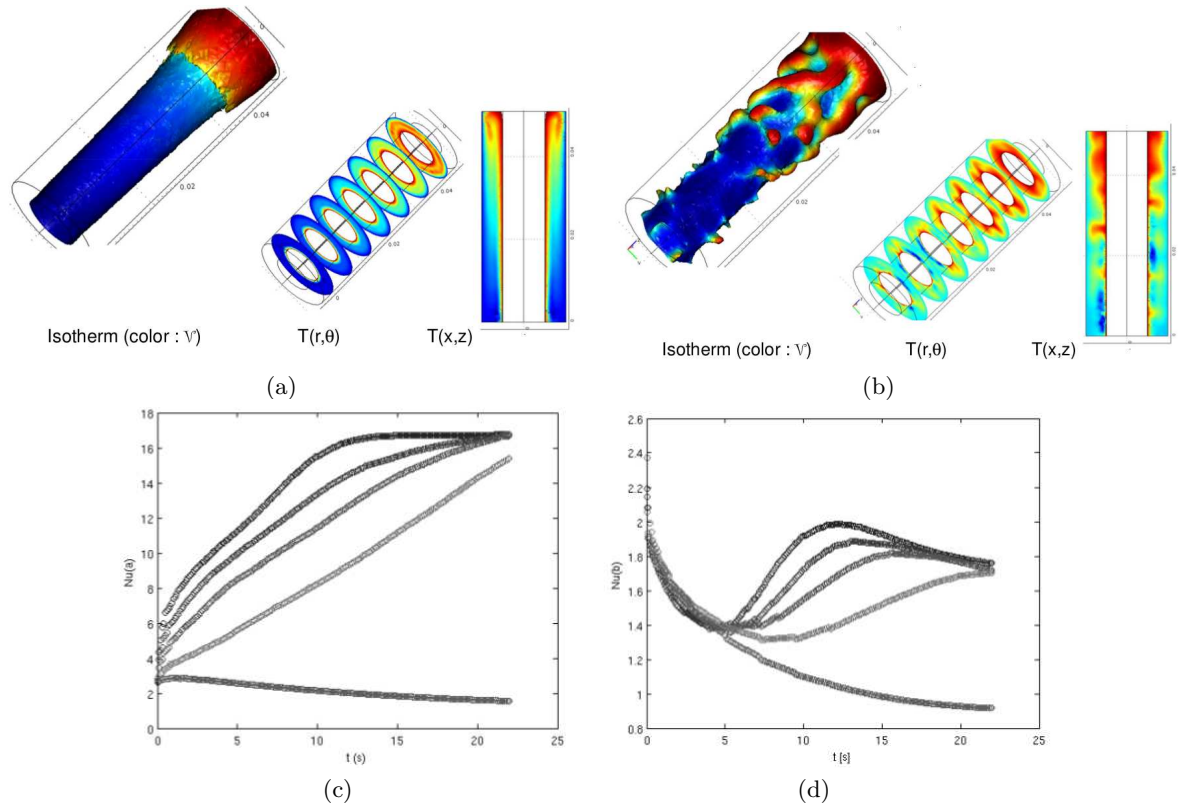


Figure 3. a) Etat 3D DNS à l'issue de la phase d'hyper-convection à 2g, b) Etat 3D DNS après les 13 premières secondes de la phase de microgravité du vol parabolique, $Ra_E = 3933$, on observe des hélices partielles et des panaches localisés; c) et d) : Les nombres de Nusselt $Nu(r = a)$ et $Nu(r = b)$, qui à $t = 22$ s vont croissant avec Ra_E croissant : $Ra_E = 654, 3933, 5957, 7540$ et 9308 .

moitié du système seulement. Toutefois sur des temps plus courts ($t < 1 \cdot \tau_\kappa$), tels que ceux obtenus en vol parabolique, le régime conductif ne bifurque qu'à $Ra_{Ec2} = 680,6$ vers un régime transitoire de rouleaux contrarotatifs axisymétriques d'axe azimutal, seuls structure visibles sur ces temps courts, même à $Ra_E \approx 1.6Ra_{E,c1}$ (Fig. 2(c)).

Nous rapportons désormais les résultats obtenus en DNS 3D instationnaire visant à reproduire le comportement en vol parabolique. Sur la plage de Ra_E étudiée, il est possible pendant de la phase de microgravité du vol parabolique d'atteindre des structures convectives développées (ex : pour $Ra_E = 3933$, Fig. 3(b)) en moins de 22 s. L'effet de la phase d'hyper-gravité à 2g qui précède est encore très visible : les températures sont plus élevées aux z les plus élevés. Il est difficile de relever une organisation globale du motif. On observe en effet des structures de type panache de convection localisée, le motif ne présentant d'organisation en hélice que de manière parcellaire.

Près de cylindre intérieur (Fig. 3(c)), des nombres de Nusselt Nu très importants (jusqu'à 12,5 pour $Ra_E = 3933$, et près de 17,5 pour $Ra_E = 9308$) sont observés à l'issue des 22 s, avec d'importantes variations pendant les 22 s (Fig. 1c). En particulier l'amortissement visqueux de la cellule de convection naturelle accentuée au démarrage de la phase de microgravité résulte en une décroissance initiale du Nu près du cylindre extérieur (Fig. 3(d)). Les structures convectives en panaches favorisent par contre un transfert transitoire très important près du cylindre intérieur. On remarquera que c'est là où la gravité électrique est la plus élevée. Le transfert thermique y est donc important par convection. Il en va différemment près du cylindre extérieur où les valeurs du nombre de Nusselt Nu sont jusqu'à un ordre de grandeur plus petites, même à la fin de la phase de microgravité. Il nous faut donc conclure à une importante instationnarité du transfert thermique durant la durée de 22 s de microgravité en condition de vol parabolique.

La sensibilité de la partie chauffante employée pour le cylindre intérieur dans les expériences en vol parabolique devrait permettre de détecter de telles différences de transferts. Le comportement des traceurs employés dans les expériences en vol parabolique -de permittivité et/ou de masse volumique différentes de celle du liquide- reste par contre à étudier numériquement, afin de faciliter la comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats numériques. Enfin les résultats doivent aussi être étendus dans le cas de l'apesanteur, afin de lever les contradictions dans les travaux antérieurs. Nos calculs préliminaires pour un gap étroit ($\eta = 0.9$) montrent un nombre de Rayleigh critique $Ra_{E,c} = 1274$, encore plus bas que celui prédit dans les travaux antérieurs ([3] : $Ra_{E,c} \approx 1374$, [2] : $Ra_{E,c} = 1545$).

Références

1. J.S. PASCHKEWITZ & D.M. PRATT, The influence of fluid properties on electrohydrodynamic heat transfer enhancement in liquids under viscous and electrically dominated flow conditions, *Experimental Thermal and Fluid Science*, **21**, 187-197 (2000)
2. B. CHANDRA & D.E. SMYLIE, A laboratory model of thermal convection under a central force field, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **3**, 211-224 (1972)
3. M. TAKASHIMA, Electrohydrodynamic instability in a dielectric fluid between two coaxial cylinders, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **33** (1), 93-103 (1980)
4. B. SITTE, J. IMMOHR, O. HINRICH, R. MAIER, CH. EGBERS & H. RATH, 12th *International Couette-Taylor Workshop*, Evanston, IL USA, (2001)
5. N. DAHLEY, B. FUTTERER, M. SMIESZEK, C. EGBERS & O. CRUMEYROLLE, 38th *Committee on Space Research (COSPAR)*, Bremen, July 18-25 (2010)
6. M. SMIESZEK, O. CRUMEYROLLE, I. MUTABAZI & CH. EGBERS, *International Astronautical Conference*, Glasgow, paper **IAC-08-A2.2**, September 28-October 2 (2008)
7. M. SMIESZEK, O. CRUMEYROLLE & I. MUTABAZI, IX^e *Colloque Franco-Québécois*, CIFQ2009, pp. 381-386, Lille, 18-20 Mai (2009)
8. M. SMIESZEK, O. CRUMEYROLLE, I. MUTABAZI & CH. EGBERS, *Proceedings of 16th International Couette-Taylor Workshop*, Princeton, September 9-11 (2009)
9. M. SATISH, O. CRUMEYROLLE & I. MUTABAZI, 17th *International Couette-Taylor Workshop*, Leeds, July 25-27 (2011).

Ondes non linéaires à la surface d'un fluide recouvert d'une membrane élastique

Luc Deike & Eric Falcon

Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France, EU
luc.deike@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Nous présentons une expérience de laboratoire permettant d'observer des ondes à l'interface d'un fluide recouvert d'une membrane élastique mince, analogue des ondes observées en océanographie à la surface d'un océan recouvert d'une couche de glace. La relation de dispersion observée met en évidence l'importance des termes de tension et de flexion de la membrane élastique. Le régime d'ondes non linéaires est ensuite analysé du point de vue de la turbulence d'ondes et comparé avec des prédictions théoriques et d'analyse dimensionnelle.

Abstract. We present a laboratory experiment to study waves on the surface of an elastic membrane floating on a fluid that mimic waves in oceanography propagating through an ice shelf on oceans. The observed dispersion relation shows the importance of both the tension and the bending of the elastic sheet. The nonlinear wave regime is then analyzed in the scope of wave turbulence and results are compared to theoretical predictions and dimensional analysis.

1 Introduction

Lorsque des ondes de suffisamment grandes amplitudes se propagent dans un milieu, leurs interactions peuvent engendrer des ondes de différentes longueurs d'ondes. Cet état stationnaire hors équilibre, appelé turbulence d'ondes, se caractérise par un transfert d'énergie entre les différentes échelles spatiales du système. La compréhension de la turbulence d'ondes passe par l'étude des propriétés statistiques et dynamiques d'un ensemble d'ondes interagissant non linéairement entre elles. Ce phénomène se retrouve dans de nombreux domaines de la physique [1,2] : les vagues à la surface de la mer, les ondes d'Alfvén dans le vent solaire, les ondes de spin dans les solides, les ondes de Rossby atmosphériques ou océaniques, et les ondes non linéaires en optique. Nous nous intéressons ici à son application dans un nouveau système.

Lorsqu'une couche élastique mince flotte à la surface d'un fluide, les déformations élastiques de la membrane sont couplées au mouvement du fluide et des ondes gravito-élastiques peuvent se propager. Ces ondes ont été observées en océanographie à la surface de l'océan en présence d'une couche de glace et ont été étudiées théoriquement dans la problématique des déplacements de véhicules sur la glace [3,4]. Cependant, à notre connaissance il n'existe aucune expérience contrôlée de laboratoire permettant d'étudier ce type d'ondes dans un régime non linéaire. Un tel dispositif est présenté et la relation de dispersion des ondes est caractérisé. Les ondes sont observées à l'aide d'une mesure spatio-temporelle du champ de déformation de la surface par profilométrie par transformée de Fourier [5], technique récemment utilisée pour mesurer le régime de turbulence d'ondes sur une plaque élastique [6] et à la surface de l'eau [7]. Dans notre expérience, la relation de dispersion met en évidence l'importance de la tension, due à la fixation de la membrane et de la flexion de cette dernière. Nous obtenons une relation de dispersion analogue au problème géophysique [4]. Le régime non linéaire est ensuite analysé du point de vue de la turbulence d'ondes.

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental représenté sur la Fig. 1 est constitué d'une cuve cylindrique de 20 cm de diamètre, 43 cm de haut, remplie d'eau sur laquelle est collée sur le bord une membrane en latex

d'épaisseur $h = 0.35$ mm. Nous prenons bien soin de ne pas avoir de bulles d'air piégées entre la membrane et l'eau. La cuve est connectée par un capillaire d'un centimètre de diamètre à un tube vertical qui permet de changer le niveau d'eau et la pression hydrostatique imposée à la membrane. La profondeur du fluide au repos est $H = 43$ cm. Le module d'Young de la membrane en latex a été mesuré et vaut $E = 1.5 \times 10^6$ N/m², sa masse volumique $\rho_e = 950$ kg/m⁻³ et son coefficient de Poisson $\nu = 0.5$ ¹. Les ondes sont engendrées par deux batteurs (7.5 cm de long et 1 cm de large) collés sur le côté de la membrane à 2 cm du bord, placés perpendiculairement l'un par rapport à l'autre. Chaque batteur est actionné verticalement par un vibreur électromagnétique (LDS V201), dont la fréquence et l'amplitude d'excitation sont pilotées par ordinateur. Les déformations de la membrane sont mesurées par une méthode de profilométrie par transformée de Fourier [5]. Le principe consiste à projeter un réseau de franges (à l'aide d'un vidéoprojecteur haute résolution EPSON TW 3000) sur la surface au repos pour obtenir une image de référence. La différence de phase entre cette image de référence et les images lorsque les franges sont déformées par les ondes est ensuite calculée et permet d'accéder à la déformation de l'interface via l'optique géométrique. La vitesse verticale de l'interface est aussi obtenue en calculant la différence de phase entre deux images successives tout en permettant de réduire le bruit de mesure. Un exemple typique du champ de vitesse verticale à la surface ainsi reconstruite est montré en Fig. 2. La résolution spatiale est déterminé par l'interfrange projeté, ici de 1 mm. Les images sont enregistrées à l'aide d'une caméra rapide Phantom V9, à une fréquence d'acquisition de 1000 images par seconde sur une durée de $T=3.6$ s. Le champ de mesure est un rectangle au centre de la cellule de $L = 10$ cm de long et 8 cm de large.

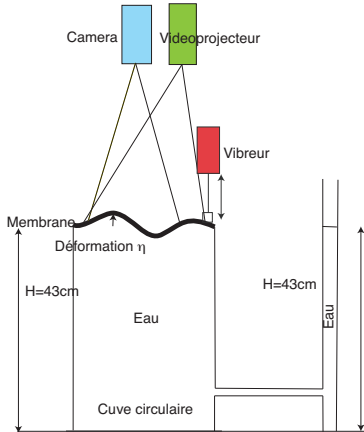


Figure 1. Dispositif expérimental vu de profil. Un seul des deux vibreurs est indiqué.

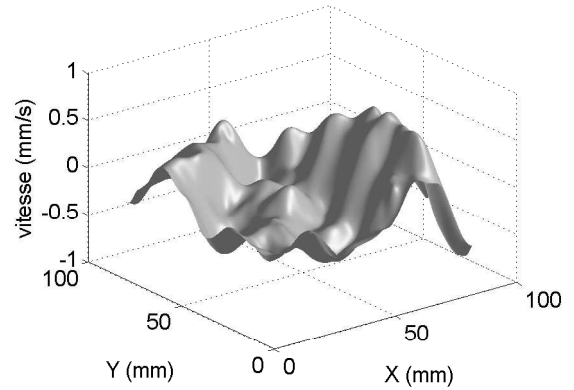


Figure 2. Exemple de champ de vitesse de la surface reconstruit par profilométrie.

3 Equations d'une membrane élastique mince flottante sur un fluide

Soit un fluide de masse volumique, ρ , et de profondeur H recouvert à l'altitude $z = 0$ par une membrane élastique infinie et homogène, de masse volumique, ρ_e , de module d'Young, E , de coefficient de Poisson, ν , et d'épaisseur h . Dans un régime non dissipatif, l'équation gouvernant le déplacement de la membrane $\eta(x, y, t)$ s'écrit [4]

$$\rho_e h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + D \nabla^4 \eta - T \nabla^2 \eta = p + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

$D = (Eh^3)/[12(1-\nu^2)]$ désigne le module de flexion de la membrane, T la tension imposée à la membrane, p la pression exercée par le fluide sur la membrane, f une pression imposée par un opérateur, et g

1. <http://en.wikipedia.org/wiki/Poissonsratio>.

l'accélération de la pesanteur. $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Notons que dans le cas d'une contrainte de compression de la membrane et non pas de tension, le signe de T est changé. En supposant le fluide incompressible et irrotationnel, l'équation de Bernoulli en $z = \eta$ nous donne

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} - \rho g \eta$$

avec $\phi(x, y, z, t)$ le potentiel des vitesses. Une solution sous forme d'onde plane est supposée être

$$\eta \sim e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

et la condition aux bords en $z = \eta$ est

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = k \tanh(kH) \phi_{z=\eta}.$$

Supposons une faible épaisseur h de la membrane devant les longueurs d'ondes λ ($\lambda \gg h$ soit $kh \ll 1$), et $\rho \gg \rho_e kh$. En se plaçant, de plus, dans une approximation en eau profonde $kH \gg 1$, en l'absence de force extérieure ($f = 0$), la relation de dispersion des ondes linéaires est

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3 + \frac{D}{\rho} k^5. \quad (2)$$

L'Eq. (2) indique l'existence de trois régimes : un régime d'ondes de gravité à grand $\lambda > 2\pi\sqrt{T/(\rho g)}$, un régime d'ondes élastiques de flexion à petit $\lambda < 2\pi\sqrt{D/T}$, et entre ces deux valeurs un régime d'ondes élastiques de tension. La transition entre les régimes de gravité et de tension s'obtient simplement en égalisant les deux premiers termes du membre de droite de l'Eq. (2), soit pour un nombre d'onde $k_{gt} = \sqrt{g\rho/T}$ correspondant à une fréquence

$$f_{gt} = \frac{1}{2\pi} \sqrt[4]{\frac{\rho g^3}{T}} = 2.6 \text{ Hz},$$

et $\lambda_{tg} = 24 \text{ cm}$, pour nos paramètres expérimentaux ($T = 14 \text{ N/m}$, $D = 7.1 \cdot 10^{-6} \text{ N.m}$). Le terme de gravité sera donc négligeable pour nos valeurs de longueurs d'ondes λ .

4 Relation de dispersion

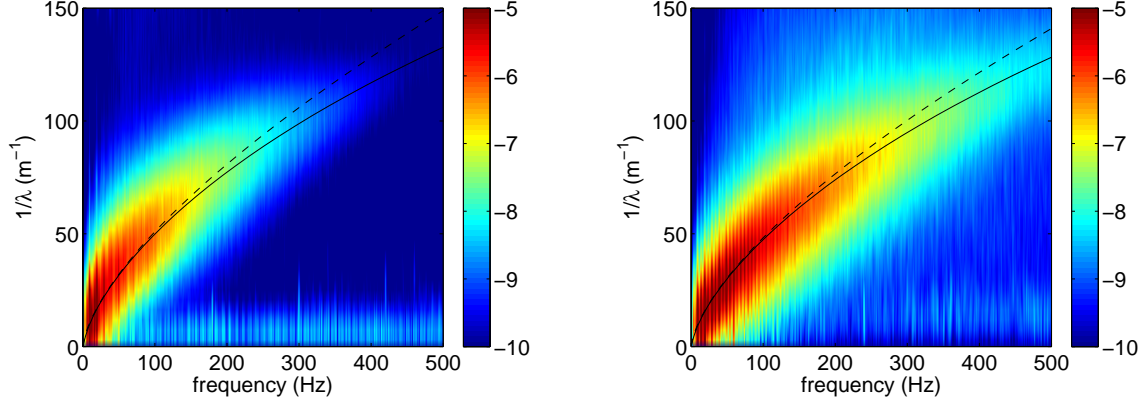
La Fig. 3 montre le spectre spatio-temporel de la vitesse verticale des ondes à la surface de la membrane

$$S_v(\omega, k) \equiv \iint \langle v(\mathbf{r}', t') v(\mathbf{r}' + \mathbf{r}, t + t') \rangle_{\mathbf{r}', t'} e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r} dt$$

en fonction de $f = \omega/2\pi$ et de $1/\lambda = k/2\pi$, l'échelle de couleur représentant l'amplitude du spectre en échelle logarithmique. La figure 3a correspond à un forçage à un seul batteur, pour une fréquence d'excitation $f_p = 10 \text{ Hz}$ (dénommé « forçage faible »); la figure 3b correspond à un forçage à deux batteurs avec pour le premier batteur $f_p = 10 \text{ Hz}$ et pour le second $f_p = 20 \text{ Hz}$ (dénommé « forçage fort »). Les longueurs d'ondes de forçage correspondantes sont $\lambda \sim 5 \text{ cm}$ et $\sim 9 \text{ cm}$. Sur les deux figures, l'énergie est trouvée être localisée dans une zone bien précise du spectre spatio-temporel dans le voisinage de la relation de dispersion. En effet, la courbe en trait plein représente la relation de dispersion théorique

$$\omega^2 = \left(\frac{T}{\rho}\right) k^3 + \left(\frac{D}{\rho}\right) k^5$$

pour une valeur de T ajustée, et est trouvée en bon accord avec l'expérience. La courbe en pointillés représente la relation de dispersion dans le cas des ondes de tension pures $\omega^2 = (T/\rho)k^3$, pour la même valeur de T . La transition entre les régimes d'ondes élastiques de tension et de flexion est ainsi matérialisée



(a) Un batteur ($f_p = 10$ Hz, amplitude A_0) (b) Deux batteurs ($f_p = 10$ et 20 Hz, amplitude $A_1 > A_0$)

Figure 3. Spectre de la vitesse $S_v(f, k)$. L'échelle de couleur correspond à $\log_{10}(S_v)$. Relation de dispersion théorique : $\omega^2 = (T/\rho)k^3$ (- -), et $\omega^2 = (T/\rho)k^3 + (D/\rho)k^5$ (—) ajustée avec $T = 12$ N/m (a) et $T = 14$ N/m (b).

lorsque la courbe pointillés s'écarte de la courbe en trait plein. Notons l'élargissement du spectre autour de la relation de dispersion lorsque le forçage augmente. Cet élargissement pourrait être associé à l'influence des non linéarités, et notamment des interactions non linéaires entre ondes. Comme attendu, le spectre est beaucoup plus intense aux basses fréquences proches de la fréquence d'excitation, et l'amplitude du spectre augmente avec l'amplitude du forçage. Enfin, notons que la plus petite échelle mesurable est détectée jusqu'à environ 400 Hz soit $\lambda \sim 6$ mm (Fig. 3b).

Les maxima de $S_v(f, k)$ de la Fig. 2 sont tracés sur la Fig. 4a et permettent de déterminer la valeur de T par un ajustement avec la relation de dispersion $\omega^2 = \frac{T}{\rho}k^3$ à petit k . En itérant ce processus pour différents forçages, on observe que la valeur de tension de la membrane T augmente avec l'amplitude et la fréquence du forçage. De plus, le changement de régime entre les ondes de tension et les ondes de flexion a lieu pour une fréquence qui est trouvée dépendre de la valeur de T : vers 100 Hz pour un forçage faible, et vers 180 Hz pour un forçage fort (Fig 4). La transition entre les régimes de tension et de flexion s'obtient en égalisant les deux derniers termes du membre de droite de l'Equation (2), soit pour un nombre d'onde $k_{tf} = \sqrt{T/D}$ correspondant à une fréquence

$$f_{tf} = \frac{1}{2\pi} \sqrt[4]{\frac{T^5}{\rho^2 D^3}} = 986 \text{ Hz},$$

et $\lambda_{tf} = 2\pi\sqrt{D/T} = 4.5$ mm. La Fig. 4b montre les relations de dispersion théoriques d'ondes de tension pures, d'ondes de flexion pures et d'ondes de tension flexion pour $T = 14$ N/m. La transition entre les deux régimes intervient au point (f_{tf}, λ_{tf}) , point d'intersection entre ces deux dernières courbes. La Fig. 4b montre aussi que la relation de dispersion de tension pure s'écarte de celle des ondes de tension flexion bien avant d'atteindre ce point de transition. En effet, vers 180 Hz, ces deux courbes théoriques s'écartent l'une de l'autre en bon accord avec les observations de la Fig. 4a.

5 Turbulence d'ondes

La théorie de la turbulence d'ondes peut s'appliquer à différents types de systèmes d'ondes dispersive se propageant dans un milieu, pour une relation de dispersion $\omega = ck^\alpha$ donnée, avec c qui dépend des paramètres physique du problème [1,2]. La conservation de l'énergie donne lieu à une cascade directe d'énergie, l'échelle d'injection de l'énergie étant supposée séparée de l'échelle de dissipation. Le transfert d'énergie se fait à flux d'énergie ϵ constant, sans dissipation, à travers les échelles par un processus

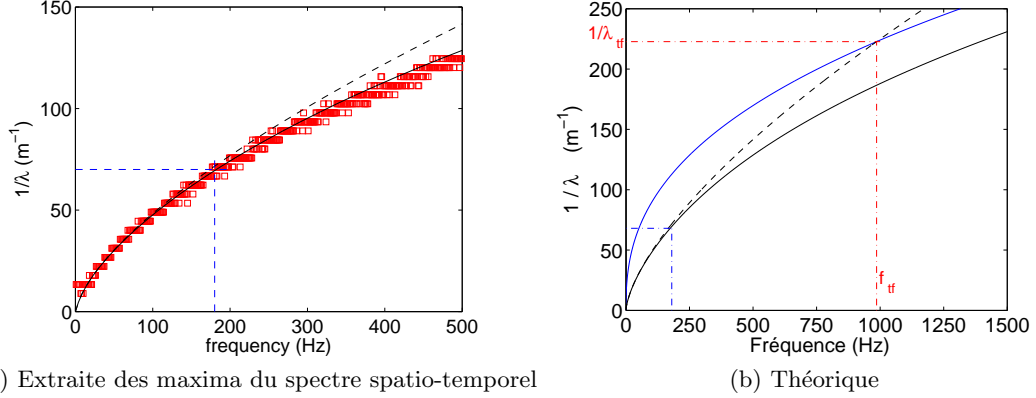


Figure 4. Relation de dispersion (a) extraite des maxima du spectre spatio-temporel de la Fig. 2 (forçage fort). Relation de dispersion théorique : $\omega^2 = (T/\rho)k^3$ (- -), et $\omega^2 = (T/\rho)k^3 + (D/\rho)k^5$ (—) pour $T = 14$ N/m. Ces deux courbes s'écartent significativement l'une de l'autre vers 180 Hz montrant la transition entre ondes élastiques de tension et de flexion. Relation de dispersion théorique (b) des ondes de flexion pure $\omega^2 = (D/\rho)k^5$ (— bleu), de tension pure $\omega^2 = (T/\rho)k^3$ (- -), et d'ondes de tension et flexion $\omega^2 = (T/\rho)k^3 + (D/\rho)k^5$ (—) pour $T = 14$ N/m. Ces deux dernières courbes s'écartent significativement l'une de l'autre vers 180 Hz, et l'égalité des termes de tension et de flexion de l'Equation (2) correspond au point (f_{tf}, λ_{tf}) .

d'interactions à N ondes. La loi d'échelle du spectre S_v en fonction du flux d'énergie dépend de N et est donnée par $S_v \sim \epsilon^{1/(N-1)}$ [1,2], et il est alors possible de calculer par analyse dimensionnelle une solution pour le spectre. Pour des ondes élastiques de tension-flexion couplées avec le mouvement fluide, il est connu que la non linéarité est quadratique et donc des interactions à 3-ondes ($N = 3$) sont impliquées [8,9]. Pour des ondes élastiques de tension couplées avec le mouvement fluide, $\omega = (T/\rho)^{1/2} k^{3/2}$, et $N = 3$. On suppose que le spectre s'écrit $S_v \sim \epsilon^{1/(N-1)} c^x f^y$ avec x et y réels à déterminer. Par analyse dimensionnelle, on trouve

$$S_v(f) \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/6} f^{-5/6}.$$

Le spectre spatial en fonction de k s'obtient de la même façon

$$S_v(k) \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/4} k^{-7/4}.$$

En intégrant le spectre spatio-temporel de vitesses des ondes $S_v(k, f)$ de la Fig. 3 sur tous les nombres d'ondes k , on obtient le spectre temporel de la vitesse verticale $S_v(f)$ comme le montre la Fig. 5a pour deux forçages. Lorsque le forçage augmente, l'amplitude globale du spectre augmente ainsi que l'amplitude des harmoniques du forçage. Dans le cas du plus grand forçage, le mélange d'onde est plus efficace, mais pas suffisant pour obtenir un spectre continu. La courbe en pointillé représente la loi de puissance $S_v \sim f^{-5/6}$ prédite par l'analyse dimensionnelle. De même, en intégrant $S_v(k, f)$ de la Fig. 3 sur toutes les fréquences f , on obtient le spectre spatial de la vitesse verticale $S_v(k)$ (Fig. 5b). La courbe en pointillé représente la loi de puissance $\sim k^{-7/4}$ prédite par l'analyse dimensionnelle. Le spectre spatial est plus lisse que le spectre fréquentiel du fait de la résolution $\delta k \sim 1/(2L) \sim 5 \text{ m}^{-1}$, limitée par la taille L de la fenêtre d'observation. Le régime de turbulence d'ondes n'est clairement pas atteint sur une large gamme fréquentielle ou spatiale, mais ces résultats préliminaires sont encourageants pour atteindre un régime turbulent d'ondes en interaction non linéaire.

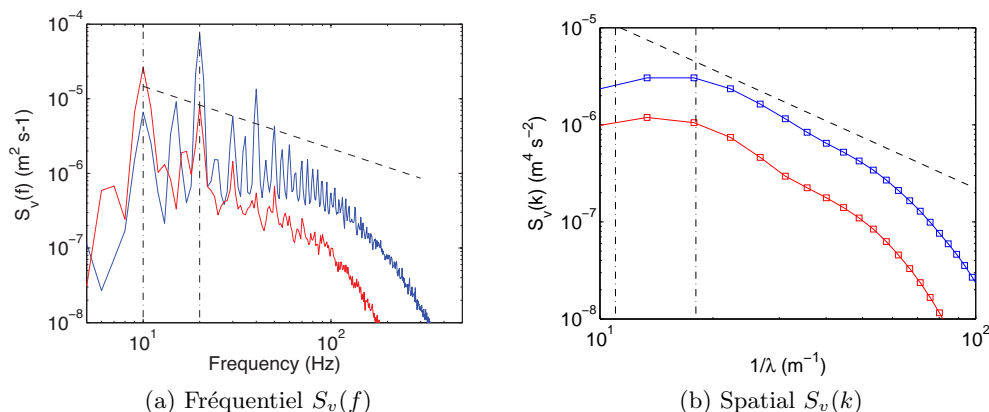


Figure 5. Spectre fréquentiel $S_v(f)$ (a) et spectre spatial $S_v(k)$ (b) de la vitesse des ondes obtenus par intégration du spectre spatio-temporel de la Fig. 3. Forçage à deux batteurs (bleu) et forçage à un batteur (rouge). Les prédictions de l'analyse dimensionnelle sont indiquées en pointillés : $S_v(f) \sim f^{-5/6}$ (a), et $S_v(k) \sim k^{-7/4}$ (b). Forçage (lignes verticales) : 10 et 20 Hz correspondants à $1/\lambda = 11$ et 18 m^{-1} .

6 Conclusion

Nous avons étudié en laboratoire des ondes linéaires ou non linéaires se propageant à l'interface d'un fluide recouvert d'une membrane élastique mince. Deux régimes d'ondes élastiques sont observées conformément à la relation de dispersion linéaire théorique : un régime d'ondes de flexion et un régime d'ondes de tension. Des résultats préliminaires montrent que lorsque le forçage augmente, des effets non linéaires apparaissent : un élargissement de la relation de dispersion, et le développement des harmoniques du forçage. Une étude plus systématique est en cours pour s'approcher d'un régime de turbulence d'ondes dans ce système.

Références

1. S. NAZARENKO, *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics, **825**, Springer, Berlin (2010)
2. V. E. ZAKHAROV, G. FALKOVICH & V. S. LOVOV, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence* Springer, Berlin (1992)
3. V. A. SQUIRE, R. J. HOSKING, A.D. KERR & P. J. LANGHORNE, *Moving Loads on Ice Plates*, Kluwer Acad Publishing (1996)
4. R. M. S. M. SCHULKES, R. J. HOSKING & A. D. SNEYD, Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Part 2, *Journal of Fluid Mechanics*, **180**, 297-318 (1987)
5. P. J. COBELLI, A. MAUREL, V. PAGNEUX & P. PETITJEANS, Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry, *Experiments in Fluids*, **46**, 1037-1047 (2009)
6. P. COBELLI, P. PETITJEANS, A. MAUREL, V. PAGNEUX & N. MORDANT, Space-time resolved wave turbulence in a vibrating plate, *Physical Review Letters*, **103**, 204301 (2009)
7. E. HERBERT, N. MORDANT & E. FALCON, Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid, *Physical Review Letters*, **105**, 144502 (2010)
8. A. V. MARCHENKO & V. I. SHRIRA, Theory of two-dimensional nonlinear waves in liquid covered by ice, *Fluid Dynamics*, **26**, 580-587 (1991)
9. I. V. LAVRENOV & V. G. POLNIKOV, Nonlinear energy transfer over the wave spectrum in water covered by solid ice, *Fluid dynamics*, **38**, 310320 (2003)

Impact d'une goutte sans contact

Laurent Duchemin¹ & Christophe Josserand²

¹ IRPHE, CNRS & Aix-Marseille Université, 49 rue Joliot-Curie, 13013 Marseille, France

² Institut Jean Le Rond d'Alembert, CNRS & UPMC (Univ. Paris 06), UMR 7190, Case 162, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France.

`duchemin@irphe.univ-mrs.fr`

Résumé. Cette étude concerne l'influence du gaz environnant sur la dynamique de l'impact d'une goutte sur une surface solide lisse. Nous utilisons un modèle axisymétrique dans lequel le liquide et le gaz sont incompressibles, le film liquide est supposé être dans un régime de lubrification et la viscosité du liquide est négligée. En l'absence de tension de surface, une singularité en temps fini apparaît et le liquide rentre en contact avec le solide sur un cercle. En revanche, lorsque la tension de surface est prise en compte, une fine nappe liquide émerge de la zone d'impact, séparée du solide par un film de gaz fin. L'épaisseur de ce film de gaz est toujours plus petite que le libre parcours moyen, ce qui suggère que le film liquide rentre en contact avec le solide.

Abstract. We study the influence of the surrounding gas in the dynamics of drop impact on a smooth surface. We use an axisymmetric model for which both the gas and the liquid are incompressible; lubrication regime applies for the gas film dynamics and the liquid viscosity is neglected. In the absence of surface tension a finite time singularity whose properties are analysed is formed and the liquid touches the solid on a circle. When surface tension is taken into account, a thin jet emerges from the zone of impact, skating above a thin gas layer. The thickness of the air film underneath this jet is always smaller than the mean free path in the gas suggesting that the liquid film eventually wets the surface.

1 Introduction

L'impact d'une goutte sur une surface solide est un phénomène courant, qui apparaît dans des contextes industriels ou scientifiques très variés. On peut par exemple citer l'atomisation dans les moteurs, les imprimantes à jet d'encre [1], ou encore dans un contexte environnemental, l'érosion due à l'impact des gouttes de pluie ou l'étalement d'aérosols [2]. La situation générique consiste en une goutte sphérique impactant une surface solide ou un film liquide. Un splash est observé systématiquement pour des conditions d'impact violent, alors qu'un étalement sur la surface (sans atomisation) est observé pour les impacts plus lents. Dans le cas des impacts sur surface solide, que nous considérons ici, le splash est caractérisé par l'émergence d'une corolle liquide qui se détache du substrat solide et peut éventuellement se fracturer en de nombreuses gouttes [3]. Cette dynamique complexe fait intervenir différents paramètres qui peuvent influencer la transition entre ces deux régimes d'impact. En particulier, on peut évoquer les effets visqueux et capillaires, quantifiés respectivement par le nombre de Reynolds et le nombre de Weber. La surface impactée est également importante, notamment la rugosité de cette surface peut avoir une influence sur la formation du splash [4,5] et celui-ci peut même être inhibé en texturant la surface [6]. Il a été montré récemment que le gaz environnant, souvent négligé dans ce genre de problèmes, peut s'avérer crucial dans cette dynamique, étant donné que le splash observé à la pression atmosphérique disparaît lorsqu'on diminue la pression ambiante [7]. Malgré quelques tentatives d'explications théoriques, invoquant en particulier la compressibilité du gaz [7], ou encore l'emprisonnement d'une bulle sous la goutte [8,9], une théorie complète du mécanisme du splash reste à établir. L'objectif de cet article est de mettre en évidence le rôle du gaz dans l'impact d'une goutte sur une surface solide, dans la limite où la viscosité de la goutte peut être négligée et où les deux fluides peuvent être considérés comme incompressibles.

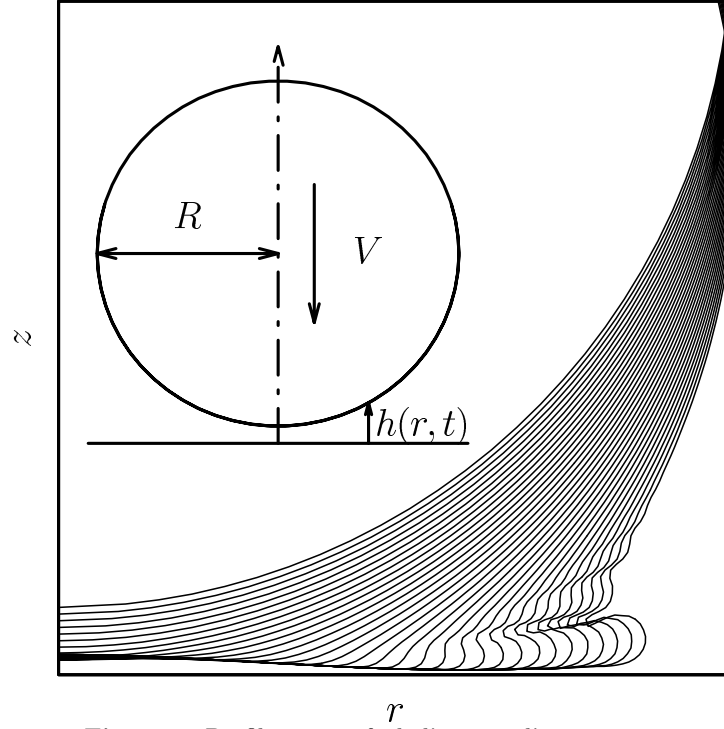


Figure 1. Profils successifs de l'impact d'une goutte.

2 Equations et nombres sans dimensions

Nous considérons l'impact d'une goutte incompressible de rayon R , de densité ρ_l , ayant une vitesse verticale V , sur un solide lisse (Cf. Fig. 1). Le gaz environnant est supposé incompressible, de densité ρ_g , de viscosité dynamique η et de coefficient de tension de surface avec le liquide γ . Le nombre de Froude ($Fr = V^2/gR$) étant toujours supérieur à 10^2 , la gravité est négligée. Enfin, la géométrie de la surface et celle de l'écoulement sont supposées rester à symétrie axiale. L'effet dominant du gaz se situe dans le film de gaz visqueux séparant la goutte de la surface solide. On suppose en outre que l'écoulement dans la goutte est potentiel et que l'écoulement dans le film gazeux est bien décrit par la théorie de la lubrification [11,8].

Ainsi, la dynamique de la goutte et du film de gaz est régie par le système d'équations sans dimensions suivant (en coordonnées cylindriques (r, z)) :

$$(\partial\Omega) \quad \partial_t \varphi + \frac{1}{2} \nabla \varphi^2 + p + \frac{1}{We} \kappa = C(t), \quad (1)$$

$$(\partial\Omega) \quad \partial_t h = \frac{1}{12rSt} \partial_r (rh^3 \partial_r p), \quad (2)$$

$$(\partial\Omega) \quad \partial_t h = \partial_z \varphi - \partial_r \varphi \partial_r h, \quad (3)$$

$$(\Omega) \quad \Delta \varphi = 0, \quad (4)$$

où φ est le potentiel des vitesses dans la goutte ($\mathbf{u}(r, z, t) = \nabla \varphi(r, z, t)$), Ω est le domaine liquide, $\partial\Omega$ est la surface de la goutte et p est la pression de lubrification dans le film de gaz. Les longueurs ont été adimensionnées par R , les vitesses par V , les densités par ρ_l et la pression dans le gaz par $\rho_l V^2$. L'interface complète $\{r(s, t), z(s, t)\}$ est indexée par la coordonnée curviligne s et κ est la courbure moyenne locale de l'interface. Ce système d'équations fait intervenir les deux nombres sans dimensions du problème, le

nombre de Weber et le nombre de Stokes :

$$\text{We} = \frac{\rho_l R V^2}{\gamma} \quad \text{et} \quad \text{St} = \frac{\eta}{\rho_l V R}.$$

Les conditions expérimentales habituelles correspondent à $\text{St} \ll 1$, comme nous allons le considérer par la suite. Les détails de la méthode numérique, basée sur des intégrales de frontières, sont présentés dans la référence [16].

Une succession de profils numériques de goutte sont présentés sur la figure 1, pour $\text{We} = 23.7$ et $\text{St} = 1.35 \times 10^{-3}$. La goutte se déforme en approchant le solide, puis une nappe liquide rapide émerge quasiment horizontalement. On observe sur la figure 1 que la goutte ne rentre jamais en contact avec le solide et que la nappe liquide "plane" sur une mince couche de gaz. Cette remarque est en accord avec la propriété des films visqueux, selon laquelle ils ne peuvent pas se rompre spontanément en temps fini [13]. Néanmoins, ce n'est pas le cas en l'absence de tension de surface, comme nous le décrivons dans le paragraphe suivant.

3 Singularité en temps fini pour $\text{We} = \infty$

Comme il a déjà observé en deux dimensions [11,8,12], la dynamique présente une singularité en temps fini en l'absence de tension de surface (Cf. fig. 2). Cela correspond, lorsque $t \rightarrow t_0$ à une interface en forme de coin située en $r_c(t) \rightarrow r_0$, où la courbure $\kappa_0(t)$ diverge alors que l'épaisseur du film $h_0(t)$ tend vers zéro. En outre, la pression maximale $p_0(t)$ se situe en $r_p(t) \neq r_c(t)$ et diverge lorsque $t \rightarrow t_0$ (et $r_p(t) \rightarrow r_0$), suivant :

$$p_0 \propto h_0^{-\frac{1}{2} \pm 0.05} \quad \kappa_0 \propto h_0^{-2 \pm 0.05},$$

comme montré sur la figure 2. La position radiale $r_0(t)$ de $h_0(t)$ suit approximativement l'intersection géométrique entre la goutte non-déformée et la surface solide ($r_0 \sim \sqrt{2t}$ et $\dot{r}_0 = 1/\sqrt{2t}$). En utilisant l'épaisseur typique du film gazeux $H^* = \text{St}^{2/3}$, en équilibrant l'inertie de la goutte et la pression de lubrification [8], on trouve $t_0 \sim H^*$ et donc $r_0 \sim \text{St}^{1/3}$ ($\dot{r}_0 \sim \text{St}^{-1/3}$) à la singularité, résultat en bon accord avec le numérique.

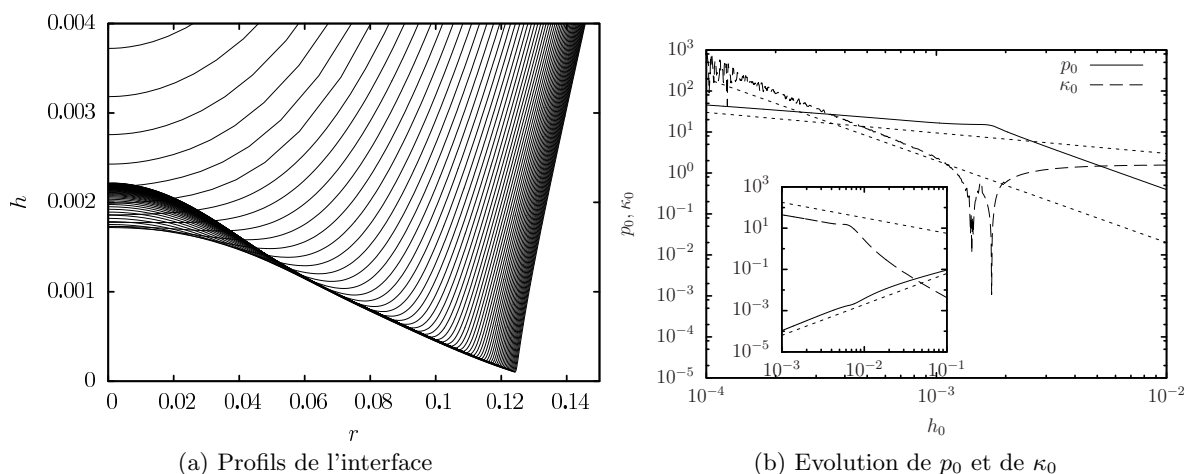


Figure 2. Profils de l'interface (a) près de la singularité pour $\gamma = 0$ et $\text{St} = 1.35 \times 10^{-3}$. Evolution de p_0 et de κ_0 (b) en fonction de h_0 . Les deux courbes en pointillés représentent respectivement $h_0^{-\frac{1}{2}}$ et h_0^{-2} . L'encart représente $h_0(t)$ et $p_0(t)$ en fonction de $(t_0 - t)$ près de la singularité, avec les lois d'échelles $h_0(t) \propto (t_0 - t)^{3/2}$ et $p_0(t) \propto (t_0 - t)^{-3/4}$.

Dans le but de comprendre les propriétés de cette singularité, nous supposons des solutions auto-similaires de la forme : $\tilde{h}(r, t) = h_0(t)H(R)$, $\tilde{p}(r, t) = p_0(t)P(R)$, et $\tilde{\varphi}(r, t) = \varphi_0(t)\Phi(R, Z)$, où $R = (r - r_0(t))/l(t)$ et $Z = z/l(t)$. Près de la singularité, les variations spatiales sont plus lentes que $(t_0 - t)$ (Cf. fig. 2), de telle sorte que les dérivées temporelles peuvent être remplacées par $(h_0\dot{r}_0/l(t))\partial_R$ et les équations (1,2,3,4) deviennent, à l'ordre dominant :

$$(\partial\Omega) - \frac{\varphi_0\dot{r}_0}{l}\partial_R\Phi + \frac{1}{2}\frac{\varphi_0^2}{l^2}\nabla\Phi^2 + p_0P = C(t), \quad (5)$$

$$(\partial\Omega) - \frac{h_0\dot{r}_0}{l}H' = \frac{h_0^3p_0(H^3P)'}{12\text{St}l^2}, \quad (6)$$

$$(\partial\Omega) - \frac{h_0\dot{r}_0}{l}H' = \frac{\varphi_0}{l}\left(\partial_Z\Phi - \frac{h_0}{l}H'\partial_R\Phi\right), \quad (7)$$

$$(\Omega) \quad \Delta\Phi = 0, \quad (8)$$

En choisissant $\dot{r}_0 = \text{St}^{-1/3}$, nous pouvons alors identifier deux régimes différents, basés sur la prédominance de deux des trois termes dans l'équation (7).

Régime I : $h_0 \ll l$: le second terme de l'équation 5 et dans le second membre de l'équation 7 peuvent être négligés, et en équilibrant les autres termes, on trouve : $\varphi_0 \sim \text{St}^{-1/3}h_0$, $l \sim \text{St}^{-2/3}h_0^{3/2}$ ce qui nous conduit aux lois d'échelles observées numériquement, à savoir :

$$p_0 \sim h_0^{-1/2} \text{ et } \kappa_0 \sim \text{St}^{4/3}h_0^{-2}.$$

Ce régime correspond en fait à une *épaisse* couche de gaz $h_0 \gg \text{St}^{4/3}$.

Régime II : $h_0 \gg l$: dans ce cas, l'équilibre des termes dominants conduit à : $\varphi_0 \sim \text{St}^{-5/3}h_0^2$, $l \sim \text{St}^{-4/3}h_0^2$ et

$$p_0 \sim \text{St}^{-2/3} \text{ et } \kappa_0 \sim \text{St}^{8/3}h_0^{-3}.$$

Ce régime correspond à une *mince* couche de gaz $h_0 \ll \text{St}^{4/3}$ et cette analyse suggère que les lois d'échelles observées numériquement ne sont valables que pour des valeurs de h_0 suffisamment grandes. Ce deuxième régime est donc un régime auto-similaire valable plus près de la surface et jamais observé à l'aide d'outils numériques, à notre connaissance[10,11,8,12]. Par ailleurs, il est clair que dans ce régime, la théorie de la lubrification cesserait d'être valide, étant donné que $h_0/l \gg 1$; les équations de Navier–Stokes complètes devraient alors être résolues dans le film gazeux.

4 Formation d'une nappe liquide

Lorsque l'on prend en compte la tension de surface, la singularité disparaît du fait du lissage des zones de grande courbure par la tension de surface, comme illustré sur la figure 3, où l'épaisseur minimale du film gazeux est tracée pour différentes valeurs des nombres de Weber et de Stokes. Lorsque le nombre de Stokes diminue, la taille de la bulle décroît et la nappe apparaît plus tôt, avec plus d'ondes capillaires. En outre, le petit angle entre la nappe et la surface solide varie avec les deux nombres sans dimensions (Cf. fig. 4). L'épaisseur minimale du film de gaz peut être estimée à l'aide des deux régimes auto-similaires observés dans le cas singulier $\text{We} = \infty$. En effet, en équilibrant le terme capillaire $\text{We}^{-1}\kappa$ et la pression singulière, on trouve pour les deux régimes :

$$\text{I : } h_0 \sim \text{St}^{8/9}\text{We}^{-2/3} \text{ et II : } h_0 \sim \text{St}^{10/9}\text{We}^{-1/3},$$

les deux régimes se croisant pour $\text{We} \sim \text{St}^{-2/3}$. Cette dépendance est présentée dans la figure 3, où l'épaisseur minimale du film est comparée à ces deux valeurs théoriques. On observe les variations suivantes des exposants : $h_0 \sim \text{St}^{0.9-1}\text{We}^{-0.33-0.4}$, qui sont en accord raisonnable avec le régime II.

Finalement, en supposant l'épaisseur de la nappe de l'ordre d'une longueur capillaire liée à la décélération de la goutte $\sqrt{\gamma RH^*/\rho_l V^2} \sim \text{St}^{1/3}\text{We}^{-1/2}$ [14], la conservation de la masse [15] permet d'estimer la vitesse de la nappe $V_{nappe} \sim \text{We}^{1/2}\text{St}^{-2/3}$, en bon accord qualitatif avec la figure 4.

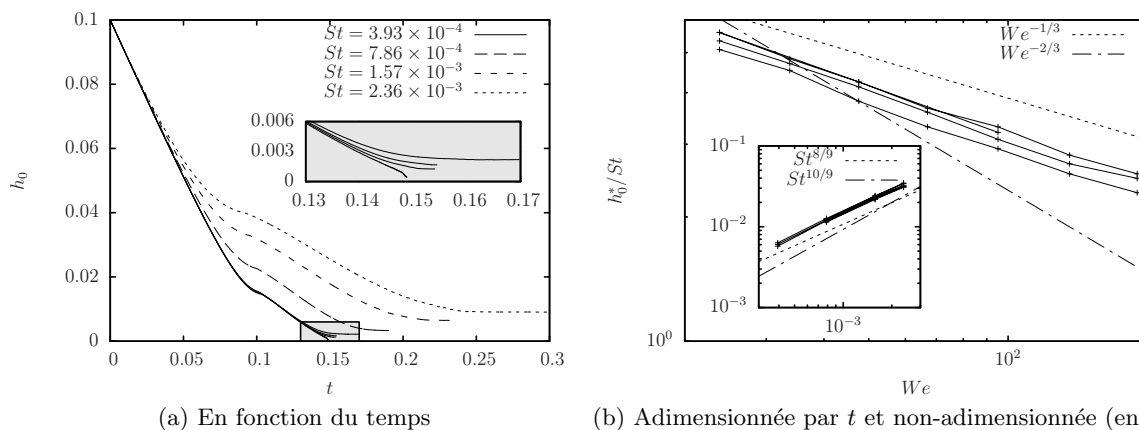


Figure 3. Epaisseur minimale du film de gaz h_0 pour quatre valeurs différentes du nombre de Stokes ($St = 3.93 \cdot 10^{-4}, 7.86 \cdot 10^{-4}, 1.57 \cdot 10^{-3}, 2.36 \cdot 10^{-3}$). En fonction du temps (a) : le zoom pour $St = 3.93 \cdot 10^{-4}$ près de l'axe représente cette évolution pour différentes valeurs du nombre de Weber : $We = 47.5, 95, 238$ et ∞ de haut en bas. Adimensionnée par St et non-adimensionnée (encart) (b), en fonction du nombre de Weber.

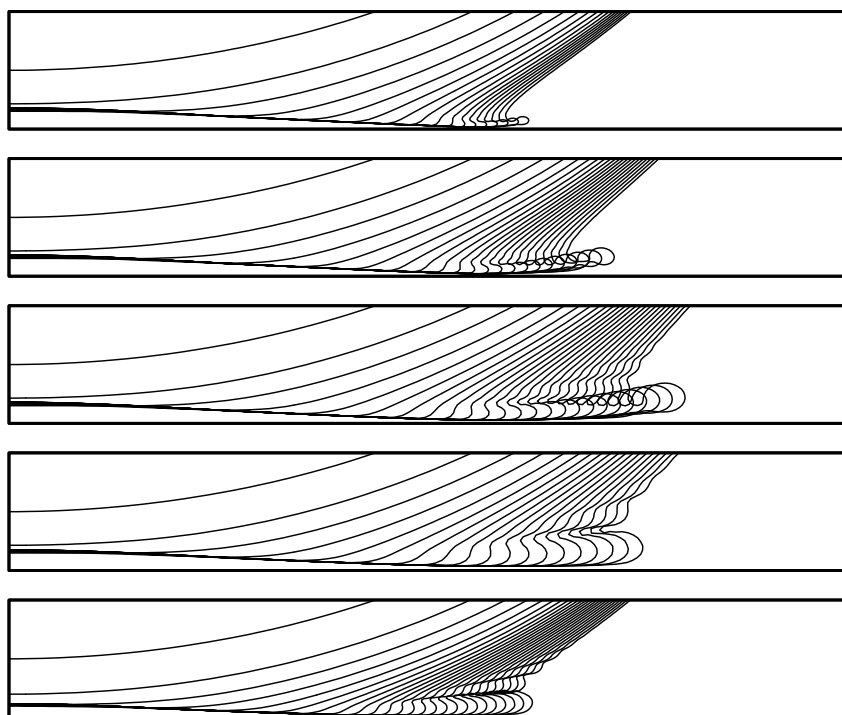


Figure 4. Cinq simulations différentes, avec $We = 238; 95; 47.5; 23.7$ respectivement, de haut en bas, et $St = 1.35 \cdot 10^{-3}$. La figure du bas est obtenue pour $We = 23.7$ et $St = 6.29 \cdot 10^{-4}$.

5 Conclusion

Etant donnée que les deux paramètres We et St ne varient pas avec la pression du gaz, la compressibilité de celui-ci avait été invoquée [7,8,12] pour expliquer la dépendance du splash à la pression ambiante observée dans les expériences [7]. Notre étude ne devrait donc pas, *a priori*, permettre d'expliquer cette dépendance. Néanmoins, si l'on calcule l'épaisseur du film de gaz dans les expériences [7] en utilisant les

lois d'échelles obtenues précédemment pour h_0 , nous trouvons des valeurs de l'ordre de quelques Å, c'est-à-dire bien en-dessous du libre parcours moyen dans le gaz (~ 60 nm). En conséquence, il est raisonnable de considérer que la nappe liquide rentre effectivement en contact avec le solide : il faut alors étudier une nappe liquide se déplaçant rapidement au contact d'une surface solide. Il est important de remarquer que cette conclusion resterait valide si la compressibilité du gaz était prise en compte. Il est également naturel d'envisager que la texture du solide puisse alors avoir un effet sur l'apparition de la corolle [6].

Références

1. M. REIN, Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces, *Fluid Dynamics Research*, **12**, 61 (1993)
2. MICHEL COANTIC, Mass transfert across the ocean-air interface : small scale hydrodynamic and aerodynamic mechanisms, *PhysicoChemical Hydrodynamics*, **1**, 249–279 (1980)
3. R. RIOBOO, M. MARENGO & C. TROPEA, Outcomes from a drop impact on solid surfaces, *Atomization and Sprays*, **11**, 155–165 (2001)
4. K. RANGE & F. FEUILLEBOIS, Influence of surface roughness on liquid drop impact, *Journal of Colloids and Interface Science*, **203**, 16–30 (1998)
5. C. JOSSERAND, L. LEMOYNE, R. TROEGER & S. ZALESKI, Droplet impact on a dry surface : triggering the splash with a small obstacle, *Journal of Fluid Mechanics*, **524**, 47–56 (2005)
6. L. XU, L. BARCOS & S.R. NAGEL, Splashing of liquids : Interplay of surface roughness with surrounding gas, *Physical Review E*, **76**, 066311 (2007)
7. L. XU, W.W. ZHANG & S.R. NAGEL, Drop splashing on a dry smooth surface, *Physical Review Letters*, **94**, 184505 (2005)
8. S. MANDRE, M. MANI & M. P. BRENNER, Precursors to splashing of liquid droplets on a solid surface, *Physical Review Letters*, **102**, 134502 (2009)
9. P.D. HICKS & R. PURVIS, Air cushioning and bubble entrapment in three-dimensional droplet impacts, *Journal of Fluid Mechanics*, **649**, 135–163 (2010)
10. F.T. SMITH, L. LI & G.X. WU, Air cushioning with a lubrication/inviscid balance, *Journal of Fluid Mechanics*, **482**, 291–318 (2003)
11. A.A. KOROBKIN, A.S. ELLIS & F.T. SMITH, Trapping of air in impact between a body and shallow water, *Journal of Fluid Mechanics*, **611**, 365–394 (2008)
12. M. MANI, S. MANDRE & M.P. BRENNER, Events before droplet splashing on a solid surface, *Journal of Fluid Mechanics*, **647**, 163–185 (2010)
13. J. EGGERS, Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows, *Reviews of Modern Physics*, **69**, 865–929 (1997)
14. C. CLANET, C. BÉGUIN, D. RICHARD & D. QUÉRÉ, Maximal deformation of an impacting drop, *Journal of Fluid Mechanics*, **517**, 199–208 (2004)
15. C. JOSSERAND & S. ZALESKI, Droplet splashing on a thin liquid film, *Physics of Fluids*, **15**, 1650 (2003)
16. L. DUCHEMIN & C. JOSSERAND, Curvature singularity and film-skating during drop impact. *Physics of Fluids*, **23**, 091701, 2011.

Rotations d'une goutte dans un ressaut hydraulique circulaire

Alexis Duchesne¹, Clément Savaro¹, Luc Lebon¹, Christophe Pirat², & Laurent Limat¹

¹ Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), UMR 7057 du CNRS, Université Paris Diderot, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris, France

² Laboratoire de Physique de la Matière Condensée et Nanostructures (LPMCN), UMR 5586 du CNRS, Université Claude Bernard Campus La Doua, Bâtiment Brillouin, Rue Ada Byron, 69622 Villeurbanne, France
alexis.duchesne@paris7.jussieu.fr

Résumé. Une goutte dont la taille est de l'ordre de la longueur capillaire dans un ressaut circulaire peut être piégée le long du front. Elle ne coalesce pas avec le bain du même liquide. Dans le cas d'un ressaut formé sur une plaque horizontale, la goutte peut adopter deux comportements distincts : l'un périodique (la goutte orbite dans le ressaut), l'autre apériodique. Nous mettons en évidence expérimentalement la rotation propre de la goutte (due à l'entraînement via le film d'air qui sépare la goutte et le ressaut) ; c'est un paramètre clé de cette dynamique. Nous caractérisons cette rotation propre et nous montrons, en particulier, que la loi de fréquence n'est pas celle à laquelle on pourrait s'attendre avec un modèle simple de sphère dure entraînée par le liquide à travers un film d'air en cisaillement simple.

Abstract. A drop of moderate size deposited inside a circular hydraulic jump remains trapped at the shock front and does not coalesce with the liquid flowing across the jump. For a horizontal plate on which the liquid is impacting, the drop exhibits two different motions : a periodic one (the drop orbitates around the jump) and an aperiodic one. We experimentally show that a key parameter is the internal rotation of the drop (across the air layer which separates the drop and the jump). We characterize this internal rotation, particularly, we show that the frequency law is not the one we can deduce from a simple model of rigid sphere driven by the liquid through a sheared air layer.

1 Introduction

Une goutte peut être maintenue en lévitation par l'intermédiaire d'un film de vapeur [1] ou en non coalescence avec un bain du même liquide via un film d'air la séparant de l'interface [2,3]. Ces situations inhabituelles donnent lieu à des dynamiques de gouttes complexes d'un grand intérêt d'un point de vue fondamental. Ainsi Quéré et Aussilous [4] ont mis en évidence les formes de surfaces libres en rotation prédites par Poincaré à l'aide de gouttes recouvertes d'une poudre hydrophobe dévalant un plan incliné. On peut aussi citer la dualité ondes-corpuscules mise en évidence pour des gouttes marcheuses sur un bain liquide oscillant [2]. Lorsqu'elle "frappe" le liquide, la goutte émet des ondes de surface qui vont modifier l'impact suivant et conduire à un mouvement coordonné de la goutte et de son sillage d'onde.

Nous considérons ici un système différent, une goutte déposée dans un ressaut hydraulique circulaire [5,6,7,8]. Cette situation a été décrite par Sreenivas et al. [9] : une goutte du même liquide déposée sur la zone centrale (à forte vitesse car près du jet), ne coalesce pas du fait de la présence d'un très mince film d'air entraîné par le liquide, sur lequel elle lévite. Elle se trouve alors piégée contre le "mur" séparant les zones rapides et lentes de l'écoulement.

Pour des gouttes dont la taille est de l'ordre de la longueur capillaire, des expériences menées par Pirat et al.[3] ont montré que, de manière surprenante, les gouttes vont également se mettre en mouvement spontané. Pour un ressaut légèrement incliné, cela conduit à des oscillations de la goutte autour du point d'équilibre le plus bas. Dans le présent travail nous nous intéressons au cas du ressaut horizontal. Nous mettons en évidence deux régimes pour le comportement de la goutte : périodique et apériodique. Nous étudions également la rotation propre de la goutte, élément clé dans la compréhension de cette dynamique.

Une image de l'expérience est représentée sur la Fig.1. Un jet d'huile silicone (20 cP) provenant d'un tube vertical de diamètre interne 3 mm frappe en son centre un disque de verre horizontal placé 4 cm

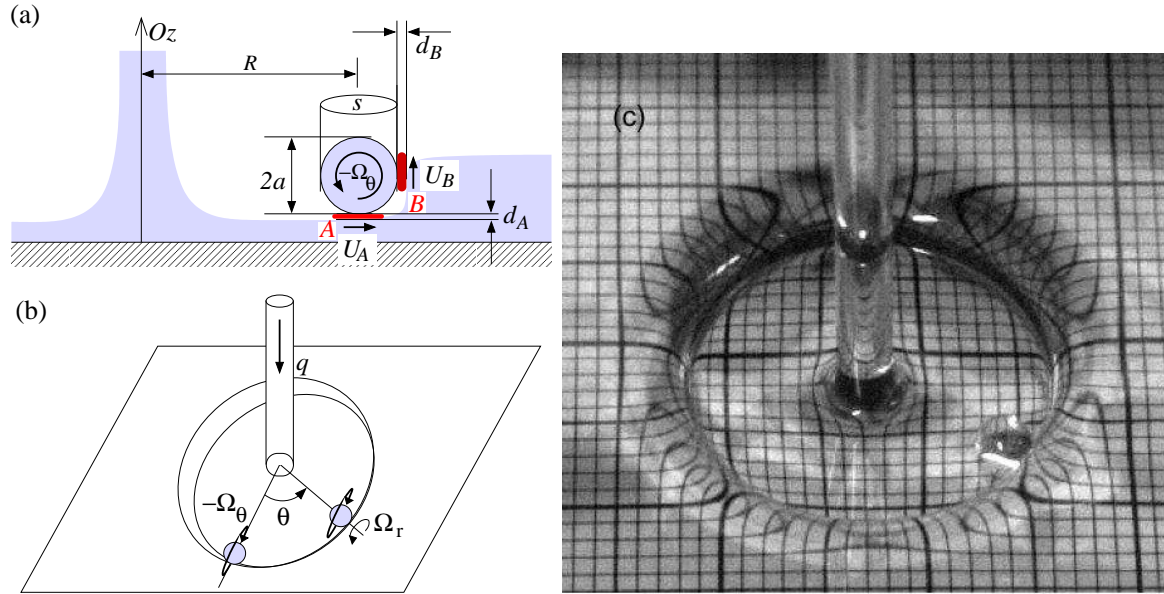


Figure 1. (a) et (b) schéma de principe de l'expérience, (c) vue du ressaut et de la goutte.

en dessous. L'absence de mur de confinement nous permet de nous situer dans le cas d'un ressaut de type I [8] c'est à dire un écoulement de surface unidirectionnel sans les recirculations annulaires du type II. Le rayon du ressaut augmente avec le débit et suit une loi assez proche d'une loi de puissance [6] : $R \propto q^{\frac{1}{8}} \nu_l^{-\frac{3}{8}} g^{-\frac{1}{8}}$ où q est le débit volumique, ν_l la viscosité cinématique du liquide et g la constante de gravité.

L'alimentation de l'injecteur se fait par un bac à niveau constant ce qui permet de réduire le bruit éventuel introduit par la pompe d'alimentation. La gamme de débit à laquelle nous avons accès se situe entre 0 et $20 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Les gouttes de tailles millimétriques sont directement placées dans le ressaut à l'aide d'une seringue ou d'un fil de pêche pour les plus petites d'entre elles.

2 Dynamique de la goutte

Lorsque la goutte ne touche pas le jet central (c'est à dire lorsque la distance entre la partie extérieure du jet et le choc est supérieure à la taille de la goutte), on met en évidence deux dynamiques distinctes reproduites sur les diagrammes spatio-temporels de la figures 2 où apparaît la loi $\theta(t)$ donnant la position angulaire de la goutte autour du ressaut en fonction du temps :

- Mouvement orbital périodique. La goutte orbite périodiquement le long du ressaut, à une fréquence comprise entre quelques dixièmes de Hertz et plusieurs Hertz. Cette fréquence décroît avec l'augmentation du rayon du ressaut. On peut voir un diagramme spatio temporel illustrant ce mouvement sur la Fig.2.a.
- Mouvement "apériodique" (qui ne présente pas une seule période, par opposition au régime précédent). Ce régime est illustré par le diagramme spatio-temporel Fig.2.b; on observe des variations de la vitesse de rotation de la goutte dans le ressaut ainsi que des inversions du sens de rotation. Signalons que, dans ce régime, plus le rayon du ressaut est important plus l'amplitude du mouvement des gouttes est faible. Ainsi pour certaines configurations la goutte peut parcourir plusieurs tours avant une inversion de sens de rotation, tandis que pour de plus grands ressauts cette amplitude n'est que de quelques degrés.

Les observations expérimentales indiquent que deux paramètres suffisent à caractériser l'ensemble des états observés : le rayon de la goutte a et le rayon du ressaut R (lui même dépendant du débit q).

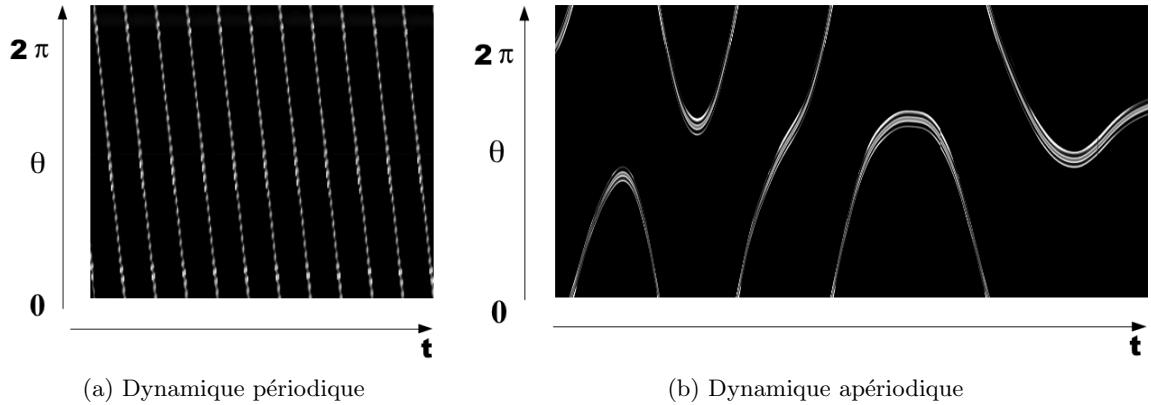


Figure 2. Diagrammes spatio-temporels d'une goutte ayant une dynamique périodique (a) et apériodique (b)

Ainsi la sélection entre les deux types de dynamiques peut être caractérisée par un unique couple (a, R) . Pour a fixé, la transition d'une dynamique périodique vers une dynamique apériodique se fait lorsque R augmente. Pour R donné, la transition d'une dynamique périodique vers une dynamique apériodique se fait lorsque a diminue. L'ensemble de ces données est présenté dans le diagramme de phase de la figure 3.a, où apparaissent les deux domaines de chaque dynamique.

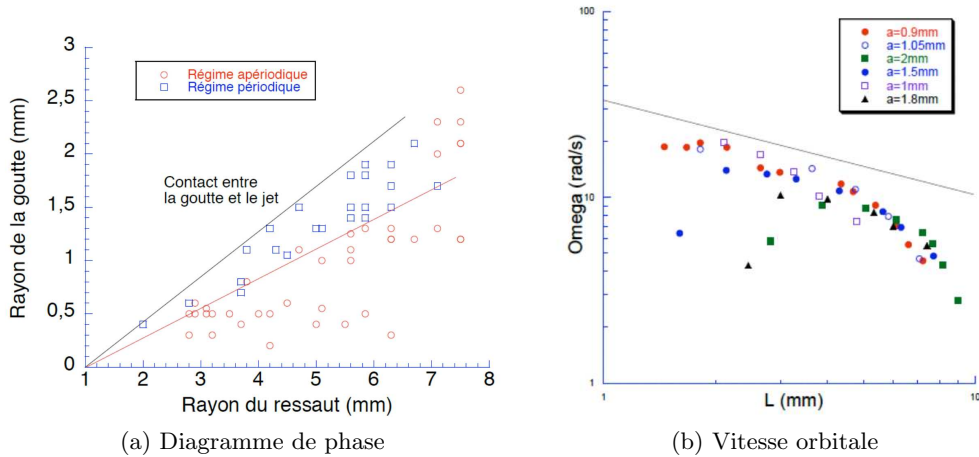


Figure 3. a) diagramme de phase pour les différents types de mouvements de la goutte. (b) Vitesse orbitale $\omega = d\theta/dt$ en fonction du rayon de l'orbite suivie par la goutte : $L = \sqrt{R - a}$

3 Mouvement orbital et instabilité gyroscopique

Un modèle a été proposé [3] pour ce mécanisme de rotation (cf figure 1.a). Entraînée par le mouvement radial d'expansion du bain, la goutte acquiert une très forte rotation propre, dont le moment cinétique associé est parallèle au front. Si maintenant une perturbation déplace latéralement la goutte, celle-ci tentera de conserver son moment cinétique qui, de fait, va acquérir une composante radiale, susceptible d'engendrer un couple moteur par friction sur le bain, amplifiant la perturbation initiale. Il peut alors en résulter un mouvement orbital entretenu. Ceci peut être formulé plus rigoureusement en écrivant les équations régissant le mouvement d'une sphère de rayon a (supposée rigide pour simplifier) en contact avec le liquide en deux points A et B sur la figure 1.b.

On suppose que les forces échangées en ces points sont de type friction visqueuse à travers un film d'air cisailé : $\vec{F}_A = \eta_a(S_A/d_A)(\vec{U}_A - \vec{\Omega} \times \vec{GA})$ et $\vec{F}_B = \eta_a(S_B/d_B)(\vec{U}_B - \vec{\Omega} \times \vec{GB})$, où η_a est la viscosité de l'air, les quantités $S_A, S_B, d_A, d_B, \vec{U}_A, \vec{U}_B$ désignent les surfaces de contact, épaisseurs locales des films d'air, et les vitesses du bain aux points A et B, G est le centre de gravité de la goutte et $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur vitesse de rotation instantanée de la goutte autour de G dans le repère du Laboratoire.

Tous calculs faits, les équations de la dynamique de la sphère, repérée également par l'angle $\theta(t)$ de rotation autour du ressaut, sont données par :

$$\frac{d\Omega_r}{dt} + \frac{1}{\tau_A} \left(\Omega_r + \frac{L}{a} \omega \right) = \omega \Omega_\theta \quad (1)$$

$$\frac{d\Omega_\theta}{dt} + \left(\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B} \right) \Omega_\theta = -\omega \Omega_r - \frac{1}{a} \left(\frac{U_A}{\tau_A} + \frac{U_B}{\tau_B} \right) \quad (2)$$

$$\frac{d\Omega_z}{dt} + \frac{1}{\tau_B} \left(\Omega_z + \frac{L}{a} \omega \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B} \right) \omega = -\frac{5}{2} \frac{a}{L} \left(\frac{\Omega_r}{\tau_A} + \frac{\Omega_z}{\tau_B} \right) \quad (4)$$

où $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ désigne la vitesse orbitale, $L = R - a$ le rayon de l'orbite suivie par la goutte, et les deux temps caractéristiques s'écrivent $\tau_A = \frac{8}{13} \pi \frac{\rho_l d_A}{\eta_a S_A}$ et $\tau_B = \frac{8}{13} \pi \frac{\rho_l d_B}{\eta_a S_B}$ où ρ_l désigne la masse volumique du liquide de la goutte. Si on intègre numériquement ces équations (résultats non présentés ici), on constate que pour quasiment toutes les conditions initiales possibles, on évolue vers un état limite orbital défini par :

$$\Omega_r = \Omega_z = -\omega \frac{L}{a} \quad (5)$$

$$\Omega_\theta = 0 \quad (6)$$

$$\omega^2 = \frac{U_A}{L\tau_A} + \frac{U_B}{L\tau_B} \quad (7)$$

Des mesures complémentaires (non présentées ici) nous ont montré que les vitesses U_A et U_B étaient comparables mais peu dépendantes du débit d'injection q , de sorte que si les deux temps caractéristiques ne sont eux aussi pas "trop" dépendants du débit, on attend une vitesse orbitale en $\omega \propto L^{-1/2}$. Cette conjecture est testée sur la figure 3.b, en variant le rayon du ressaut, via le débit d'injection pour différentes tailles de gouttes. On voit que sans être parfaite, cette loi donne la bonne tendance.

4 Rotation propre de la goutte

Le modèle précédent repose sur l'hypothèse d'une rotation propre de la goutte sur elle-même qui n'a jusqu'ici jamais été mise en évidence. Nous avons donc conduit des expériences pour l'observer, en suivant des traceurs (particules de charbon) injectés dans la goutte, les images obtenues étant reproduites sur la figure 4. Néanmoins, il est difficile d'étudier cette rotation interne lorsque la goutte est aussi en mouvement dans le ressaut. Pour pallier cette difficulté, nous avons incliné légèrement le plan du ressaut (typiquement quelques dixièmes de degrés), de sorte à maintenir la position de la goutte immobile dans le ressaut. Dans ce cas, on devrait sélectionner une autre solution des équations ci dessus, qui était instable dans la partie précédente, et qui est donnée par $\omega = \Omega_r = \Omega_z = 0$ et :

$$\Omega_\theta = -\frac{1}{a} \frac{\frac{U_A}{\tau_A} + \frac{U_B}{\tau_B}}{\frac{1}{\tau_A} + \frac{1}{\tau_B}} \propto -\frac{U_A}{a} \quad (8)$$

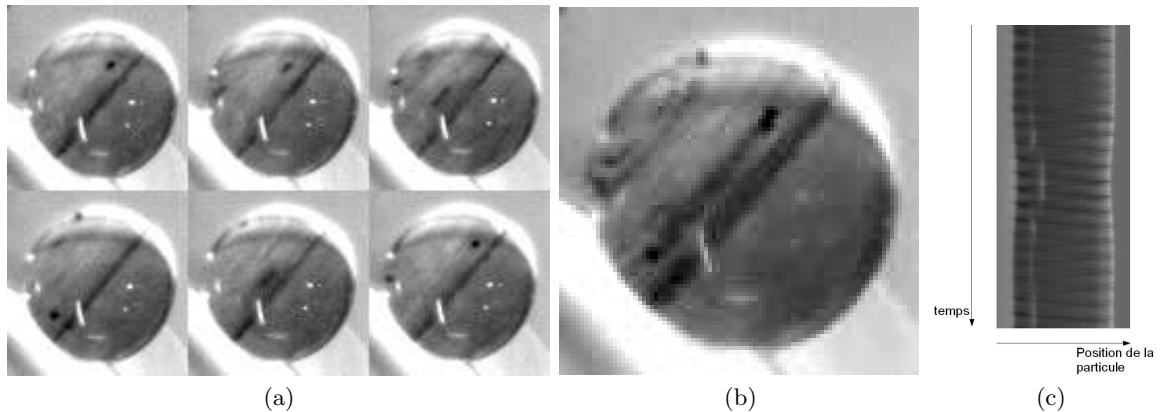


Figure 4. (a) Particules de charbon dans une goutte en rotation. (b) Superposition des images d'une révolution de la goutte. (c) Diagramme spatio-temporel figurant la rotation propre de la goutte

La seconde expression, loi d'échelle approchée, étant obtenue soit en négligeant le frottement sur le mur vertical, soit en admettant que les deux vitesses de bain sont proportionnelles. On peut d'ailleurs retrouver plus simplement cette loi en remarquant que dans cette situation bidimensionnelle suggérée figure 1.a, la goutte subit au point A une force visqueuse d'entraînement en $F_A = \eta_a(S_A/d_A)(U_A + a\Omega_\theta)$, la rotation étant réglée par le théorème du moment cinétique qui s'écrit ici quand on néglige l'effet de friction du mur :

$$J \frac{d\Omega_\theta}{dt} = -\eta \frac{aS_A}{d_a} [U_A + a\Omega_\theta] \quad (9)$$

On attend donc bien, en situation stationnaire, une loi en : $\Omega_\theta \sim -\frac{U_A}{a}$. En fait nos résultats expérimentaux, reproduits sur la figure 5 ont mis en évidence une loi en fréquence plus complexe . En effet on distingue très nettement deux zones très différentes en variant le rayon de la goutte :

- la première pour des gouttes de rayons supérieurs à 1 mm (rappelons que la longueur capillaire l_c est ici d'environ 1 mm). Dans cette gamme de rayons la fréquence de rotation évolue en $\frac{1}{a^2}$ où l est de l'ordre de 0.4 mm.
- La deuxième pour les gouttes plus petites, la loi de puissance apparaît moins bien définie, mais plus l'on considère un ensemble de gouttes petites, plus la loi de puissance que l'on peut faire passer est de puissance faible. On peut donc supposer que pour des gouttes suffisamment petites (plus petites que celles que nous avons obtenues) la loi de puissance se rapproche de $\frac{1}{a}$.

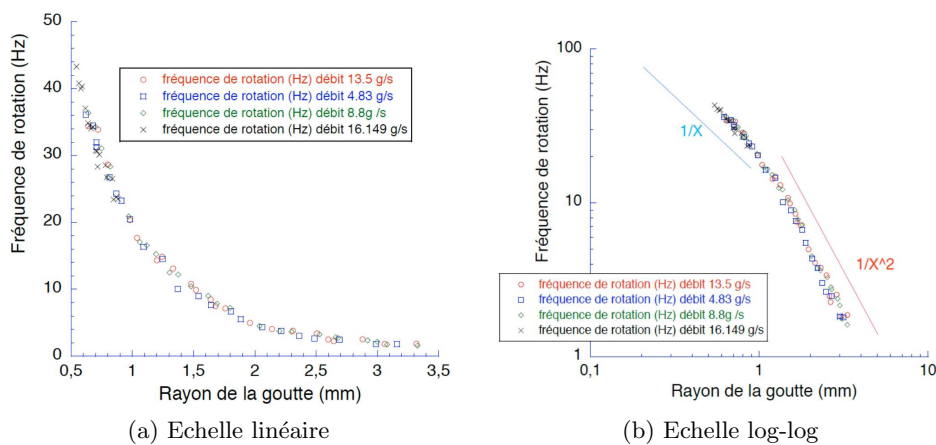


Figure 5. Fréquence de rotation interne en fonction du rayon de la goutte.

Par ailleurs il est intéressant de constater que les courbes présentées ici se superposent mais ne sont pas renormalisées. Autrement dit la fréquence de rotation des gouttes ne dépend pas du débit. Ceci est peut être dû à la structure du ressaut et laisse supposer que le ressaut apparaît à une vitesse de surface indépendante du débit.

5 Conclusion

Le fait que la loi de puissance se modifie au voisinage de la longueur capillaire suggère que l'hypothèse de sphère dure sur un film cisailé est trop brutale et qu'il faut tenir compte de la déformation de la goutte. Nous avons en effet pu vérifier expérimentalement que la goutte avait une forme assez éloignée d'une sphère. La littérature conduirait aussi à revenir sur cette hypothèse et à considérer une sphère tronquée [10], voire même une sphère tronquée en appui sur une poche d'air non axisymétrique [11] afin d'améliorer notre modèle.

Par ailleurs il peut être utile de revenir sur l'hypothèse d'une rotation en bloc. Une analyse dimensionnelle montre que la période de rotation propre f^{-1} où f la fréquence de rotation mesurée fig.5 est du même ordre de grandeur que le temps de diffusion de quantité de mouvement : $\tau_D \sim \frac{a^2}{\nu_l}$ avec ν_l la viscosité cinématique. On en déduit donc que dans le cas dynamique il peut y avoir une rotation différentielle au sein de la goutte. Cette rotation différentielle pourrait avoir des conséquences sur la dynamique d'ensemble de la goutte. Le modèle de l'instabilité gyroscopique développé ci-dessus doit donc maintenant être adapté au cas d'une goutte déformable dans un ressaut horizontal et confronté à nos données expérimentales.

Remerciements Les auteurs tiennent à remercier Antoine Fruleux pour ses contributions aux travaux résumés en section 3, ainsi que Mathieux Receveur et Laurent Réa pour leur assistance technique.

Références

1. A. L. BIANCE, C. CLANET & D. QUERE, Leidenfrost drops, *Physics of Fluids*, **15**, 1632 (2003).
2. Y. COUDER, E. FORT, C.-H. GAUTIER & A. BOUDAUD, From bouncing to floating : Noncoalescence of drops on a fluid bath, *Physical Review Letters*, **94**, 177801 (2005).
3. C. PIRAT, L. LEBON, A. FRULEUX, J.-S. ROCHE & L. LIMAT, Gyroscopic Instability of a Drop Trapped Inside an Inclined Circular Hydraulic Jump, *Physical Review Letters*, **105**, 8 (2010).
4. P. AUSSILLOUS & D. QUERE, Shapes of rolling liquid drops, *Journal of Fluid Mechanics*, **512**, 133 (2004).
5. E. J. WATSON, The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane, *Journal of Fluid Mechanics*, **20**, 481 (1964).
6. T. BOHR, DIMON, & V. PUTKARADZE, Shallow-water approach to the circular hydraulic jump, *Journal of Fluid Mechanics*, **254**, 635 (1993).
7. J. W. M. BUSH & J. M. ARISTOFF, The influence of surface tension on the circular hydraulic jump, *Journal of Fluid Mechanics*, **489**, 229 (2003).
8. T. BOHR, C. ELLEGAARD, A. E. HANSEN & A. HAANING, Hydraulic jumps, flow separation and wave breaking : An experimental study, *Physica B*, **228**, 1-10 (1996).
9. K. R. SREENIVAS, P. K. DE & J. H. ARAKERI, Levitation of a drop over a film flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **380**, 297-307 (1999).
10. P.-G. DE GENNES, F. BROCHARD-WYART & D. QUERE, *Gouttes, Perles et Ondes*, pp. 202-205, Belin (2002).
11. P. DELL'AVERSANA & G. P. NEITZEL, Behavior of noncoalescing and nonwetting drops in stable and marginally stable states, *Experiments in Fluids*, **36**, 299-308 (2004).

Une application récente et surprenante de l'effet de *plasma wave echo* : la génération de rayonnement X cohérent

C. Evain^{1,2}, M. Labat¹, A. Loulergue¹, M.-E. Couprie¹, A. Nadji¹, C. Sz waj², & S. Bielawski²

¹ Synchrotron SOLEIL, Saint Aubin, BP 34, 91 192 Gif-sur-Yvette, France

² PhLAM, Bat. P5, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

`clement.evain@phlam.univ-lille1.fr`

Résumé. L'écho d'ondes de plasma (plasma wave echo) est un effet dynamique connu depuis les années 60 [1], et qui peut être interprété comme un effet de « mémoire » à long terme. Dans un premier temps, on effectue une première modulation, induisant une modulation dans l'espace des phases (par exemple un feuilletage), mais qui est « caché », c'est-à-dire sans conséquences visible en pratique. Ensuite, l'existence de cette structure est révélée lorsqu'une deuxième modulation est appliquée au système. Cet effet a été observé dans des domaines variés comme les plasmas [2], l'hydrodynamique [3], l'équation de Kuramoto [6], les gaz classiques [4], les atomes froids [5]. Bien qu'ayant connu un intérêt fondamental certain, les applications de cet effet ont été relativement limitées. En 2009, cet effet a connu une application potentielle inattendue, dans le domaine de la génération de rayonnement X cohérent. Le fluide en question est un paquet d'électrons relativistes dont l'espace des phases est manipulé par des lasers externes. L'application du phénomène de « plasma wave echo » à ce fluide particulier est actuellement considéré comme une voie potentiellement révolutionnaire pour la production de rayonnement laser VUV et X [7]. Nous présentons ici un ensemble de résultats numériques quantitatifs, démontrant la possibilité d'appliquer cet effet dans les anneaux de stockage déjà existants [8]. Ensuite, nous présentons le design de LUNEX 5, un projet de démonstrateur français dont l'un des objectifs principaux est l'étude de la production de rayonnement X par cet effet [9].

Abstract. Plasma wave echo is a dynamical effect, well know since the 60's [1], which can be interpreted as a long term “memory” process. As a first step, a first modulation is made, inducing a modulation in the phase-space (for example a flakiness), but which remains ”hidden” (i.e. without any visible consequence). Then, the existence of this structure is revealed thanks to an second modulation applied to the system. This effect was observed in several domains, for exemple in plasma physics [2], hydrodynamics [3], Kuramoto equation [6], classical gaz [4], cold atoms [5]. Although its fondamental interest is recognized, applications of this effect were still limited. In 2009, this effect knew an unexpected potential application, in the domain of X-ray coherent radiation. The considered fluid is a relativistic electron bunch, whose phase-space is manipulated by external lasers. Application of this plasma wave echo process to this special fluid is at present considered as a potentially revolutionary way to generate laser radiation in the VUV and X [7]. We present here quantitative numerical results, showing the possibility to applied this effect to storage ring already built [8]. Then, we present the design of LUNEX 5, a French facility demonstrator, whose one of the main objectives is the study of X-ray generation with this effect [9].

1 Introduction : processus d'écho dans les paquets d'électrons relativistes

Le schéma d'écho dans les paquets d'électrons relativistes, ou EEHG (*Echo-Enabled Harmonic Generation*) [7,10], est basé sur la modification de l'espace des phases de paquet d'électrons grâce à des lasers externes et à des zones dispersives. Ce schéma comporte 4 étapes. La première étape consiste à moduler l'énergie des électrons (Fig. 1a), en faisant interagir les électrons avec une impulsion laser externe. L'énergie des électrons est modulée à la fréquence de l'onde optique. Pour que l'échange d'énergie entre les électrons et l'onde optique soit efficace, l'interaction a lieu dans une zone de champ magnétique périodique (formée par une succession d'aimants constituant un système appelé onduleur). Ensuite, ce paquet d'électrons traverse une zone dispersive qui a pour effet de modifier la position des électrons en fonction de leur énergie, et donne un aspect feuilleté à l'espace des phases (Fig. 1b). Dans ce type d'expérience, la quantité ”détectable” du paquet d'électrons est sa densité longitudinale de charge, c'est à

dire la projection de l'espace des phases selon l'axe vertical. À cet étape du processus, les transformations appliquées au paquet d'électrons ne sont pas détectables (Fig. 1b). Ensuite, le paquet d'électrons est re-soumis à une interaction avec une seconde impulsion laser, qui vient re-moduler l'énergie des électrons à la longueur d'onde optique (Fig. 1c). Finalement, ce paquet traverse une seconde zone de dispersion (beaucoup plus faible que la première) qui vient "redresser" verticalement la structure de l'espace des phases (Fig. 1d), et faire apparaître dans le profil du paquet d'électrons une modulation fine (Fig. 1d).

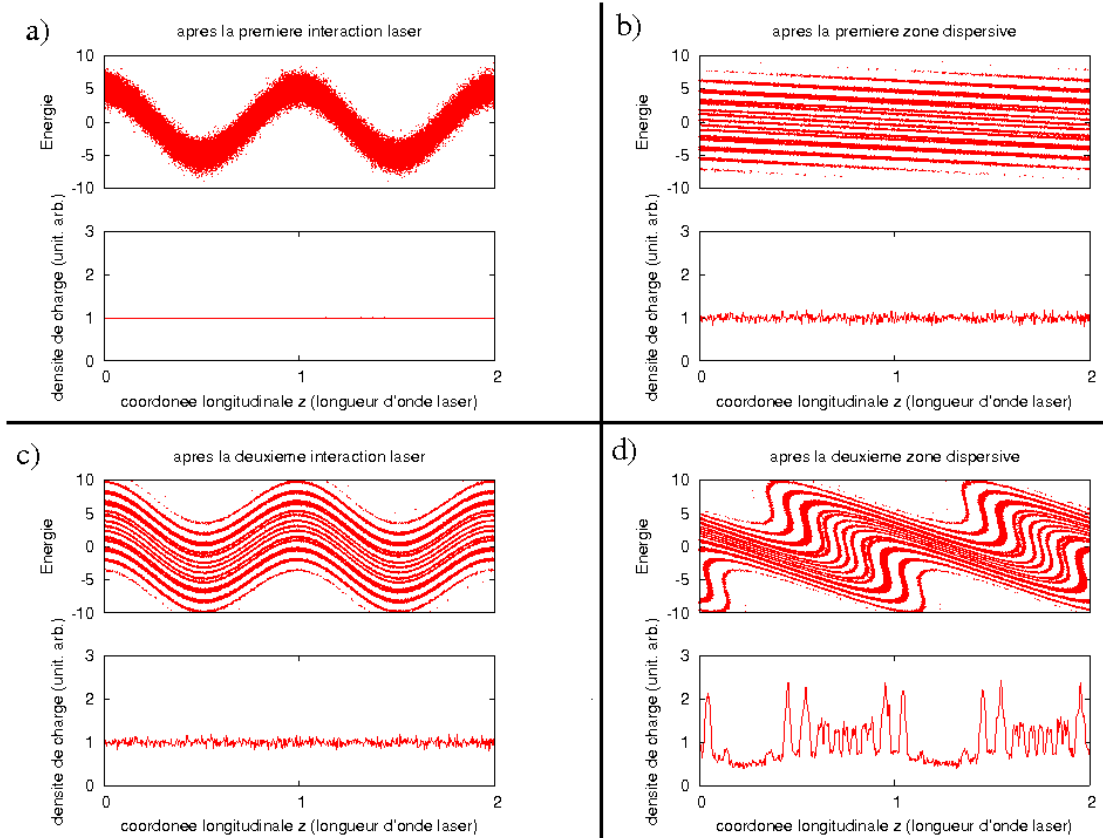


Figure 1. Espace des phases longitudinal (position/énergie) et densité de charge du paquet d'électrons aux différentes étapes du processus d'écho. a) après la première interaction laser/électrons, b) après la première zone dispersive, c) après la deuxième interaction laser/électrons, d) après la seconde zone dispersive. À la fin du processus, la densité de charge du paquet d'électrons est modulée à une fréquence multiple de la fréquence des lasers externes (ici l'harmonique 12).

L'attrait de cette méthode réside dans le fait que les structures dans la densité de charge peuvent être très courtes. En effet, la modulation apparaît à des harmoniques de la fréquence laser, et "l'amplitude" des micro-structures diminue en $n^{-1/3}$ (n le numéro d'harmonique) [7,10]. En théorie, cela permet d'atteindre des numéros d'harmoniques de l'ordre de la centaine (à comparer aux méthodes jusque là existantes, permettant d'atteindre des numéros d'harmonique de l'ordre de la dizaine). Une fois créées, ces micro-structures peuvent être utilisées pour démarrer la dynamique d'amplification des lasers à électrons libres et obtenir un rayonnement totalement cohérent à la longueur d'onde des micro-structures. Nous montrons aussi qu'il est possible d'appliquer ce processus aux anneaux de stockage, et la réalisation expérimentale de ce schéma permettrait d'obtenir un rayonnement femtoseconde cohérent dans le VUV et X (section 2). Ce processus d'EEHG a été démontré expérimentalement sur deux lasers à électrons

libres (aux USA [11] et en Chine [12]). Néanmoins les numéros d'harmonique pour l'instant obtenus restent faibles (< 10) par rapport au potentiel de cette méthode. Tester ce schéma à des harmoniques élevées et produire un rayonnement laser X est un des objectifs principaux du projet de Laser à Électron Libres français LUNEX5 (section 3).

2 Rayonnement cohérent femtoseconde sur anneau de stockage par processus d'Echo

Le rayonnement sur anneaux de stockage est généralement émis sous forme d'impulsions d'une durée relativement courte (30 ps RMS typiquement, liée à la longueur du paquet). Néanmoins, il y a une forte demande des utilisateurs de rayonnement synchrotron pour produire un rayonnement encore plus court, de l'ordre de la dizaine ou centaine de femtosecondes. Il existe une technique, appelée *slicing*, utilisée pour ne prélever qu'une partie du rayonnement des électrons grâce à une interaction laser/électrons [13,14]. La durée des impulsions avec cette technique est de l'ordre de la durée des impulsions lasers, c'est à dire typiquement de 100 fs. Cependant avec cette technique, diminuer la longueur des impulsions se fait au détriment du flux de photons, puisque seulement une faible partie du rayonnement des électrons est utilisée. Appliquer le principe d'écho sur anneau permet d'obtenir un rayonnement femtoseconde, avec en théorie un flux de photons beaucoup plus important [8]. La composition du rayonnement synchrotron avec le processus d'écho est illustré Fig. 2. Habituellement, le rayonnement synchrotron est incohérent longitudinalement puisqu'il n'y a pas de relation de phase entre les électrons. Créer des micro-structures dans le profil longitudinal du paquet permet aux électrons d'émettre un rayonnement cohérent (en phase) à la longueur d'onde des micro-structures. Comme les micro-structures existent le long de l'intervalle de recouvrement des deux impulsions lasers, l'impulsion cohérente a une durée de l'ordre de la durée des impulsions lasers, typiquement 100 fs. Si l'amplitude de la modulation des micro-structures est suffisamment importante, la puissance du rayonnement cohérent est supérieure de plusieurs ordres de grandeurs par rapport à la puissance du rayonnement incohérent. Le signal utilisable est donc l'impulsion cohérente femtoseconde et l'impulsion incohérente picoseconde est considérée comme du bruit.

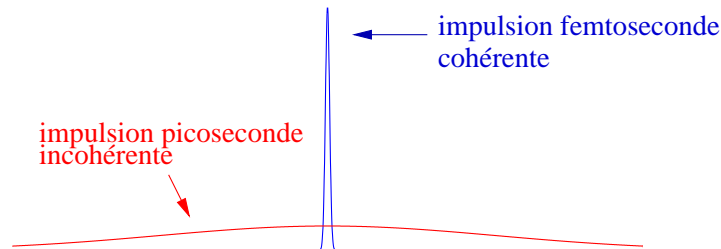


Figure 2. Représentation schématique du rayonnement synchrotron d'un paquet d'électrons dont une zone de sa densité de charge est micro-structurée.

Nous avons appliquée cette idée au cas concret du synchrotron SOLEIL (Fig. 3) [8]. Les lasers externes considérés dans l'étude sont des lasers Saphir :Titane (800 nm). En simulant la dynamique des électrons dans l'anneau de stockage avec un code de macro-particules et en ajustant finement les champs des éléments magnétiques de l'anneau, nous pouvons obtenir une modulation significative de la densité de charge des paquets d'électrons jusqu'à l'harmonique 150, correspondant à une longueur d'onde proche de 5 nm.

La puissance du rayonnement cohérent émis a été estimée à l'harmonique 30 (i.e. à 26 nm) avec une expression analytique et avec le code numérique GENESIS [15]. Avec des paramètres réalistes de SOLEIL, la puissance crête du rayonnement cohérent est proche de 100 kW, soit un million de fois supérieure par rapport à celle obtenue avec la technique de *slicing*. La durée de l'impulsion cohérente est de 100 fs FWHM. L'énergie par impulsion est proche 10 nJ. Le rapport signal sur bruit, c'est à dire le ratio entre

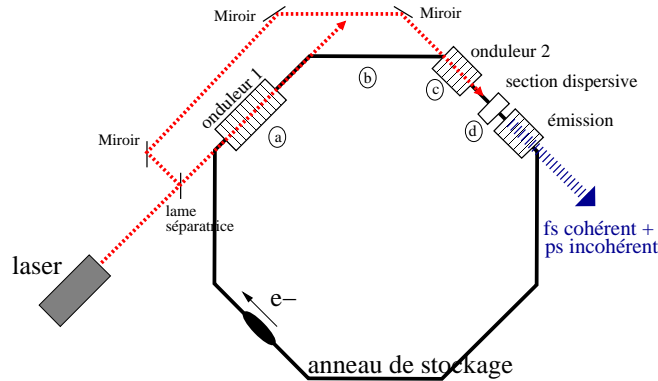


Figure 3. Schéma de l'application du processus d'écho sur anneau de stockage. Un paquet d'électrons circulant à une vitesse relativiste dans un anneau de stockage est soumis à une première interaction avec un laser externe dans un ondulateur (a). Ce paquet d'électrons traverse ensuite une section de l'anneau de stockage dispersive (b). Ensuite, le paquet d'électrons est re-soumis à une interaction avec une seconde impulsion laser externe (c), puis passe dans une zone de faible dispersion (d), faisant apparaître les micro-structures dans le profil longitudinal du paquet d'électrons. Lorsque ce paquet rayonne dans un ondulateur accordé à la longueur d'onde des micro-structures, une partie du rayonnement est cohérent.

l'énergie de l'impulsion cohérente femtoseconde et l'énergie de l'impulsion picoseconde incohérente est proche de 100.

3 LUNEX5 : projet français de laser à électrons libres

L'un des objectifs du projet de laser à électrons libres LUNEX5 est de produire un rayonnement cohérent femtoseconde en utilisant le processus d'écho [9]. Le synoptique de LUNEX5 est représenté Fig 4. Pour le processus d'écho, un paquet d'électrons est accéléré jusqu'à une énergie de 400 MeV, puis il est soumis à deux interactions avec des impulsions laser (à 266 nm, la troisième harmonique de 800 nm) et traverse deux zones dispersives (créée par des dipôles). Une fois les micro-structures créées, le paquet d'électrons rayonne dans un ondulateur accordé à la longueur d'onde des micro-structures.

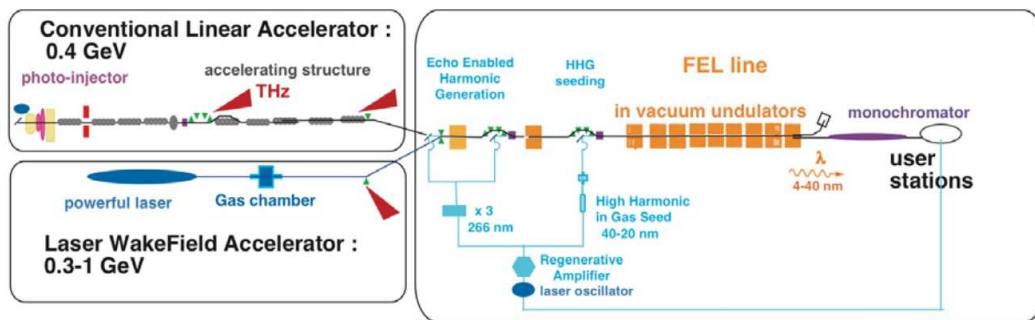


Figure 4. Synoptique du projet LUNEX5. Ce projet comporte deux types d'accélération, une accélération conventionnelle (par cavité radio-fréquence) et une accélération par plasma (*Laser WakeField Accelerator*). Pour créer les micro-structures par processus d'écho, le paquet d'électrons est soumis à deux interactions avec une impulsion laser externe (à 266 nm) et à deux zones dispersives (formées par des dipôles). Le processus d'amplification des micro-structures a ensuite lieu dans un long ondulateur, accordé à la longueur d'onde des micro-structures.

Les performances ont été obtenues avec le code GENESIS [15], simulant la dynamique des électrons, le rayonnement qu'ils émettent et l'interaction entre le paquet et son rayonnement. Les caractéristiques

du rayonnement émis à 12 nm (harmonique 22 du 266 nm) sont présentées en figure 5. La durée de l'impulsion est de 7 fs FWHM, sa puissance crête de 30 MW. L'énergie par impulsion est de 0.2 μJ , correspondant à $1.3 \cdot 10^{10}$ photons par impulsion. La largeur spectrale relative est de $8 \cdot 10^{-4}$. La largeur transverse RMS est de 60 μm et la divergence du faisceau de 50 μrad .

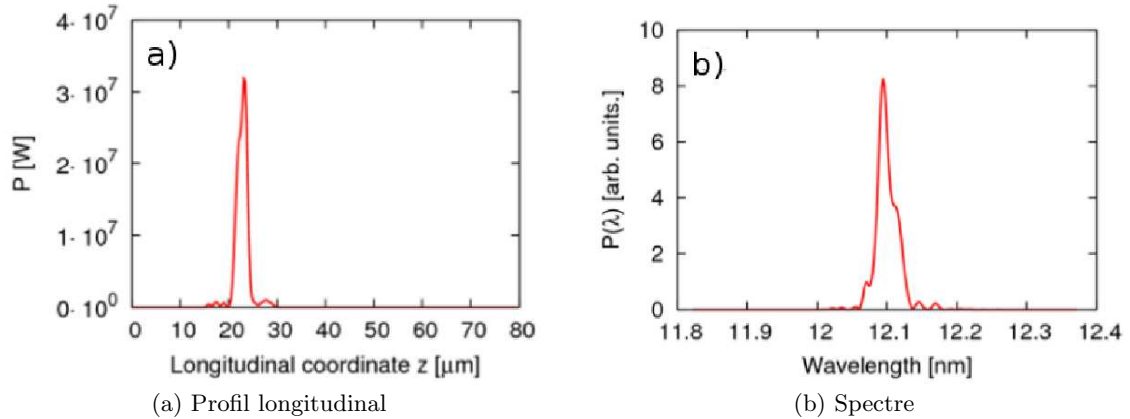


Figure 5. Performance à 12 nm dans la configuration d'écho. Impulsions laser externe : 30 fs de largeur FWHM, 15 MW et 88 MW de puissance crête pour la première et deuxième impulsion.

4 Conclusion

Le processus d'écho peut être obtenu dans différents types de milieu (gaz, liquide, plasma). Dans les paquets d'électrons relativistes, utilisés pour produire un rayonnement synchrotron, un processus d'écho peut être obtenu en manipulant les électrons avec des lasers externes et des zones dispersives. Le potentiel de ce schéma est très attractif puisque sur anneau de stockage, son application permettrait d'obtenir des impulsions femtoseconde jusque dans le domaine des rayons X-mou. Sur laser à électrons libres simple passage, ce processus doit permettre de produire des impulsions femtosecondes totalement cohérentes avec une puissance crête élevée (MW, GW) dans le domaine des rayons X-mou. Néanmoins, la démonstration expérimentale à courtes longueurs d'onde n'est toujours pas faite, et un des objectifs du projet français LUNEX5 est de répondre à cette problématique.

Références

1. R. W. GOULD, Plasma wave echo, *Physical Review Letters*, **19**, 219 (1967)
2. J.H. MALMBERG, C.B. WHARTON, R.W. GOULD & T.M. O'NEIL, Observation of plasma wave echoes, *Physics of Fluids*, **11**, 1147 (1968)
3. J. VANNESTE, P.J. MORRISON & T. WARN, Strong echo effect and nonlinear transient growth in shear flows, *Physics of Fluids*, **10**, 1398 (1998)
4. T. MOSSBERG, R. KACHRU, E. WITHTAKER & S. R. HARTMANN, Temporally recurrent spatial ordering of atomic population in gases : Grating echos, *Physical Review Letters*, **43**, 851 (1979)
5. D.V. STREKALOV, A. TURLAPOV, A. KUMARAKRISHAN & T. SLEATOR, Periodic structures generated in a cloud of cold atoms, *Physical Review A*, **66**, 023601 (2002)
6. E. OTT, J. H. PLATING, T. M. ANTONSEN & M. GIRVAN, Echo phenomena in large systems of coupled oscillators, *Chaos*, **18**, 037115 (2008)
7. G. STUPAKOV, Using the beam-echo effect for generation of short-wavelength radiation, *Physical Review Letters* **102**, 074801 (2009)
8. C. EVAIN, M. E. COUPRIE, A. NADJI, A. LOULERGUE, J. M. FILHOL & A. A. ZHOLENTS, Soft X-ray femtosecond coherent undulator radiation in a storage ring, *New Journal of Physics*, **14**, 023003 (2012)
9. LUNEX5, Laser à électrons libres Utilisant un accélérateur Nouveau pour l'Exploitation de rayonnement X de 5^{ème} génération, *Conceptual Design Report*, SOLEIL (2011)
10. D. XIANG & G. STUPAKOV, Enhanced tunable narrow-band THz emission from laser-modulated electron beams, *Physical Review Special Topics — Accelerators and Beams*, **12**, 080701 (2009)
11. D. XIANG, E. COLBY, M. DUNNING, S. GILEVICH, C. HAST, K. JOBE, D. MCCORMICK, J. NELSON, T. O. RAUBENHEIMER, K. SOONG, G. STUPAKOV, Z. SZALATA, D. WALZ, S. WEATHERSBY, M. WOODLEY & P.-L. PERNET, Demonstration of the echo-enabled harmonic generation technique for short-wavelength seeded free electron lasers, *Physical Review Letters*, **105**, 114801 (2010)
12. Z. T. ZHAO, Progress in SDUV-FEL and Development of X-Ray FELs in Shanghai, *Free Electron Laser Conference (FEL'10)*, p. 15 (2010)
13. A. A. ZHOLENTS & M. S. ZOLOTOREV, Femtosecond X-ray pulses of synchrotron radiation, *Physical Review Letters*, **76**, 912-915 (1996)
14. R. W. SCHOENLEIN, S. CHATTOPADHYAY, H. H. W. CHONG, T. E. GLOVER, P. A. HEIMANN, C. V. SHANK, A. A. ZHOLENTS, & M. S. ZOLOTOREV, Generation of femtosecond pulses of synchrotron radiation, *Science*, **287**, 2237-2240 (2000)
15. S. REICHE, GENESIS 1.3 : a fully 3D time-dependent FEL simulation code, *Nuclear Instruments and Methods in Physics A*, **429**, 243-248 (1999)

Extensive clustering in populations of degrade-and-fire oscillators

Bastien Fernandez¹ & Lev Tsimring²

¹ Centre de Physique Théorique, UMR 7332 CNRS - Aix-Marseille Université, Campus de Luminy, 13288 Marseille CEDEX 9

² BioCircuits Institute, University of California, San Diego, La Jolla, CA, 92093-0328
fernandez@cpt.univ-mrs.fr

Résumé. Dans cet article, nous présentons des résultats analytiques rigoureux pour un modèle d'oscillateurs couplés inspiré d'expériences récentes sur des colonies de circuits géniques en interaction. Tout en ayant une phénoménologie propre, le modèle partage certaines caractéristiques des modèles classiques d'oscillateurs couplés, tels qu'employés en Neurosciences. Dans un article précédent, nous avons prouvé l'existence d'une transition nette avec le paramètre de couplage, entre un régime où toutes les distributions d'agrégats peuvent être atteintes dans le temps, à une phase où seules les distributions comportant un groupe de taille extensive, proportionnelle à la taille de la population, persistent. Cependant, le nombre maximal d'agrégats asymptotiques reste extensif dans tous les cas. Or les simulations numériques révèlent que dans le régime fortement couplé, les trajectoires issues de conditions initiales aléatoires convergent typiquement vers des distributions à faible nombre d'agrégats. Ici, nous présentons une série de résultats sur ces trajectoires, notamment une probabilité positive d'obtenir un nombre d'agrégats intensif à la limite thermodynamique, pourvu que le couplage soit suffisamment fort.

Abstract. In this paper, we present mathematical results on a piecewise affine model of coupled oscillators inspired by recent experiments on synchronization in colonies of bacteria-embedded genetic circuits. The model phenomenology is similar to that of systems of pulse-coupled oscillators with global inhibitory interaction. In [5], we proved the existence of a phase transition with the coupling strength, from a regime of arbitrary asymptotic cluster sizes, to a strongly clustered regime where every asymptotic distribution contains an extensive cluster. We also analytically computed the maximal number K_{\max} of asymptotic clusters and showed that, while it decreases in the strong coupling regime, this number stays extensive for every coupling parameter. Here, we report on manifestations of this phase transition in the dynamics of uniformly drawn random initial conditions. The most significant feature is that, when the coupling strength is sufficiently large, with positive probability, the number of clusters remains intensive in the thermodynamic limit.

1 Introduction

Understanding changes in behavior of interacting oscillatory systems as their parameters vary is pivotal for the comprehension of population dynamics in Biology and Ecology. An archetypical example is the collective synchronization that progressively takes place in the (heterogeneous) Kuramoto model as the coupling strength increases beyond a positive threshold [1,10]. This mechanism has been repeatedly invoked to elucidate observed behaviors in a variety of concrete systems, including the flashing of fireflies populations and the functioning of pacemaker cell networks in the heart and in the brain [8,11].

Beside the Kuramoto model, proofs of synchrony (at any coupling strength), have been given for assemblies of pulse-coupled oscillators with excitatory couplings [2,7], not only in the case of homogeneous systems where all individual characteristics are identical, but also for certain heterogeneous models with variable individual frequency, threshold and/or coupling parameters [9]. For inhibitory couplings, the phenomenology is richer and a multi-stable clustering is commonly observed [4]. However, the analysis is more involved in this case and proofs are scarce, especially when the population size N exceeds 2 units.

Recently, we introduced a discontinuous piecewise affine model of coupled oscillators with repressive interactions [5] inspired by experiments on synchronization in colonies of bacteria-embedded genetic circuits [3]. This simple model mimics the degrade-and-fire (DF) behaviors generated by the associated

nonlinear delay-differential equations [6]. Up to a change of repressor concentration $x \mapsto 1 - x$, it is similar to the well-known integrate-and-fire (IF) model in Neuroscience. Its oscillations are of sawtooth type with a slow degradation phase followed by a fast production phase (firing) and resetting to a normalized value. Assuming no delay for a simpler analysis, the main difference with IF models is that firing is triggered by a repressor field (that involves the entire population state), rather than only by the local concentration.

The model (detailed at the beginning of section 2 below) exhibits a similar phenomenology as in systems of pulse-coupled oscillators with inhibitory interaction (excepted that for $N = 2$, it has a unique globally stable periodic trajectory with positive phase shift) and is amenable to rigorous analytical study for populations of any size $N \in \mathbb{N}$. In [5], we proved the existence of critical coupling strength ϵ_c up to which all cluster distributions can be reached asymptotically. Beyond that threshold, another regime takes place where only distributions containing at least one group of extensive size $\sim \rho N$ perdure. Moreover, we analytically computed the maximal number K_{\max} of asymptotic groups, a number that turned out to be extensive for every coupling intensity. Despite that extensive maximal number of clusters, numerical simulations of large populations indicate that, starting from totally unclustered initial configurations (such that $x_i \neq x_j$ when $i \neq j$), the number of asymptotic clusters is typically much smaller than K_{\max} when $\epsilon > 2$ (while it appears that $K_{\max} = N$ when $\epsilon < 2$), see Figure 1.

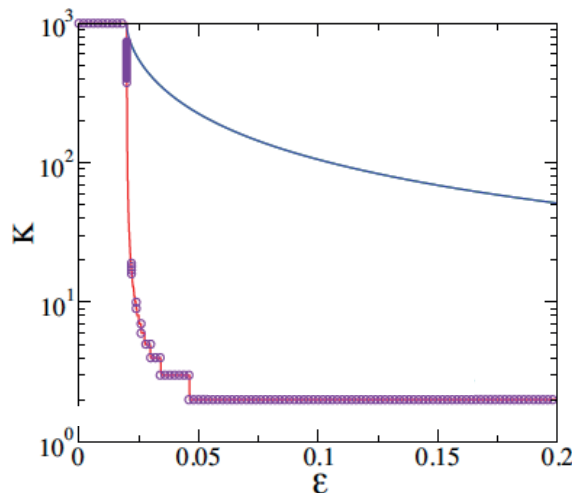


Figure 1. Number of clusters in the asymptotic regime for 1000 coupled oscillators with $\eta = 0.01$ and 1000 different random initial conditions for each $\epsilon\eta$. The solid blue line represents the maximal number K_{\max} analytically computed in ref. [5]. It illustrates that $K_{\max} = N$ for $\epsilon\eta < 2\eta$ and K_{\max} decreases beyond this threshold. The solid red line represents the number of clusters obtained for totally unclustered initial conditions. Clearly, this number is much smaller than K_{\max} when $\epsilon\eta$ increases beyond 2η .

This paper presents mathematical results that confirm these evidences. We address the dynamics of uniformly drawn random initial conditions across the coupling range. In brief terms, our results show that, as ϵ crosses 2, immediate extensive clustering takes place almost surely in the thermodynamic limit, a drastic change from a regime where the first firing(s) typically occurred without clustering. Furthermore, when the coupling is increased further, the clusters formed during the first firing become so large that the total number of clusters becomes intensive with, again, positive probability in the limit of large populations.

2 Dynamics of degrade-and-fire oscillators

The model assumes that the time-dependent repressor protein concentration $x_i(t) \in [0, 1]$ of the i th DF oscillator, $i \in \{1, \dots, N\}$, linearly degrades with unit rate in time, *i.e.* $\dot{x}_i = -1$, or remains constant

if it has reached 0. When the locally averaged concentration $\chi_i(t)$ defined by

$$\chi_i(t) = (1 - \epsilon\eta)x_i(t) + \frac{\epsilon\eta}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t),$$

(where $0 < \epsilon < 1/\eta$ is the **coupling strength parameter**) reaches the (small) threshold $\eta > 0$, the i th oscillator fires, and its concentration is reset to 1, i.e. $x_i(t+) = 1$.

According to these evolution rules, in every trajectory $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$, all oscillators must fire indefinitely for any initial configuration $(x_i(0) = x_i$ for $i = 1, \dots, N$) such that $\chi_i(0) > \eta$ for $i = 1, \dots, N$, all concentrations decay towards 0 with time (those that have reached 0 remain at zero) and so do all $\chi_i(t)$. Thus the oscillator with the lowest $x_i(t)$ (possibly, more than one if several oscillators have identical concentrations $x_i(t)$) eventually fires when the corresponding $\chi_i(t)$ reaches η . After that, the oscillator j with new lowest x_j has to fire when its $\chi_j(t)$ reaches η , and so on. It is also clear that if any two oscillators in a population are in sync at certain time t_* , i.e. $x_i(t_*) = x_j(t_*)$, they will remain in sync for all $t > t_*$. What is not obvious however, is under which conditions oscillators that are initially out of sync will synchronize in the course of the dynamics, and what the number of asymptotic clusters is.

To answer these questions, we need some technical considerations. By grouping oscillators with identical value of $x_i(t)$ into one cluster, the population configuration can be depicted via

$$\{(n_k, x_k)(t)\}_{k=1}^K$$

where $n_k(t) \in \{1, \dots, N\}$ denotes the size of group k and

$$\sum_{k=1}^K n_k(t) = N \quad (K \leq N \text{ is the total number of groups}),$$

and $x_k(t)$ is the corresponding repressor concentration. In this viewpoint, cluster sizes n_k remain unaffected in time unless two clusters k and k' fire together.

The dynamics can be described by the discrete time map acting on configuration vectors after firings. Notice that any ordering in $\{(n_k, x_k)\}$ is irrelevant here thanks to the permutation symmetry. Accordingly, we choose to consider ordered values of x_k when defining the firing map.

Thus we assume that

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{K-1} < x_K = 1$$

for the initial configuration and we include cyclic permutations of indices in the action of the firing map. For instance, in absence of clustering, the map writes

$$\{(n_k, x_k)(0)\}_{k=1}^K \mapsto \{(n_k, x_k)(t_f+)\}_{k=1}^K$$

where t_f is the firing time and the updated configuration reads

$$(n_k, x_k)(t_f+) = \begin{cases} (n_{k+1}(0), x_{k+1}(0) - t_f) & \text{if } k = 1, \dots, K-1 \\ (n_1, 1) & \text{if } k = K, \end{cases}$$

which is also suitably ordered, i.e. we have

$$0 < x_1(t_f+) < x_2(t_f+) < \dots < x_{K-1}(t_f+) < x_K(t_f+) = 1.$$

Our aim is to analyze the fate of trajectories issued from random, totally unclustered, initial distributions (such that $n_k = 1$ for $k = 1, \dots, N$). In this case, it suffices to specify the initial concentrations x_k (bearing in mind that $x_N = 1$). For simplicity, we assume that the ordered **configuration** $x = \{x_k\}_{k=1}^{N-1}$ (which is identified with $\{(1, x_k)\}_{k=1}^N$) is **randomly chosen with uniform probability distribution** in

$$\mathcal{T}_N := \{x := (x_1, \dots, x_{N-1}) : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < 1 (= x_N)\}.$$

More precisely, there exists a normalizing constant $\alpha_N > 0$ such that the probability measure $\text{Prob}(A) = \alpha_N \text{Leb}_{N-1}(A)$ for every measurable subset $A \subset \mathcal{T}_N$, where Leb_{N-1} is the $(N-1)$ -dimensional Lebesgue measure of A . A simple reasoning shows that α_N must be equal to $(N-1)!$. In other words, we consider the random process defined in \mathcal{T}_N that consists in iterating the firing map for random initial configurations.

With these technical considerations provided, we can describe (no-)clustering properties at successive firings. Given an initial condition in \mathcal{T}_N , let n_ℓ be the size of the ℓ th firing cluster ($\ell \in \mathbb{N}$). Lemma 1 in [5] implies that no clustering occurs (*viz.* $n_\ell = 1$ for all ℓ) for ϵ up to 1.

To some extent, this threshold $\epsilon = 1$ appears to be sharp because [5] also showed that, when $\epsilon > 1$ and N is sufficiently large, there exists an open set of $x \in \mathcal{T}_N$ for which $n_1 > 1$. Notwithstanding this evidence, for the random process here, firing before clustering (*i.e.* $n_1 = 1$) persists almost surely in the thermodynamic limit, while ϵ remains smaller than 2. This is formally claimed in Proposition 1 below. Furthermore, the statistical behavior remarkably changes past $\epsilon = 2$, as extensive clustering emerges, again with probability 1 in the limit of large N . Throughout the paper, \mathbb{P} denotes the probability distribution of a random variable.

Proposition 1 (i) $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n_1 = 1) = 1$ for every $\epsilon < 2$.

(ii) For every $\epsilon > 2$, there exist $\rho_1 \in (0, 1)$ such that $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n_1 \geq \lceil \rho_1 N \rceil) = 1$ where $\lceil \cdot \rceil$ stands for the ceiling function. There also exists $\rho_2 \in (0, 1)$ such that $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n_2 \geq \lceil \rho_2 N \rceil) = 1$.

Of note, no statement here depends on the threshold parameter η . We only need to choose η small enough in order to ensure that the inequality $\epsilon > 1/\eta$ holds in every statement; for instance $\eta \leq 1/20$ suffices.

For $\epsilon > 2$, the maximum number of clusters K_{\max} is realized by an (asymptotically) stable configuration with a single group of extensive size $N - K_{\max} + 1$ (and all other groups having a single individual, $n_k = 1$) [5]. Proposition 1 implies that the associated basin of attraction in \mathcal{T}_N has vanishing measure in the thermodynamic limit.

The critical value $\epsilon = 2$ is the maximum coupling strength up to which the firing map has an asymptotically stable fixed point $x_{(N)} \in \mathcal{T}_N$ for all $N > 2$. When $\epsilon < 2$, $x_{(N)}$ attracts the orbit of every configuration in \mathcal{T}_N that never clusters (*i.e.* such that $K_\ell = N$ for all ℓ) and these vectors constitute a set of positive measure Prob for every N [5]. We do not know if this measure remains positive in the thermodynamics limit. Nonetheless, any number of firings without clustering can be realized with positive probability, namely

Proposition 2 For every $\epsilon < 2$ and every $L \in \mathbb{N}$, there exists $p_L \in (0, 1)$ such that

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n_\ell = 1 \text{ for } \ell = 1, \dots, L) > p_L.$$

For $\epsilon > 2$, extensive clustering at firings does not only apply to the first two firings. It extends to any firing as the next statement claims and completes statement (ii) of Proposition 1.

Proposition 3 For every $\epsilon > 2$ and $L \in \mathbb{N}$, there exists $\rho_L > 0$ such that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left\{ \text{either } \exists L' \leq L : \sum_{\ell=1}^{L'} n_\ell = N \text{ or } n_L \geq \lceil \rho_L N \rceil \right\} = 1.$$

In other terms, with large probability, extensive clustering occurs for an arbitrary number of successive firings unless an intensive number of cluster results. This suggests that the asymptotic number of clusters should typically be much smaller than K_{\max} , as is observed in the numerics.

Finally, for sufficiently large coupling, one can make sure that the first alternative in Proposition 3 occurs with positive probability, that is positive probability of an intensive asymptotic number of clusters.

Proposition 4 There exists $\epsilon_c > 2$, such that for every $\epsilon > \epsilon_c$ we have

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n_1 + n_2 = N) > 0.$$

We do not know if intensive asymptotic number of clusters happens almost surely in \mathcal{T}_N and/or for every $\epsilon > 2$. In this regime, trajectories from initial configurations in a sufficiently small neighborhood of the equi-distributed configuration $x_k = k/N$ do asymptotically lead to intensive number of clusters. However, this set has vanishing measure in the thermodynamic limit.

Références

1. J. A. ACEBRON, L. L. BONILLA, C. J. PEREZ-VICENTE, F. RITORT & R. SPIGLER, The Kuramoto model : A simple paradigm for synchronization phenomena, *Review of Modern Physics*, **77**, 137–185 (2005)
2. S. BOTTANI, Pulse-coupled relaxation oscillators : From biological synchronization to self-organized criticality, *Physical Review Letters*, **74**, 4189 (1995)
3. T. DANINO, O. MONDRAGON-PALOMINO, L. S. TSIMRING & J. HASTY, A synchronized quorum of genetic clocks, *Nature* **463**, 326–330 (2010)
4. U. ERNST, K. PAWELZIK & T. GEISEL, Synchronization induced by temporal delays in pulse-coupled oscillators, *Physical Review Letters*, **74**, 1570 (1995)
5. B. FERNANDEZ AND L. S. TSIMRING, Corepressive interaction and clustering of degrade-and-fire oscillators, *Physical Review E*, **84**, 051916 (2011)
6. W. MATHER, M. R. BENNET, J. HASTY & L. S. TSIMRING, Delay-induced degrade-and-fire oscillations in small genetic circuits, *Physical Review Letters*, **102**, 068105 (2009)
7. R. E. MIROLLO & S. H. STROGATZ, Synchronization of pulse-coupled biological oscillators, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **50**, 1645–1662 (1990)
8. C. S. PESKIN, *Mathematical aspects of heart physiology*, Courant Institute of Mathematical Science Publication, New York (1975)
9. W. SENN & R. URBANCZIK, Similar nonleaky integrate-and-fire neurons with instantaneous couplings always synchronize, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **61**, 1143–1155 (2000)
10. S. H. STROGATZ, From Kuramoto to Crawford : exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, *Physica D*, **143**, 1–20 (2000)
11. P. A. TASS, *Phase resetting in medicine and biology*, Springer, Berlin (1999)

Dynamique cardio-respiratoire de nourrissons vulnérables

Emeline Fresnel¹, Emad Yacoub¹, Ubiratan Freitas², Valérie Messenger¹, Eric Mallet³
& Christophe Letellier¹

¹ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex, France

² ADIR Association, Hôpital de Bois-Guillaume, 76031 Rouen cedex, France

³ Département de Pédiatrie Médicale, CIC INSERM 204, CHU Charles Nicolle, 76031 Rouen, France

emeline.fresnel@coria.fr

Résumé. Des outils issus de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires sont utilisés dans l'analyse d'électrocardiogrammes d'adultes sains et pathologiques, dans le but de vérifier leur pouvoir de discrimination sur les différentes dynamiques cardiaques. Les indicateurs validés, à savoir l'entropie de Shannon et un indice d'asymétrie, sont ensuite appliqués à l'étude d'électrocardiogrammes de nourrissons vulnérables.

Abstract. Tools borrowed to the nonlinear dynamical system theory are used to analyze both healthy and pathological adult electrocardiograms, in order to check their discriminant power of cardiac dynamics. Validated indicators, which are Shannon entropy and an asymmetry coefficient, are then employed to study the electrocardiograms of fourteen vulnerable infants.

1 Introduction

L'analyse traditionnelle de la variabilité cardiaque consiste en une approche statistique des électrocardiogrammes ou tachogrammes, à travers des indicateurs tels que la moyenne, la déviation standard ou encore le paramètre pNN_{50} quantifiant la variabilité haute fréquence. Malgré leur faible temps de calcul, ces quantités ne constituent pas des standards largement acceptés par les cardiologues, ce qui peut s'expliquer par le fait qu'elles ne prennent pas en compte la façon dont les événements sont distribués au cours des enregistrements. Par ailleurs, l'évaluation de la variabilité cardiaque à partir de ces critères n'est actuellement effectuée que sur des populations adultes, alors que les mécanismes cardio-régulateurs diffèrent fortement entre adultes et nouveaux-nés [1], notamment en raison d'un manque de maturation.

Pour cela, nous proposons une étude de la variabilité cardiaque à l'aide de concepts issus de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires ; nous montrerons que ceux-ci permettent de mieux caractériser les dynamiques cardiaques et fournissent, de manière non invasive, une bonne valeur pronostique [2]. Partant d'électrocardiogrammes, les intervalles RR sont extraits. Afin de nous affranchir de la dérive lente due à la régulation sinusale, nous préférons utiliser les ΔRR , définis comme les variations entre intervalles RR successifs [3]. Nous présentons ainsi les résultats d'une analyse dynamique d'enregistrements Holters de 15 patients proposés par le site PHYSIONET à l'occasion d'un challenge soumis par Leon Glass [4] et qui ont été utilisés afin de vérifier le pouvoir discriminant de notre méthodologie. Ensuite, 14 nourrissons ayant été hospitalisés pour des alertes cardiorespiratoires ont été monitorés en routine au Centre Hospitalier Universitaire de Rouen. Nous montrons que certains d'entre eux présentent des anomalies cardiaques, comme le révèle notre approche.

2 Protocole « PHYSIONET »

2.1 Patients et méthodes

Nous effectuons une première analyse avec 15 électrocardiogrammes de patients séparés en trois groupes : 5 sujets sains (séries n_1 à n_5), 5 patients atteints d'insuffisance cardiaque congestive (séries c_1 à c_5), et 5 patients atteints de fibrillation auriculaire (séries a_1 à a_5). Chaque série dure environ 24

heures et contient approximativement 100 000 intervalles RR. Les dynamiques cardiaques sont étudiées en construisant les applications de premier retour sur la variable $\Delta RR_n = RR_{n+1} - RR_n$, ce qui permet de s'affranchir de la dérive à long terme de l'activité du nœud sinusal dont la variabilité est représentée par la portion centrale des applications. Une dynamique symbolique a ensuite été introduite en divisant les ΔRR en trois domaines selon la partition

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \Delta RR_n \leq -0.17 \text{ s} \\ 1 & \text{si } -0.17 < \Delta RR_n < 0.17 \text{ s} \\ 2 & \Delta RR_n \geq +0.17 \text{ s}, \end{cases} \quad (1)$$

où le symbole 1 représente les petites variations dues au rythme sinusal, le symbole 0 les réductions de plus de 170 ms de l'intervalle RR et le symbole 2 les augmentations de plus de 170 ms de l'intervalle RR. Les symboles 0 et 2 sont typiquement associés à des arythmies. L'avantage d'une telle dynamique symbolique est qu'elle transforme une série de nombres réels en une série de symboles — ici des entiers — plus facile à traiter. Par exemple, une extrasystole isolée se traduit par la séquence « ... 1 1 0 2 0 1 1 ... », et ce, quel que soit le délai τ avec lequel le premier battement est prématuré. L'objectif est ensuite d'étudier la probabilité de réalisation des différentes séquences possibles. Pour cela, nous retenons les séquences de longueur $N_q = 6$ symboles dont le choix dépend du nombre de symboles ($N_p = 3$), ce qui représente $N_p^{N_q} = 3^6 = 729$ séquences possibles. De manière à caractériser la complexité de la dynamique cardiaque, nous calculons alors une entropie de Shannon, qui mesure le taux de production d'information d'un processus dynamique [5]. Typiquement, l'entropie d'un régime de période 1 est nulle puisqu'aucune information n'est produite d'un évènement à l'autre. À l'opposé, celle correspondant à l'équipartition de tous les états possibles du système est maximum. L'entropie de Shannon est définie par

$$\tilde{S}_h = \sum_{n=0}^{N_p^{N_q}-1} -P_n \log P_n, \quad (2)$$

où P_n est la probabilité de réalisation du $n^{\text{ème}}$ état possible du système, soit ici, la $n^{\text{ème}}$ séquence symbolique dont l'indice correspond à l'entier de la séquence lue en base 3. Il est ensuite possible de normaliser l'entropie par sa valeur maximale correspondant à une équipartition des séquences, soit $P_n = \frac{1}{N_p^{N_q}}$ ($\forall n$); ceci conduit à $S_{max} = 6.59$ pour $N_p = 3$ et $N_q = 6$. Une dynamique cardiaque essentiellement gouvernée par le nœud sinusal sera associée à une grande prépondérance des petites variations (symboles « 1 ») et l'entropie sera voisine de 0. Une dynamique cardiaque associée à des arythmies plutôt isolées correspondrait à une entropie comprise entre 0.20 et 0.30. Une augmentation de cette entropie se traduit par un taux significatif d'arythmies, pouvant survenir en bouffées.

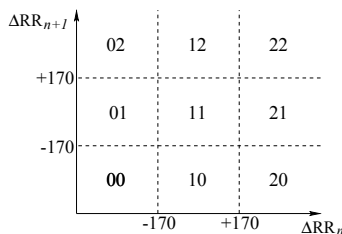


Figure 1. Pavage de l'application de premier retour en 9 secteurs conformément à la partition (1) utilisée pour définir la dynamique symbolique.

La dynamique symbolique définie par la partition (1) permet un pavage de l'application de premier retour en 9 secteurs (Fig. 1), chacun caractérisé par une probabilité de visite $\eta_{i,j}$. Le domaine central, désigné par l'indice 11, correspond à l'activité cardiaque pilotée par le nœud sinusal. Les domaines 00,

10, 20 et 21 correspondent à des décroissances rapides des intervalles RR (tachycardie). À l'inverse, les domaines 01, 02, 12 et 22 correspondent à des croissances rapides des intervalles RR (bradycardie). Nous introduisons alors un indice d'asymétrie tel que

$$\alpha = \frac{1}{4} \left[\frac{\eta_{00}}{\eta_{22}} + \frac{\eta_{01}}{\eta_{21}} + \frac{\eta_{02}}{\eta_{20}} + \frac{\eta_{10}}{\eta_{12}} \right].$$

Un indice α autour de 1 représente une dynamique cardiaque pour laquelle la tendance à la décélération est équilibrée par une tendance à l'accélération. Un indice $\alpha < 1$ révèle une tendance à la décélération rapide alors qu'un indice $\alpha > 1$ traduit une tendance à l'accélération rapide.

Des extrasystoles isolées se placent sur l'application de premier retour construite sur les ΔRR le long de segments à l'orientation définie par les angles respectifs $\frac{2\pi}{3}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Lorsque des extrasystoles successives surviennent, on observe deux segments supplémentaires orientés selon les angles $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ (Fig. 2). Lorsqu'un épisode de bradycardie survient avec un retour à la normale sur un seul battement, caractérisé par la séquence « ... 1 1 2 0 1 1 ... », les points de l'application s'inscrivent successivement sur des segments d'orientation $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ et π et l'application prend la forme d'un triangle (Fig. 3).

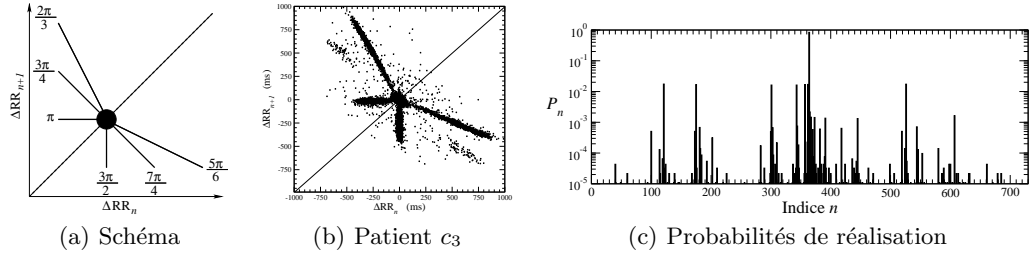


Figure 2. Application de premier retour lorsque des bouffées d'extrasystoles se développent. Schéma (a) et cas du patient c_3 (b). Les probabilités de réalisation des 729 séquences possibles sont également représentées (c). $\tilde{S}_h = 0.86$ et $\alpha = 4.52$.

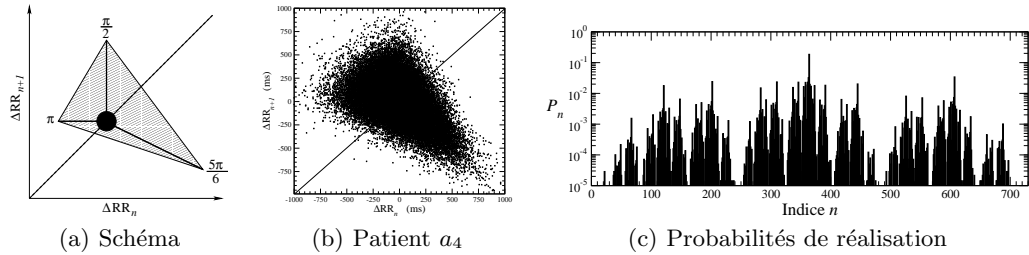


Figure 3. Application de premier retour en présence de bradycardie isolée. Schéma (a) et cas du patient a_4 (b). Les probabilités de réalisation des 729 séquences possibles sont également représentées (c). $\tilde{S}_h = 4.44$ et $\alpha = 0.92$.

À partir de l'entropie de Shannon normalisée S_h et de l'indice d'asymétrie α , il est possible de définir une carte permettant de situer relativement les différentes dynamiques cardiaques. Prenant comme valeurs de référence $S_h = 0.25$ et $\alpha = 1$, nous définissons deux bandes telles que $0.20 < S_h < 0.30$ et $0.90 < \alpha < 1.10$ (Fig. 4). Sur cette carte sont positionnées les applications de premier retour des 15 patients du protocole « PHYSIONET ».

Enfin, l'introduction d'une dynamique simplifiée à deux symboles permet de mettre en avant la variabilité cardiaque d'origine sinusale, selon la partition suivante :

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Delta RR_n| < \tau \\ 1 & \text{si } |\Delta RR_n| \geq \tau, \end{cases} \quad (3)$$

où apparaît un seuil temporel τ que nous faisons varier de 1 à 300 ms par pas de 1 ms. Les probabilités de réalisation des séquences de longueur $N_q = 6$ avec $N_p = 2$ symboles sont observées pour chaque τ , soit $N_p^{N_q} = 2^6 = 64$ séquences possibles. Il est alors possible de tracer l'évolution de l'entropie de Shannon calculée sur les séquences de deux symboles en fonction du seuil temporel, et d'extraire la valeur de τ correspondant à l'entropie maximale rencontrée, nommée T_c (Fig. 5).

2.2 Résultats et interprétation

Les disparités existant entre les trois groupes de sujets du protocole « PHYSIONET » ont été clairement mises en évidence grâce aux deux quantités S_h et α (Tab. 2.2). Il apparaît que l'entropie de Shannon, décrivant le degré de complexité d'un système, est plutôt faible chez les sujets normaux ($\bar{S}_h = 0.22 \pm 0.29$), plus élevée chez les patients atteints d'insuffisance cardiaque congestive ($\bar{S}_h = 0.55 \pm 0.38$), et particulièrement élevée chez les patients atteints de fibrillation auriculaire ($\bar{S}_h = 4.85 \pm 0.61$) dont les applications de premier retour sont très développées. L'indice d'asymétrie α est quant à lui nettement inférieur à 1 chez les sujets sains ($\bar{\alpha} = 0.37 \pm 0.11$), ce qui se traduit par une « récupération » cardiaque, retour à une variabilité de référence (type repos) plus lente que la réponse à une demande suite à un effort, ce qui semble normal du point de vue physiologique. Il est très supérieur à 1 chez les patients atteints d'insuffisance cardiaque congestive ($\bar{\alpha} = 1.92 \pm 1.47$) chez lesquels on retrouve des segments caractéristiques de la présence d'extrasystole, accélérant la fréquence cardiaque. Enfin, les patients atteints de fibrillation auriculaire présentent un indice proche de 1 ($\bar{\alpha} = 0.98 \pm 0.06$), c'est-à-dire que les arythmies sont fréquentes et très variées (accélératrices ou décélératrices) (Fig. 3 (c)).

Table 1. Entropie de Shannon S_h , indice d'asymétrie α , probabilité de séquences « 11111 », et temps caractéristique extrait de la dynamique simplifiée à deux symboles, regroupés selon les trois groupes de patients.

Patients	\bar{S}_h	$\bar{\alpha}$	$\overline{11111}$	\bar{T}_c
$\#n_i$	0.22 ± 0.29	0.37 ± 0.11	97.1 %	20 ms
$\#c_i$	0.55 ± 0.38	1.92 ± 1.47	91.6 %	8 ms
$\#a_i$	4.85 ± 0.61	0.98 ± 0.06	13.4 %	120 ms

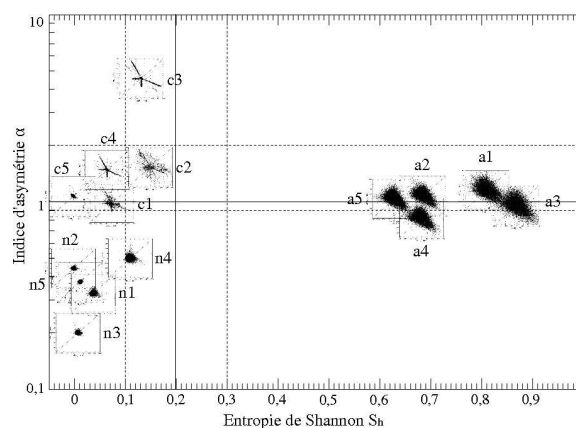


Figure 4. Carte discriminante des dynamiques cardiaques des 15 patients du protocole « PHYSIONET » basée sur l'entropie de Shannon S_h et l'indice d'asymétrie α (une échelle semi-logarithmique est utilisée).

La carte $S_h - \alpha$ permet ainsi de bien discriminer les différentes dynamiques cardiaques, en regroupant les applications de premier retour de structures similaires dans des zones bien définies (Fig. 4). Les

structures en haut à gauche dont les points sont organisés en segments à l'orientation caractéristique sont associées à la présence d'extrasystoles et à de fréquentes accélérations du rythme cardiaque, et les structures triangulaires sur la droite du graphique indiquent une fibrillation auriculaire et une dynamique plus complexe. Les sujets normaux sont quant à eux regroupés dans la portion inférieure gauche de la carte, en raison de la faible valeur à la fois de l'entropie et de l'indice d'asymétrie.

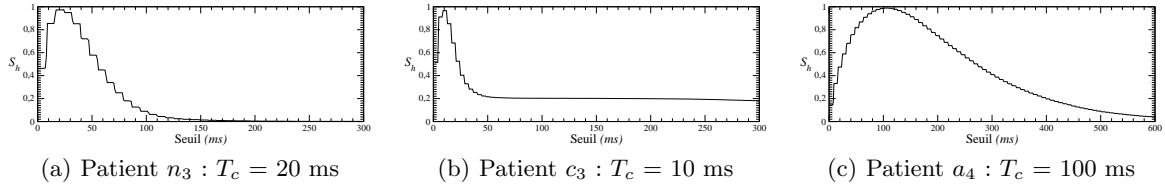


Figure 5. Évolutions de l'entropie de Shannon S_h calculée sur les deux symboles 0 et 1 en fonction du seuil temporel τ pour trois sujets du protocole « PHYSIONET ».

Enfin, les graphiques représentant l'évolution de l'entropie de Shannon en fonction du seuil temporel τ permettent de constater que les arythmies observées chez les deux séries de patients ne suivent pas les mêmes mécanismes (Fig. 5). Le temps caractéristique des sujets atteints d'insuffisance cardiaque congestive est plus faible que celui relevé chez les sujets sains : ces patients présentent une variabilité sinusale réduite, c'est-à-dire peu de points tracés dans la portion centrale de l'application de premier retour et une faible capacité d'adaptation du cœur, associée à de larges fluctuations entre les battements qui engendrent le maintien d'une valeur élevée de l'entropie de Shannon malgré l'augmentation du seuil τ . Le sujet c_5 , qui ne présente pas de segments associés aux extrasystoles, se rapproche ainsi des autres patients c_i dans la mesure où il possède également une variabilité sinusale fortement réduite qui serait indicative d'un risque accru de mort subite [6]. Les sujets atteints de fibrillation auriculaire présentent en revanche un temps caractéristique très élevé donc associé à une tendance bradycarde, ainsi qu'une décroissance de l'entropie de Shannon de manière régulière jusqu'à zéro : ces aspects caractérisent une large variabilité sinusale.

Ainsi, les outils développés précédemment permettent de discriminer finement les différents types de dynamiques et de faire la distinction entre les sujets sains, les sujets présentant des extrasystoles, et les patients atteints de fibrillation auriculaire aux arythmies fréquentes.

3 Dynamique cardiaque du nourrisson à risque

Dans le cadre d'un protocole réalisé sur 14 nourrissons vulnérables hospitalisés pour des alertes cardio-respiratoires au CHU de Rouen, un électrocardiogramme a été enregistré en routine pour chacun des quatorze nourrissons durant une nuit à l'hôpital. Les électrocardiogrammes — enregistrés avec un moniteur PHILIPS MP 70 — ont été transformés en tachogrammes avec le logiciel du site PHYSIONET. La dynamique symbolique est définie par un seuil temporel fixé à 40 ms, légèrement inférieur à ce qui est souvent utilisé : certaines études montrent qu'un seuil inférieur à 50 ms peut parfois conduire à une analyse plus discriminante que l'utilisation du seuil habituel [8]. D'un point de vue général, la fréquence cardiaque ($\bar{f} = 139 \pm 16$ bpm) dépend de l'âge en accord avec ce qui est connu [9], c'est-à-dire qu'elle décroît lorsque l'âge augmente. La variabilité cardiaque est plutôt importante puisque l'entropie de Shannon relative moyenne ($\bar{S}_h = 0.28 \pm 0.15$) est proche de la valeur limite de 0.30, valeur que nous avons choisie comme seuil au-delà duquel la variabilité est considérée comme importante. L'indice d'asymétrie moyen est supérieur à l'unité ($\bar{\alpha} = 1.18 \pm 0.84$).

Parmi les quatorze nourrissons ayant fait l'objet d'une surveillance, au moins cinq ont présenté de forts troubles de l'activité cardiaque. L'entropie de Shannon relative a mis en évidence la présence d'arythmies chez les nourrissons 6, 8 et 14. La répartition des probabilités de réalisation des différentes séquences a ensuite conduit à identifier ces arythmies comme étant de la bradycardie, en accord avec la morphologie des applications de premier retour sur les ΔRR dont la forme est triangulaire, une signature clairement

identifiée comme étant caractéristique de cette pathologie. Par ailleurs, l'indice d'asymétrie α mis en place a permis d'observer que deux nourrissons de l'étude présentent des extrasystoles en quantité non négligeable : les arythmies sont isolées dans le cas du nourrisson 3 et en salves dans le cas du nourrisson 10. Les applications de premier retour correspondantes sont ainsi placées dans des zones clairement spécifiques de la carte $S_h - \alpha$ (Fig. 6).

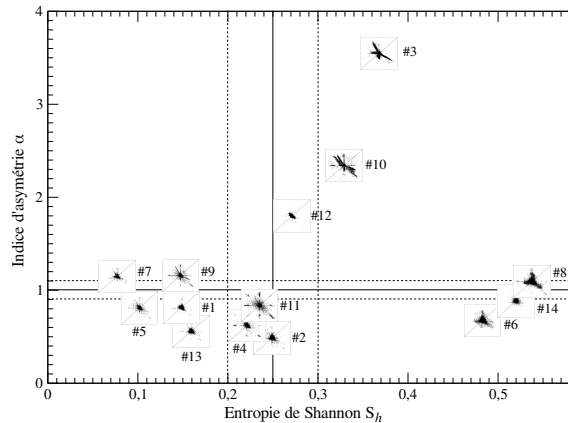


Figure 6. Carte discriminante des dynamiques cardiaques des 14 nourrissons basée sur l'entropie de Shannon S_h et l'indice d'asymétrie α .

4 Conclusion

L'introduction de la dynamique non linéaire permet, dans le contexte de l'étude de la variabilité cardiaque, une meilleure compréhension des phénomènes complexes mis en jeu. L'analyse non linéaire représente ainsi un outil de diagnostic non invasif, et peut également fournir des informations pronostiques sur la survie d'un individu. La mise en place d'une dynamique symbolique sur les ΔRR nous permet de proposer une classification de la variabilité cardiaque. Ceci indique que les grandeurs statistiques sur la globalité de la dynamique cardiaque comme nous les avons développées peuvent être dotées d'un fort pouvoir discriminant pour distinguer des nourrissons pathologiques de nourrissons sains.

Références

1. C. VALLBONA, M. M. DESMOND, A. J. RUDOLPH, L. F. PAP, R. M. HILL *et al.*, Cardiodynamic studies in the newborn. II. Regulation of the heart rate, *Biologica Neonatorum*, **5**, 159-199 (1963)
2. A. VOSS *et al.*, The application of methods of non-linear dynamics for the improved and predictive recognition of patients threatened by sudden cardiac death, *Cardiovascular Research*, **31**, 419-433 (1996)
3. U. S. FREITAS, E. ROULIN, J.-F. MUIR & C. LETELLIER, Identifying chaos from heart rate : the right task ?, *Chaos*, **19**, 028505 (2009)
4. L. GLASS, Introduction to controversial topics in nonlinear science : Is the normal heart rate chaotic ? *Chaos*, **19**, 028501 (2009)
5. C. E. SHANNON, A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423 & 623-656 (1948)
6. P. PONIKOWSKI, S. D. ANKER, T. P. CHUA, R. SZELEMEJ, M. PIEPOLI, S. ADAMOPOULOS *et al.*, Depressed heart rate variability as an independent predictor of death in chronic congestive heart failure secondary to ischemic or idiopathic dilated cardiomyopathy, *American Journal of Cardiology*, **79**, 1645-1650 (1997)
7. E. YACOB, *Suivi cardio-respiratoire des nourrissons à risque*, Thèse de l'Université de Rouen (2011)
8. J. E. MIETUS, C.-K. PENG, I. HENRY, R. L. GOLDSMITH, A. L. GOLDBERGER, The pNN_x files : re-examining a widely used heart rate variability measure, *Heart*, **88**, 378-380 (2002)
9. J. P. FINLEY, S. T. NUGENT, Heart rate variability in infants, children and young adults, *Journal of the Autonomic Nervous System*, **51**, 103-108 (1995)

Numerical simulation of natural convection between two infinite differentially heated vertical plates

Zhenlan Gao^{1,2}, Bérengère Podvin², Anne Sergent^{1,2}, Shihe Xin³, Patrick Le Quéré², & Laurette S. Tuckerman⁴

¹ UPMC Univ Paris 06, 75005 Paris

² LIMSI-CNRS, 91403 Orsay

³ CETHIL, INSA de LYON, 69621 Villeurbanne

⁴ PMMH (ESPCI-CNRS-UPMC-UPD), 75005 Paris

gao@limsi.fr

Résumé. Nous étudions les instabilités de convection naturelle d'une lame d'air ($Pr = 0.71$) comprise entre deux plaques verticales infinies différentiellement chauffées. La température de chaque plaque est constante et uniforme. Nous nous appuyons sur des simulations numériques directes 3D au voisinage du nombre de Rayleigh critique. L'écoulement autour de la première bifurcation est comparé aux prédictions d'une équation de Ginzburg-Landau dérivée analytiquement. Les bifurcations successives et brisures de symétries associées sont analysées et identifiées.

Abstract. We consider the natural convection of air ($Pr = 0.71$) between two infinite vertical differentially heated plates. The temperature on each plate is constant and uniform. We use a 3D direct numerical simulation (DNS) code to determine the instabilities of the flow above the critical Rayleigh number. A Ginzburg-Landau equation is derived analytically for the flow around the first bifurcation and its predictions are compared to DNS results. Subsequent bifurcations and associated symmetry-breaking phenomena are analyzed and identified.

1 Introduction

Instability of natural convection in a vertical fluid layer between two vertical differentially heated plates is of substantial interest for many industrial applications, such as heat exchangers in reactors or insulation of buildings (e.g. double-paned windows). The first experiments were carried out by Elder [1]. Gill and Davey [2] and Bergholz [3] investigated the linear stability of two-dimensional convection between vertical plates. Mizushima and Gotoh [4] used a weakly nonlinear approach to represent the flow. Mizushima and Saito [5] used 2D direct numerical simulation to compute the nonlinear equilibrium states of secondary convection with a Newton-Raphson method. Nagata and Busse [6], Clever and Busse [7] computed the secondary, tertiary and quaternary solutions in the limit of vanishing Prandtl number. In the present paper we consider the three-dimensional flow between two infinite, vertical, differentially heated plates. We use a 3D direct numerical simulation (DNS) code [8] to examine how the flow becomes progressively less organized as the Rayleigh number increases. We derive a Ginzburg-Landau equation to represent the flow around the first bifurcation. We then describe the subsequent bifurcations of the flow and associated symmetry breaking phenomena.

2 Physical problem, equations of motion and numerical configuration

2.1 Physical problem

We consider the air flow between two infinite vertical plates maintained at different temperatures. The configuration is represented in Fig. 1. The distance between the two plates is D , the periodic height and depth of the plates are H and L_y respectively. The temperature difference between the plates is set to be ΔT . The x direction is normal to the plates, and the gravity g is in the $-z$ direction.

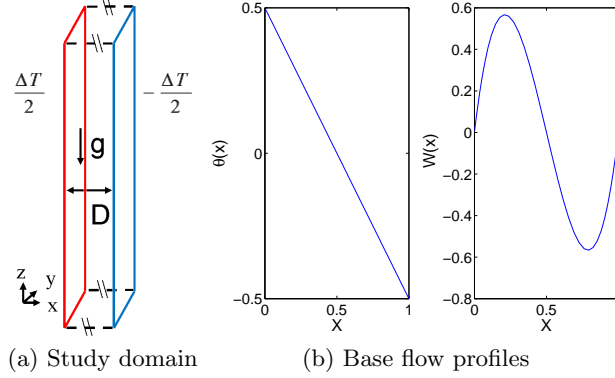


Figure 1. Study domain and base flow profiles for the temperature θ and vertical velocity W .

The relevant fluid properties are the viscosity ν , thermal conductivity κ , and coefficient of the thermal expansion β . Four nondimensional parameters characterize the flow : the Prandtl number $Pr = \nu/\kappa$, two aspect ratios $A_y = L_y/D$ and $A_z = H/D$, and the Rayleigh number based on the gap between the two plates $Ra = \frac{g\beta\Delta TD^3}{\nu\kappa}$. Only the Rayleigh number dependence is considered in the present study. The Prandtl number is fixed and equal to 0.71. The two periodic lengths are set to be $A_y = 1$ and $A_z = 10$.

2.2 Equations of motion

The flow is governed by the Navier-Stokes equations within the Boussinesq approximation. The equations are nondimensionalized with the reference parameters $\frac{\kappa}{D}\sqrt{Ra}$ for the velocity, D for the length, and ΔT for the temperature. t denotes time, $\underline{u} = (U, V, W)$ is the velocity vector, p is the pressure and θ is the reduced temperature.

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \Delta \underline{u} + Pr\theta \hat{z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{\sqrt{Ra}} \Delta \theta \quad (3)$$

with Dirichlet boundary conditions at the plates

$$\underline{u}(0, y, z, t) = \underline{u}(1, y, z, t) = 0, \quad \theta(0, y, z, t) = 0.5, \quad \theta(1, y, z, t) = -0.5, \quad (4)$$

and periodic conditions in the y and z directions.

The equations of motion (1)-(4) admit an analytic steady solution, which depends only on the x direction :

$$W(x) = \frac{1}{6}\sqrt{Ra} \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \right), \quad \theta(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (5)$$

The base flow is represented in Fig. 1b. The temperature profile corresponds to the pure conduction case. The equations (1)-(4) admit an $O(2) \times O(2)$ symmetry. One $O(2)$ symmetry corresponds to the translations in the transverse direction y and the reflection $y \rightarrow -y$, while the other corresponds to the translations in the vertical direction z and a reflection that combines centrosymmetry and Boussinesq symmetry : $(x, z, T) \rightarrow (-x, -z, -T)$.

2.3 Numerical configuration

The simulations are carried out with a multi-domain spectral code [8]. A Chebyshev discretization is applied in directions x and z , while a Fourier discretization is used in the direction y . The equations are integrated in time with a second-order mixed explicit-implicit scheme. The initial condition is typically taken to be the base flow. We use 30 modes in the transverse direction y , and 40 and 160 modes in the horizontal and vertical, x and z , directions, respectively.

3 Results

3.1 First bifurcation

DNS results The first bifurcation in the DNS occurs at $Ra_c \sim 5800$, and is characterized by the appearance of four 2D steady corotating rolls which are represented in figure 2(a),(b). Although vertical invariance is broken, the solution still displays the symmetry D_4 , consisting of translation by the height $A_z/4$ of each of the rolls, and the centro-Boussinesq symmetry. Invariance of the equations under z -translations ensures that there exists a whole circle of solutions, corresponding to an arbitrary vertical translation of the rolls : the bifurcation is a circle pitchfork bifurcation.

The time evolution of the temperature measured at the point $(0.0381, 0.097, 5)$, which is in the boundary layer next to the hot wall, is plotted in Fig. 3a. An enlargement of the same signal for the times $1500 < t < 2000$ is represented in logarithmic scale in Fig. 3b. The temperature disturbance grows exponentially for $1500 < t < 1750$, which corresponds to the linear growth of the most unstable eigenmode, then increases at a slower rate for $t > 1750$ before the amplitude of the solution saturates. As was pointed out in [9], this evolution shows that the coefficient of the cubic term in the normal form of the circle pitchfork bifurcation is negative, and therefore that the bifurcation is supercritical.

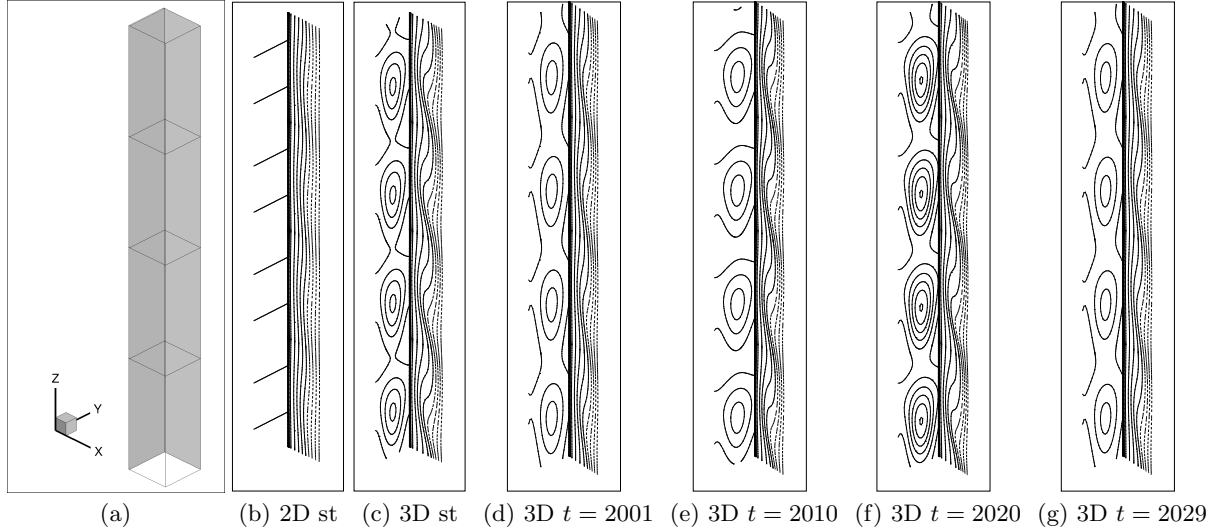


Figure 2. Flow structures : iso-contours of temperature on two selected vertical planes. (a) Positions of the selected planes $x = 0.0245$ (close to the hotter wall) and $y = 0.9677$ (perpendicular to side-walls) (b) 2D steady (st) four-roll pattern at $Ra = 6000$; (c) 3D steady pattern at $Ra = 11000$; (d)-(g) 3D time-dependent pattern at $Ra = 11500$ at different instants.

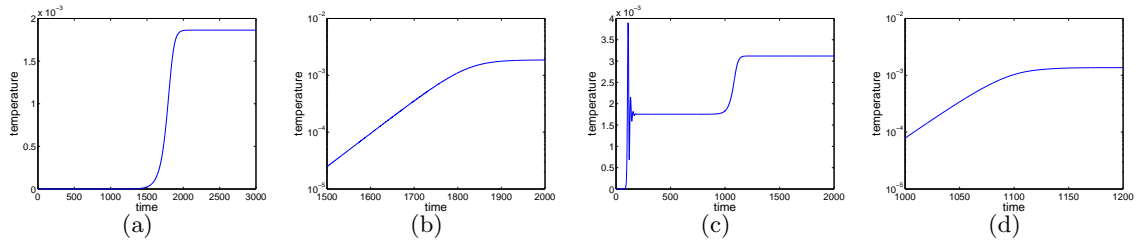


Figure 3. Time series of temperature at the point $(0.038, 0.097, 5)$: (a) $Ra = 6000$; (b) enlargement of (a) for $1500 < t < 2000$ on a logarithmic scale; (c) $Ra = 11000$; (d) enlargement of (c) for $1000 < t < 1200$.

Linear stability analysis The base flow (5) is parallel and depends only on the x -direction. The hypotheses of Squire's theorem are verified, so that the most unstable mode is expected to be 2D. Let ψ be the stream function and θ the temperature.

The 2D system of perturbations in x and z is written as

$$M \frac{\partial \phi}{\partial t} = L\phi + b(\phi, \phi) \quad (6)$$

with

$$\phi = \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_\phi \\ b_\theta \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} \nabla^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \nabla^4 - W \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial z} & Pr \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{\sqrt{Ra}} \nabla^2 - W \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

where the nonlinear terms are defined as

$$b_\psi(\phi_\alpha, \phi_\beta) = \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 \psi_\beta \quad b_\theta(\phi_\alpha, \phi_\beta) = \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \theta_\beta. \quad (8)$$

The linear part of the system is equivalent to a generalized eigenvalue problem $L\phi = \sigma M\phi$. Solution of the eigenvalue problem leads to values for the critical Rayleigh number $Ra_c = 5708$ and the critical wavenumber $k_c = 2.81$, which agree with [3] and [10]. The modulus of the most unstable mode at the critical wavenumber k_c and Rayleigh number Ra_c is shown in Fig. 4a. One can see that the intensity of the modes is maximum in the mid-plane between the two plates.

Weakly nonlinear analysis We use a multiscale analysis to derive a Ginzburg-Landau equation for the flow around the first bifurcation. The flow solution is written as $(\psi, \theta) = A(\tilde{\psi}, \tilde{\theta})e^{ikcz}$, where $\tilde{\psi}, \tilde{\theta}$ are the most unstable modes at the wavenumber k_c given by the linear stability analysis, and A is the amplitude of the solution. We define the time scales : $t_0 = t, t_1 = \epsilon t, t_2 = \epsilon^2 t$ and the length scales in z : $z_0 = z, z_1 = \epsilon z$, expand all the operators in system (6) with respect to the new variables, and collect the terms at different orders of ϵ . The problem at order ϵ simply coincides with the linear stability analysis. Collecting terms at order ϵ^2 and imposing a compatibility condition yields an expression for the group velocity C_g . Numerical evaluation of C_g yields a value of about 10^{-5} , which is close to the expected value of zero since the rolls are steady. Another compatibility condition at order ϵ^3 leads to a Ginzburg-Landau equation [11] for the amplitude A ,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sigma(Ra - Ra_c)A + \gamma \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - lA^2A^* \quad (9)$$

Numerical evaluation of the coefficients σ, γ, l for the critical wavenumber $k_c = 2.81$ gives $\sigma = 7.67 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = 0.112$, $l = 18.7$. The sign of l confirms that the bifurcation is supercritical, as was inferred from the DNS. The steady amplitude A was then computed from the Ginzburg-Landau equation and compared to that observed in the DNS. Figs 4b and 4c show that the agreement between the model and the DNS was found to be very good over a wide range of Rayleigh numbers. We note that the wavenumber $k_{\text{DNS}} = 2.79$ found in the DNS differs slightly from the critical wavenumber $k_c = 2.81$ determined by linear stability analysis.

3.2 Higher bifurcations

When $Ra > Ra_{c2} \sim 10100$, the four-roll steady solution becomes unstable in the transverse direction, and a steady 3D pattern, shown in figure 2(c), appears through a second bifurcation, as was also found by [6] and [7]. The flow is no longer y -invariant, but owing to the invariance of the equations by transverse translations, this new bifurcation is also a circle pitchfork bifurcation. By the same argument as was

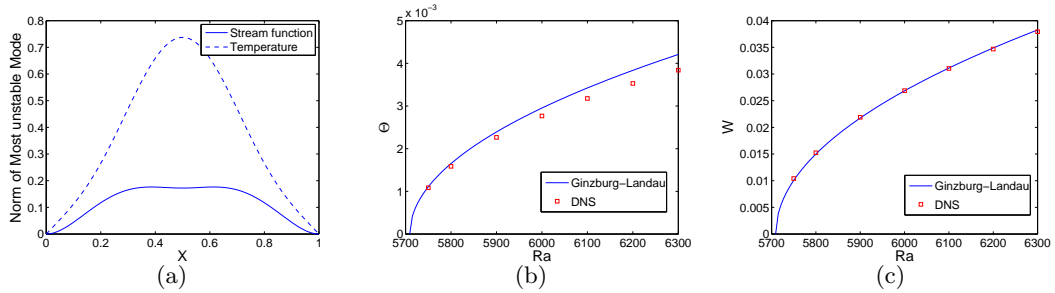


Figure 4. (a) Norm of the most unstable mode at k_c and Ra_c (b)-(c) comparison between the DNS and Ginzburg-Landau equation. b) maximum temperature c) maximum vertical velocity on the plane $x = 0.0381$.

used in the previous paragraph, the time series of Fig. 3d indicates that this is another supercritical bifurcation. The steady 3D solutions retain some of the symmetries of the 2D solutions, namely reflection in y and translation by $A_z/4$ in z , but the translation symmetry in y and the centro-Boussinesq symmetry are replaced by the single discrete symmetry $(x, y, z, T) \rightarrow (-x, y + 0.5, -z, -T)$. Thus, the $O(2) \times D_4$ symmetry of the 2D solution is replaced by $D_1 \times D_4$ for the 3D solution. The value of Ra_{c2} is obtained by integrating the linearized equations of motion and computing the growth rate of the y -dependent perturbation. We find that Ra_{c2} is about 9980.

The 3D pattern appears to be stable up to a value of $Ra = Ra_{c3} \sim 11300$. For $Ra_{c3} < Ra < 12000$, the 3D pattern becomes time-dependent as can be seen in Figs 2d- 2g. Only one frequency is detected at first, as shown in Figs 5a and 5b. The oscillation frequency is nearly independent of Ra over the interval $Ra_{c3} < Ra < 12000$, while the square of the oscillation amplitude increases linearly with Ra , which is consistent with a Hopf bifurcation. Extrapolation then leads to an estimate of 11270 for Ra_{c3} .

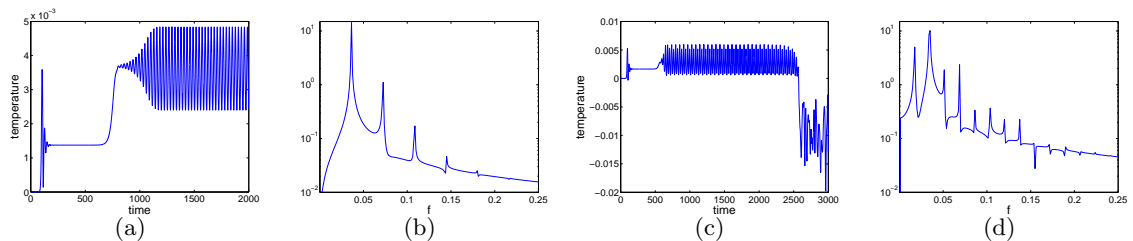


Figure 5. (a) Time series of temperature measured at the point $(0.038, 0.097, 5)$ at $Ra = 11500$; (b) Temporal Fourier spectrum of the periodic portion portion ($t > 1000$) of the signal in a); (c) Temperature time series at $Ra = 12200$; (d) Temporal Fourier spectrum of the bi-periodic portion ($1000 < t < 2000$) of the signal in b).

When $12100 < Ra < 12500$, the oscillation period of the 3D pattern is doubled, as shown in Figs 5c, 5d at $Ra = 12200$ ($700 < t < 2500$). At larger times $t > 2500$, the oscillation becomes markedly irregular. This corresponds to a drastic change in the spatial organization of the flow, as the four oscillatory structures give way to an unsteady pattern of roughly three structures. For increasingly large values of Ra , successive period-doubling bifurcations are observed, as is apparent in the phase portraits shown in Fig. 6 for different Rayleigh numbers. Beyond $Ra = 13500$, it is no longer possible to identify a discrete set of frequencies and the flow appears temporally chaotic.

4 Conclusion

The goal of our study has been to determine the sequence of instabilities leading to chaos for the flow between two infinite, differentially heated vertical plates as the Rayleigh number increases. A partial

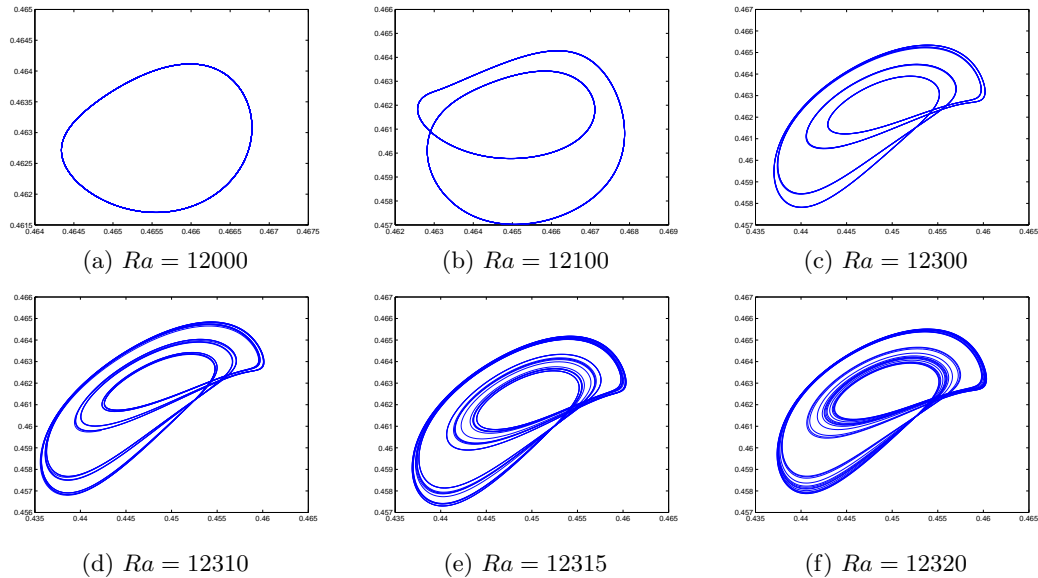


Figure 6. Phase portraits at different Ra . Abscissa : temperature measured at the point (0.038, 0.097, 6.98); ordinate : temperature measured at the point (0.038, 0.097, 6.54).

mapping of that route has now been established. The base flow first bifurcates to 2D steady rolls through a supercritical pitchfork bifurcation. A Ginzburg-Landau equation was derived analytically and was able to predict the amplitude of the 2D solution correctly. As the Rayleigh number increases, the 2D rolls become unstable through another supercritical pitchfork bifurcation to a steady 3D pattern, which itself becomes unstable to oscillatory 3D structures through a Hopf bifurcation. Chaos eventually occurs through a sequence of period-doubling bifurcations. A detailed investigation of the chaotic regime will be carried out in future work.

Références

1. J. W. ELDER, Laminar free convection in a vertical slot *Journal of Fluid Mechanics*, **23**, 77-98 (1965)
2. A. GILL, & A. DAVEY, Instability of a buoyancy-driven system *Journal of Fluid Mechanics*, **35**, 775-798 (1969)
3. R. F. BERGHOLZ, Instability of steady natural convection in a vertical fluid layer *Journal of Fluid Mechanics*, **84**, 743-768 (1978)
4. J. MIZUSHIMA, & K. GOTOH, Nonlinear evolution of the disturbance in a vertical fluid layer *Journal of the Physical Society of Japan*, **52**, 1206-1214 (1983)
5. J. MIZUSHIMA & Y. SAITO, Equilibrium characteristics of the secondary convection in a vertical fluid layer between two flat plates, *Fluid Dynamics Research*, **2**, 193-191 (1987)
6. M. NAGATA, & F. H. BUSSE, Three-dimensional tertiary motions in a plane shear layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **135**, 1-26 (1983)
7. R. M. CLEVER & F. H. BUSSE, Tertiary and quaternary solution for convection in a vertical fluid layer heated from the side, *Chaos, Solitons & Fractals*, **5**, 1795-1803 (1995)
8. S. XIN, J. CHERGUI, & P. LE QUÉRE, 3D Spectral Parallel Multi-Domain computing for natural convection flows *Proceedings at Parallel CFD 2008*, Université de Lyon, France. 163-170 (2008)
9. R. D. HENDERSON & D. BARKLEY, Secondary instability in the wake of a circular cylinder *Physics of Fluids*, **8**, 1683-1685 (1996)
10. A. GILL, & C. C. KIRKHAM, A note on the stability of convection in a vertical slot *Journal of Fluid Mechanics*, **42**, 125-127 (1970)
11. C. COSSU, *Introduction to hydrodynamic instabilities* Lecture Notes, École Polytechnique (2009)

Etude expérimentale de l'instabilité d'un jet de solution diluée de polymère

Martial Gassa Feugaing¹, Olivier Crumeyrolle¹, Gérard Gréhan², & Innocent Mutabazi¹

¹ LOMC, UMR 6294, CNRS-Université du Havre

² CORIA, UMR 6614, CNRS-Université de Rouen

olivier.crumeyrolle@univ-lehavre.fr

Résumé. Nous étudions expérimentalement la dynamique de brisure des jets libres et forcés de solutions diluées de polymère flexible de forte masse molaire au travers d'un petit orifice. Pour cela nous employons des solutions aqueuses de faibles concentrations en polyoxyéthylène (POE, $c^* = 180$ ppm), débouchant au travers d'un orifice de $50 \mu\text{m}$ de diamètre. Nous observons que le jet présente dans la longueur de rupture finale la structure dite de « perles sur une ficelle ». Cette dynamique nous permet de mettre en évidence un effet élongationnel en régime fortement dilué.

Abstract. The capillary instability of viscoelastic liquid jet under the influence of free and externally controlled disturbances is investigated experimentally. The working liquids are low concentration aqueous solutions of polyethylene oxide (POE, $c^* = 180$ ppm), a neutral and flexible polymer of high molecular weight. Our experiments show that the so-called beads-on-a-string structure remains before the final break-up point. This structure is also observed when periodic forcing is enabled. This behaviour indicates that the extensional properties of viscoelastic fluids play an important role in such dilute solutions.

1 Introduction

L'atomisation des liquides viscoélastiques est essentielle dans de nombreuses applications domestiques, agricoles et industrielles [1,2,3,4]. Dans ces processus, la présence de polymère change la dynamique du jet et joue un rôle important pour le contrôle de la taille des gouttes et la suppression des gouttes satellites [5]. Dans le même temps l'apparition de filaments entre les gouttes peut conduire à la création de gouttes secondaires lors de la déstabilisation du filament [6] et par conséquent un temps de rupture plus long [7]. Li & Fontelos [8] ont fait une étude numérique basée sur le modèle de Oldroyd-B à une dimension. Leurs travaux montrent que la force élastique et non la force capillaire est la force motrice dans le processus de migration et d'oscillation des gouttes sur le filament. La théorie linéaire fournit des taux d'amplification où les perturbations optimales sont plus fortes en non-newtoniens qu'en newtoniens. Les perturbations variqueuses sont à l'origine de l'instabilité pour de faibles nombres de Weber, alors que les perturbations sinueuses dominent pour de grands nombres de Weber [9]. Les travaux les plus récents montrent qu'une ségrégation du polymère peut se produire entre les gouttes et le filament [10]. Toutefois le couplage entre les processus de migration et de drainage des gouttes sur le filament, de même que la présence dominante des effets non-linéaires dans l'étape ultime de rupture dus à la viscosité élongationnelle restent mal comprises.

Le but de ce travail est de mener une étude sur l'effet de l'élasticité et du forçage sur la rupture capillaire d'une solution de polymère en régime dilué. Nous nous intéressons aux propriétés statistiques des gouttes et à la longueur de la structure filamentaire.

2 Matériels et méthodes

Un schéma du dispositif expérimental est présenté en figure 1. La partie mécanique qui gère la production et l'alimentation du jet est constituée d'une pompe seringue et d'un injecteur. La pompe sert

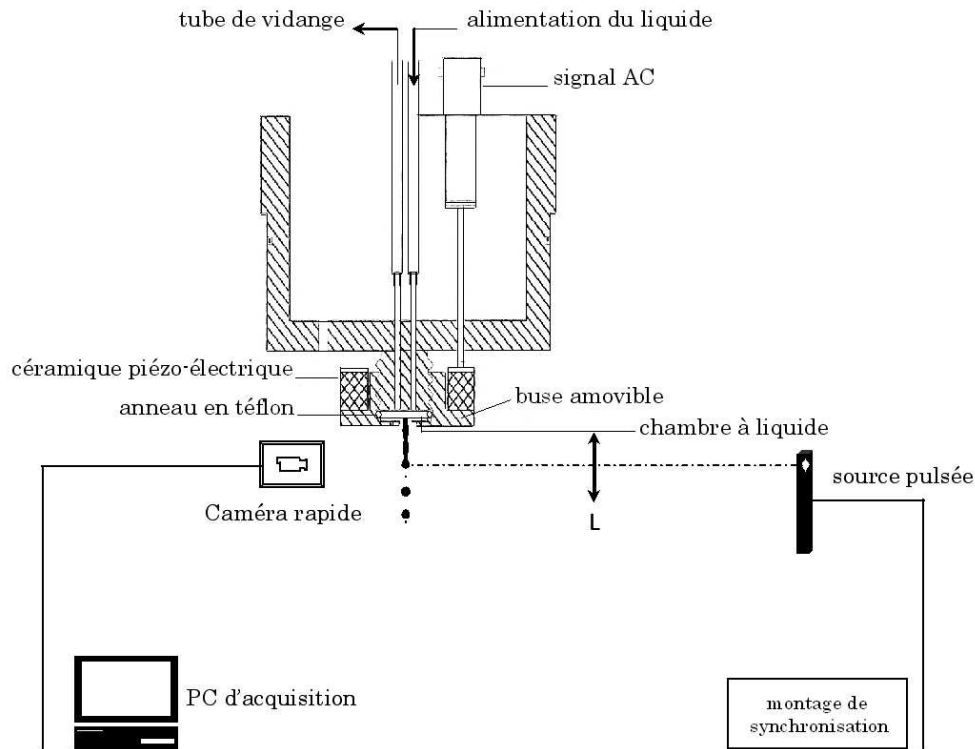


Figure 1. Schéma du dispositif expérimental

à générer l'écoulement de liquide et à maintenir un débit constant quelque soit la pression dans la seringue qui contient la solution étudiée. Les fluctuations de débit mesurées par pesée en début et en fin d'expérience n'excèdent pas 0,2%. Pour éviter l'obstruction de l'orifice, la solution débouche de la seringue au travers d'un filtre à membrane fluoropore de type Millipore, de diamètre de porosité $0,45 \mu\text{m}$. Elle parcourt ensuite un tube transparent de 1,5 m de longueur et 4 mm de diamètre intérieur avant de pénétrer dans l'injecteur. Le liquide en ressort par un tube de vidange. Lorsque la vanne de vidange est fermée, la chambre à liquide est mise sous pression et le liquide débouche dans de l'air au repos à travers un orifice de diamètre $D = 50 \mu\text{m}$ percé sur une plaque mince circulaire en acier inoxydable, maintenu en place par un anneau en Téflon. Une céramique piézo-électrique permet de forcer en amplitude et en fréquence la dynamique du jet.

Le dispositif d'imagerie, constitué par une source de lumière pulsée de durée 20 ns synchronisée à l'acquisition d'image par une caméra rapide (1280×48 pixels), permet d'atteindre dans cette configuration une vitesse d'acquisition de 16000 images par secondes (fps). L'objectif macro est muni d'une bague allongée de 10 mm afin d'optimiser le facteur d'agrandissement. L'analyse statistique est réalisée sur un échantillon de 12000 images enregistrées à une cadence de 1000 fps avec une résolution spatiale de $6,25 \mu\text{m}/\text{pixels}$. Afin d'éviter les effets acoustiques dus aux décharges électriques dans la gamme de hautes fréquences, la source lumineuse est placée à une distance de un mètre du jet. Pour disposer d'une intensité lumineuse suffisante, une lentille convergente L de 150 mm de diamètre et 500 mm de focale est intercalée entre les flashes et le jet et dans l'axe caméra-flashes. Dans cette configuration on obtient une tache lumineuse de $22 \pm 0,5$ mm de diamètre, focalisée sur la ligne de jet. L'éclairage est homogène et l'acquisition fournit des images qui sont transférées sur un PC pour être analysées.

L'ensemble du système de génération de jet et le dispositif d'imagerie sont isolés des perturbations extérieures par une enceinte en polycarbonate de dimension $160 \text{ cm} \times 90 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ et disposés sur un banc expérimental en marbre. Les fluides viscoélastiques étudiés sont des solutions aqueuses de poly-

oxyéthylène (POE), un polymère flexible neutre de forte masse molaire nominale $8.10^6 \text{ g.mol}^{-1}$ (Aldrich Chemical). Nous utilisons des solutions de POE à 5 ppm, 10 ppm et 20 ppm (ppm : partie par millions) obtenues par dilution de poudre de polymère dans le solvant constitué de 95% d'eau déminéralisée (Volvic) et de 5% d'alcool isopropylique. L'alcool limite les problèmes liés à la tension de surface lors de la dispersion de la poudre de polymère, et évite le développement des bactéries. Les solutions sont conservées au froid ($+8^\circ\text{C}$) lorsqu'elles ne sont pas utilisées pour éviter la dégradation de l'échantillon. La tension de surface des solutions tests est constante et vaut $\sigma = 60,5 \text{ mN/m}$. La masse volumique $\rho = 1070 \text{ kg/m}^3$. La viscosité à taux de cisaillement nul des solutions de polymère mesurée à l'aide d'un viscosimètre MCR-501 ANTON PAAR est proche de la viscosité du solvant et vaut $\eta_0 = \eta_s \simeq 1 \text{ mPas}$.

2.1 Paramètres de contrôle

Nous caractérisons la dynamique de rupture observée à l'aide des paramètres sans dimension suivants :

- Le nombre de Weber $We = \rho D V_j^2 / 2\sigma$ où V_j est la vitesse d'injection du jet. Ce nombre compare les effets inertiels aux effets des forces de tension superficielle. Il est un paramètre pertinent pour décrire la transition entre un régime de gouttes à gouttes ($We < 1$) à un régime de jet ($We > 1$).
- Le nombre d'Ohnesorge $Oh = (2\eta_0 / \rho D \sigma)^2$ mesure le rapport des forces visqueuses aux forces capillaires.
- Pour les fluides viscoélastiques, le temps de relaxation, λ , du polymère entre en jeu dans le phénomène de rupture [11]. Cette influence est mesurée par le nombre élastique $E = \eta_0 \lambda / \rho D^2$. D'après Christanti et Walker [5], le temps de relaxation est de l'ordre de quelques millisecondes, donc on peut considérer que E est de l'ordre de 1.

Dans le cas du jet forcé, il faut également considérer la fréquence et l'amplitude de forçage. Nous avons travaillé avec cinq débits différents correspondant à des nombres de Weber compris entre 13 et 120, avec une précision de 5%. Le nombre d'Ohnesorge vaut $Oh = 0,025$. La fréquence de forçage varie de 1 kHz à 1 MHz et l'amplitude de 0 à 30 V (crête-à-crête).

2.2 Traitement d'images

Plusieurs schémas de rupture de jets ont été identifiés en scrutant différentes parties du jet. L'analyse des images est réalisée à l'aide d'un programme développé sous Matlab. Il contient des routines permettant par la suite de faire des mesures quantitatives et statistiques des propriétés de gouttes. Les mesures granulométriques sont obtenues en assimilant les gouttes à des ellipsoïdes de révolution allongés de petit axe a , de grand axe b et de volume $V = 4/3(\pi b a^2)$; le diamètre de goutte sphérique équivalente est alors déduit. A partir de la formule de Ramanujan [12], le calcul du périmètre permet d'estimer la circularité, sachant qu'elle vaut 1 dans le cas d'un cercle parfait.

3 Résultats

Sur les images de jet vertical que nous présentons, l'orifice est situé à l'extrémité gauche et la direction de l'écoulement est de la gauche vers la droite. Les images sont de dimensions : $6500 \mu\text{m} \times 155 \mu\text{m}$. Les photos de jets libres en figure 2 illustrent l'effet du polymère sur la dynamique de rupture du jet. Pour chaque image et chaque solution, $We = 30$. Le jet de solvant (Fig. 2a) nous sert de référence pour comparer les schémas de comportement observés en viscoélastique. La théorie linéaire rapporte que à partir du moment où l'amplitude de la perturbation dominante atteint la valeur du rayon du cylindre liquide initial, le jet se désintègre en gouttes.

La figure 2 montre que le mécanisme de rupture d'un jet en gouttes, la distribution de taille de gouttes et la longueur de rupture sont significativement modifiés par la viscoélasticité. En effet, l'ajout de seulement 5 ppm de POE au solvant (Fig. 2b) conduit à la formation d'un filament mince dans l'étape ultime de rupture. L'élasticité est stabilisatrice par rapport aux forces de tension de surface et d'inertie. La structure filamentaire perdure et s'allonge avec l'augmentation de la concentration (Figs 2c et 2d). Le

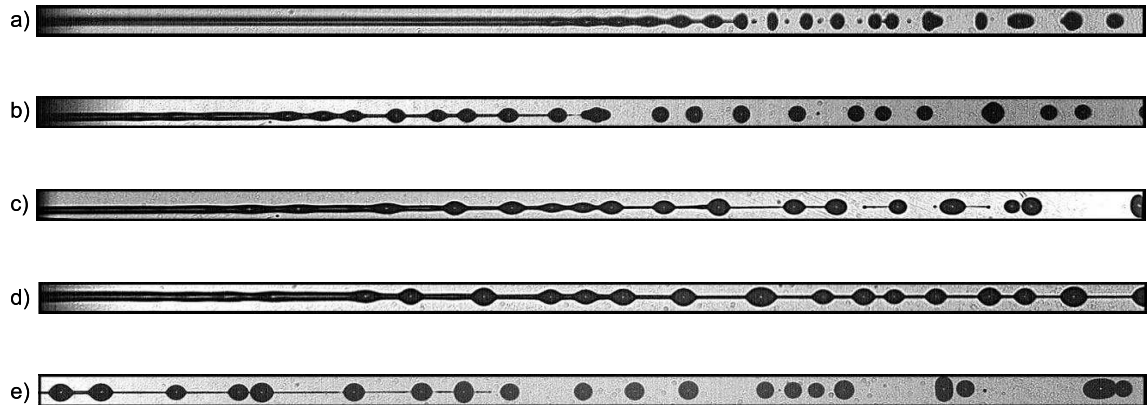


Figure 2. Images de jets libres à $We = 30$. Les fluides sont : (a) Solvant, (b) 5 ppm, (c) 10 ppm, (d) 20 ppm ; images prises à la sortie de l'orifice située à l'extrémité gauche et (e) 20 ppm ; 5 mm plus bas. L'écoulement et la gravité sont orientés de gauche à droite.

couplage entre la migration et le drainage des gouttes sur le filament, et la présence d'effets non linéaire dans la phase de rupture induite par la viscosité élongationnelle conduit à la formation de la structure dite de « perles sur ficelle ». Dans le cas de la solution à 20 ppm de POE par exemple (Fig. 2e), l'allongement du filament nécessite de descendre 5 mm plus bas le long de l'axe du jet pour observer la rupture.

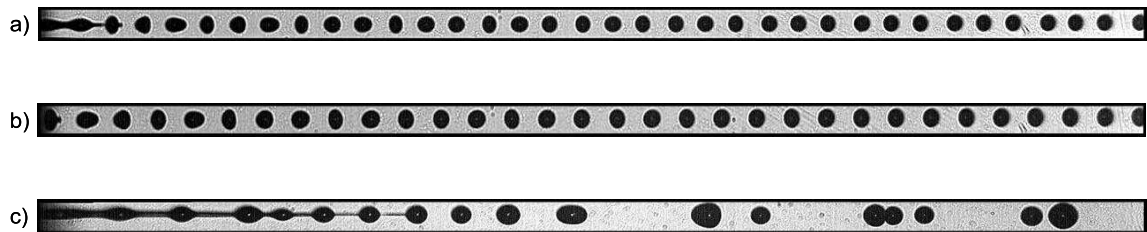


Figure 3. Images de jets forcés à l'amplitude de 15 V et à $We = 13$. Solvant monodisperse : (a) $f = 10,001$ kHz, (b) $f = 26,140$ kHz. (c) 5 ppm à $f = 10,004$ kHz. Images prises à la sortie de l'orifice située à l'extrémité gauche. L'écoulement et la gravité sont orientés de gauche à droite.

L'introduction de vibrations extérieures permet de contrôler la désintégration du jet newtonien. Ainsi pour des paramètres adéquats de débit et de forçage (fréquence et amplitude), l'on peut créer des gouttes monodisperses et agir sur la longueur de rupture du jet. Par exemple à $We = 13$ et pour une amplitude de 15 V, la réalisation d'un jet monodisperse avec présence de longueur de rupture est obtenue à la fréquence $f = 10,001$ kHz (Fig. 3a) ; et la production de gouttes monodisperses dès la sortie de l'orifice est observée à $f = 26,140$ kHz (Fig. 3b). A contrario, nous n'avons pas observé de jet de gouttes monodisperses avec les solutions de polymère dans la gamme de paramètres de forçage disponible. Le filament reste présent et la longueur de rupture n'est pas significativement modifiée. L'élasticité est suffisante pour s'opposer à l'effet du forçage. La perturbation axiale de vitesse créée par le mouvement de la céramique piézoélectrique génère une perturbation radiale que l'on distingue nettement sur le jet dès la sortie de l'orifice. Une illustration est donnée en image en figure 3c pour la solution à 5 ppm de POE, à $f = 10,004$ kHz.

La figure 4 regroupe les mesures de longueur de rupture moyenne réalisées sur les jets libres de solvant et de solution de POE à 5 ppm. Nos résultats sont en accord avec les mesures expérimentales de longueur de rupture de Mun *et al.* [7] en newtonien. Dans la gamme de nombre de Weber étudiée, la longueur de

rupture varie linéairement avec la vitesse d'injection du jet. Les longueurs de rupture de la solution de POE à 5 ppm sont inférieures à celles de la solution de solvant. [7] ont observé ce comportement pour leur solution de POE de poids moléculaire égal à $3.10^5 \text{ g.mol}^{-1}$ à 50 ppm, dans un solvant de 50/50 eau/glycérol. Le temps de rupture moyen estimé à partir des données expérimentales de la figure 4 vaut 6 ms pour le jet de solvant et 4 ms pour le jet à 5 ppm de POE.

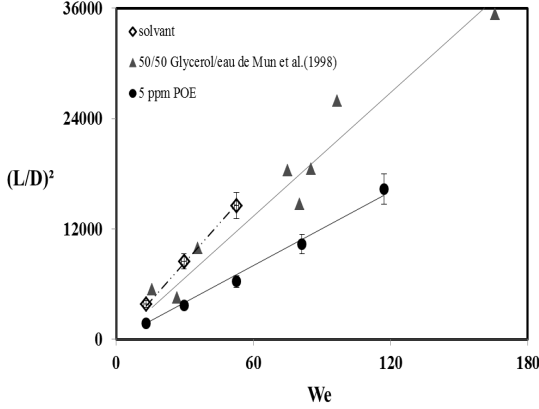


Figure 4. Longueur de rupture en fonction de We pour la solution de solvant et la solution de POE à 5 ppm. Comparaison avec les résultats de Mun *et al.* [7].

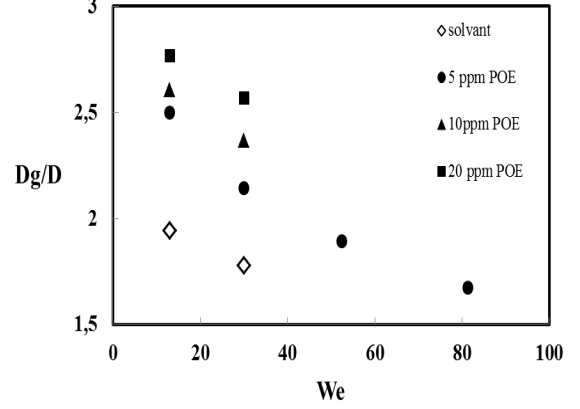


Figure 5. Diamètre équivalent moyen des gouttes, D_g , par rapport au diamètre de l'orifice, D , en fonction du nombre de Weber, pour la solution de solvant et les solutions de polymère.

De l'hypothèse simplifiée que l'accroissement des perturbations sur le jet est de la forme $A(t) = A_0 e^{\alpha t}$, où la perturbation dominante à une amplitude initiale égale à A_0 et un taux de croissance α , la valeur du taux de croissance des perturbations du mode le plus rapide peut être estimée des données de la figure 4, à partir de la relation [7]

$$\frac{L}{D} = \ln \left(\frac{R_j}{A_0} \right) We^{0,5} [1 + 30h],$$

où R_j représente le rayon initial du jet. Ainsi $\ln \left(\frac{R_j}{A_0} \right) = 15,5$ pour notre système. Mun *et al* ont trouvé une valeur de 13,1. Le taux des perturbations dépend fortement de la géométrie du capillaire, du diamètre du jet, des propriétés physiques du fluide et des propriétés du milieu environnant dans lequel débouche le jet.

La figure 5 montre l'effet de la viscoélasticité et de l'inertie sur la taille moyenne des gouttes. Dans le cas newtonien, le diamètre équivalent moyen des gouttes de solvant est approximativement le double du diamètre initial du jet. En outre le diamètre équivalent moyen diminue avec l'augmentation de la vitesse d'injection. Nos résultats sont en accord avec la théorie de Rayleigh et la théorie de Weber [13]. Le diamètre équivalent moyen des gouttes viscoélastiques est supérieur au diamètre newtonien. La taille des gouttes augmente avec l'augmentation de la concentration en polymère. Dans le cas de la solution à 20 ppm, on observe une forte diminution des gouttes satellites. Celles-ci sont majoritairement absorbées sur le filament, avant la rupture, par les gouttes primaires plus grosses.

4 Conclusion

Nous avons observé la dynamique et les mécanismes de rupture des jets de solutions diluées de polyoxyéthylène (5 ppm, 10 ppm et 20 ppm). Nos expériences montrent que la présence de polymère même en quantité minimale change substantiellement la dynamique de rupture du jet. En effet, même à une concentration de 5 ppm de polyoxyéthylène (POE), nous observons la formation d'un filament mince à

la rupture. Le forçage ne suffit pas à rompre le jet, ni à produire des gouttes monodisperses comme dans le cas newtonien (solution de solvant). Ces résultats suggèrent que les effets de relaxation élastique et les effets associés de la viscosité élongationnelle sont prépondérants même à faible concentration. Néanmoins leur implication dans le processus de désintégration du jet viscoélastique reste à élucider. La longueur de rupture moyenne de la solution à 5 ppm est inférieure à la longueur de rupture moyenne du solvant. A notre connaissance, ce comportement n'a jamais été reporté auparavant pour une solution de POE à grand poids moléculaire. La taille moyenne des gouttes croît avec l'augmentation de la concentration en polymère.

Références

1. V. BERGERON, D. BONN, J. Y. MARTIN, & L. VOVELLE, Controlling droplets deposition with polymer additive, *Nature*, **405**, (2000)
2. K. K. CHAO, C.A. CHILD, A. E. GRENS II & M .C. WILLIAMS, Antimisting Action of Polymeric Additives in jet Fuels, *AIChE Journal*, **30** (1), 111-120, (1984)
3. Y. SON & C. KIM, Spreading of inkjet droplet of non-Newtonian fluid on solid surface with controlled contact angle at low Weber and Reynolds numbers, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **162**, 78-87 (2009)
4. R. P. MUN, B. W. YOUNG & D. V. BOGER , Atomisation of dilute polymer solutions in agricultural spray nozzles, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **83**, 163-178 (1999)
5. Y. M. CHRISTANTI & L. WALKER, Effect of Fluid Relaxation Time on Jet Breakup due to a Forced Disturbance of Polymer Solutions, *Journal of Rheology*, **46** (3), 733-748 (2002)
6. C. CLASEN, J. EGGERS, M. A. FONTELOS , J. LI & G. H. MCKINLEY, The beads-on-string structure of viscoelastic threads, *Journal of Fluid Mechanics*, **556** (2006)
7. R. P. MUN, J. A. BYARS & D. V. BOGER, The effects of polymer concentration and molecular weight on the breakup of laminar capillary jets, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **74**, 285-297 (1998)
8. J. LI & A. M. FONTELOS, Drop dynamics on the beads-on-string structure for viscoelastic jets : A numerical study, *Physics of Fluids*, **15**, 922-937 (2003)
9. L. ZHIAHAO & L. ZHENGBAI, Instability of a viscoelastic liquid jet with axisymmetric and asymmetric disturbances, *International Journal of Multiphase Flow*, **34**, 42-60 (2008)
10. R. SATTLER, C. WAGNER & J. EGGERS, Blistering Pattern and Formation of Nanofibers in Capillary Thinning of Polymer Solutions, *Physical Review Letters*, **100**, 164502 (2008)
11. A. ZELL, S.GIER, S. RAFAÏ & C.WAGNER, Is there a relation between the relaxation time measured in CaBER experiments and the first normal stress coefficient ?, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **165**, 1265-1274 (2010)
12. S. RAMANUJAN, Modular Equations and Approximations to π , *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **45**, 350-372 (1913-1914)
13. J. EGGERS & E. VILLERMAUX, Physics of liquid jets, *Reports on Progress in Physics*, **71**, 036601, (2008)

Analyse d'écoulements à partir de champs d'observables échantillonnés à des temps arbitraires

Florimond Guéniat^{1,2}, Lionel Mathelin² & Luc Pastur^{1,2}

¹ Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

² LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

florimond.gueniat@limsi.fr

Résumé. Plusieurs techniques existent pour l'analyse d'écoulements instationnaires comme la célèbre Décomposition Orthogonale Propre (POD en anglais) ou, plus récemment, la Décomposition en Modes Dynamiques (DMD). Cette dernière technique s'appuie sur un ensemble de vecteurs d'observables du système échantillonné tous les Δt , introduisant *de facto* une fréquence d'échantillonnage fixe. Dans ce travail, nous présentons une approche permettant l'extraction de modes dominants, similaires aux modes DMD, sans la limitation à un échantillonnage fixe. Cette approche, appelée NU-DMD¹, permet une utilisation plus flexible de cette classe de méthodes et élargit significativement son spectre d'application.

Abstract. Several tools are readily available for analysis of unsteady fluid flows such as the celebrated Proper Orthogonal Decomposition (POD) or, the more recently introduced, Dynamic Modes Decomposition (DMD) [3]. Dynamic Modes Decomposition relies on a set of observable vectors acquired every Δt in time, *de facto* introducing a sampling frequency. In this work, we use an approach, called NU-DMD, to extract DMD-like modes which naturally copes with the sampling limitations mentioned above.

1 Motivation

Un système physique ouvert possède, potentiellement, un nombre infini de degrés de liberté. Néanmoins, les écoulements sont le plus souvent organisés autour de structures cohérentes qui jouent un rôle décisif dans la dynamique. On peut par exemple penser aux grandes structures tourbillonnaires des allées de von Karman, que l'on observe aussi bien dans des expériences de laboratoire que dans le sillage de structures à grande échelle telles que des navires ou des îles, pour lesquels les nombres de Reynolds sont très grands et la turbulence pleinement développée. Ces structures invitent à chercher des moyens de réduction de la dimension effective des écoulements considérés.

Une idée classique est de rechercher une base vectorielle, constituée de modes, capable de décrire les réalisations \mathbf{u} du champ mesuré. Ce champ possède une structure dans l'espace, \mathbf{r} , et évolue dans le temps, t . Dans l'hypothèse de séparation des variables d'espace et de temps, on cherche alors à écrire \mathbf{u} sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \geq 1} a_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}), \quad (1)$$

la base des $\{\boldsymbol{\psi}_i\}$ (ou des $\{a_i\}$) étant a priori de dimension infinie, discrète ou continue. Dans l'optique d'une réduction de modèle et, plus généralement, dans les méthodes de Galerkin, on se restreint à un ensemble fini de modes :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} a_i(t) \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{r}),$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est une approximation du champ \mathbf{u} . Lorsque les conditions aux limites sont homogènes, une base naturelle est donnée par les modes de Fourier. Dans des problèmes aux conditions aux limites plus complexes, on peut recourir à des méthodes empiriques de décomposition suivant les axes principaux de l'ensemble des données (modes POD), ou rechercher des champs solutions des équations de Navier-Stokes

1. Pour Non Uniform Dynamic Mode Decomposition.

linéarisées autour d'un état de base stationnaire (modes globaux). Récemment, Schmid [1] et Rowley [2] ont proposé une nouvelle méthode de décomposition, la Dynamic Modes Decomposition (DMD) basée sur l'hypothèse de l'existence d'un opérateur de Koopman [3], permettant théoriquement d'extraire directement les informations de la dynamique (non-linéaire) de l'écoulement en régime permanent instationnaire. L'algorithme standard de cette dernière méthode utilise un ensemble de vecteurs observables, mesurés à intervalles de temps réguliers, introduisant *de facto* une fréquence d'échantillonnage. Le pas de temps Δt doit être suffisamment petit pour résoudre les petites échelles temporelles de la dynamique. De l'ensemble ordonné de ces vecteurs résulte une matrice de Krylov dont sont extraits, par la DMD, les modes physiquement pertinents.

Néanmoins, lors du processus d'acquisition, ce type de contrainte peut poser des difficultés. A titre d'exemple, considérons la situation classique, en mécanique des fluides, où l'observable est un champ à deux composantes, de dimension deux (2D2C), mesuré par *Particule Imagery Velocimetry* (PIV). En PIV, les tailles standards sont des champs de 1000×1000 pixels. Supposons que la fréquence pertinente la plus élevée soit à 200 Hz (situation très optimiste en écoulement turbulent), le critère de Shannon-Nyquist impose alors une fréquence d'échantillonnage supérieure à 400 Hz. Avec des images de 12-bit, la bande passante ainsi nécessaire est supérieure à 1 Gb/s. De plus, si le spectre de Fourier de la dynamique est à large bande, la durée de l'acquisition de données doit être importante. La combinaison d'une haute fréquence d'échantillonnage et d'une longue durée d'acquisition conduit à des contraintes sévères, tant pour le matériel de mesure que pour les ressources de traitements de données et de stockage.

De surcroît, certaines mesures de l'observable peuvent être corrompues, par des causes internes ou externes à l'expérience, par exemple au niveau du matériel, ou par la non-convergence d'un algorithme de pré-traitement. Les faux vecteurs en PIV sont une illustration de ce problème. S'il est souvent possible de remplacer les données manquantes ou corrompues, par diverses techniques telle la gappy-POD, de l'information non physique risque d'être introduite, en particulier dans le contenu spectral.

Dans cette contribution, nous présentons une méthode, que nous avons nommée NU-DMD, permettant de calculer des modes similaires aux modes DMD, mais pour des données échantillonnées quasi-aléatoirement.

2 Algorithme DMD

Présentons tout d'abord l'algorithme DMD. Pour que la méthode puisse s'appliquer, il faut supposer qu'il existe un opérateur d'évolution A de la dynamique agissant sur un ensemble d'observables $\mathbf{u}(t)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{u}(t_{i+1}) =: \mathbf{u}_{i+1} = A \mathbf{u}_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

La méthode revient à décomposer l'opérateur, en recherchant ses modes propres ϕ_i et valeurs propres λ_i . En ayant à disposition ces informations et on suppose que ce spectre est une base de l'espace des phases, soit

$$\mathbf{u}_i = A^i \mathbf{u}_0 = \sum_k \nu_{k0} \lambda_k^i \Phi_k,$$

où les ν_{k0} sont les coefficients de projection du premier champ sur la base des modes, et à partir de laquelle on pourra facilement remonter à l'équation (1). Pour déterminer $\{\phi_i\}$ et $\{\lambda_i\}$ sont estimés en décomposant une matrice similaire à l'opérateur d'évolution A .

Présentons tout d'abord une décomposition basée sur la détermination d'une matrice compagnon, plus facilement appréhendable. On suppose

$$\mathbf{u}_N = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbf{u}_{N-1},$$

d'où, en notant K_1^N l'espace de Krylov $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\}$

$$AK_1^N = K_1^N C + \mathbf{r} \quad \text{avec} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

L'algorithme DMD de Schmid est subtilement différent. On commence par décomposer par SVD la matrice de Krylov

$$K_1^N = U \Sigma V^H.$$

On introduit dans l'équation $AK_1^N = K_2^N$, soit

$$AU = K_2^N V \Sigma^{-1},$$

avec $K_2^N := \{A\mathbf{u}_0, A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_N\}$. En multipliant à gauche par U^H , nous obtenons

$$U^H AU = U^H K_2^N V \Sigma^{-1} \equiv S$$

avec S une matrice similaire à A . A n'étant pas connu explicitement (seule son *action* sur certains vecteurs est connue), cette approche permet de se ramener à l'approximation d'un opérateur linéaire connu et de petite taille, S .

Les valeurs propres λ_i de la matrice similaire S sont des valeurs propres de A . En effet, prenons λ une valeur propre de S , et ν un vecteur propre associé :

$$\begin{aligned} AK_1^N \nu &= K_1^N C \nu \\ &= K_1^N \lambda \nu \\ &= \lambda K_1^N \nu \\ A(K_1^N \nu) &= \lambda (K_1^N \nu) \end{aligned}$$

Des vecteurs propres ν_i de la matrice similaire – par exemple la matrice compagnon – C sont donc déduits des vecteurs propres ϕ_i de A par $\phi_i \equiv K_1^N \nu_i$

3 Algorithme NU-DMD

L'objectif principal est de réaliser une décomposition spectrale de dimension finie de l'écoulement. A cette fin, on peut fixer par avance la forme de la décomposition à obtenir. On peut rechercher une décomposition similaire à la DMD, c'est-à-dire décomposer \mathbf{u} sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^{N_m} e^{i \sigma_k t} \phi_k(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=1}^{N_m} \lambda_k^t \phi_k(\mathbf{x}), \quad (2)$$

avec N_m le nombre de modes choisis pour la décomposition. La méthode repose sur l'analyse d'un jeu de données : $\{\mathbf{u}_{t_i}\}_{i=1}^N$, $t_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$. Les temps t_i sont arbitraires, et non nécessairement ordonnés. Ces N champs de données seront utilisées sous la forme d'une pseudo matrice de Krylov $\mathbb{R}^{N_p \times N} \ni K := (\mathbf{u}_{t_1} \mathbf{u}_{t_2} \dots \mathbf{u}_{t_N})$. Les champs de données $\{\mathbf{u}_{t_i}\}_{i=1}^N$ sont représentés sous forme de vecteurs.

On recherche des modes tels que, d'après (2),

$$\mathbf{u}_{t_i} \approx \lambda_1^{t_i} \phi_1 + \lambda_2^{t_i} \phi_2 + \dots + \lambda_{N_m}^{t_i} \phi_{N_m}.$$

Ce que l'on peut réécrire matriciellement :

$$K = M V + R \approx M V, \quad (3)$$

où R est une matrice de résidu, $V \in \mathbb{C}^{N_m \times N}$ est une pseudo matrice de Vandermonde :

$$V := \begin{pmatrix} \lambda_1^{t_1} & \lambda_1^{t_2} & \dots & \lambda_1^{t_N} \\ \lambda_2^{t_1} & \lambda_2^{t_2} & \dots & \lambda_2^{t_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N_m}^{t_1} & \lambda_{N_m}^{t_2} & \dots & \lambda_{N_m}^{t_N} \end{pmatrix},$$

et finalement $M \in \mathbb{C}^{N_p \times N_m}$ une matrice contenant les modes spatiaux :

$$M := (\phi_1 \dots \phi_{N_m}).$$

Pour écrire (2), il faut avoir accès aux deux matrices qui viennent d'être définies, la pseudo Vandermonde V et la matrice des modes M . On peut facilement trouver une approximation de cette dernière :

$$M \approx K V^+, \quad (4)$$

où V^+ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de V . En suivant un raisonnement similaire à celui décrit dans [4], on peut substituer l'écriture de la matrice M dans (3), pour obtenir $K \approx K V^+ V + R$. Déterminer V s'obtient alors en minimisant une norme de la matrice des résidus R :

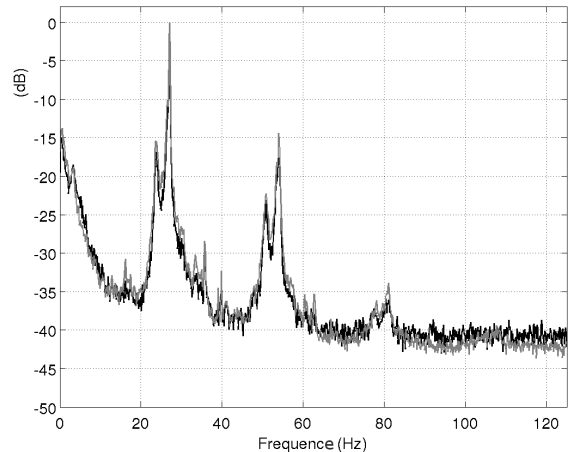
$$R \approx K (I_N - V^+ V).$$

On peut alors déterminer la pseudo Vandermonde V par minimisation de la norme de la matrice résidu R . Les modes se déduisent alors de (4).

4 Résultats



(a) Vue de l'écoulement



(b) Spectre de puissance

Figure 1. Vue de l'écoulement de cavité par ensemencement avec de la fumée de spectacle (a). On y voit les oscillations dans la couche cisailée affleurante et les structures intra-cavitaires révélées par le contraste lumineux entre zonesensemencées ou pas. Spectre de puissance (b) de l'écoulement considéré dans cette étude, où l'on voit émerger un pic dominant à la fréquence de 27.0 Hz. Le spectre de puissance a été calculé par deux systèmes de métrologie différents (anémométrie laser en un point de l'écoulement ou moyenne sur les champs PIV), ce qui explique les deux courbes sur la figure.

Pour illustrer la méthode, nous allons nous appuyer sur un écoulement de cavité ouverte, à très faible nombre de Mach. Une visualisation instantanée de l'écoulement est présentée sur la Figure 1a), pour un rapport longueur sur hauteur de cavité égal à 1.5, une profondeur de cavité $H = 5$ cm, une vitesse en amont de 2.10 m/s, et une épaisseur de couche limite, à l'aplomb du bord amont de la cavité, de $\theta_0 = 1.10$ mm. Ce type d'écoulement présente un spectre de puissance de vitesse structuré autour de pics bien définis, engendrés par les oscillations de la couche cisailée (Figure 1b), ce qui en fait un cadre approprié pour tester l'efficacité de l'algorithme.

On dispose d'un ensemble de champs de vitesse 2D2C expérimentaux, résolus en temps, obtenus par PIV rapide (fréquence d'échantillonnage 250 Hz). Le dispositif expérimental et la métrologie employée sont détaillés dans la référence [5]. Pour tester notre algorithme de NU-DMD, nous avons tirés N champs au hasard parmi les 5500 de la base de données PIV ; pour l'analyse la taille de chacun des champs est réduite à 7500 pixels. Une comparaison entre la DMD, réalisée sur les N premiers champs de vitesse, et la NU-DMD, est présentée dans le tableau 1.

Table 1. Fréquence du premier mode identifié, par DMD et NU-DMD, à partir des N premiers champs de vitesse pour la DMD, de N champs tirés au hasard pour la NU-DMD. Il est à noter que la fréquence du mode dominant est identifiée par NU-DMD à partir de seulement $N = 12$ champs.

N	12	28	38	65	90	200	500	1000
DMD	20.8	26.8	26.3	26.9	27.8	27.5	27.0	27.0
NU-DMD	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0	27.0

La DMD ne peut identifier le mode dominant avec moins de 500 champs, contrairement à la NU-DMD, qui identifie la fréquence du mode dominant, à 27.0 Hz, à partir de 12 champs seulement. La structure spatiale des premiers modes dynamiques, obtenus par DMD et NU-DMD, sont comparables, comme on peut le voir sur la figure 2. Néanmoins, alors que la fréquence dominante de l'écoulement est immédiatement estimée correctement par NU-DMD, la structure du champ associé s'affine lorsque le nombre de champs utilisés pour la décomposition augmente. Cela se comprend par le fait que l'information contenue dans 12 champs n'est pas encore suffisante pour assurer une convergence de la structure du mode vers sa structure moyenne sur tout l'échantillon. Malgré tout, le mode se structure bien, même à $N = 12$, autour de la couche cisailée, comme attendu pour un mode de Kelvin-Helmholtz.

5 Conclusion

Lorsque, pour des contraintes liées à un écoulement ou à une expérience, l'acquisition de champs de données ne peut être uniforme dans le temps, l'algorithme DMD ne peut être utilisée. L'algorithme présenté ici, de NU-DMD, peut quant à lui toujours identifier les structures dominantes de l'écoulement, à partir de quelques champs de données nécessaires seulement. La NU-DMD est donc un outil pratique, au champ d'application potentiellement large, permettant d'explorer les caractéristiques physiques d'un jeu d'observables (ici le champ de vitesse), et ce quelque soient les contraintes sur les données : qu'elles soient en nombre limité, avec des "trous", ou pour un échantillonnage aléatoire.

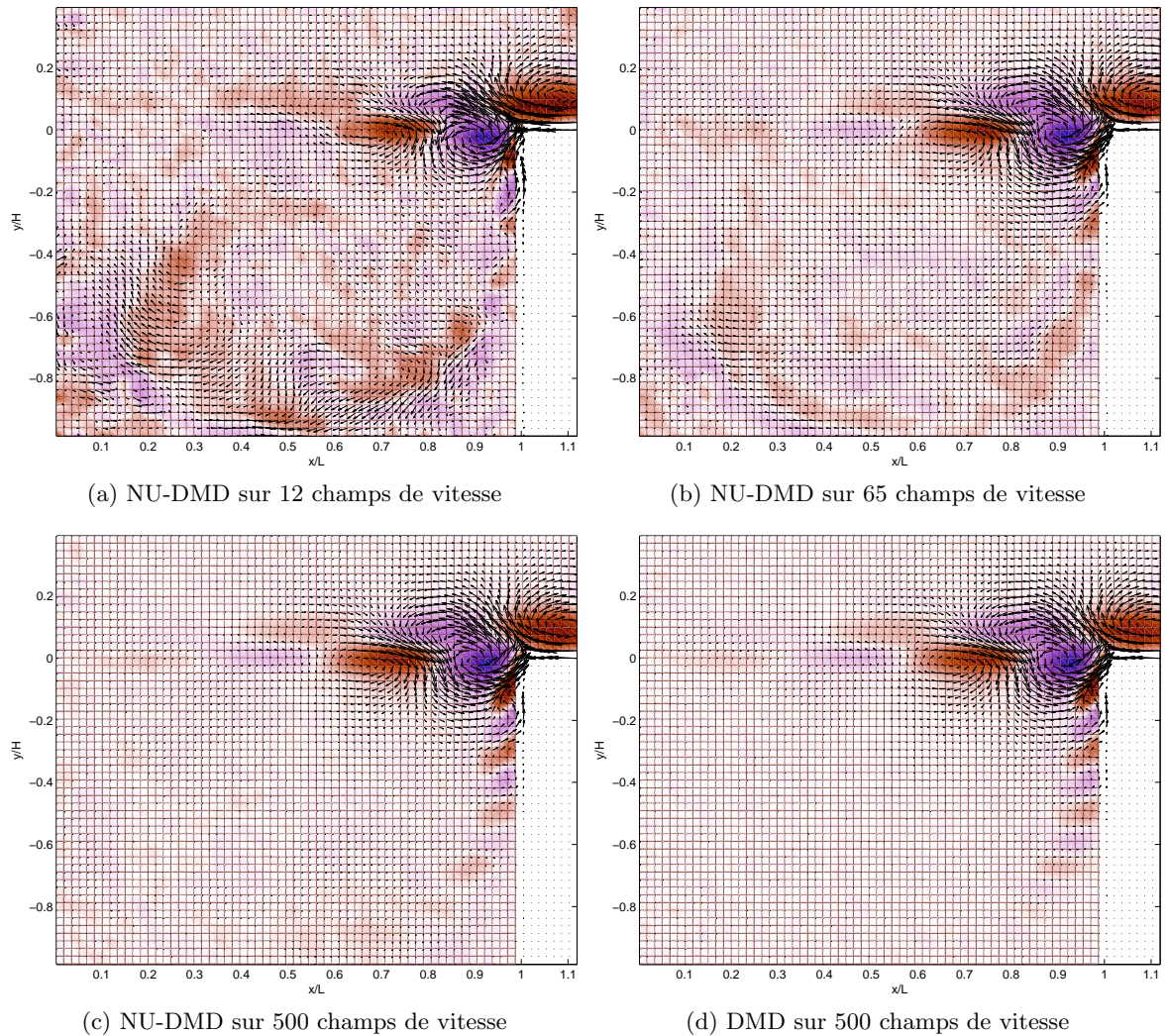


Figure 2. Structure du mode dominant, associé à la fréquence de 27.0 Hz, obtenu par NU-DMD réalisée sur respectivement 12, 65 et 500 champs de vitesse, à comparer au mode DMD dominant obtenu en utilisant les 500 premiers champs de vitesse.

Références

1. P. J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, **656**, 5-28 (2010)
2. C. W. ROWLEY, I. MEZIC, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics* **641**, 115-127 (2009)
3. B.O. KOOPMAN, Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **17**, 315-318 (1931)
4. K. CHEN, J.H. TU & C.W. ROWLEY, Variants of dynamic mode decomposition : connections between Koopman and Fourier analyses, *soumis*.
5. J. BASLEY, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE & N. DELPRAT, Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV, *Experiment in Fluids*, **50** (4), 905-918 (2011)

Théorie de l'anharmonicité des phénomènes périodiques non-linéaires

Patrick Hanusse

Centre de Recherche Paul Pacal, CNRS-Université de Bordeaux, Avenue A. Schweitzer, 33600, Pessac
hanusse@crpp-bordeaux.cnrs.fr

Résumé. Nous présentons une nouvelle théorie de l'anharmonicité des phénomènes périodiques non-linéaires basée sur une description de la dynamique de phase. De nouveaux outils mathématiques sont développés, introduisant une véritable « trigonométrie non-linéaire ». De nouvelles grandeurs mesurables qui caractérisent la distance à l'harmonicité et la classe morphologique du comportement sont introduites. Elles suffisent à décrire de façon précise et pertinente des signaux même extrêmement anharmoniques et portent un sens physique clair et universel qui exprime la signature dynamique ou structurelle du système physique qui a produit ce signal. Ces résultats constituent une percée majeure dans la description des phénomènes périodiques du monde physique depuis les travaux de Joseph Fourier.

Abstract. We present a new theory of the anharmonicity of nonlinear periodic phenomena based on the description of the phase dynamics. New mathematical tools are introduced leading to a genuine « nonlinear trigonometry ». New nonlinear quantities are defined which measure the distance to harmonicity and the morphological class of the behaviour. They allow a precise and relevant description of any signal however anharmonic, and provide a clear and universal physical meaning, a true signature of the system that produces such a signal. This is a major breakthrough in the description of periodic phenomena since the work of Joseph Fourier.

1 Introduction

Les phénomènes périodiques non-linéaires sont une des manifestations les plus répandues du monde physique sans que l'on ait jusque là vraiment trouvé une vision unifiée de la morphologie de ces signaux qui condense dans quelques concepts et grandeurs mesurables associées l'essentiel de leurs propriétés communes. On imagine que l'on dispose d'une série temporelle, unique observation disponible du phénomène. Comment la caractériser, sachant qu'un grande variété de formes sont observables (Fig. 1).

Au delà de période et amplitude, on s'en remet à la description de Fourier pour une représentation que l'on voudrait précise mais que l'on sait qualitativement déficiente dans le cas de signaux hautement anharmoniques (phénomène de Gibbs). Une description quantitativement précise requiert un nombre de modes parfois très élevé. La quantité d'information nécessaire est clairement sans rapport avec la relative simplicité morphologique observée. On dispose donc d'une représentation mathématiquement bien définie mais qui ne dit rien du sens physique du phénomène, lequel devrait pouvoir être exprimé de manière compacte, par quelques mesures seulement, signature de sa pertinence.

Considérant des signaux périodiques "simples" (ayant un seul maximum et minimum par période) du type de ceux présentés Fig. 1, nous cherchons à définir des paramètres morphologiques universels donc à élaborer un théorie générique de l'anharmonicité.

2 L'apparition de l'anharmonicité

Comment l'harmonicité est-elle perdue ? Une théorie de l'anharmonicité doit d'abord répondre à cette question. Il est assez évident qu'une manifestation périodique reflète la dynamique ou la structure interne du système qui la produit et il est donc nécessaire de partir d'une situation où apparaît génériquement un phénomène oscillant. On supposera que toute manifestation périodique "émane" d'une telle situation, quand bien même ce point de bifurcation peut ne pas être concrètement atteint dans le système considéré.

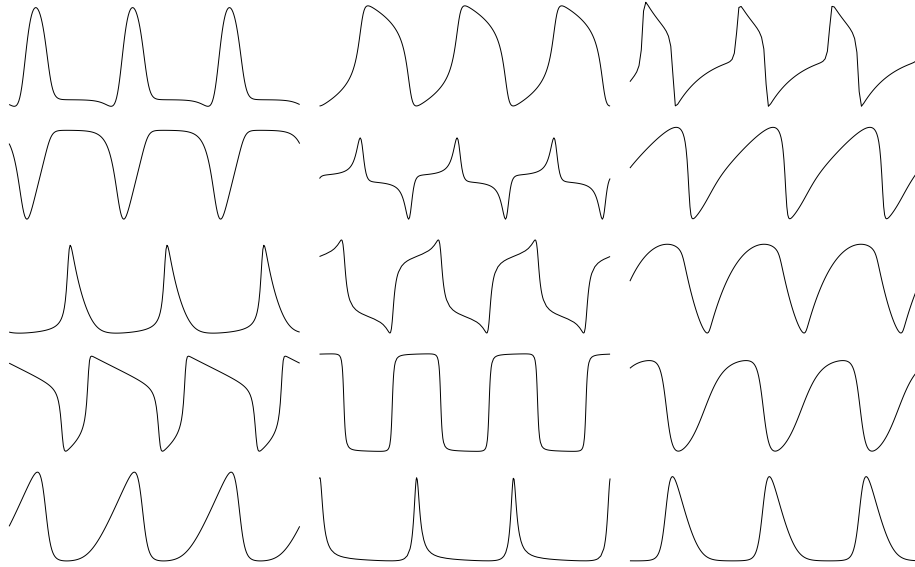


Figure 1. Quelques morphologies typiques de signaux périodiques non-linéaires ou anharmoniques

La théorie des systèmes dynamiques nous donne clairement une réponse [1]. La bifurcation de Hopf [2] représente cette référence générique par laquelle une oscillation harmonique apparaît, mais conduit ultérieurement à une oscillation non-linéaire [3]. Tout ceci est bien connu mais que peut-on en retirer de nouveau ? Au voisinage de la bifurcation, la dynamique peut être décrite par une forme normale simple, ici exprimée en amplitude et phase $(\rho, \phi) : \dot{\rho} = \lambda\rho - \rho^3, \dot{\phi} = \omega$. Elle présente une symétrie rotationnelle qui exprime le caractère harmonique de l'oscillation. Nous supposons donc que toute déviation à l'anharmonicité résultera d'un "déploiement de symétrie", ou ensemble des brisures progressives de symétrie. Des travaux anciens nous avez mis déjà sur cette piste avec profit [4,5].

3 Oscillations anharmoniques

Sans entrer dans les détails du cheminement et des justifications qui nous amènent à ce qui suit, rappelons simplement que nous ne cherchons pas à décrire le système dynamique lui-même, objet de la modélisation spécifique de phénomène étudié. Nous observons une oscillation, stable par définition, d'amplitude donnée, et nous supposons que le déploiement de symétrie peut être entièrement exprimé dans la phase.

Alors, tout signal périodique « simple » 2π -périodique (ayant un seul maximum et minimum par période) peut s'écrire

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\Phi(t)) \quad (1)$$

où $\Phi(t)$ est une fonction monotone croissante de t , et $\Phi(t) - t$ est 2π -périodique dans $[0, 2\pi]$. La dynamique de phase est décrite de la manière suivante

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{F}(\Phi) \quad (2)$$

La phase Φ , qui n'est pas la phase ϕ de la forme normale présentée plus haut, définit l'état interne du système et la fonction \mathcal{F} décrit complètement les propriétés d'anharmonicité du signal. Sa structure et sa complexification progressive nous renseigne sur les propriétés non-linéaires du système.

4 Première brisure de symétrie

Lorsque que l'oscillation est harmonique, le fonction \mathcal{F} est linéaire. La perte de linéarité représente l'apparition de l'anharmonicité. La première brisure de symétrie est définie par un axe de symétrie de la vitesse de phase et peut être exprimée par la forme suivant de la fonction \mathcal{F} qui représente la forme la plus simple d'anharmonicité

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1 + r^2 + 2 r \cos(\Phi)}{1 - r^2} \quad (3)$$

avec r dans $[0, 1[$. Elle présente une symétrie de réflexion par rapport à l'axe $\Phi = 0$. Nous parlons de symétrie d'ordre 1. Le paramètre r dans $[0, 1[$ mesure l'amplitude de la brisure. L'harmonicité est atteinte pour $r = 0$ et pour $r = 1$ l'anharmonicité devient infinie. Au delà le système devient excitable (note : ici par construction le période est normalisée à 2π ; dans un système réel quand r tend vers 1 la période tend vers l'infini).

La solution (2π -periodique par construction) est

$$\Phi = 2 \tan^{-1}((1 + r) \sin(t/2), (1 - r) \cos(t/2)) \quad (4)$$

qui peut être inversée :

$$t = 2 \tan^{-1}((1 - r) \sin(\Phi)/2, (1 + r) \cos(\Phi/2)) \quad (5)$$

Nous introduisons de nouvelles *fonctions trigonométriques non-linéaires* hcos, hsin et hder comme suit

$$\begin{aligned} \text{hcos}: (t, r) &\rightarrow \frac{(1 + r^2) \cos(t) - 2 r}{1 + r^2 - 2 r \cos(t)} ; \text{hsin}: (t, r) \rightarrow \frac{(1 - r^2) \sin(t)}{1 + r^2 - 2 r \cos(t)} \\ \text{hder}: (t, r) &\rightarrow \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2 r \cos(t)} \end{aligned}$$

Ces fonctions ont de nombreuses propriétés intéressantes, que nous ne détaillerons pas ici, et qui en font

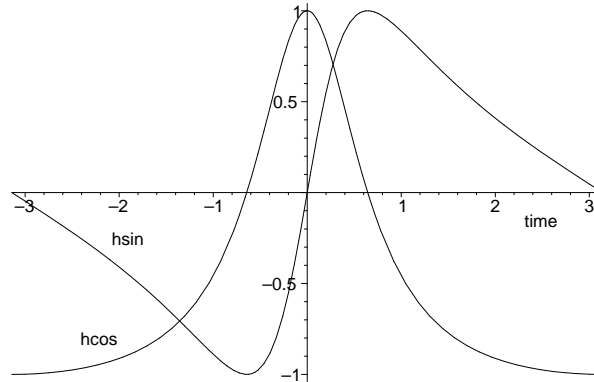


Figure 2. Fonctions hcos et hsin pour $r = 0.5$ en fonction de t .

les premières d'une véritable *trigonométrie non-linéaire*.

$$\begin{aligned} \text{hsin}(t, 0) &= \sin(t), \quad \text{hcos}(t, 0) = \cos(t), \quad \text{hsin}(t, r)^2 + \text{hcos}(t, r)^2 = 1 \\ \frac{d}{dt} \text{hsin}(t, r) &= \text{hcos}(t, r) \text{hder}(t, r), \quad \frac{d}{dt} \text{hcos}(t, r) = -\text{hsin}(t, r) \text{hder}(t, r) \end{aligned}$$

Ells sont reliées aux angles Φ and t par $\text{hcos}(t, r) = \cos(\Phi(t, r))$, $\text{hsin}(t, r) = \sin(\Phi(t, r))$. Un signal périodique quelconque possédant cette symétrie (il faudrait dire dont le dynamique de phase ..) pourra s'exprimer comme

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(\Phi(t) - \phi_0) \quad (6)$$

où ϕ_0 définit l'orientation de l'axe de symétrie. En développant on obtient l'expression de générale suivante

$$x(t) = x_0 + a_1 \text{hcos}(t, r) + b_1 \text{hsin}(t, r) \quad (7)$$

L'angle ϕ_0 définit dont « le point de vue » de l'observation sur une dynamique interne dont la non-linéarité est mesurée par r . Selon la valeur de ϕ_0 , à r fixé, la morphologie du signal varie continument d'une forme « hcos » à une forme « hsin ». On voit là une propriété importante résultant de la non-linéarité : *une translation en phase n'est pas équivalente à une translation en temps*, comme c'est le cas dans le domaine linéaire. A contrario, ce résultat permet de regrouper des morphologies apparemment fort différentes dans une même classe d'équivalence de comportement (voir une illustration plus loin).

5 Deuxième brisure de symétrie

De la même manière, un deuxième axe de symétrie peut être introduit, orthogonal au premier, conduisant à la dynamique de phase suivante (symétrie d'ordre 2)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1 + r^2 - 2r \cos(2\Phi)}{1 - r^2} \quad (8)$$

dont la solution est

$$\Phi = \tan^{-1}((1 - r) \sin(t), (1 + r) \cos(t))$$

De façon similaire à ce qui est indiqué plus haut, nous introduisons alors les nouvelles fonctions trigonométriques suivantes (Fig. 3)

$$\text{hcos2}: (t, r) \rightarrow \frac{(1 + r) \cos(t)}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(2t)}}, \quad \text{hsin2}: (t, r) \rightarrow \frac{(1 - r) \sin(t)}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(2t)}}$$

et comme précédemment, un signal quelconque ayant cette symétrie pourra être exprimé comme

$$x(t) = x_0 + a_2 \text{hcos2}(t, r) + b_2 \text{hsin2}(t, r) \quad (9)$$

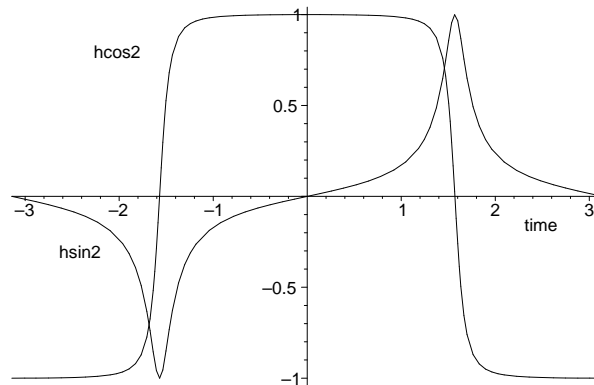


Figure 3. Fonctions hsin2 and hcos2 pour $r = 0.5$.

6 Généralisation

Les deux situations décrites ci-dessus présentent les brisures de symétrie « pures ». La plupart des systèmes réels présentent des comportements formés d'un mélange de ces deux cas, l'un ou l'autre pouvant

être dominant, on parlera de morphologie de type 1 ou 2 selon le cas, ou présentant des distorsions par rapport à ces situations idéales. La dynamique du système n'est généralement pas observée dans cet espace propre. Le besoin d'élargir description revient à considérer des dynamiques de phase de formes plus générales que celles présentées ci-dessus. On peut montrer que les solutions d'équations du type (3) ou (8) font partie des solutions d'une forme plus générale de \mathcal{F} dont elles ne sont qu'un cas particulier :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{F}(\Phi) = \frac{\mathcal{P}(\Phi)}{\mathcal{Q}(\Phi)} \quad (10)$$

où \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des polynômes trigonométriques. Nous avons trouvé la solution générale de ce type d'équation et introduit une nouvelle famille de fonctions trigonométriques non-linéaires permettant d'exprimer de façon simple la solution donnant la phase en fonction de temps ou le temps en fonction de la phase, vision duale du même phénomène. Il n'est pas possible ici de décrire tous ces résultats qui sont en cours de publication. Certains détails sont disponibles ici [6].

7 Illustration

Nous donnons ci-dessous un exemple visuel simplement destiné à évaluer la capacité de cette théorie à représenter avec précision et simplicité une série temporelle typique (Fig. 4).

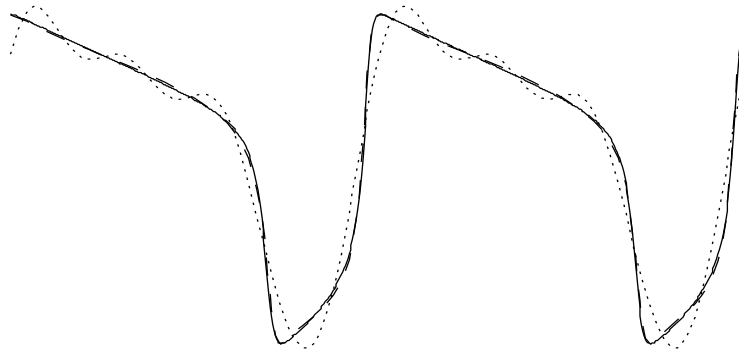


Figure 4. Une série temporelle (ligne continue) présentant une morphologie de type 2 (de tendance carrée) et sa représentation d'après la phase décrite par l'équation 11 (ligne en tirets, à peine distincte du signal) et sa représentation de Fourier à 4 modes (pointillés).

La forme de la fonction de phase est donnée par l'expression qui suit, dans laquelle la fonction $x\sin$, non définie ici, cela exigerait d'autres développements, est de même type que celles déjà introduites. Elle contient deux termes, nombre reflétant le type morphologique, une valeur d'anharmonicité ($r = 0.95$), la position des fronts et leurs contributions et l'angle d'orientation.

$$\Phi = t - 1.3 + 0.8 \, x\sin(t - 6.06, 0.85) + 0.7 \, x\sin(t - 4.43, 0.85) \quad (11)$$

Le signal est représenté simplement par $\cos(\Phi(t))$. La précision est remarquable, pour cette description la plus simple possible pour ce type de morphologie, alors que la représentation de Fourier à 4 modes (8 paramètres) est quantitativement et qualitativement très insuffisante. Une précision du même ordre nécessite plus d'une trentaine de paramètres, bien que les oscillations autour de la forme correcte restent encore présentes.

La figure 5 illustre l'effet d'un décalage de phase ϕ_0 dans $\cos(\Phi(t) - \phi_0)$. Comme déjà indiqué, on constate que ceci n'est pas équivalent à un décalage temporel. La morphologie change considérablement et il n'est pas si facile de reconnaître immédiatement que ces séries temporelles sont « équivalentes », au sens où elles constituent des visions sous un angle différent d'une même dynamique de phase.

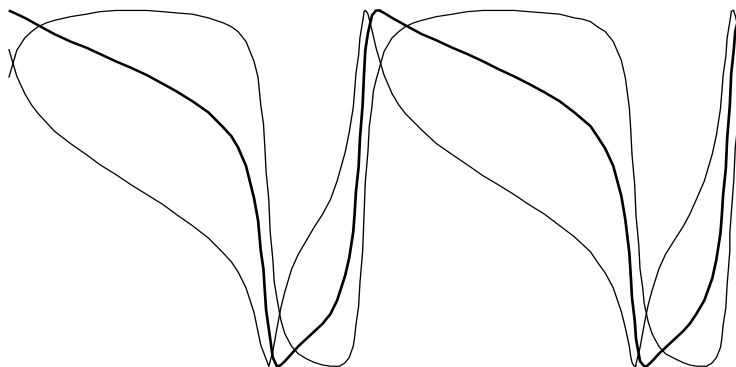


Figure 5. Effet d'un décalage de phase sur la morphologie. Les trois formes obtenues sont « équivalentes » (même $\Phi(t)$ à une constante près), visions différentes d'une même dynamique, selon l'orientation.

8 Conclusion

Tout signal périodique, aussi anharmonique soit-il, peut ainsi être décrit de manière précise par un très petit nombre de termes. La forme de \mathcal{F} nécessaire s'avère étonnamment simple. Chaque paramètre a un sens facilement compréhensible de même nature que ceux introduits dans les formes « pures » déjà vues, degré d'anharmonicité r , angle d'observation ϕ_0 . La pondération entre les termes exprime soit la contribution des deux formes pures, soit la localisation de la non-linéarité dans le domaine de phase (non abordé ici).

Parmi les propriétés importantes il faut citer « l'orthogonalité » des paramètres ou indépendance des différentes mesures : période, amplitude, degré d'anharmonicité, orientation, localisation. Varier l'une de ses mesures en laissant les autres fixes permet de balayer des morphologies variées qui trouvent ainsi leur lien de parenté ou d'équivalence. Le forme de la dynamique de phase décrite par \mathcal{F} s'avère aussi constituer une signature de la dynamique du système. Il est ainsi possible de savoir si le système est proche d'une bifurcation globale, de type « nœud-col » ou de type « boucle homocline », par exemple. Également remarquable est la propriété de stabilité qualitative de la représentation lorsqu'on accepte une précision réduite. Aucun artefact qualitatif, non physique, n'est observé (cf. phénomène de Gibbs dans la représentation de Fourier). La simplification obtenue ne dégrade pas le caractère anharmonique. Tout au plus élimine-t-on les distorsions morphologiquement moins significatives pour obtenir les formes plus « pures » comme celles décrites plus haut.

Il est assez clair que ces résultats, ainsi que les outils développés à cette occasion, bien plus nombreux que ceux qui sont abordés ou suggérés ici, constituent une percée majeure dans la description des phénomènes périodiques non-linéaires.

Références

1. M. GOLUBITSKY & D. G. SCHAEFFER, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. 1, Springer-Verlag (1985)
2. J. E. MARSDEN & M. MCCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, (1976)
3. J. GUCKENHEIMER & P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, (1983)
4. P. HANUSSE, V. PEREZ-MUÑUZURI & M. GOMEZ-GESTEIRA, Relaxation behavior and pattern formation in reaction-diffusion systems, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **4** (5), 1183-1191 (1994)
5. P. HANUSSE & M. GOMEZ-GESTEIRA, Towards a normal form for spiral waves, *Physica Scripta*, **67**, 117-120 (1996)
6. P. HANUSSE, A novel approach to anharmonicity for a wealth of applications in nonlinear science Technologies, *AIP Conference Proceedings*, **1139** (1), 303-308 (2011)

Spectres spatio-temporels d'un écoulement turbulent de von Kármán

Eric Herbert¹, Brice Saint-Michel, François Daviaud, Bérangère Dubrulle, & Vincent Padilla

CEA Saclay IRAMIS/SPEC/SPHYNX, CNRS URA2464, 91191 Gif sur Yvette cedex
eric.herbert@cea.fr

Résumé. Nous présentons une étude du spectre spatio-temporel d'un écoulement pleinement turbulent ($Re > 10^5$) de von Kármán calculé à partir du champ de vitesse azimutal obtenu grâce à une PIV stéréoscopique. Nous montrons que la statistique disponible permet de mettre en évidence des structures de grande échelle dans l'écoulement et de caractériser leur géométrie. Nous rapportons également des estimations quantitatives de leurs échelles spatiales (radiale et axiale) et temporelles (vitesse et sens de rotation).

Abstract. We report the observation of the spatio-temporal spectrum of a fully turbulent ($Re > 10^5$) von Kármán flow. Spectra are computed using the azimuthal velocity field obtained thanks to a stereoscopic PIV. We show that available statistics allows us to show the existence of large scale structures in the flow. We also report measurements of their spatial (radial and axial) and temporal scales (velocity and direction of rotation).

1 Introduction

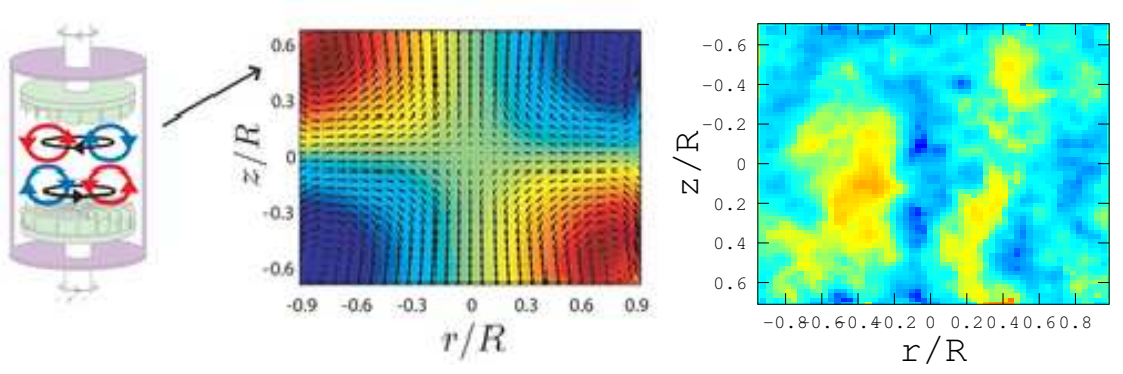
Dans le domaine de la turbulence hydrodynamique les études expérimentales sont généralement localisées en espace et résolues en temps contrairement aux prédictions théoriques et aux simulations numériques qui sont orientées vers l'espace de Fourier. La comparaison entre théorie et expérience est alors rendue possible en utilisant l'hypothèse de Taylor qui relie les échelles de temps et les échelles d'espace. Cela fait cependant plusieurs décennies que l'on mesure des spectres spatiaux à l'aide de plusieurs capteurs disposés sur une grille ou plus récemment grâce à la technique de Vélocimétrie par Image de Particule (PIV). Cette dernière a fortement amélioré la résolution spatiale bidimensionnelle de la mesure de la vitesse et donc celle du spectre bidimensionnel $E(\mathbf{k})$. Certaines études précoces utilisant des PIV particulièrement optimisées dans un écoulement turbulent ont obtenu un impressionnant nombre de pas de temps (par exemple 19200 images dans [1]) mais celles ci visaient la convergence statistique des vitesses mesurées plutôt que l'étude du spectre spatio-temporel. Pour un système expérimental plus classique, la composante fréquentielle restait difficile à atteindre en raison de la limitation du nombre de pas de temps accessible, typiquement quelques centaines d'images [2].

Avec l'amélioration des capacités de traitement informatique, des mesures du spectre spatio-temporel $E(\mathbf{k}, \omega)$ dans le domaine de la turbulence d'ondes à la surface d'un liquide [3] ou d'une plaque [4] ont été obtenues récemment, grâce à des acquisitions de quelques milliers d'images.

En nous appuyant sur les résultats expérimentaux accumulés au laboratoire sur un écoulement turbulent de von Kármán, nous voulons montrer la faisabilité de l'accès simultané aux domaines fréquentiel et spatiaux en turbulence hydrodynamique à trois dimensions, c'est-à-dire de la détermination précise des spectres spatio-temporels $E(\mathbf{k}, \omega)$ de chacune des composantes de la vitesse. Celles-ci sont obtenues grâce à une PIV stéréoscopique (les trois composantes de la vitesse sont mesurées dans un plan) permettant l'acquisition de séries temporelles suffisamment longues.

2 Spectre spatio-temporel dans un écoulement pleinement turbulent

Pour illustrer le potentiel de cette mesure, nous présentons les résultats obtenus dans un écoulement axisymétrique spécifique dit de von Kármán, généré par deux turbines contra-rotatives disposées l'une au



(a) Schéma de l'écoulement et champ de vitesse moyen

(b) Fluctuations de la vitesse azimutale

Figure 1. Schéma de la topologie (a) de l'écoulement turbulent de von Kármán lorsque $Re = 800\,000$ et $\theta = 0$ dont le champ de vitesse moyen correspondant est également représenté. Les flèches représentent la vitesse poloidale (\bar{u}_r, \bar{u}_z) tandis que les niveaux de couleurs (de bleu à rouge) représentent la vitesse azimutale (ou toroidale \bar{u}_ϕ). Les fluctuations de la vitesse azimutale $u_\phi' = u_\phi - \bar{u}_\phi$ (b) sont représentée à un instant.

dessus de l'autre dans une cuve cylindrique (Fig. 1). Les dimensions de ce cylindre sont les suivantes : rayon $R = 100$ mm et hauteur entre les turbines $H = 180$ mm. Les turbines ont un diamètre de $2R_t = 185$ mm sur lesquelles sont disposées 16 lames incurvées de 20 mm de hauteur. Celles ci sont mises en rotation par deux moteurs indépendants. On trouvera plus de détail sur l'expérience dans [5]. Les fréquences de rotation de chaque moteur sont respectivement f_1 et f_2 . La fréquence moyenne de rotation est donc $f = (f_1 + f_2)/2$. Ce dispositif expérimental possède la propriété d'être invariant selon la rotation \mathcal{R}_π le long de tous les axes radiaux passant par le milieu du cylindre. On peut briser cette symétrie à l'aide d'un forçage asymétrique dont on contrôle l'amplitude avec le paramètre $\theta = (f_1 - f_2)/(f_1 + f_2)$

Lorsque $\theta = \pm 1$ une des deux turbines est à l'arrêt. Au voisinage de $\theta = 0$ l'écoulement est divisé en deux cellules de recirculations séparées par une couche de cisaillement. Lorsque $f_1 = f_2$ et donc $\theta = 0$ l'écoulement est en contra-rotation exacte et la couche de cisaillement est située à mi-distance entre les deux turbines. Lorsque $|\theta|$ augmente celle ci se décale vers la turbine la plus lente jusqu'à l'atteindre. À ce moment l'écoulement n'est plus constitué que d'une seule cellule de recirculation.

Les turbines tournent à une fréquence comprise entre 1 et 10 Hz. Le sens de rotation est tel que la partie concave de chaque lame est en amont (défini comme le sens positif selon [5]). Le liquide est composé d'eau pure et par conséquent le nombre de Reynolds accessible ($Re = 2\pi f R^2 \nu^{-1}$ avec ν la viscosité cinématique) est compris dans la gamme 10^5 à 10^6 . Nous sommes donc toujours dans un régime de turbulence pleinement développée [6].

Les mesures de vitesse sont faites à l'aide d'une S-PIV (stereoscopic Particle Image Velocimetry) dans un plan méridien (Fig. 1). Nous disposons des trois composantes de la vitesse, radiale $v_r(r, z)$, verticale $v_z(r, z)$ et azimutale $v_\phi(r, z)$ sur une fenêtre contenant l'ensemble de l'écoulement et constituée de 58×63 points ayant chacun une taille de 3 mm de côté. La mesure est reproduite avec une fréquence d'échantillonnage comprise entre 2 et 15 Hz. La longueur des séries temporelles est comprise entre 2400 et 4200 images. Les fluctuations de la vitesse sont ensuite obtenues en retranchant le champ moyen du champ de vitesse instantané. Dans la suite, nous ne discuterons que des fluctuations de la composante azimutale v_ϕ de la vitesse. La première étape du calcul du spectre spatio-temporel est de calculer la transformée de Fourier spatiale à 2 dimensions $\tilde{v}_{2D}(\mathbf{k}, t)$ de la vitesse pour chaque instant t . Puis on calcule la transformée de Fourier temporelle de \tilde{v}_{2D} sur une fenêtre composée de Nt pas de temps. On obtient $\tilde{v}_{3D}(\mathbf{k}, f)$. Enfin on en déduit le spectre spatio-temporel à 3 dimensions $E(\mathbf{k}, \omega) = |\tilde{v}_{3D}|^2$.

3 Isotropie

Dans un premier temps nous allons nous intéresser à l'isotropie du système. En intégrant $E(\mathbf{k}, \omega)$ sur toutes les fréquences on obtient le spectre spatial à 2 dimensions $E(\mathbf{k}) = E(k_x, k_z)$ que l'on a représenté Fig. 2 pour deux valeurs de θ . On observe que l'énergie est préférentiellement distribuée le long de l'axe k_x . De plus et contrairement à l'intuition, l'anisotropie semble plus importante lorsque le forçage est parfaitement symétrique à $\theta = 0$. Pour quantifier cet effet on calcule l'allongement, c'est à dire le rapport l/h entre la hauteur h et la largeur l d'un ajustement ellipsoïdal (Fig. 2) $(r/l)^2 + (z/h)^2 = 1$ centré en 0. On a donc pour un écoulement parfaitement isotrope $l/h = 1$. On a représenté Fig. 3 ce rapport pour différentes valeurs de $|\theta|$. On constate que l'allongement est maximal pour un forçage proche de la symétrie. Autour de $|\theta| \approx 0.12$ l'allongement diminue brutalement puis se stabilise sur un plateau pour les forçages les plus asymétriques. Lorsque $\theta \approx 0.125$ il est connu [5] que la couche de cisaillement atteint la turbine la plus lente. À ce moment il n'y plus qu'une seule cellule de recirculation. S'il est donc intuitif d'observer un effet sur la symétrie de l'écoulement pour cette valeur de θ , il est par contre paradoxal d'observer que l'isotropie diminue avec θ .

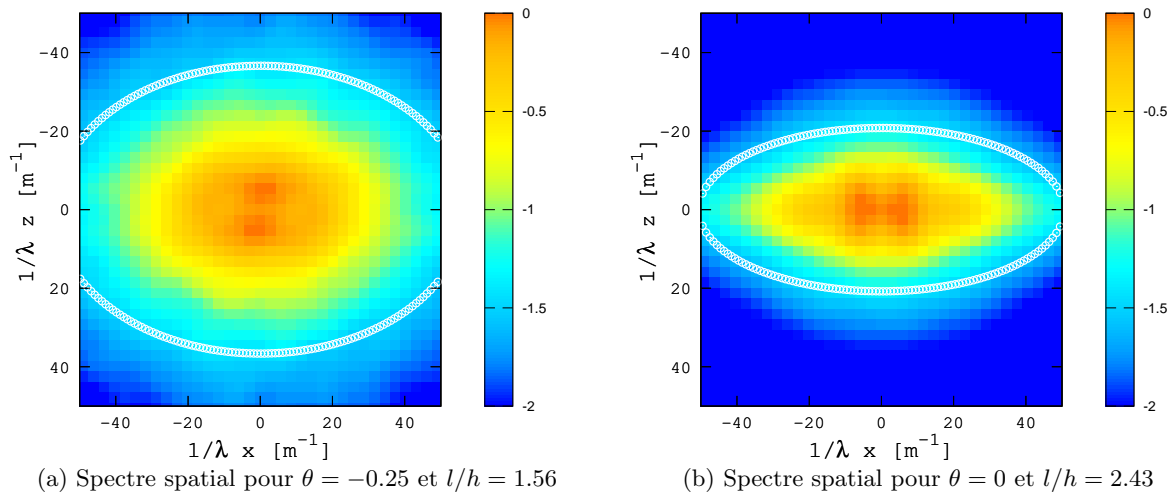


Figure 2. Spectres spatiaux $E(k_x, k_z)$ à $Re = 800\,000$ de la composante azimutale de la vitesse. On a représenté en blanc l'ajustement ellipsoïdal centré en 0 de la partie centrale, de hauteur h et de largeur l . L'allongement est l/h est précisé.

Pour discuter la nature de cette anisotropie, nous allons regarder plus précisément la distribution de l'énergie dans les deux directions de l'espace. L'origine de l'anisotropie se trouve dans l'existence de maxima de l'énergie à des longueurs d'ondes $\lambda_v \approx 10\text{ m}^{-1}$ de l'ordre du rayon de la turbine R_t (Fig. 2) bien définis le long de k_x . Ces maxima sont la signature d'une structure de grande échelle dans l'écoulement. On a vu que l'anisotropie était dépendante de θ , nous allons donc regarder l'évolution de ces structures en fonction de ce paramètre. Pour cela on a représenté Fig. 3 une coupe de $E(k_x, k_z)$ le long de $k_z = 0$ pour différentes valeurs de θ . Cette structure de grande échelle voit sa taille conservée au voisinage de $\theta = 0$ puis disparaît entre $\theta = 0.06$ et $\theta = 0.12$ lorsque la couche de cisaillement atteint la turbine. Elle lui est donc intrinsèquement liée et est à l'origine du maximum d'anisotropie observé pour le forçage le plus symétrique. Grâce à l'étude du spectre spatial nous connaissons donc les échelles spatiales de cette structure. Sa longueur d'onde en k_z est plus grande que la taille de la fenêtre de mesure, c'est-à-dire de la cuve cylindrique, et sa longueur d'onde en k_x est de l'ordre de R_t . Enfin puisque nous retranchons l'écoulement moyen nous savons que cette structure est en rotation. Nous allons voir dans la suite comment caractériser ses échelles temporelles.

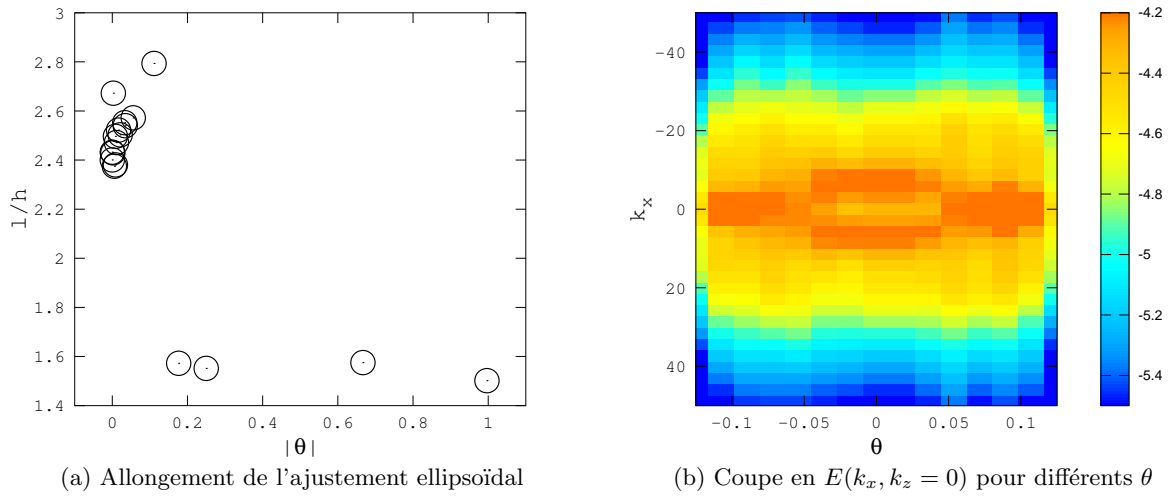


Figure 3. Allongement de l'ajustement ellipsoïdal (a) défini Fig. 2 en fonction de la valeur absolue de l'asymétrie du forçage $|\theta|$. La couche de cisaillement atteint la turbine la plus lente à $|\theta| \approx 0.125$. Coupe en $E(k_x, k_z = 0)$ pour différents θ (b).

4 Caractérisation temporelle des grandes structures.

En intégrant $E(\mathbf{k}, f)$ le long de k_z , on obtient le spectre des fluctuations de vitesse spatio-temporel le long de k_x , $E(k_x, f)$, voir Fig. 4. L'énergie est préférentiellement distribuée autour de la même échelle spatiale décrite au dessus. On peut à présent lui associer une fréquence $f_v \approx 0.45$ Hz. Autrement dit $t_v = 1/f_v$ représente le temps caractéristique de passage de la structure dans le plan méridien de la cuve. On observe de plus pour les fréquences positives un maximum plus intense pour k_v positif.

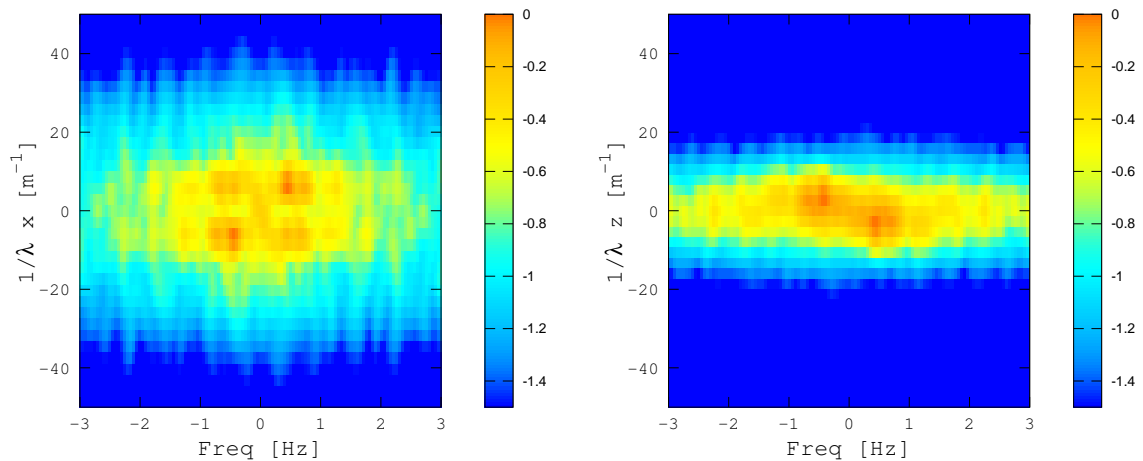


Figure 4. Spectre Spatio-temporel $E(k_x, f)$ à gauche, $E(k_z, f)$ au milieu avec $\theta = 0$, $Re = 10^6$.

En intégrant cette fois le long de k_x on obtient $E(k_z, f)$. Il n'y a plus de maxima marqué à des longueurs d'ondes bien déterminées cependant on distingue un léger décalage de k_z à la fréquence f_v tel

que lorsque $f > 0$ on a $k_z < 0$. Cela signifie que la structure observée le long de k_x possède une échelle spatiale verticale comparable à la taille de l'écoulement.

Ce décalage représente le sens de rotation de la structure. Pour s'en convaincre on a représenté Fig. 5 un vortex qui remplit toutes les conditions précédentes. Si on fait la coupe méridienne d'un tel vortex en rotation telle que $u_\phi > 0$ (sens horaire vu du dessus) autour de la cuve, on voit une onde se propager vers les k_z négatifs.

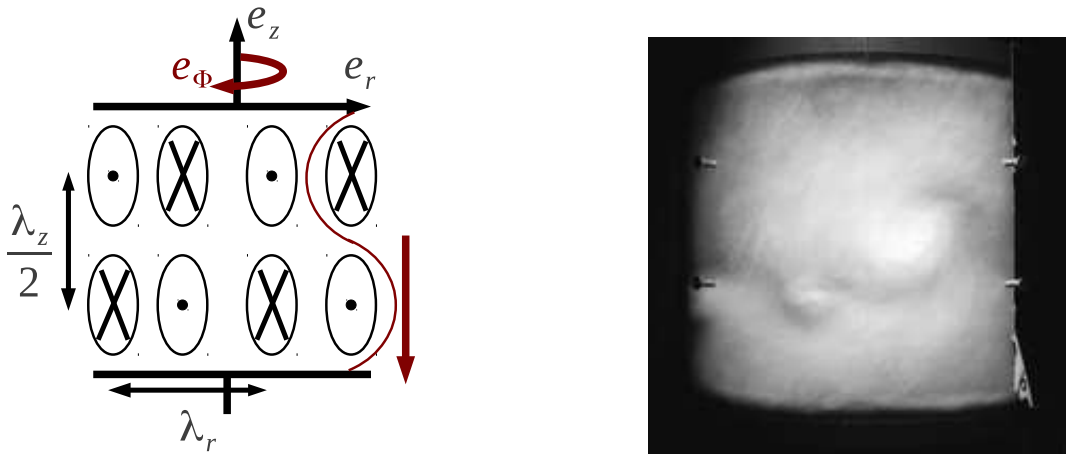


Figure 5. À gauche on a représenté une configuration de couple de vortex de la couche de cisaillement correspondant aux données expérimentales et les échelles spatiales attendues. En rouge on représenté le défilement attendu de la vitesse azimutale généré par la rotation dans le sens \mathbf{e}_ϕ d'un tel couple de vortex dans le plan méridien. À droite, photographie d'un vortex de la couche de cisaillement obtenue en utilisant des bulles comme traceurs de l'écoulement.

Ces structures sont à rapprocher des structures azimutales à grande échelle observées dans [6] qui sont des vortex dus à la déstabilisation de la couche de cisaillement et dont on montre une photo figure 5. Ce schéma permet de comprendre l'origine des différentes échelles spatiales. Le long de k_z on ne peut observer qu'une demi longueur d'onde tandis que le long de k_x et suivant la disposition des vortex et leur nombre, on voit apparaître différentes longueurs d'ondes. Ce travail de rapprochement fera l'objet d'une publication ultérieure.

Remerciements

Nous tenons à remercier Arnaud Chiffaudel, Cécile Gasquet et Pierre-Philippe Cortet pour leur aide précieuse.

Références

1. K. NISHINO, N. KASAGI & M. HIRATA, Three-dimensional particle tracking velocimetry based on automated digital image processing, *Journal of Fluids Engineering*, **111**, 384-391 (1989)
2. R. J. ADRIAN, Twenty years of particle image velocimetry, *Experiments in Fluids*, **39**, 159-1691 (2005)
3. E. HERBERT, N. MORDANT & E. FALCON, Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid, *Physical Review Letters*, **105** (14), 144502 (2010)
4. P. COBELLI, P. PETITJEANS, A. MAUREL, V. PAGNEUX & N. MORDANT, Space-time resolved wave turbulence in a vibrating plate, *Physical Review Letters*, **103** (20), 204301 (2009)
5. P.-P. CORTET, E. HERBERT, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE & V. PADILLA, Susceptibility divergence, phase transition and multistability of a highly turbulent closed flow, *Journal of Statistical Mechanics*, P07012 (2011)
6. F. RAVELET, A. CHIFFAUDEL & F. DAVIAUD, Supercritical transition to turbulence in an inertially driven von Karman closed flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **601**, 339-364 (2008)

Topologie et observabilité d'un modèle chaotique de cancer

Christophe Letellier¹, Fabrice Denis² & Luis A. Aguirre³

¹ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex, France

² Centre Jean Bernard, Le Mans, France

³ Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Av. Antônio Carlos 6627, Pampulha, Belo Horizonte, MG, Brazil

Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé. Un modèle relativement simple de croissance de tumeurs mettant en interaction — sur un unique site tumoral — des cellules hôtes, des cellules immunitaires effectrices et des cellules tumorales [4] est ici étudié. Ce modèle, dont la structure algébrique est fréquemment rencontrée sur d'autres modèles de cancer, repose sur la compétition et les interactions entre ces différentes populations de cellules. Il peut expliquer plusieurs aspects importants de la dynamique de croissance d'un cancer en fonction de celle des autres cellules du corps, telles que les cellules du système immunitaire et les cellules du tissu environnant.

Abstract. A rather simple model for tumor growth describing the interactions — on a single tumor-site compartment — between host cells, effector immune cells and tumor cells is investigated. This model, whose algebraic structure is frequently observed in various cancer models, is based on competing populations of cells. It can explain few relevant features of the dynamics underlying cancer evolution in terms of the other cell dynamics as those of effector immune cells and the surrounding tissue.

1 Introduction

Les oncologues sont quotidiennement confrontés au fait que chaque patient présente un cancer spécifique. Ils doivent pourtant prédire l'évolution de celui-ci sur la base d'une simple loi statistique basée sur le devenir de populations de patients ayant une maladie plus ou moins comparable et sur le modèle « linéaire-quadratique » (sic) [1], utilisé pour modéliser la courbe de survie des cellules cancéreuses après un traitement par radiothérapie. Ce dernier modèle présente un défaut de fiabilité, principalement parce que la dynamique liée aux interactions entre les cellules cancéreuses et les cellules environnantes (immunitaires, endothéliales, stromales environnantes) n'est pas prise en compte. De manière à mieux prendre en compte la dynamique intrinsèque de ce système à plusieurs populations cellulaires (saines et tumorales), de nombreux modèles mathématiques d'interactions cellulaires ont été proposés mathématiques des interactions cellulaires ont été proposés (voir [2,3,4,5], par exemple).

Malgré les validations très imparfaites de ces modèles par confrontation à des données expérimentales, ces modèles peuvent déjà permettre d'enrichir la compréhension de certains problèmes de cancérologie [6] et de stimuler de nouvelles directions de recherches. Nous avons choisi d'étudier un modèle impliquant des cellules hôtes, des cellules immunitaires effectrices et des cellules tumorales [4]. Ce modèle a été choisi pour sa dynamique chaotique. Nous montrerons qu'une analyse dynamique approfondie nous permet de dégager des tendances dans les interactions entre les cellules en compétition.

2 Le modèle et ses points singuliers

Le modèle repose sur des équations de Lotka-Volterra mettant en jeu une population x de cellules hôtes, une population y de cellules immunitaires effectrices et une population z de cellules tumorales.

Après normalisation des populations, le modèle s'écrit [4]

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho_1 x(1-x) - \alpha_{13} xz \\ \dot{y} = \frac{\rho_2 yz}{1+z} - \alpha_{23} yz - \delta_2 y \\ \dot{z} = z(1-z) - xz - \alpha_{32} yz. \end{cases} \quad (1)$$

Ce modèle définit en fait un modèle de populations en compétition sur une niche écologique donnée, plutôt qu'un modèle proies-prédateurs. De ce fait, il n'y a pas à proprement parler de proies. Les différentes populations sont donc plongées dans un milieu très agressif où aucune population ne contribue à la croissance d'une autre. Il est à noter qu'il n'y a pas d'interactions directes entre cellules hôtes et cellules immunitaires. De ce point de vue, les cellules tumorales peuvent être vues comme des compétiteurs « généralistes » tandis que les deux autres sont des compétiteurs « spécialistes », pour reprendre la terminologie couramment utilisée en écologie.

La dynamique de ce modèle va être étudiée pour les valeurs des paramètres choisies comme suit :

$$\begin{cases} \rho_1 = 0.6 & \text{taux de croissance des cellules hôtes} \\ \alpha_{13} = 1.5 & \text{taux de mortalité des cellules tumorales dû aux cellules hôtes} \\ \rho_2 = 4.5 & \text{taux de croissance des cellules immunitaires effectrices} \\ \alpha_{23} = 0.2 & \text{taux d'inhibition des cellules immunitaires effectrices par les cellules tumorales} \\ \delta_2 = 0.5 & \text{taux de mortalité des cellules immunitaires} \\ \alpha_{32} = 2.5 & \text{taux de « destruction » des cellules immunitaires par les cellules tumorales,} \end{cases} \quad (2)$$

lorsque ce n'est pas spécifié. Pour ces valeurs, le système produit un attracteur chaotique (Fig. 1) structuré autour de cinq des sept points singuliers du système. En effet, deux d'entre eux sont inessentiels à la dynamique, dans la mesure où ils correspondent à des populations négatives, ce qui n'a pas de sens biologique. Les directions propres des cinq points singuliers restant gouvernent la structure de l'attracteur, notamment sa configuration anguleuse au voisinage du point singulier S_0 localisé à l'origine de l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x, y, z)$: ce point correspond à l'extinction des trois populations.

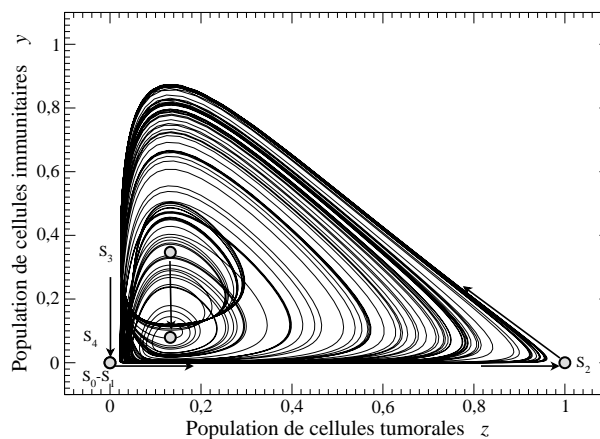


Figure 1. Attracteur chaotique solution du modèle de cancer (1) représenté avec les points singuliers et certains de leurs vecteurs propres. Paramètres comme indiqués Eq. (2).

Le point singulier $S_1 = (1, 0, 0)$ correspond à la survie des seules cellules hôtes : c'est un nœud marginalement stable. Le point $S_2 = (0, 0, 1)$ correspond à la prolifération des cellules tumorales conduisant à la disparition des deux autres populations, c'est-à-dire à la mort de l'individu : il s'agit d'un col. Le point

$S_3 = (0, 0.347, 0.133)$ est associé à une situation où seules des cellules immunitaires co-existent avec des cellules tumorales : c'est un col-foyer dont le voisinage n'est pas « entouré » par l'attracteur (Fig. 1). Le point $S_4 = (0.669, 0.080, 0.133)$ correspond à la co-existence des trois populations de cellules : il s'agit d'un col-foyer dont le voisinage est au cœur de l'attracteur. Ces deux points singuliers sont essentiels à la structure de l'attracteur dans la mesure où la variété singulière de dimension 1 les connectant [7] pilote la structure en « entonnoir » de l'attracteur, exactement comme cela se passe pour l'attracteur du système de Rössler [8]. C'est de cette structuration autour de ces deux col-foyers que va provenir la grande similitude entre la topologie de cet attracteur et celle de l'attracteur solution du système de Rössler.

3 Coefficients d'observabilité

Lorsqu'une simple série temporelle scalaire est « mesurée » sur un système dynamique $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, il est connu depuis longtemps en théorie du contrôle qu'il n'est pas garanti que tout état $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ puisse être reconstruit (observé) dans l'espace \mathbb{R}^m défini sur les coordonnées de reconstruction $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq m$) qui correspondent typiquement à des coordonnées décalées ou dérivées [9]. De manière à déterminer si le système est observable (dans ce cas, tout état $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ peut être reconstruit dans $\mathbb{R}^n(\mathbf{X})$), nous introduisons la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}) = \left[\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^0(\mathbf{x}) \quad \frac{d\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^1}{ds}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \frac{d\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^n}{ds}(\mathbf{x}) \right]^T \quad (3)$$

où $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^k$ sont les dérivées de Lie. Le système est dit être complètement observable si $\mathcal{O}^T \mathcal{O}$ est de rang plein. La matrice d'observabilité correspond à la matrice Jacobienne du changement de variables permettant de passer de l'espace des états original $\mathbb{R}^m(\mathbf{x})$ à l'espace reconstruit $\mathbb{R}^n(\mathbf{X})$ lorsque les dérivées sont utilisées [10]. La variété singulière d'observabilité associée aux états $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ qui ne peuvent être reconstruits est définie par la condition $\text{Det}[\mathcal{O}^T \mathcal{O}] = 0$. Lorsque ce déterminant est différent de zéro pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m(\mathbf{x})$, le système est dit être observable et il existe un difféomorphisme entre l'espace des états original $\mathbb{R}^m(\mathbf{x})$ et l'espace reconstruit $\mathbb{R}^n(\mathbf{X})$.

De manière à éviter une réponse binaire — oui ou non — nous avons introduit des coefficients d'observabilité qui peuvent être estimés numériquement selon [11,10]

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{|\lambda_{\min}[\mathcal{O}_s^T \mathcal{O}_s, \mathbf{x}(t)]|}{|\lambda_{\max}[\mathcal{O}_s^T \mathcal{O}_s, \mathbf{x}(t)]|}, \quad (4)$$

où $\lambda_{\max}[\mathcal{O}_s^T \mathcal{O}_s, \mathbf{x}(t)]$ indique la valeur maximum prise par la valeur propre de la matrice $\mathcal{O}_s^T \mathcal{O}_s$ estimée au point $\mathbf{x}(t)$ (et similairement pour λ_{\min}), et où $(\cdot)^T$ indique la transposition de la matrice. Ainsi, $0 \leq \delta(\mathbf{x}) \leq 1$, et la borne inférieure est atteinte lorsque le système est inobservable au point \mathbf{x} . La valeur moyenne du coefficient $\bar{\delta}$ estimée le long d'une trajectoire visitant suffisamment l'attracteur est alors utilisée.

Dans le cas du modèle de cancer (1), les coefficients d'observabilité obtenus sont

$$\bar{\delta}_x = 0.021 > \bar{\delta}_z = 0.015 > \bar{\delta}_y = 0.001,$$

indiquant que la variable x (les cellules hôtes) constitue la meilleure observable et la variable y (les cellules immunitaires) la plus mauvaise. Selon les relations entre coefficients d'observabilité et qualité de synchronisation [12] ou de contrôle [13], la dynamique sous-jacente au modèle de cancer sera observée de manière plus fiable par l'intermédiaire des cellules hôtes (variable x) que par les autres cellules. Les cellules tumorales fournissent encore une information relativement fiable, mais observer une évolution de cancer par la population de cellules immunitaires ne conduirait pas à un suivi fidèle de la dynamique. Du point de vue des thérapies, ces résultats suggèrent de contrôler la dynamique en agissant plutôt sur la population de cellules hôtes. Agir sur les populations tumorales — en les détruisant par exemple — est également efficace mais tenter une action sur les cellules immunitaires se révèle plutôt inefficace. Ce dernier résultat est à rapprocher de l'efficacité relativement faible des vaccins contre le cancer [14].

Dans le cas où nous serions capables de suivre simultanément deux populations parmi les trois impliquées dans ce modèle, nous aurions trois possibilités : suivre x et y , y et z , et enfin x et z . Pour chaque cas, il y a alors deux possibilités pour produire un espace reconstruit tridimensionnel, en utilisant la dérivée soit de la première, soit de la seconde population. Utilisant la procédure d'analyse d'observabilité multivariable développée dans [15], nous obtenons

$$\begin{aligned} - \mathbb{R}^3(x, \dot{x}, y) : \delta_{x^2 y} &= 0.29; & - \mathbb{R}^3(x, y, \dot{y}) : \delta_{y^2 x} &= 0.08; \\ - \mathbb{R}^3(y, \dot{y}, z) : \delta_{y^2 z} &= 0.00 \text{ (inobservable)}; & - \mathbb{R}^3(y, z, \dot{z}) : \delta_{z^2 y} &= 0.01; \\ - \mathbb{R}^3(x, \dot{x}, z) : \delta_{x^2 z} &= 0.00 \text{ (inobservable)}; & - \mathbb{R}^3(z, \dot{z}, x) : \delta_{z^2 x} &= 0.08. \end{aligned}$$

Selon ces coefficients d'observabilité, observer les cellules tumorales avec une autre population dont la dérivée est utilisée comme troisième variable ne fournit pas d'espace reconstruit fiable, c'est-à-dire où tout état du modèle puisse être observé. Lorsque la dérivée de la population de cellules tumorales est utilisée et que l'une des deux populations restantes est ajoutée, la situation n'est guère meilleure. La seule configuration relativement bonne est d'utiliser la population de cellules hôtes couplée avec les cellules immunitaires : ceci pourrait indiquer qu'une thérapie agissant sur le couplage cellules hôtes-cellules immunitaires pourrait se révéler être une stratégie efficace.

4 Analyse topologique de la dynamique

Nous choisissons de commencer notre analyse par l'étude des bifurcations lorsque le taux de croissance ρ_1 des cellules hôtes est varié. Le diagramme de bifurcations ainsi obtenu (Fig. 2a) commence par un cycle limite de période 1. Il est suivi par une cascade de doublements de période. L'attracteur chaotique alors observé au-delà du point d'accumulation doit par conséquent être caractérisé par une application unimodale lisse. Plusieurs fenêtres périodiques peuvent ensuite être observées. L'intervalle des fluctuations de la population de cellules hôtes (Fig. 2a) et des cellules tumorales (Fig. 2b) augmente avec le taux de croissance ρ_1 , et ce jusqu'à $\rho_1 \approx 0.54$: entre le cycle limite de période 1 et l'attracteur de plus grande taille, de nombreuses orbites périodiques ont été créées. Au-delà de cette valeur, l'élagage des orbites périodiques devient prépondérant sur la création de nouvelles orbites, et les intervalles de fluctuations des populations se réduisent. Ceci est une signature de l'anti-monotonie [16] qui requiert la présence d'au moins trois branches sur l'application de premier retour.

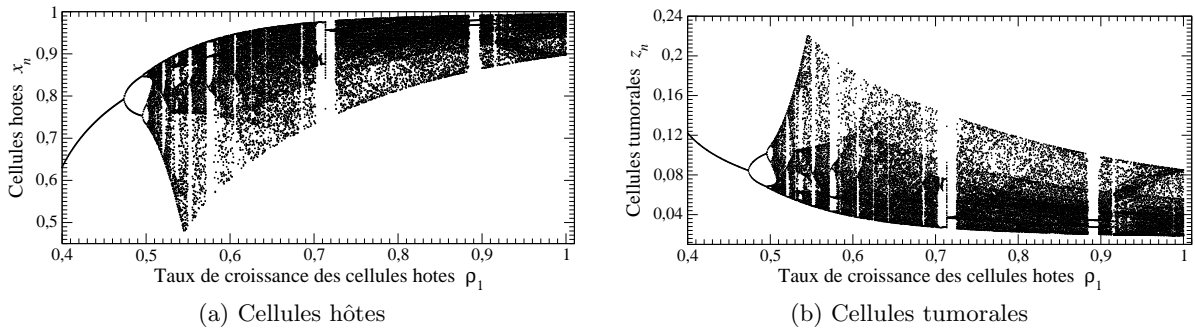


Figure 2. Diagramme de bifurcations du modèle de cancer (1) en fonction du taux de croissance des cellules hôtes. Les autres paramètres sont définis Eq. (2).

Ceci implique que si le taux de croissance des cellules hôtes est suffisamment augmenté, ces cellules deviennent suffisamment « fortes » pour résister aux cellules cancéreuses et proliférer plus rapidement que ces dernières. Une stratégie possible serait alors de stimuler la croissance des cellules hôtes. Associé à la bonne observabilité fournie par la population de cellules hôtes, agir sur les cellules hôtes plutôt que sur les cellules tumorales pourrait constituer une stratégie intéressante comme cela est parfois observé [17,18,19]. Il faut toutefois que ce dopage soit suffisant car une augmentation trop faible du taux de croissance

déstabilise la dynamique des populations et conduit à de larges fluctuations des cellules tumorales avec, notamment, de fort pics. Selon ce modèle, la présence des cellules tumorales déstabilise les interactions entre populations et conduit à de grandes fluctuations de l'ensemble des populations : précisons que les maxima de la population de cellules tumorales correspondent grossièrement à des minima de la population de cellules hôtes, et *vice versa*. Il est très probable que ces fortes fluctuations puissent prendre un caractère délétère et entraîner le patient vers une évolution irréversible de son cancer.

Un second diagramme de bifurcations (non représenté ici) a été calculé en fonction du taux de mortalité des cellules tumorales induite par les cellules immunitaires. Aucune bifurcation particulière n'a été observée sur de grandes plages de variation du coefficient α_{32} . Nous avons vérifié que ce paramètre n'avait aucune influence sur la dynamique : toutefois, il doit être différent de zéro, sous peine de déstabiliser complètement la dynamique et d'éjecter la trajectoire à l'infini. L'intérêt thérapeutique de ce paramètre se révèle donc être très limité, comme le confirme les protocoles négatifs menés en immunothérapie [20,21].

Nous choisissons maintenant de réaliser l'analyse topologique de l'attracteur correspondant à l'application de premier retour unimodale la plus développée. Ceci survient pour une valeur de ρ_1 légèrement inférieure à celle pour laquelle l'intervalle des fluctuations est maximum, c'est-à-dire pour $\rho_1 = 0.518$. L'attracteur est représenté dans une projection $x-\dot{x}$ ainsi choisie car simplifiant l'analyse. L'attracteur se présente comme un ruban simplement étiré et replié (Fig. 3a) comme l'est l'attracteur de Rössler [8]. L'analyse topologique complète confirme que cet attracteur est bien caractérisé par un gabarit identique à celui obtenu pour l'attracteur de Rössler [8].

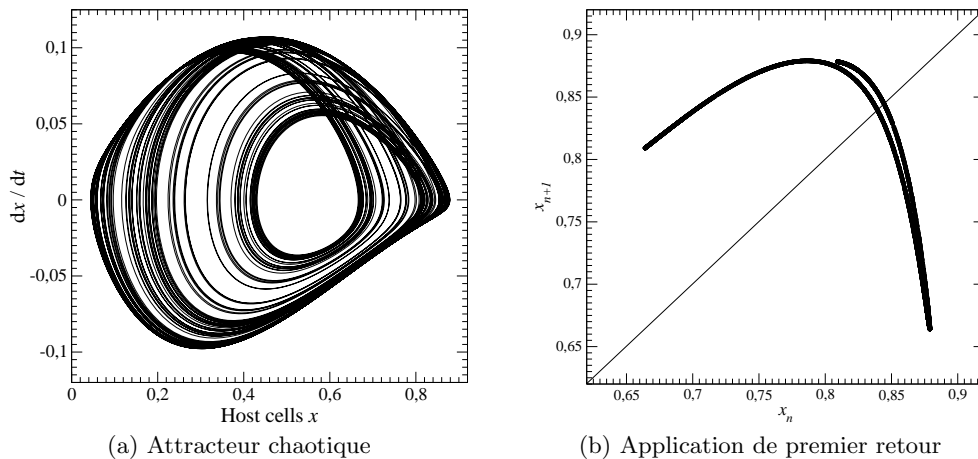


Figure 3. Comportement chaotique solution du modèle de cancer (1) caractérisé par une application unimodale lisse. Valeurs des paramètres : $\rho_1 = 0.518$, sinon comme donné Eq. (2).

5 Conclusion

Par une analyse topologique, nous avons montré que ce modèle de cancer peut produire un attracteur chaotique topologiquement équivalent à l'attracteur « spirale » solution du système de Rössler [8]. Le diagramme de bifurcations en fonction du taux de croissance des cellules hôtes révèle d'une part, qu'il existe une plage de valeurs favorisant le développement des cellules tumorales, ce qui s'accompagne de larges fluctuations des trois populations — tout se passe alors comme si le développement des cellules tumorales déstabilisait l'écosystème — et, d'autre part, que de forts taux de croissance étaient favorables à la réduction de la population de cellules tumorales. Par ailleurs, modifier le taux de prédation des cellules tumorales par les cellules immunitaires n'affecte pas la dynamique du modèle : ce paramètre est donc d'un intérêt thérapeutique très limité.

Enfin, une analyse de l'observabilité révèle que la meilleure variable pour l'étude de ce modèle de cancer est celle correspondant à la population de cellules hôtes et non, comme cela est largement pra-

tiqué, la population de cellules tumorales. Puisque l'observabilité est liée de manière très ténue à la « contrôlabilité » [12], ceci indique également qu'il pourrait être intéressant de « contrôler » les cancers par des actions sur les populations de cellules hôtes plutôt qu'uniquement sur les populations de cellules tumorales.

Références

1. B. FERTIL, H. DERTINGER, A. COURDI & E. P. MALAISE, Mean inactivation dose : a useful concept for intercomparison of human cell survival curves, *Radiation Research*, **99**, 73-84 (1984)
2. V. A. KUZNETSOV & I. A. MAKALKIN, Nonlinear dynamics of immunogenic tumors : parameter estimation and global bifurcation analysis, *Bulletin of Mathematical Biology*, **56** (2), 295-321 (1994)
3. L. G. DE PILLIS & A. RADUNSKAYA, The dynamics of an optimally controlled tumor model : A case study, *Mathematical and Computer Modelling*, **37**, 1221-1244 (2003)
4. M. ITIK & S. P. BANKS, Chaos in a three-dimensional cancer model, *International Journal Bifurcation & Chaos*, **20** (1), 71-79 (2010)
5. R. P. JIMÉNEZ & E. O. HERNANDEZ, Tumour-host dynamics under radiotherapy, *Chaos, Solitons & Fractals*, **44**, 685-692 (2011)
6. F. DENIS & C. LETELLIER, Chaos theory : a fascinating concept for oncologists, *Cancer Radiothérapie*, à paraître.
7. J.-M. GINOUX & C. LETELLIER, Flow curvature manifolds for shaping chaotic attractors : I. Rössler-like systems, *Journal of Physics A*, **42**, 285101 (2009)
8. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5** (1), 271-282 (1995)
9. R. HERMANN & A. KRENER, Nonlinear controllability and observability, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **22** (5), 728-740 (1977)
10. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics, *Physical Review E*, **71**, 066213 (2005)
11. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Investigating nonlinear dynamics from time series : the influence of symmetries and the choice of observables, *Chaos*, **12**, 549-558 (2002)
12. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, On the interplay among synchronization, observability and dynamics, *Physical Review E*, **82**, 016204 (2010)
13. C. LETELLIER, L. A. AGUIRRE & J. MAQUET, How the choice of the observable may influence the analysis of nonlinear dynamical system, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **11**, 555-576 (2006)
14. R. KIESSLING & A. CHOUDHURY, Cancer vaccines, *British Journal of Surgery*, **94**, 1449-1450 (2007)
15. L. A. AGUIRRE & C. LETELLIER, Observability of multivariate differential embeddings, *Journal of Physics A*, **38**, 6311-6326 (2005)
16. S. P. DAWSON, C. GREBOGI, I. KAN & H. KOÇAK, Antimonotonicity : inevitable reversals of period-doubling cascades, *Physics Letters A*, **162**, 249-254 (1992)
17. M. GARCIA-BARROS, F. PARIS, C. CORDON-CARDO, D. LYDEN, S. RAFII, A. HAIMOVITZ-FRIEDMAN, Z. FUKS & R. KOLESNICK, Tumor response to radiotherapy regulated by endothelial cell apoptosis, *Science*, **300**, 1155-1159 (2003)
18. I. MALANCHI, A. SANTAMARIA-MARTÍNEZ, E. SUSANTO, H. PENG, H.-A. LEHR, J.-F. DELALOYE & J. HUELSKEN, Interactions between cancer stem cells and their niche govern metastatic colonization, *Nature*, (2011) available on line.
19. K. J. PNG, N. HALBERG, M. YOSHIDA & S. F. TAVAZOIE, A microRNA regulon that mediates endothelial recruitment and metastasis by cancer cells, *Nature*, (2011) available on line.
20. A. CHOUDHURY, S. MOSOLITS, P. KOKHAEI, L. HANSSON, M. PALMA & H. MELLSTEDT, Clinical results of vaccine therapy for cancer : learning from history for improving the future, *Advances in Cancer Research*, **95**, 147-202 (2006)
21. M. CHI & A. Z. DUDEK, Vaccine therapy for metastatic melanoma : systematic review and meta-analysis of clinical trials, *Melanoma Research*, **21** (3), 165-174 (2011)

Phénomènes non linéaires dans les plasmas poussiéreux : Apparition d'oscillations multimodales

Maxime Mikikian¹, Hagop Tawidian¹, Thomas Lecas¹, & Olivier Vallée²

¹ GREMI, Groupe de Recherches sur l'Energétique des Milieux Ionisés, UMR7344, CNRS/Université d'Orléans, 14 rue d'Issoudun, BP6744, 45067 Orléans Cedex 2, France

² GREMI, Groupe de Recherches sur l'Energétique des Milieux Ionisés, UMR7344, CNRS/Université d'Orléans, Rue Gaston Berger, BP4043, 18028 Bourges Cedex, France

maxime.mikikian@univ-orleans.fr

Résumé. Les oscillations multimodales (Mixed-Mode Oscillations ou MMOs) sont une variété de signaux qui se rencontrent dans de nombreux domaines. Cette alternance d'oscillations de petite et grande amplitude est caractéristique de certaines réactions chimiques oscillantes et de l'activité neuronale. Dans ce travail, nous mettons en évidence que ces oscillations existent également dans un tout autre domaine scientifique : les plasmas poussiéreux. Ce mélange de plasma et de poussières est le siège de nombreuses instabilités et de phénomènes dynamiques complexes dont certains correspondent à des MMOs. Des résultats expérimentaux ainsi qu'une analyse préliminaire de ces comportements sont présentés dans ce papier.

Abstract. Mixed-Mode Oscillations (MMOs) are a characteristic kind of signal occurring in several scientific fields. This alternation of small and large amplitude oscillations is typical of some oscillating chemical reactions and neuronal activity. In this work, it is shown that these oscillations also exist in a completely different field : dusty plasmas. This mixture of plasma and dust particles is characterized by many instabilities and complex dynamical phenomena corresponding to MMOs. In this paper, experimental results and preliminary analyses of these behaviors are presented.

1 Introduction

Les plasmas sont des gaz ionisés, c'est à dire composés d'atomes, de molécules, d'ions et d'électrons. C'est un milieu énergétique avec des propriétés réactives, thermiques et radiatives que l'on rencontre aussi bien à l'état naturel que dans l'industrie. Les plasmas peuvent également contenir des objets solides (poussières) dont la taille peut varier du nanomètre au centimètre. Ces plasmas, que l'on nomme alors plasmas poussiéreux [1,2], sont très répandus en astrophysique [3] (queues de comètes, atmosphères et anneaux planétaires, ...), dans l'industrie [4] (notamment en microélectronique et nanotechnologie) et au bord des plasmas de fusion thermonucléaire [5]. Leurs propriétés ont de fortes similitudes avec les milieux granulaires et les colloïdes.

Dans les expériences de laboratoire, les plasmas poussiéreux sont étudiés en injectant artificiellement des poussières dans le plasma ou en les fabriquant au sein même de celui-ci. Cette dernière méthode utilise soit des gaz réactifs [6] soit le phénomène de pulvérisation des surfaces exposées au plasma [7]. Dans les deux cas, des molécules réactives sont injectées dans la phase gazeuse et donnent lieu à une suite de réactions chimiques et physiques entraînant la croissance d'objets solides [8]. Ces poussières se chargent alors électriquement en capturant une partie des électrons libres du plasma. Cette perte d'électrons et la présence nouvelle de particules massives fortement chargées, déstabilisent le plasma et donnent lieu à de nombreuses instabilités non linéaires.

2 Instabilités dans les plasmas poussiéreux

Lorsque la charge électrique globale portée par le nuage de poussières devient non négligeable devant la densité électronique, l'équilibre du plasma est fortement altéré. En effet, une poussière d'environ $1 \mu\text{m}$

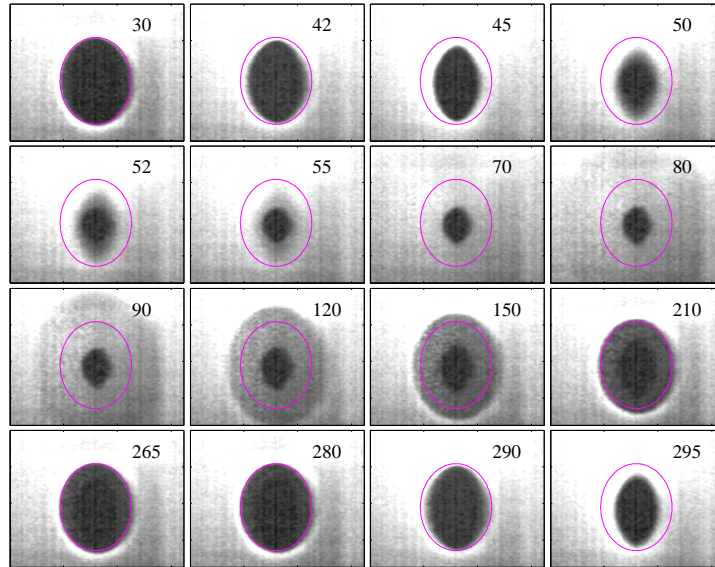


Figure 1. Instabilité heartbeat : le void en position d'équilibre (image 30) se contracte à partir de l'image 42. Il atteint sa taille minimale à l'image 70 et opère alors sa réouverture jusqu'à l'image 280. Le cycle contraction-expansion recommence ensuite de façon cyclique.

peut porter plus de 10^3 électrons à sa surface. Ainsi, dès lors que la densité de poussières devient grande, cette modification du plasma peut donner lieu à des phénomènes instables. Ces instabilités peuvent apparaître durant la formation des poussières [9,10,11], leur forme et leur fréquence évoluent alors suivant les changements de taille et de densité des poussières. Elles peuvent également apparaître une fois le nuage de poussières constitué, alors que la taille et la densité des poussières ne varient plus. Ce dernier type d'instabilité ("heartbeat") [12,13] donne lieu à des oscillations de type MMOs [14,15,16,17] que nous allons présenter dans la section suivante. L'éventail des phénomènes instables étant relativement vaste, d'autres types d'instabilités sont également observés [18].

L'instabilité heartbeat, tient son nom de son mouvement apparent qui rappelle le battement d'un coeur. En effet, lorsque le nuage de poussières est piégé dans le plasma, une zone centrale dépourvue de poussières ("void") continue d'exister [12]. Cette zone est maintenue par l'équilibre entre deux forces, une dirigée vers l'extérieur due aux ions positifs qui chassent les poussières du centre du plasma, et l'autre dirigée vers l'intérieur (due au champ électrique) qui joue le rôle de force de rappel sur les poussières. Cet équilibre précaire peut se rompre spontanément et donner lieu à une oscillation continue de la taille du void. Ce phénomène est mis en évidence par imagerie rapide [13,15]. Pour cela, une nappe laser est utilisée afin d'illuminer le nuage de poussières et une caméra rapide (quelques milliers d'images par seconde) équipée d'un filtre permet de recueillir la lumière diffusée. Des images extraites d'une vidéo sont présentées sur la figure 1. Les zones blanches sont celles contenant les poussières, la zone sombre correspondant au void est clairement visible au centre de l'image 30. Une ellipse délimite la position ouverte du void. La contraction commence sur l'image 42 et se poursuit jusqu'à l'image 70. La réouverture du void démarre ensuite et apparaît plus complexe qu'attendu avec la formation de plusieurs zones de densité de poussières différentes. Le void retrouve sa position d'équilibre à l'image 280 et une nouvelle contraction se déclenche.

Pendant cette instabilité, l'ensemble des paramètres du plasma est modifié. L'instabilité peut ainsi être également caractérisée en analysant, par exemple, les variations du courant de décharge. C'est notamment ce diagnostic qui permet de révéler la présence de MMOs et le caractère non linéaire de l'instabilité heartbeat [14].

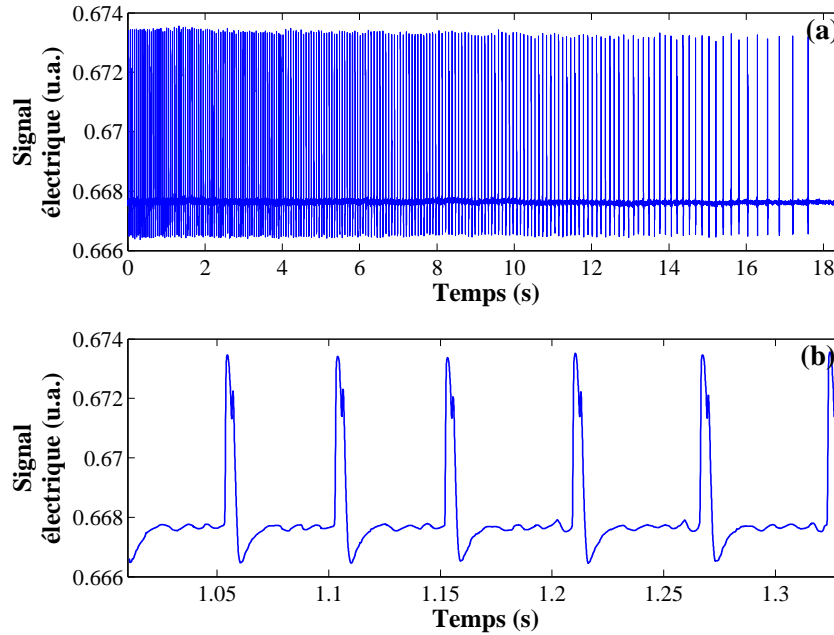


Figure 2. Phase d'arrêt progressif de l'instabilité heartbeat. (a) Les pics de grande amplitude correspondent aux contractions du void. Ils s'écartent progressivement jusqu'à l'arrêt total de l'instabilité vers 18 s. (b) Zoom de (a) mettant en évidence la présence d'oscillations de petite amplitude entre les pics principaux. Ce nombre n d'oscillations varie au cours du temps. Une transition entre un état à $n = 3$ et un état $n = 4$ est présenté.

3 Oscillations multimodales dans les plasmas poussiéreux

Sur la figure 1, l'instabilité heartbeat est pleinement développée. Les phases de contraction et d'expansion du void se succèdent de façon très régulière. Cependant, cette instabilité peut s'arrêter au bout d'un certain temps. Cette phase d'arrêt est particulièrement intéressante car elle est marquée par l'apparition de contractions incomplètes qui deviennent de plus en plus nombreuses jusqu'à l'arrêt de l'instabilité. Ce phénomène est particulièrement visible sur le courant de décharge qui circule dans le plasma. Celui-ci a alors une forme assez particulière qui est présentée sur la figure 2. La figure 2(a) montre clairement la phase d'arrêt qui dure près d'une vingtaine de secondes. Chaque pic de grande amplitude correspond à une contraction du void. Si on observe attentivement la zone entre les pics (figure 2(b)), on s'aperçoit qu'elle comprend des oscillations de petite amplitude, habituellement absentes lorsque l'instabilité est pleinement développée. Cette forme de signal est typique de ce que l'on appelle oscillations multimodales ou Mixed-Mode Oscillations (MMOs) en anglais. Les MMOs consistent en une alternance d'oscillations de petite et grande amplitude, ces dernières étant le plus souvent des phénomènes de relaxation du système. Ce type particulier d'oscillations se rencontre dans certaines réactions chimiques oscillantes [19,20](réaction de Belousov-Zhabotinskii [21,22]) et dans l'activité neuronale [23,24,25] (modèles de Hodgkin-Huxley [25,26] ou FitzHugh-Nagumo [27]). De nombreuses théories des systèmes dynamiques sont utilisées pour étudier ces comportements (canards, bifurcations de Hopf, orbites homoclines, ...). L'observation de telles oscillations dans les plasmas poussiéreux est extrêmement récente et très peu d'études ont été réalisées dans ce domaine sur les MMOs [14].

Les oscillations de petite amplitude sont visibles sur la figure 2(b) où on peut détecter 3 séquences contenant 3 petites oscillations, suivies de 3 autres séquences avec 4 petites oscillations. Chacune de ces petites oscillations correspond à une contraction incomplète du void. Cette figure révèle notamment une transition entre une phase à 3 et une phase à 4 petites oscillations. Sur la figure 2(a), de nombreuses transitions ont lieu entre des phases à n petites oscillations et des phases à $n + 1$ petites oscillations. Par l'intermédiaire de ces transitions, le nombre de petites oscillations augmentent pendant que l'instabilité

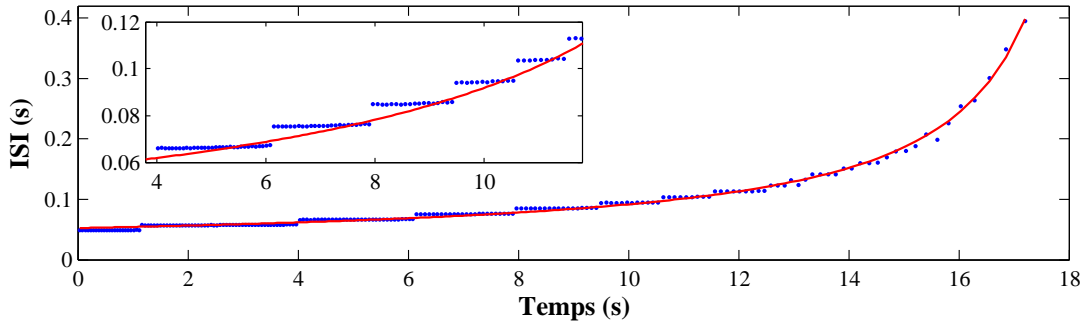


Figure 3. Intervalle de temps entre les pics principaux (InterSpike Interval, ISI) de la figure 2 montrant une structure en marche d’escalier. Ajustement par une courbe du type $a + b/(t_0 - t)$.

”perd de l’énergie” puis s’arrête. Pendant les tous derniers instants de l’instabilité, des transitions $n \rightarrow n+p$ avec $2 \leq p \leq 5$ sont même observées. Ceci se traduit sur la figure 1(a) par l’augmentation progressive de l’écartement entre les pics principaux. Si l’on trace ainsi l’intervalle entre les pics principaux (InterSpike Interval, ISI) en fonction du temps, on obtient une croissance qui peut être ajustée par une fonction du type $a + b/(t_0 - t)$ où t_0 est notamment le temps correspondant à la limite asymptotique ~ 19 s [26,28]. Le fait que l’ISI tende vers l’infini de la sorte est souvent considéré comme étant caractéristique d’une bifurcation homocline [26,29].

La structure en marche d’escalier est due aux transitions d’un état à n petites oscillations à un état à $n + 1$ petites oscillations. Dans certaines expériences, une analyse fine de l’ISI révèle que la transition d’un état à l’autre peut se faire par l’apparition progressive de séquences à $n + 1$ petites oscillations au milieu de séquences à n petites oscillations [14,17]. Les états $n + 1$ se produisent alors de plus en plus souvent jusqu’à leur établissement définitif. Cette évolution s’apparente à une structure de type escalier du diable (devil’s staircase) qui se rencontre parfois dans les situations de MMOs, notamment en chimie [19,20,22,30].

Les pics principaux ont une forme assez particulière comme le montre la figure 4(a). On remarque tout d’abord une montée assez rapide du signal suivie par un court plateau puis par une décroissance plus lente. Un pic additionnel est souvent présent (ici à 1.156 s) puis l’amplitude du signal diminue de façon plus ”douce” que la montée, le signal chutant jusqu’à une valeur inférieure à celle qui précède le pic. Concernant l’amplitude globale des oscillations, deux phénomènes intéressants apparaissent durant une transition entre deux états. Le premier est que la nouvelle petite oscillation qui apparaît a une amplitude plus grande que les précédentes. C’est particulièrement visible sur la figure 4(b) à 1.2 s. Cette petite oscillation, qui remplace un pic principal, garde une partie des propriétés d’un pic. Cet effet perdure durant 2 – 3 séquences, puis la nouvelle petite oscillation retrouve une amplitude comparable aux autres. La seconde observation (difficile à percevoir sur la figure 2) est que l’amplitude des pics principaux est légèrement plus grande après une transition. L’amplitude des pics diminuant alors progressivement jusqu’à la transition suivante.

4 Conclusion

Dans cet article nous avons mis en évidence la présence d’oscillations multimodales dans les plasmas poussiéreux. Ce travail permet d’envisager une étude de ces phénomènes dynamiques en utilisant les analyses des MMOs rencontrées dans des domaines extrêmement différents (chimie, activité neuronale). De plus, la complexité et la richesse des phénomènes non linéaires observés (par exemple les escaliers du diable), font des plasmas poussiéreux de nouveaux champs d’application des théories des systèmes dynamiques.

Remerciements. Nous tenons à remercier N. Berglund pour d’intéressants échanges. Les auteurs remercient pour leur support S. Dozias et B. Dumax (électronique) et J. Mathias (optique). Le réacteur

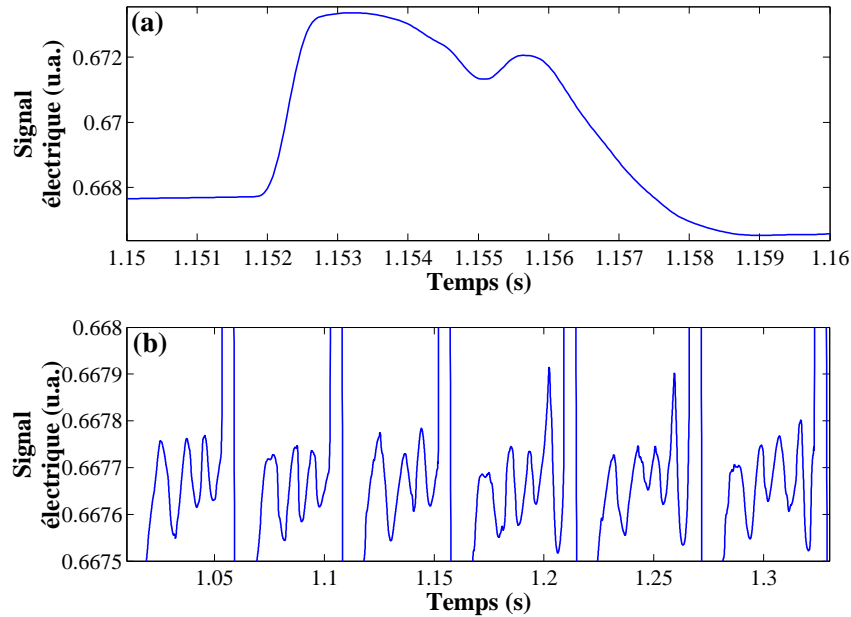


Figure 4. (a) Zoom sur un des pics principaux de la figure 2. (b) Zoom sur les oscillations de petite amplitude lors d'une transition de 3 à 4 oscillations. L'amplitude plus grande de la nouvelle petite oscillation est clairement visible. Son amplitude décroît alors progressivement jusqu'à retrouver une amplitude comparable aux autres petites oscillations.

PKE-Nevedov a été mis à disposition par le Max-Planck-Institute for Extraterrestrial Physics, Allemagne, grâce au financement de la DLR/BMBF avec la bourse No. 50WM9852. Ce travail a bénéficié du soutien financier de l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet INDIGO (ANR-11-JS09-010-01).

Références

1. P. K. SHUKLA & B. ELIASSON, Colloquium : Fundamentals of dust-plasma interactions, *Review of Modern Physics*, **81**, 25 (2009)
2. M. MIKIKIAN, L. COUËDEL, M. CAVARROC, Y. TESSIER & L. BOUFENDI, Dusty Plasmas : Synthesis, Structure and Dynamics of a Dust Cloud in a Plasma, *European Journal of Applied Physics*, **49**, 13106 (2010)
3. C. K. GOERTZ, Dusty plasmas in the solar system, *Reviews in Geophysics*, **27**, 271 (1989)
4. G. S. SELWYN, J. SINGH & R. S. BENNETT, In situ laser diagnostic studies of plasma-generated particulate contamination, *Journal of Vacuum Science & Technology A*, **7**, 2758 (1989)
5. S. I. KRASHENINNIKOV, R. D. SMIRNOV & D. L. RUDAKOV, Dust in magnetic fusion devices, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **53**, 083001 (2011)
6. J. BERNDT, E. KOVAČEVIĆ, I. STEFANOVIĆ, O. STEPANOVIC, S. H. HONG, L. BOUFENDI & J. WINTER, Some Aspects of Reactive Complex Plasmas, *Contributions to Plasma Physics*, **49**, 107 (2009)
7. G. M. JELLUM & D. B. GRAVES, Particulates in aluminum sputtering discharges, *Journal of Applied Physics*, **67**, 6490 (1990)
8. M. MIKIKIAN, M. CAVARROC, L. COUËDEL, Y. TESSIER & L. BOUFENDI, Dust particles in low-pressure plasmas : Formation and induced phenomena, *Pure and Applied Chemistry*, **82**, 1273 (2010)
9. D. SAMSONOV & J. GOREE, Instabilities in a dusty plasma with ion drag and ionization, *Physical Review E*, **59**, 1047 (1999)
10. M. CAVARROC, M. C. JOUANNY, K. RADOUANE, M. MIKIKIAN & L. BOUFENDI, Self-excited instability occurring during the nanoparticle formation in an Ar-SiH₄ low pressure radio frequency plasma, *Journal of Applied Physics*, **99**, 064301 (2006)

11. M. MIKIKIAN, M. CAVARROC, L. COUËDEL & L. BOUFENDI, Low frequency instabilities during dust particle growth in a radio-frequency plasma, *Physics of Plasmas*, **13**, 092103 (2006)
12. J. GOREE, G. E. MORFILL, V. N. TSYTOVICH & S. V. VLADIMIROV, Theory of dust voids in plasmas, *Physical Review E*, **59**, 7055 (1999)
13. M. MIKIKIAN, L. COUËDEL, M. CAVARROC, Y. TESSIER & L. BOUFENDI, Self-excited void instability in dusty plasmas : plasma and dust cloud dynamics during the heartbeat instability, *New Journal of Physics*, **9**, 268 (2007)
14. M. MIKIKIAN, M. CAVARROC, L. COUËDEL, Y. TESSIER & L. BOUFENDI, Mixed-Mode Oscillations in Complex Plasma Instabilities, *Physical Review Letters*, **100**, 225005 (2008)
15. M. MIKIKIAN, L. COUËDEL, M. CAVARROC, Y. TESSIER & L. BOUFENDI, Threshold phenomena in a throbbing complex plasma, *Physical Review Letters*, **105**, 075002 (2010)
16. M. MIKIKIAN, M. CAVARROC, L. COUËDEL, Y. TESSIER & L. BOUFENDI, Self-excited instabilities in plasmas containing dust particles (dusty or complex plasmas), in *Chaos, Complexity and Transport : Theory and Applications*, Proceedings of the CCT'07, (eds. C. Chandre, X. Leoncini & G. Zaslavsky), World Scientific Publishing, Singapore (2008)
17. M. MIKIKIAN, H. TAWIDIAN, T. LECAS & O. VALLÉE, Occurrence of mixed-mode oscillations in a dusty plasma, à paraître dans *Chaos, Complexity and Transport*, Proceedings of the CCT'11, World Scientific Publishing, Singapore (2012)
18. H. TAWIDIAN, M. MIKIKIAN, L. COUËDEL & T. LECAS, Plasma inhomogeneities near the electrodes of a capacitively-coupled radio-frequency discharge containing dust particles, *European Journal of Applied Physics*, **56**, 24018 (2011)
19. F. N. ALBAHADILY, J. RINGLAND & M. SCHELL, Mixed-mode oscillations in an electrochemical system. I. A Farey sequence which does not occur on a torus, *Journal of Chemical Physics*, **90**, 813 (1989)
20. V. PETROV, S. K. SCOTT & K. SHOWALTER, Mixed-Mode Oscillations in Chemical Systems, *Journal of Chemical Physics*, **97**, 6191 (1992)
21. J. L. HUDSON, M. HART & D. MARINKO, An experimental study of multiple peak periodic and nonperiodic oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Journal of Chemical Physics*, **71**, 1601 (1979)
22. J. MASELKO & H. L. SWINNEY, Complex periodic oscillations and Farey arithmetic in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Journal of Chemical Physics*, **85**, 6430 (1986)
23. H. G. ROTSTEIN, T. OPPERMAN, J. A. WHITE & N. KOPELL, The dynamic structure underlying subthreshold oscillations and the onset of spikes in medial entorhinal cortex stellate cells, *Journal of Computational Neuroscience*, **21**, 271 (2006)
24. G. MEDVEDEV & Y. YOO, Multimodal oscillations in systems with strong contraction, *Physica D*, **228**, 87 (2007)
25. J. RUBIN & M. WECHSELBERGER, Giant squid-hidden canard : the 3D geometry of the Hodgkin-Huxley model, *Biological Cybernetics*, **97**, 5 (2007)
26. J. GUCKENHEIMER, R. HARRIS-WARRICK, J. PECK & A. WILLMS, Bifurcation, bursting and spike frequency adaptation, *Journal of Computational Neuroscience*, **4**, 257 (1997)
27. N. BERGLUND & D. LANDON, Mixed-mode oscillations and interspike interval statistics in the stochastic FitzHugh-Nagumo model, arXiv :1105.1278v2 (2011)
28. J. GUCKENHEIMER & A. WILLMS, Asymptotic analysis of subcritical Hopf-homoclinic bifurcation, *Physica D*, **139**, 195 (2000)
29. U. FEUDEL, A. NEIMAN, X. PEI, W. WOJTENEK, H. BRAUN, M. HUBER & F. MOSS, Homoclinic bifurcation in a Hodgkin-Huxley model of thermally sensitive neurons, *Chaos*, **10**, 231 (2000)
30. K.-R. KIM, K. J. SHIN & D. J. LEE, Complex oscillations in a simple model for the Briggs-Rauscher reaction, *Journal of Chemical Physics*, **121**, 2664 (2004)

Microcavité non linéaire sous contrôle cohérent

Jérémy Oden, Stéphane Trebaol, & Nicolas Dubreuil

Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique, CNRS, Univ Paris Sud, 2 Avenue Augustin Fresnel, 91127 Palaiseau cedex
 nicolas.dubreuil@institutoptique.fr

Résumé. Les microcavités non linéaires, dont les applications sont très variées en raison de leur haut facteur de confinement du champ, ont permis d'abaisser significativement les puissances de commande de composants pour le traitement tout optique du signal. Cependant, les effets non linéaires induisent un désaccord entre la fréquence de résonance de la cavité et le signal d'excitation, ce qui limite, par un phénomène de battements, l'énergie couplée dans le résonateur. Nous proposons ici une méthode, basée sur un contrôle de la relation temps-fréquence de l'impulsion d'entrée, permettant d'augmenter l'énergie couplée dans une microcavité semi-conductrice.

Abstract. Nonlinear microcavities have lead, thanks to their high confinement factor, to low-threshold signal processing devices. However, while an input pulse is being coupled, the nonlinearities are inducing a mismatch between the resonance and the pulse frequencies. This leads to a ringing phenomenon and reduces the energy that can be coupled inside the resonator. We propose a method based on a control of the time-frequency relation of the input pulse and show that it can be used to enhance the enenergy coupled inside a semiconductor microcavity.

1 Introduction

Les microcavités permettent d'exalter l'interaction lumière-matière grâce à un confinement important du champ électromagnétique. En termes d'applications, cela a permis de développer des composants pour le traitement optique du signal, la réalisation de fonctions logiques, etc. Cependant, le renforcement du champ, accompagné d'une exaltation des non-linéarités, conduit inévitablement à une augmentation des pertes non linéaires ainsi qu'à une variation de l'indice de réfraction de la cavité. Cette variation d'indice modifie la fréquence de résonance, ce qui introduit, au cours de l'excitation, un désaccord dynamique entre les fréquences du signal incident et de la résonance. Il apparaît alors un phénomène de battements [1] qui limite la quantité d'énergie couplée.

Cependant, et à l'instar de l'excitation en régime cohérent de transitions atomiques ou moléculaires [2], l'efficacité de couplage d'une impulsion lumineuse dans une résonance de microcavité doit pouvoir être améliorée en contrôlant la relation temps-fréquence de l'impulsion. En particulier, Sandhu *et al.* [3] ont démontré théoriquement un abaissement du seuil de bistabilité optique en régime transitoire dans une cavité incluant une non-linéarité de type Kerr optique. Dans ce cas précis, la phase du signal d'excitation compense la dispersion de la résonance.

Nous étudions le cas d'une microcavité semi-conductrice dont les non-linéarités prédominantes sont : l'effet Kerr optique, l'absorption à deux photons (TPA), la réfraction (FCR) et l'absorption (FCA) par les porteurs libres générés par l'absorption à deux photons. Nous avons utilisé le modèle des modes couplés [4] qui inclut les effets non linéaires précédemment cités [5]. Dans un premier temps, nous démontrons qu'un contrôle cohérent judicieusement choisi permet effectivement d'augmenter la quantité d'énergie couplée dans la cavité. Par la suite, un dispositif expérimental pour réaliser le contrôle cohérent est proposé. Notre objectif étant, à terme, de pouvoir contrôler la dynamique du champ intra-cavité.

2 Modélisation et étude de la dynamique d'une microcavité non linéaire

Le système que nous étudions est un système modèle d'une microcavité semi-conductrice couplée à un guide d'accès. La constante τ_0 représente le temps de vie intrinsèque des photons dans la cavité, lié

aux pertes, et τ_e un temps de vie extrinsèque, lié au couplage avec le guide d'accès. La durée de vie totale des photons dans la cavité $\tau/2$ est définie par la relation $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_0}$. L'amplitude du mode est notée $u(t)$ et est normalisée de sorte que $|u|^2$ représente l'évolution temporelle de l'énergie dans la cavité. Pour une cavité linéaire, l'équation régissant la dynamique du champ intra-cavité s'écrit [4] :

$$\frac{du}{dt} = i\omega_{\text{res0}} u(t) - \frac{1}{\tau} u(t) + \sqrt{\frac{1}{\tau_e}} s_{\text{incidente}}(t), \quad (1)$$

où ω_{res0} représente la pulsation associée à la résonance de la cavité et $|s_{\text{incidente}}|^2$ la puissance instantanée de l'impulsion d'entrée. Afin d'optimiser le couplage d'une impulsion dans une cavité linéaire, il est nécessaire d'adapter la largeur spectrale de l'impulsion de sorte que celle-ci soit inférieure à celle de la résonance. Cela revient, dans le domaine temporel, à choisir une impulsion dont la durée est supérieure à τ .

Nous souhaitons compléter notre modèle afin d'y inclure les différentes non-linéarités. À cet effet, nous modifions l'équation 1 pour y introduire les effets non linéaires qui agissent à la fois sur l'indice de réfraction et les pertes dans la cavité.

Les pertes non linéaires, induites par TPA et FCA, sont introduites sous la forme d'un temps de vie $\tau_{\text{NL}}(u)$ tel que $\frac{1}{\tau_{\text{NL}}(u)} = \frac{1}{\tau_{\text{TPA}}(u)} + \frac{1}{\tau_{\text{FCA}}(u)}$, avec [5] :

$$\frac{1}{\tau_{\text{TPA}}(u)} = \frac{\beta_{\text{TPA}} c^2}{2n_0^2 V} |u|^2, \quad \frac{1}{\tau_{\text{FCA}}(u)} = \frac{\sigma_a c}{2n_0} N(t), \quad (2)$$

où β_{TPA} est le coefficient d'absorption à deux photons, n_0 l'indice de réfraction du matériau, c la célérité de la lumière, V le volume de la cavité¹, σ_a est la section efficace d'absorption par unité de densité de porteurs et $N(t)$ la densité de porteurs générés par l'absorption à deux photons :

$$N(t) \simeq \int_{-\infty}^t \frac{\beta_{\text{TPA}}}{2\hbar\omega} \left(\frac{c|u(\xi)|^2}{n_0 V} \right)^2 d\xi, \quad (3)$$

où le temps de recombinaison des porteurs est supposé long devant la durée de l'impulsion et le temps de vie des photons dans la cavité [6].

Les variations dynamiques de l'indice de réfraction $\frac{\Delta n(t)}{n_0}$ se répercutent sur la valeur de la pulsation de la résonance :

$$\frac{\Delta\omega_{\text{res}}(t)}{\omega_{\text{res0}}} = -\frac{\Delta n(t)}{n_0} = -\frac{n_2 c}{n_0^2 V} |u|^2 - \frac{\sigma_r}{n_0} N(t), \quad (4)$$

où le premier terme du membre de droite correspond à l'effet Kerr et le second à la réfraction des porteurs libres. Dans cette équation, n_2 est le coefficient Kerr et σ_r correspond à un volume efficace de réfraction par unité de densité de porteurs.

Le modèle complet, tenant compte des non-linéarités, est décrit par l'équation :

$$\frac{du}{dt} = i\omega_{\text{res0}} \left(1 + \frac{\Delta\omega_{\text{res}}(t)}{\omega_{\text{res0}}} \right) u(t) - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\text{NL}}(u)} \right) u(t) + \sqrt{\frac{1}{\tau_e}} s_{\text{incidente}}(t). \quad (5)$$

Outre les pertes non linéaires qui réduisent la durée de vie des photons dans la cavité, les variations d'indice introduisent un désaccord fréquentiel entre l'impulsion d'entrée et la résonance. La quantité d'énergie couplée dans la cavité est alors réduite. Pour illustrer cet effet, nous écrivons, à partir de l'équation 5, l'évolution temporelle de l'énergie du mode :

$$\frac{d|u|^2}{dt} + 2 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\text{NL}}(u)} \right) |u(t)|^2 = 2\sqrt{\frac{2}{\tau_e}} |u(t)| \cdot |s_{\text{incidente}}(t)| \cdot \cos[\phi_u(t) - \phi_{in}(t)], \quad (6)$$

1. Nous définissons les volumes non linéaires de l'effet Kerr, TPA et FCR comme étant égaux à V .

où $\phi_u(t) = \arg[u(t)]$ est le terme d'auto-modulation de phase associé au champ intra-cavité, et $\phi_{in}(t) = \arg[s_{incidente}(t)]$, la phase instantanée de l'impulsion d'entrée. Cette équation peut-être vue comme le filtrage passe-bas (membre de gauche) d'un terme source (membre de droite) qui décrit le battement entre le champ incident et le champ intra-cavité. Les effets non linéaires réfractifs (Kerr et FCR) contribuent à augmenter la fréquence des battements, celle-ci finit alors par se trouver hors de la bande passant de la cavité. En imposant une phase $\phi_{in}(t)$ donnée à l'impulsion d'entrée, il est possible de compenser la phase $\phi_u(t)$ et donc de réduire la fréquence de battement du terme source pour que celle-ci soit dans la bande passante de la cavité. À cet effet, nous proposons de réaliser un contrôle de la phase de l'impulsion d'entrée.

3 Contrôle cohérent d'une microcavité

Nous étudions le cas d'une microcavité en GaAs à la longueur d'onde de $1,55 \mu\text{m}$, pour laquelle l'énergie d'un photon est de $0,8 \text{ eV}$ et peut induire un phénomène d'absorption à deux photons car l'énergie de gap du GaAs est de $1,43 \text{ eV}$. L'effet de l'accumulation de porteurs libres générés par TPA étant bien supérieur à l'action de l'effet Kerr et compte de tenu du signe de σ_r ($\sigma_r < 0$), la résonance se décale vers le bleu, au cours de l'excitation. Dans le cas d'une excitation de forme gaussienne, cette variation est approximativement décrite par une fonction erreur (équation 3 et référence [6]), comme l'illustre la figure 1a qui représente l'évolution de la fréquence de résonance de la cavité (en vert) lors d'une excitation de forme gaussienne. Cette dérive en fréquence fait osciller l'énergie intra-cavité, comme le montre la figure 1b (courbe en rouge).

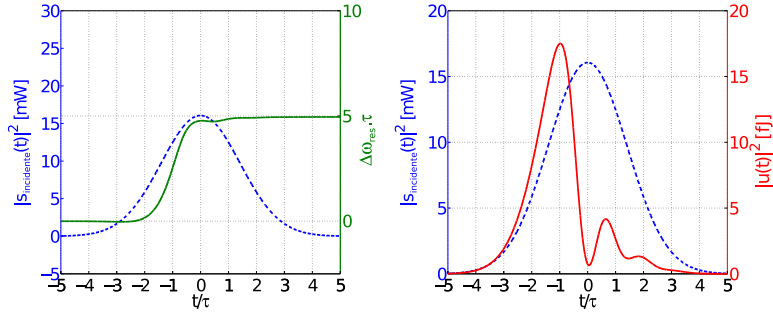


Figure 1. (a) Simulation numérique de l'évolution temporelle de la fréquence de résonance d'une cavité en GaAs (dont les paramètres sont donnés dans le tableau 1), courbe en vert, excitée par une impulsion de forme gaussienne limitée par transformée de Fourier (courbe en pointillés bleus), (b) évolution temporelle de l'énergie intra-cavité pour cette même excitation (courbe en rouge).

Nous décidons alors, à l'instar du contrôle cohérent appliqué à l'excitation de transitions atomiques, de réaliser une mise en phase de l'impulsion d'entrée en lui imposant une fréquence $\Delta\omega_{in}(t)$ qui varie linéairement en fonction du temps (chirp linéaire). Une première impulsion de fréquence ω_0 $s_{initiale}(t) = \sqrt{P_0} \exp\left[-\frac{t^2}{T_0^2}\right] e^{i(\omega_{res0} + \delta\omega)t}$, où $\delta\omega = \omega_0 - \omega_{res0}$ est le décalage initial entre la fréquence de l'impulsion et celle de la résonance, est injectée dans un milieu dispersif à l'ordre deux, comme l'illustre la figure 2. L'impulsion $s_{incidente}(t)$ obtenue en sortie de ce milieu peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$s_{incidente}(t) = \sqrt{\frac{T_0}{T_p}} P_0 \exp\left[-\frac{t^2}{2T_p^2} + i\frac{1}{2}\alpha t^2\right] e^{i(\omega_{res0} + \delta\omega)t}, \quad (7)$$

où T_p et α sont liés à la dispersion à l'ordre deux $\phi'' = \left.\frac{d\phi}{d\omega}\right|_{\omega_0}$:

$$T_p = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\phi''}{T_0^2}\right)^2}, \quad \alpha = \frac{\phi''}{T_0^4 + \phi''^2}. \quad (8)$$

Lorsque l'impulsion est fortement dispersée, nous avons $T_p \approx |\phi''|/T_0$ et $\alpha \approx 1/\phi''$.

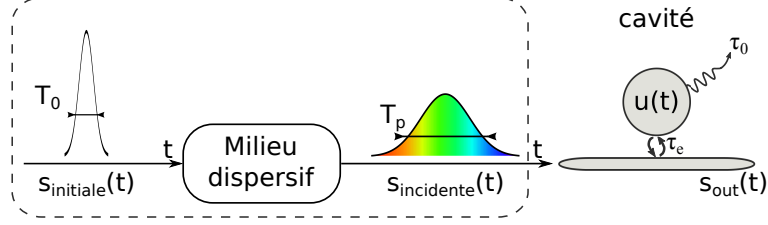


Figure 2. Schéma de principe du dispositif permettant d'introduire une dispersion sur une impulsion limitée par transformée de Fourier.

La condition requise pour optimiser l'énergie intra-cavité est $\phi_{in}(t) = \phi_u(t)$, soit $\Delta\omega_{in}(t) = \Delta\omega_{res}(t)$, avec $\Delta\omega_{in}(t)$ la fréquence instantanée de l'impulsion $s_{incidente}(t)$, donnée par $\Delta\omega_{in}(t) = \alpha t + \omega_{res0} + \delta\omega$. Il est alors nécessaire de rechercher les paramètres α et $\delta\omega$ qui minimisent l'écart $\Delta\omega_{in}(t) - \Delta\omega_{res}(t)$. Nous ne pouvons déterminer *a priori* le décalage en fréquence de la résonance car, comme le montre l'équation 4, celui-ci dépend à la fois de la puissance d'entrée et de la durée de l'impulsion. C'est pourquoi nous fixons la durée $T_0 = \tau/10$ et la puissance crête $P_0 = 0,32$ mW de l'impulsion $s_{initiale}(t)$ qui entre dans le milieu dispersif. De plus, nous considérons une cavité en GaAs dont les paramètres structuraux sont donnés dans le tableau 1.

Table 1. Valeurs numériques des paramètres utilisés pour la simulation d'une microcavité en GaAs. Les valeurs numériques liées aux paramètres du GaAs sont extraites de [7].

Paramètre	Valeur	Description
L	$3,32 \mu\text{m}$	Longueur de la cavité
S_{eff}	$300 \times 300 \text{ nm}^2$	Surface effective du mode
V	$0,3 \mu\text{m}^3$	Volume de la cavité ($S_{eff} \times L$)
τ_0	$14,9 \text{ ps}$	Temps de vie intrinsèque
τ_e	$74,6 \text{ ps}$	Temps de vie extrinsèque
τ	$12,43 \text{ ps}$	Temps de vie extrinsèque
n_0	$3,37$	Indice de réfraction du GaAs
n_2	$1,6 \cdot 10^{-17} \text{ m}^2/\text{W}$	Coefficient Kerr du GaAs
β_{TPA}	$10,2 \cdot 10^{-11} \text{ m}/\text{W}$	Coefficient d'absorption à deux photons
σ_r	$-7 \cdot 10^{-27}$	Volume efficace de réfraction par unité de densité de porteurs
σ_a	$3,7 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$	Section efficace d'absorption par unité de densité de porteurs

Pour différentes valeurs de $\delta\omega$ et ϕ'' nous traçons l'énergie stockée dans la cavité, définie par :

$$\mathcal{E}_{stockée} = \frac{1}{\tau_R} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt, \quad (9)$$

où $\tau_R = \frac{n_0 L}{c}$ représente le temps d'un aller-retour dans la cavité ; tout en respectant la condition $T_p > \tau$ afin de ne pas être en régime transitoire. Le résultat de la simulation numérique est présenté sur la figure 3a sur laquelle l'énergie stockée a été tracée en fonction de $\delta\omega$ et ϕ'' .

La recherche des paramètres α et $\delta\omega$ optimaux donne le couple de valeurs suivant : $\alpha = 15,37 \text{ ps}^2$ et $\delta\omega \cdot \tau = 6,1$. Nous obtenons ainsi $T_p \approx 2\tau$, ce qui garantit une excitation en régime non transitoire. Ces paramètres donnent une très bonne approximation de la dérive de la résonance, comme en témoigne la

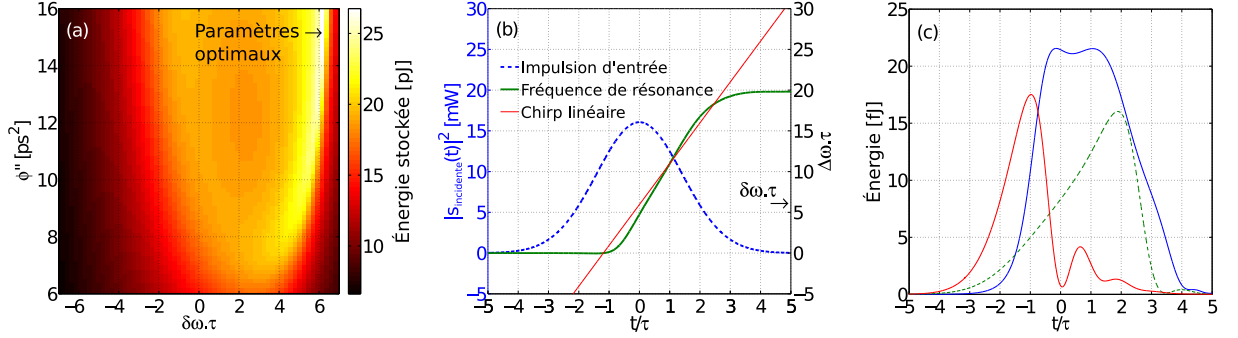


Figure 3. (a) Énergie stockée en fonction de $\delta\omega$ et ϕ'' , (b) impulsion d'entrée (pointillés bleus), fréquence instantanée de la résonance (en vert) et fréquence instantanée de l'impulsion d'entrée $s_{\text{incidente}}(t)$ (en rouge), (c) comparaison de l'évolution de l'énergie intra-cavité, pour une impulsion limitée par transformée de Fourier $s_{\text{FT}}(t)$ avec $\delta\omega = 0$, en rouge, puis avec $\delta\omega$ optimisé, en vert, et une impulsion chirpée linéairement $s_{\text{incidente}}(t)$, en bleu.

figure 3b qui représente l'impulsion $s_{\text{incidente}}(t)$ en pointillés bleus, l'évolution temporelle de la résonance $\Delta\omega_{\text{res}}(t)$ en vert et celle de la fréquence instantanée $\Delta\omega_{\text{in}}(t)$ de l'onde incidente, en rouge.

Nous souhaitons comparer la réponse à l'excitation cohérente à une excitation classique, c'est-à-dire par une impulsion limitée par transformée de Fourier. Une impulsion $s_{\text{FT}}(t)$, limitée par transformée de Fourier, de durée T_p , dont l'énergie est la même que l'impulsion $s_{\text{incidente}}(t)$ et dont le décalage initial par rapport à la résonance $\delta\omega$ a été optimisé numériquement, est injectée dans la cavité. La réponse obtenue est présentée par la figure 3c, courbe en pointillés verts. Cette réponse est alors comparée à la réponse de l'excitation cohérente $s_{\text{incidente}}(t)$, courbe bleue. Nous constatons que l'énergie stockée dans le cas de l'excitation cohérente est 75% plus importante. Nous remarquons également que l'énergie stockée par une excitation cohérente est augmentée de 243% comparée à l'impulsion $s_{\text{FT}}(t)$ dont le décalage initial par rapport à la résonance est nul. L'évolution du champ intra-cavité pour une telle excitation est montrée par la figure 3c, courbe en rouge.

4 Étude de la mise en phase des impulsions

Nous souhaitons concevoir un dispositif permettant d'exciter de manière cohérente une microcavité en GaAs. Un oscillateur paramétrique optique [8] accordable en longueur d'onde nous permet d'obtenir des impulsions picosecondes limitées par transformée de Fourier. Notre objectif est donc de réaliser le système de mise en phase de l'impulsion, tel qu'il est décrit Fig. 2. E.B. Treacy [9] propose un montage formé d'une paire de réseaux de diffraction, schématisé sur la figure 4a. La dispersion obtenue, qui trouve son origine dans la dispersion angulaire introduite par les réseaux, est anormale ($\phi'' < 0$). Or, dans notre cas, la dispersion chromatique de l'impulsion doit être normale. En effet, au cours de l'excitation, la résonance se décale vers les fréquences plus élevées, comme en témoigne l'équation 4. L'obtention d'une dispersion normale à l'aide de réseaux de diffraction a été démontrée par O. Martinez [10].

La figure 4b présente le schéma de principe du dispositif proposé. Un système afocal est inséré entre les deux réseaux de diffraction. L'impulsion subit alors une dispersion donnée par

$$\phi'' = \frac{-\lambda_0^3(z_1 + Mz_2)}{2\pi c^2 \Lambda^2 [1 - (\lambda_0/\Lambda - \sin^2(\theta_i))]^{3/2}}, \quad (10)$$

où M est le grossissement du système, λ_0 la longueur d'onde centrale de l'impulsion d'entrée, θ_i l'angle d'incidence sur les réseaux et Λ le pas du réseau. Les distances z_1 et z_2 sont relatives aux plans focaux des lentilles, elles peuvent donc être négatives lorsque les réseaux sont placés avant les plans focaux, cela permet de changer le signe de la dispersion.

Le contrôle cohérent est relativement simple à mettre en œuvre et le dispositif expérimental qui en résulte est assez compact. De plus, le caractère évolutif d'un tel système est très intéressant, en effet, nous

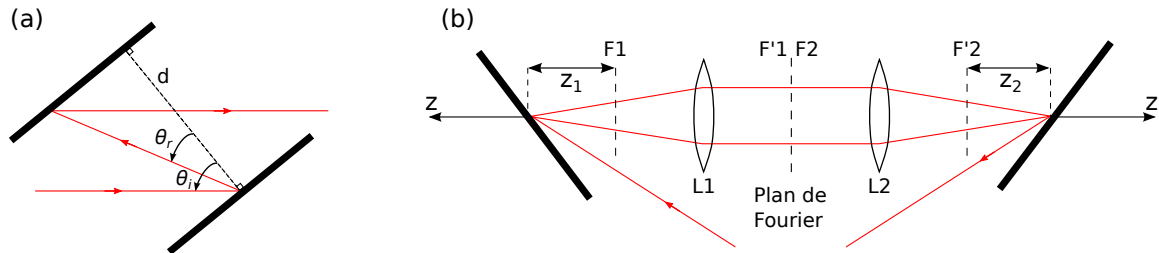


Figure 4. (a) Paire de réseaux induisant une dispersion anormale, (b) utilisation du système afocal afin de changer le signe de la dispersion chromatique.

pouvons parfaitement imaginer une ligne 4-F, dont la dispersion est nulle (réseaux placés dans les plans focaux des lentilles) [2], avec en son plan de Fourier, un modulateur spatial de lumière qui permettrait ainsi de donner une phase quelconque à l'impulsion. Cela rendrait le système beaucoup plus souple et permettrait, par exemple, d'envisager un contrôle actif de l'excitation.

5 Conclusion

Après avoir mis en évidence l'impact des effets non linéaires sur l'efficacité de couplage de la lumière dans une microcavité, nous avons cherché à développer une méthode permettant d'augmenter la quantité d'énergie couplée dans une microcavité semi-conductrice. Ainsi, nous avons pu démontrer qu'un contrôle adapté de la relation temps-fréquence de l'excitation permet effectivement d'augmenter l'énergie stockée dans la cavité. Nous proposons également un dispositif expérimental afin de réaliser ce contrôle. Celui-ci présente l'avantage d'être souple et évolutif. Il pourrait permettre de contrôler de façon rétroactive la dynamique d'un champ électromagnétique circulant dans une microcavité, et trouverait potentiellement des applications en traitement tout optique du signal.

Références

1. Z. K. IOANNIDIS, P. M. RADMORE & I. P. GILES, Dynamic response of an all-fiber ring resonator, *Optics Letters*, **13**, 422 (1988)
2. A. M. WEINER, Femtosecond pulse shaping using spatial light modulators, *Review of Scientific Instruments*, **71** (5), 1929 (2000)
3. S. SANDHU, M. POVINELLI & S. FAN, Enhancing optical switching with coherent control, *Applied Physics Letters*, **96**, 231108 (2010)
4. H. A. HAUS, *Waves and fields in optoelectronics*, Prentice-Hall (1984)
5. P. BARCLAY, K. SRINIVASAN & O. PAINTER, Nonlinear response of silicon photonic crystal microresonators excited via an integrated waveguide and fiber taper, *Optics Express*, **13** (3), 801 (2005)
6. A. BARON, N. DUBREUIL, P. DELAYE, R. FREY & G. P. AGRAWAL, Raman amplification of optical pulses in silicon nanowaveguides : Impact of spectral broadening of pump pulses, *Journal of the European Optical Society*, **6**, 11030 (2011)
7. A. DE ROSSI, M. LAURITANO, S. COMBRIÉ, Q. V. TRAN & C. HUSKO, Interplay of plasma-induced and fast thermal nonlinearities in a GaAs-based photonic crystal nanocavity, *Physical Review A*, **79**(4), 043818 (2009)
8. A. RYASNYANSKIY, N. DUBREUIL, PH. DELAYE, R. FREY, G. ROOSEN, Fourier transformed picosecond synchronously pumped optical parametric oscillator without spectral filtering element, *Journal of the European Optical Society*, **3**, 08037 (2008)
9. E. B. TREACY, Optical pulse compression with diffraction gratings, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **5**, 454, (1969)
10. O. MARTINEZ, 3000 times grating compressor with positive group velocity dispersion : Application to fiber compensation in 1.3-1.6 μm region, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **23**, 59 (1987)

Écoulement dans un tube faiblement divergent : transition laminaire-turbulent

Jorge Peixinho

Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, CNRS UMR 6294 et Normandie Université, 76600 Le Havre
jorge.peixinho@univ-lehavre.fr

Résumé. L'écoulement dans un tube parfaitement cylindrique et la bifurcations entre les régimes d'écoulement laminaire et turbulent sont sous-critiques. C'est à dire que la transition du régime laminaire au régime turbulent se manifeste par l'apparition d'une intermittence sous forme de bouffées ou "puffs" turbulents localisés qui se propagent le long de la conduite. Autrement dit, l'écoulement de Poiseuille cylindrique est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds. D'un autre coté, la transition des écoulements dans des tubes avec des élargissements brusques est caractérisée par l'apparition d'une recirculation secondaire super-critique. Lorsque le débit augmente, l'intensité et la taille de cette recirculation augmentent. Pour des débits plus forts, la recirculation devient dissymétrique et il se forme une bouffée turbulente localisée qui ne se propage pas. Cette étude présente des résultats expérimentaux et numériques pour les écoulements dans des tubes faiblement divergent afin de faire le lien entre des résultats récents pour les tubes et les élargissements brusques. En particulier, on quantifiera les conditions d'existence de la recirculation et les conditions de formation d'une bouffée turbulente.

Abstract. The flow in a straight cylindrical pipe and its laminar-turbulent bifurcation are sub-critical. That is to say the transition from laminar to turbulent flow takes place through the appearance of turbulent patches or turbulent puffs which propagate along the pipe. In other words, the cylindrical Poiseuille flow is linearly stable for all Reynolds number. On the other side, the transition in sudden expansion circular pipe flow is characterized by the appearance of a secondary super-critical recirculation cells. When the flow rate increases, the flow intensity and the size of this recirculation increase. For larger flow rates, the recirculation becomes asymmetric and forms a localized turbulent puff which stays localized. This study presents experimental and numerical results for flows in slowly diverging tubes in order to investigate the link between recent results in pipes and in sudden expansions. Specifically, the conditions for the existence of the recirculation and for puff formation will be quantified. The findings reported here indicate the transition scenario for a slowly diverging pipe is similar to that observed in sudden expansions.

1 Introduction

L'écoulement dans un tube faiblement divergent (c'est-à-dire un tube cylindrique dont le diamètre augmente faiblement le long de l'axe de l'écoulement), tel que celui représenté dans la figure 1(a), n'est pas suffisamment documenté. Cet écoulement est observé dans de nombreuses applications, par exemple, dans le système circulatoire sanguin [1] ou encore lorsque l'on utilise des pipettes. En effet, en mode prélèvement, le liquide, généralement peu visqueux, s'écoule le long de la pointe de la pipette dans un tube faiblement divergent. Le nombre de Reynolds, Re , basé sur le petit diamètre ou le diamètre de l'entrée, est de l'ordre de quelques centaines. $Re = Ud/\nu$ où U est la vitesse débitante, d est le diamètre d'entrée du tube et ν la viscosité cinématique du fluide. Il s'agit d'une turbulence à nombre de Reynolds modéré.

Le problème bidimensionnel de la stabilité de l'écoulement entre deux parois planes qui se coupent avec un angle, α , en un point source est appelé le problème de Jeffery-Hamel. Ce problème a été étudié théoriquement et numériquement. Des bifurcations, qui indiquent un ensemble de solutions avec des alignements de tourbillons le long de l'axe de l'écoulement, ont été trouvées [2,3,4]. D'autres travaux ont traité le cas de l'écoulement dans un élargissement brusque (avec des coins à 90°) et il a été montré que l'écoulement devient dissymétrique à partir de $Re = 80$ [5]. Dans le cas de tubes de section circulaires et avec une expansion brusque 1 : 2, il apparaît une bifurcation super-critique autour de $Re = 1000$

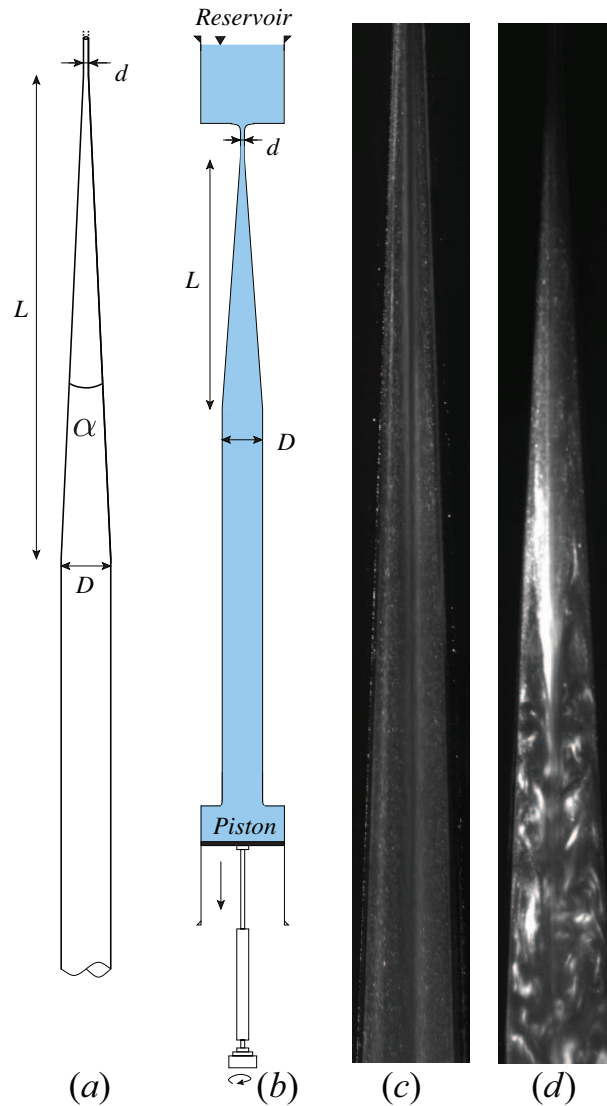


Figure 1. Schéma du problème (a), schéma du dispositif expérimental dessiné à l'échelle (b), visualisation de l'écoulement laminaire pour $Re = 150$ dans un tube de 4° (c) et visualisation d'une bouffée turbulente localisée pour $Re = 1100$ dans un tube de 6° (d). L'écoulement est du haut vers le bas.

[6,7,8,9] à partir duquel la recirculation devient dissymétrique et évolue dans le temps. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, des bouffées turbulentes sont observées.

L'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement dans un tube divergent a été étudié par Sahu et Govindarajan [10]. L'écoulement est instable à partir de $Re = 150$ pour un tube de 3° . Les tubes considérés ont une longueur de divergent $L/d = 120$ et un rapport de diamètre $D/d \approx 7,3$ où D est le diamètre dans la section aval du divergent. D'un autre côté, des simulations numériques indiquent la séparation de l'écoulement à $Re = 2000$ [11]. Le but de cette étude est de fournir des données quantitatives afin de clarifier cette transition. Dans cette étude, des expériences de visualisation sont décrites. La dimension des recirculations et leurs temps de vie sont étudiés à l'aide d'un protocole de relaminarisation.

2 Dispositif expérimental

Un schéma du dispositif expérimental est fourni dans la figure 1(b). Il comprend un réservoir, un ensemble de tubes verticaux et un piston. Le débit est contrôlé à l'aide d'un pousse seringue électrique et des seringues en verre de 100 ml. Le dispositif tire le fluide avec un flux massique constant le long du tube. Deux divergents en acrylique avec $\alpha = 4^\circ$ (ou $\pi/30$ rad) et 6° (ou $\pi/45$ rad) ont été utilisés. Le tube de 4° a un diamètre d'entrée $d = 2,14 \pm 0,1$ mm et un diamètre de sortie $D = 21,4 \pm 0,1$ mm sur une longueur $L = 275,8 \pm 0,1$ mm. Le tube de 6° a une constriction en amont de la section divergente. Le diamètre d'entrée est $d = 3 \pm 0,1$ mm et le diamètre de sortie est $D = 21,4 \pm 0,2$ mm sur $L = 178,1 \pm 0,1$ mm. En aval du divergent, la sortie est prolongée sur 270 mm avec un tuyau en acrylique de diamètre constant. Les autres paramètres du problème sont le rapport des diamètres : $E = D/d$ entre les diamètres de sortie et d'entrée et la longueur non-dimensionnelle de la section divergente : $\beta = L/d$. Pour les tubes de 4° et 6° , $(E, \beta) = (10, 29)$ et $(7, 59)$, respectivement. Les visualisations de l'écoulement sont réalisées l'aide de Mearlmaid dilué dans l'eau déminéralisée et d'une nappe de lumière verticale. L'observation ont été faites dans la direction orthogonale à l'écoulement en utilisant une caméra numérique (MotionPro). Des exemples de visualisation de l'écoulement sont présentés Figs 1c et 1d.

3 Résultats et discussion

Les résultats consistent en l'analyse de photographies de visualisations d'écoulements. Pour de faibles débits, toutes les particules de fluides se déplacent dans le sens de l'écoulement. On pense alors à un écoulement laminaire type Poiseuille dont l'amplitude ou la vitesse maximale diminue fortement au fur et à mesure que l'on se déplace le long de la section divergente. Lorsque l'on augmente le débit, une recirculation, qui a une forme annulaire et étendue le long de l'axe de l'écoulement, apparaît. En observant le point de décollement de couche limite, des estimations quantitatives de la taille de la recirculation peuvent être obtenues. En résumé, aucune recirculation n'est observée pour $Re < 500$ dans le divergent de 4° et pour $Re < 700$ dans le divergent de 6° .

Avec une nouvelle augmentation du débit, la recirculation peut, dans certain cas, donner naissance à des bouffées turbulentes comme celle représentée Fig. 1d. Ces taches localisées turbulentes ont certaines similitudes avec les puffs turbulents observés dans les conduites rectilignes. Par exemple, elles ont des longueurs précises pour un Re donné et une onde en déclin à l'avant. Ces taches turbulentes sont localisés et dépendent de perturbations ou imperfections du système.

Une deuxième série de résultats concernent des expériences de relaminarisation. En pratique, on établit un écoulement à fort nombre de Reynolds, puis on diminue le débit afin de relaminariser la bouffée turbulente. Les temps de relaminarisation sont mesurés et utilisés pour construire les diagrammes décrivant la transition dans des tubes divergents. En résumé, le domaine sous-critique pour l'apparition de taches turbulents est de $Re = 720$ à 860 dans le divergent de 4° et entre $Re = 800$ et 1000 dans le tube de 6° . Au cours de la relaminarisation d'une tache turbulente, un jet de liquide passe au travers de la tache turbulente. Le jet de liquide ondule et des oscillations similaires de jet liquide dans une section divergente ont été observées dans des expériences en microfluidiques [12].

4 Conclusion

Cet article a présenté une étude sur l'écoulement dans des tubes faiblement divergents de 4 et 6° . A faible débit, l'écoulement est de type Poiseuille avec une amplitude diminuant le long de la section divergente. Pour des débits plus importants, une recirculation laminaire est observée. En augmentant encore le débit, la recirculation devient instable et forme une tache turbulente. Le caractère sub-critique est quantifié à l'aide d'expériences de relaminarisation. En résumé, le diagramme de bifurcation est représenté Fig. 2. Enfin, il est suggéré que cette géométrie est intéressante afin d'étudier en détail les taches de turbulence [13]. En effet, l'étude des propriétés de la turbulence est généralement complexe à cause de sa nature advective. Ici, les taches turbulentes sont localisées et la mesure des propriétés statistiques pour différentes Re sera probablement plus facile à mettre en œuvre.

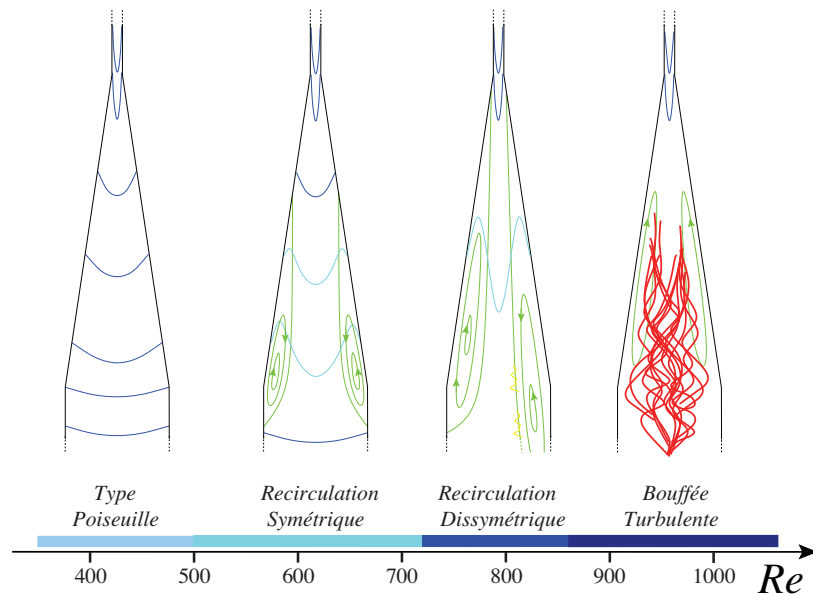


Figure 2. Diagramme de stabilité décrivant les différentes structures d'écoulements le long d'un tube faiblement divergent de 4° , en fonction du nombre de Reynolds, Re . Dans les schémas, les lignes bleues représentent les profils de vitesse et les lignes vertes représentent des lignes de courant. L'écoulement est du haut vers le bas.

Références

1. S. J. SHERWIN & H. M. BLACKBURN, Three-dimensional instabilities and transition of steady and pulsatile axisymmetric stenotic flows, *Journal of Fluid Mechanics* **333** 297-327 (2005)
2. M. HAMADICHE, J. SCOTT & D. JEANDEL, Temporal stability of Jeffery-Hamel flow, *Journal of Fluid Mechanics* **268** 71-88 (1994)
3. O. R. TUTTY, Nonlinear development of flow in channels with non-parallel walls, *Journal of Fluid Mechanics* **326** 265-284 (1996)
4. R. R. KERSWELL, O. R. TUTTY & P. G. DRAZIN, Steady nonlinear waves in diverging channel flow, *Journal of Fluid Mechanics* **501** 231-250 (2004)
5. R. M. FEARN, T. MULLIN & K. A. CLIFFE, Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion, *Journal of Fluid Mechanics* **221** 595-608 (1990)
6. T. MULLIN, J. R. T. SEDDON, M. D. MANTLE & A. J. SEDERMAN, Bifurcation phenomena in the flow through a sudden expansion in a circular pipe, *Physics of Fluids* **21** 014110 (2009)
7. C. D. CANTWELL, D. BARKLEY & H. M. BLACKBURN, Transient growth analysis of flow through a sudden expansion in a circular pipe, *Physics of Fluids*, **22**, 034101 (2010)
8. E. SANMIGUEL-ROJAS, C. DEL PINO & C. GUTIÉRREZ-MONTEZ, Global mode analysis of a pipe flow through a 1 : 2 axisymmetric sudden expansion, *Physics of Fluids*, **22**, 071702 (2010)
9. E. SANMIGUEL-ROJAS & T. MULLIN, Finite-amplitude solutions in the flow through a sudden expansion in a circular pipe, *Journal of Fluid Mechanics*, **691** 201-213 (2012)
10. K. C. SAHU & R. GOVINDARAJAN, Stability of flow through a slowly diverging pipe, *Journal of Fluid Mechanics*, **531** 325-334 (2005)
11. E. M. SPARROW, J. P. ABRAHAM & W. J. MINKOWYCZ, Flow separation in a diverging conical flow : Effect of Reynolds number and divergence angle, *Int. Journal of Heat Mass and Transfer*, **52** 3079-3083 (2009)
12. T. CUBAUD & T. G. MASON, Folding of viscous threads in diverging microchannels, *Physical Review Letters*, **96** 114501 (2006)
13. P. MANNEVILLE, *Instabilités, chaos et turbulence* Ed. Ecole Polytechnique (2004)

Washboard road, instabilité de tôle ondulée

Baptiste Percier¹, Sébastien Manneville¹, & Nicolas Taberlet¹

Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, CNRS UMR 5672, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France.

baptiste.percier@ens-lyon.fr

Résumé. Lorsque une route en sable est soumise au passage répété de véhicules, un motif de rides apparaît spontanément, un phénomène connu sous le nom de tôle ondulée ou washboard road. Nous présentons ici un modèle pour l'instabilité de tôle ondulée qui se fonde directement sur des mesures expérimentales des forces de contact agissant sur une plaque charriant du sable. En particulier, nous avons mesuré cette force dans un état stationnaire, et constaté qu'elle était simplement proportionnelle à la quantité de sable transporté. Puis, en imposant une perturbation sinusoïdale autour de cet état nous avons constaté qu'une modélisation linéaire de la force de portance permettait d'obtenir une équation d'évolution qui décrit très bien l'instabilité. Ce modèle reproduit avec fidélité l'existence d'une vitesse critique délimitant deux régimes et prédit quantitativement la longueur d'onde des rides.

Abstract. When a sand road is subjected to the repeated passages of vehicles a rippled pattern spontaneously appears. This is known as washboard road. In this paper we present a model for the washboard road instability which is based on experimental measurements of the lift force acting on a blade dragging sand. In particular, in a stationary state, we found that the force is only proportional to the amount of sand that is carried. Then, by imposing a sinusoidal perturbation, we found that a linear model for the lift lead to an equation of motion which successfully describes the instability. This model reproduces the existence of a critical velocity between two regimes and quantitatively predicts the wavelength of the pattern.

1 Introduction

Le passage répété de véhicules sur une piste en sable ou en graviers entraîne la formation de rides à la surface de la piste. Ce phénomène, dit « tôle ondulée » ou « washboard road », est à la fois très gênant et très dangereux car il provoque une perte d'adhérence du véhicule. La solution la plus couramment apportée est l'emploi d'un bulldozer pour aplanir la route. De fortes analogies existent entre la formation des rides éoliennes ou sous-marines [1,2] d'une part et l'instabilité de washboard d'autre part, même si les mécanismes de transport de grains sont différents. Afin de comprendre comment et pourquoi ces rides se forment, nous avons reproduit le phénomène à l'échelle du laboratoire [3,4,5]. Pour cela nous avons construit une piste circulaire de 5m de périmètre, remplie de sable, sur laquelle une plaque inclinée tirée avec une vitesse horizontale imposée est libre de se déplacer verticalement. Nous avons alors constaté que, si la vitesse de la plaque est suffisamment élevée, des rides apparaissent à la surface de la piste. La première conclusion est que l'instabilité n'est pas due à la présence d'amortisseur sur la voiture comme il est souvent prétendu [6,7,8,9,10,11,12]. Ainsi, si l'on souhaite créer un modèle permettant d'expliquer l'instabilité, celui-ci doit rendre compte de cette observation et faire au moins apparaître une vitesse critique. Le modèle présenté dans cet article repose sur l'application des lois de la dynamique à la plaque : $m\ddot{y} = -mg + f_l$, où m est la masse de la plaque, y sa position verticale, f_l la force de portance agissant sur la plaque et g l'accélération de la pesanteur. Ainsi, l'élément clé d'un tel modèle est l'expression de la force de portance. Dans une première partie nous présentons des mesures de f_l en régime stationnaire [13], puis en appliquant une perturbation sinusoïdale autour de l'état stationnaire nous accédons à une expression de f_l qui permet de modéliser l'instabilité de washboard.

2 Mesure de la force de portance

2.1 État stationnaire

Nous avons tout d'abord mesuré la force de portance dans un état stationnaire lorsqu'une plaque fixe de PVC de largeur $L=15$ cm et inclinée d'un angle de 45° (Fig. 1) charrie du sable de densité $\rho=2.4$ g.cm $^{-3}$. Cette « charrue » parcourt la piste à vitesse constante et ajustable entre 0.1 et 2.0 m.s $^{-1}$. L'altitude de la plaque est imposée avec une précision de $5\mu\text{m}$ et ajustée de sorte que la plaque charrie une quantité de sable comprise entre 0 et 2 kg. Il est très important de noter ici que la charrue ne fait que lisser la piste. Puisqu'elle est fixée verticalement, l'instabilité de washboard ne peut pas se développer. La force de contact verticale f_l entre la charrue et le sable est mesurée à l'aide de deux capteurs de force (Testwell KD40S) montés en parallèle. En utilisant deux capteurs, on rigidifie l'ensemble et on réduit le couple agissant sur chacun d'eux. Lorsque que la charrue entraîne du sable, celui-ci prend une forme de prisme à base triangulaire. Nous avons mesuré la longueur l (Fig. 1) d'un des côtés de ce triangle à l'aide d'un télémètre laser (optoCNDT 1302) avec une précision de 0.2 mm. D'autres expériences ont été réalisées avec une nappe laser qui permet le calcul du profil complet. Nous avons alors observé que dans une vaste gamme de vitesses, ce profil reste triangulaire avec un angle d'avalanche dynamique constant, $\theta \simeq 35^\circ$. Nous pouvons alors calculer la masse de sable transportée en connaissant les angles α et θ ainsi que la longueur l et la compacité, mesurée à $\phi = 0.55$.

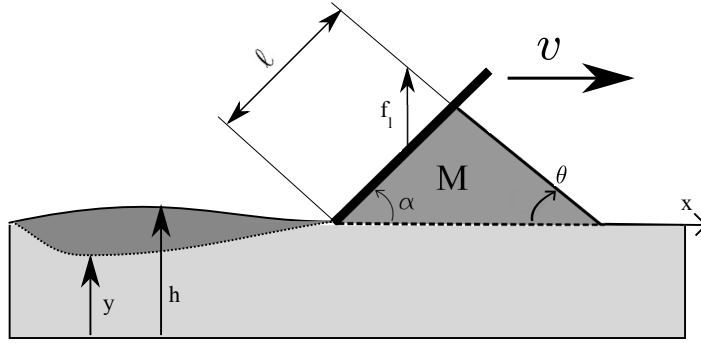


Figure 1. On appelle y l'altitude de la plaque, h la hauteur de la piste.

Nos mesures ont montré qu'il est possible d'exprimer M à partir de la trajectoire de la plaque $y(t)$ et de l'altitude de la piste avant le passage de la plaque, $h(x)$ (Fig. 1). Nous avons constaté que la plaque récolte tout le sable contenu entre la trajectoire $y(t)$ et le profil initial de la piste $h(x = vt)$. Ainsi la masse transportée s'écrit :

$$M = \rho L v \phi \int_0^t (h(vt') - y(t')) dt'. \quad (1)$$

Nous avons constaté que si l'on trace la force de portance en fonction de la quantité de sable charriée pour différentes vitesses, toutes les courbes se superposent sur une seule courbe maîtresse (Fig. 2). Ainsi, en première approximation $f_l = \mu M g$, où le coefficient μ est indépendant de la vitesse ($\mu = 0.56$).

2.2 Réponse spectrale

La simple relation $f_l = \mu M g$ n'est pas suffisante pour développer une analyse de stabilité linéaire, car la mesure de portance a été faite dans un régime stationnaire, à altitude constante et sur un lit plat. Il manque donc des termes dans l'expression de la portance. On peut tout d'abord supposer que la force de portance est sensible à $\frac{dM}{dt}$. En effet, une quantité de sable initialement au repos doit acquérir une certaine quantité de mouvement quand elle devient entraînée par la charrue. De plus, comme il est plus difficile d'enfoncer la charrue dans le sable ($\dot{y} < 0$) que de la soulever ($\dot{y} > 0$), la portance devrait ainsi

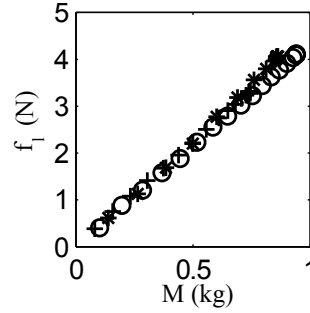


Figure 2. Force de portance f_l en fonction de la masse de sable transporté M pour un angle de 45° et les vitesses suivantes : + $v=0.1 \text{ m.s}^{-1}$, * $v=0.5 \text{ m.s}^{-1}$, o $v=1 \text{ m.s}^{-1}$

dépendre de \dot{y} . On peut enfin faire l'hypothèse que h et y jouent des rôles symétriques. Ainsi, au premier ordre linéaire on obtient l'expression suivante pour la force de portance :

$$f_l = \mu M g + \beta \dot{M} - \alpha (\dot{y} - \dot{h}) \quad (2)$$

où α and β sont deux coefficients positifs et $\dot{h} = v \partial_x h$. L'équation du mouvement de la plaque est donc :

$$m \ddot{y} = \mu g M + \beta \dot{M} - \alpha (\dot{y} - \dot{h}) - m g \quad (3)$$

Comme f_l est décrit par un système linéaire, un bon moyen de l'étudier est de travailler dans le domaine complexe et de mesurer sa réponse à des excitations sinusoïdales. La première étape consiste alors à forcer des oscillations à la plaque, à la pulsation ω , tout en passant sur un profil initial plat. La seconde étape sera de passer à altitude constante sur une piste comprenant déjà un motif de rides sinusoïdales.

Oscillations sur un profil plat La portance est mesurée en forçant les oscillations à différentes fréquences de la plaque sur un profil plat, ce qui correspond alors à mesurer la fonction de transfert du système. Ainsi, en utilisant la notation complexe, si $\underline{h} = 0$ et $\underline{y} = A \exp(j\omega t)$, où A est l'amplitude des oscillations et ω leur pulsation, l'équation (2) devient :

$$\underline{f}_l = \left(A \frac{j}{\omega} \mu \rho L \phi v g - A \rho L \phi v \beta - A j \omega \alpha \right) \exp(j\omega t) \quad (4)$$

On peut alors définir la fonction de transfert \underline{H} par $\underline{H} = \frac{\underline{f}_l}{\underline{y}}$, qui s'apparente à la fonction de transfert d'un filtre coupe-bande du second ordre. Le gain $|\underline{H}|$ et la phase ψ de cette fonction de transfert sont alors :

$$\begin{cases} |\underline{H}| = \sqrt{(\beta \rho L \phi v)^2 + \left(\frac{\mu \rho L \phi v g}{\omega} - \omega \alpha \right)^2} \\ \psi = \pi - \arctan \left(\frac{\frac{\mu \rho L \phi v g}{\omega} - \omega \alpha}{\beta \rho L \phi v} \right) \end{cases} \quad (5)$$

Nous avons donc mesuré $|\underline{H}|$ et ψ expérimentalement en utilisant le même dispositif que précédemment mais en faisant osciller la plaque à l'aide d'une platine de translation pilotée par un moteur pas à pas. Nous avons toutefois ajouté une deuxième plaque à une altitude constante en amont de la première, ce qui permet de lisser la piste. Ainsi la première plaque rencontre toujours un profil initial plat. La figure (3)

montre le diagramme de Bode du système. On remarque que le gain et la phase sont en bon accord avec l'expression (5).

Si l'on impose une pulsation ω_c telle que $\psi(\omega_c) = \pi$ alors la partie imaginaire de \underline{H} est nulle, d'où $\alpha = \frac{\mu\rho L\phi v g}{\omega_c^2}$. Expérimentalement, nous avons trouvé que ω_c dépendait à la fois de M et de v . Pour M fixée, ω_c est une fonction affine de v , alors qu'à v fixée ω_c est proportionnelle à \sqrt{M} . Ainsi, nous pouvons donner une formule pour α (Figs 3c et 3d) :

$$\alpha = a \frac{v}{(v_0 + v)^2} M, \quad (6)$$

avec, pour notre système, $v_0=0.1 \text{ m s}^{-1}$ et $a=60 \text{ m s}^{-3}$. Il est ensuite possible d'obtenir β en mesurant le minimum de $|\underline{H}|$ (atteint en ω_c), $\beta = \frac{H(\omega_c)}{\rho L \phi v}$. Expérimentalement, nous n'avons pas trouvé de nette dépendance de β vis à vis de M ou de v (Figs 3e et 3f). Dans la suite, nous supposons que β est constant et vaut : $\beta=2.7 \text{ m s}^{-1}$. Ainsi, la dépendance de f_l vis-à-vis de y est parfaitement connue. Dans l'équation (2) nous supposons que y et h jouent des rôles symétriques dans f_l , ce que l'on se propose de montrer dans la suite.

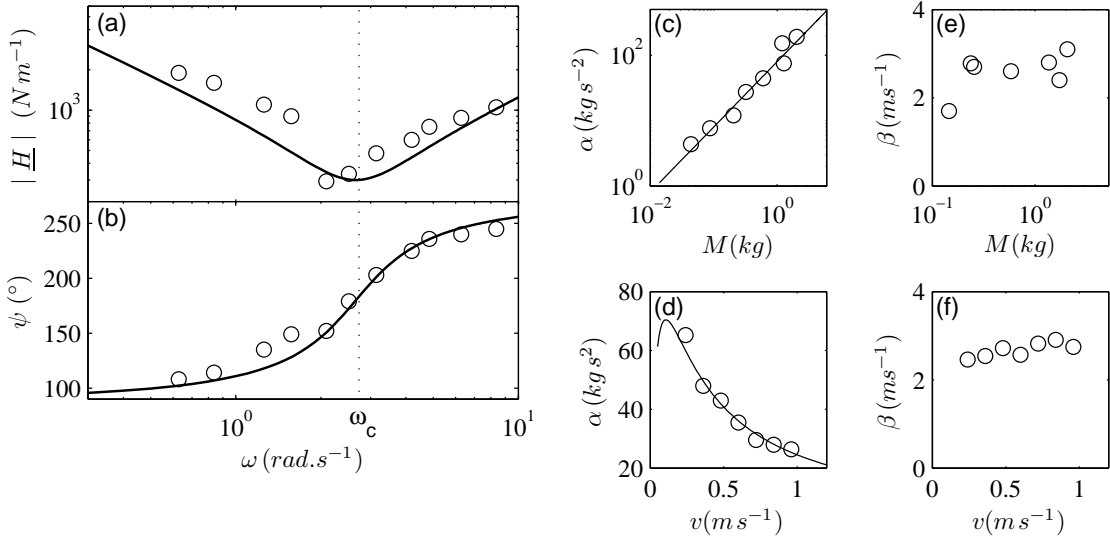


Figure 3. (a) (b) Diagramme de Bode du système lorsque la plaque oscille sur une piste plane. La vitesse de la plaque est de 0.7 m.s^{-1} et elle transporte une masse $M=1 \text{ kg}$. Les courbes en trait plein correspondent au gain et à la phase donnés par l'expression (5) et ajustée à l'aide des coefficients α et β . (c) Coefficient α en fonction de M pour $v=0.7 \text{ m.s}^{-1}$. (d) Coefficient α en fonction de v pour $M=1 \text{ kg}$. (e) Coefficient β en fonction de M pour $v=0.7 \text{ m.s}^{-1}$. (f) Coefficient β en fonction de v pour $M=1 \text{ kg}$.

2.3 Altitude constante sur un lit sinusoïdal

Pour comprendre l'influence de h , nous créons désormais un lit sinusoïdal à l'aide de la première plaque et mesurons la portance subie par la charrue dont l'altitude est gardée fixe comme au paragraphe 2.1. En notation complexe, on a alors : $\underline{h} = A \exp(j\omega t)$ et $\underline{y} = 0$, et on peut définir une fonction de transfert de la même façon que précédemment, $\underline{H}' = \frac{f_l}{y}$. Le gain et la phase de \underline{H}' sont représentés Fig. 4. Nous constatons que là aussi, la fonction de transfert peut être correctement modélisée par l'expression donnée dans l'équation (4) avec les mêmes expressions des coefficients α et β . Ces mesures nous permettent de valider la modélisation de la portance faite dans l'équation (2). Tous les coefficients de l'équation (2) et leur dépendance en v et M étant désormais connus, une analyse de stabilité linéaire peut être développée.

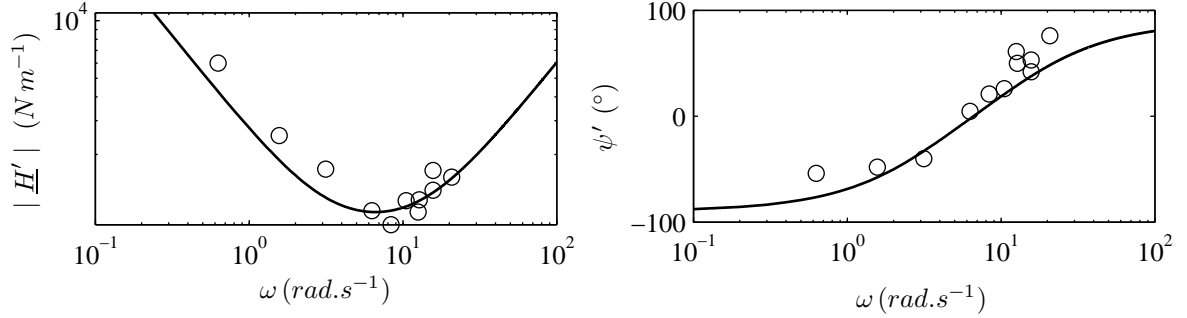


Figure 4. Diagramme de Bode du système lorsque la plaque passe à altitude constante sur un profil sinusoïdal, pour $v=1.5 \text{ m.s}^{-1}$ et $M = 1 \text{ kg}$. Les courbes en trait plein correspondent au gain et à la phase calculés à partir du modèle et des valeurs des coefficients α et β trouvés précédemment. Il est important de noter qu'il n'y a ici aucun paramètre ajustable.

3 Modélisation de l'instabilité de washboard

Comme mentionné précédemment, le passage répété de véhicules est à l'origine de la tôle ondulée. Il faut ainsi itérer l'équation (3). Alors, si y_n et h_n sont respectivement la trajectoire de la plaque et le profil de la piste au $n^{\text{ième}}$ passage, il faut trouver la relation qui existe entre h_n et y_{n-1} . Nos mesures ont montré que $h_n = k y_{n-1}$, où le coefficient k dépend a priori de ω (on s'attend d'ailleurs à ce que $h_n/y_n = 1$ pour $\omega=0$). Cependant, dans la gamme de paramètres que nous avons explorée, nous avons toujours mesuré $k \simeq 0.8$. De futures mesures seront réalisées afin de connaître plus précisément le rapport entre h_n et y_{n-1} et de mieux l'expliquer.

En notant $\underline{y}_n = \exp(\sigma - j\varphi) \underline{y}_{n-1}$, où σ est le taux de croissance des rides, en dérivant l'équation (3) par rapport au temps on arrive facilement à la relation de dispersion suivante :

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(\gamma - \delta\omega^2)^2 + \epsilon^2\omega^2}{(\gamma - \delta\omega^2)^2 + (\epsilon\omega - \omega^3)^2} \right] + \ln k, \quad (7)$$

avec $\gamma = \mu g L \rho \phi v / m$, $\delta = \alpha / m$ et $\epsilon = \beta L \rho \phi v / m$. On constate ainsi que ω_{th} ne possède des valeurs positives que si v est suffisamment grand (Fig. 5a). Cela signifie que l'instabilité se développe si la vitesse dépasse une certaine vitesse critique. Ce modèle reproduit donc bien l'une des caractéristiques principale de l'instabilité. De plus, la longueur d'onde du mode le plus instable ($\lambda_{th} = \frac{2\pi v}{\omega_{th}}$), peut être calculée et correspond parfaitement à la longueur d'onde (λ) des rides mesurée dans l'expérience (Fig. 5b).

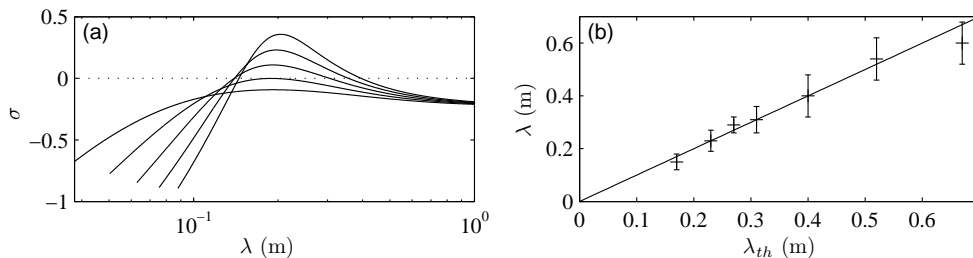


Figure 5. (a) Taux de croissance, σ , en fonction de la longueur d'onde λ pour différentes vitesses. (b) Longueur d'onde des rides mesurées expérimentalement en fonction de la longueur d'onde la plus instable calculée à partir du modèle basé sur les paramètres α et β mesurés au paragraphe 2.2

On remarque sur figure 5a que pour des faibles vitesses σ est toujours négatif. En augmentant la vitesse, on voit apparaître une large bande de longueurs d'onde instables, ce qui est en accord avec l'expérience, puisque initialement on observe la présence de rides de différentes longueurs d'onde. Ces rides évoluent ensuite pour donner un motif plus régulier avec une seule longueur de ride. Le fait que l'on puisse prédire exactement cette longueur d'onde est un gros succès pour notre modèle. De futures expériences seront également menées pour confronter les vitesses critiques expérimentale et théorique.

4 Conclusion

Nous avons présenté ici un modèle inédit pour l'instabilité de tôle ondulée qui s'appuie sur des mesures de la force de portance ressentie par le « véhicule ». Nous avons tout d'abord montré que dans un régime stationnaire la force de portance est simplement proportionnelle à la masse de sable transportée par l'objet. Puis, en mesurant la réponse à une perturbation sinusoïdale autour de cet état, nous avons pu vérifier qu'en première approximation la portance peut être modélisée par un système linéaire du deuxième ordre. En reliant la trajectoire de la plaque à sa trace sur la piste, on peut intégrer les équations du mouvement. On obtient alors un système qui présente une bifurcation pilotée par la vitesse horizontale de la plaque. En plus de prédire l'existence d'un seuil en vitesse pour le washboard, notre modèle fournit la longueur d'onde exacte des rides. Il reste toutefois à expliquer l'origine physique de la dépendance du coefficient α avec M et v (équation (6)), à mieux comprendre l'origine physique du coefficient k reliant h_n à y_{n-1} et à confronter la vitesse critique du modèle à la vitesse critique expérimentale. L'étape suivante sera d'explorer le régime non-linéaire qui fait saturer l'amplitude des rides.

Références

1. A. VALANCE & V. LANGLOIS, Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow, *European Physical Journal B*, **43**, 283-294 (2005)
2. K. KROY, G. SAUERMAN & H. J. HERRMANN, Minimal model for sand dunes, *Physical Review Letters* **88**, 054301 (2002)
3. K. B. MATHER, Why do roads corrugate?, *Scientific American*, **208**, 128-136 (1963)
4. N. TABERLET, S. W. MORRIS & J. N. MCELWAINE, Washboard road : The dynamics of granular ripples formed by rolling wheels, *Physical Review Letters*, **99**, 068003 (2007)
5. A.-F. BITBOL, N. TABERLET, S. W. MORRIS & J. N. MCELWAINE, Scaling and dynamics of washboard roads, *Physical Review E*, **79**, 061308 (2009)
6. D. C. MAYS & B. A. FAYBISHENKO, Washboards in unpaved highways as a complex dynamic system *Complexity*, **5** (6), 51-60 (2000)
7. J. A. BOTH, D. C. HONG & D. A. KURTZE, Corrugation of roads, *Physica A*, **301** (1-4), 545-559 (2001)
8. Y. SATO, A. MATSUMOTO & K. KNOTHE, Review on rail corrugation studies, *Wear*, **253**, (1-2), 130-139 (2002)
9. P. MEEHAN & W. DANIEL, Effects of wheel passing frequency on wear-type corrugations, *Wear*, **265**, (9-10), 1202-1211 (2008)
10. P. BELLETTE, P. MEEHAN & W. DANIEL, Effects of variable pass speed on wear-type corrugation growth, *Journal of Sound and Vibration*, **314** (3-5), 616-634 (2008)
11. N. HOFFMANN & M. MISOL, On the role of varying normal load and of randomly distributed relative velocities in the wavelength selection process of wear-pattern generation, *International Journal of Solids and Structures*, **44** Issues 25-26, 15 December 2007, Pages 8718-8734 (2007)
12. D. A. KURTZE, & J. A. BOTH, The genesis of washboard roads, *International Journal of Modern Physics B*, **15** (24-25), 3344-3346 (2001)
13. B. PERCIER, S. MANNEVILLE, J.N. MCELWAINE, S.W. MORRIS, N. TABERLET, Lift and drag forces on an inclined plow moving over a granular surface, *Physical Review E*, **84**, 051302 (2011)

Observation expérimentale d'une instabilité de Rayleigh-Plateau dans un jet granulaire en chute libre dans l'air

Gaël Prado, Yacine Amarouchene, & Hamid Kellay

Univ. Bordeaux, LOMA, UMR 5798, F-33400 Talence, France
CNRS, LOMA, UMR 5798, F-33400 Talence, France
g.prado@loma.u-bordeaux1.fr

Résumé. Un jet granulaire en chute libre dans l'air s'écoulant d'un réservoir soumis à une excitation verticale développe une instabilité comme le ferait un liquide en écoulement. Nous montrons que cette instabilité est similaire à l'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau mettant en jeu une tension de surface granulaire effective. L'étude de cette instabilité nous permet d'obtenir des valeurs de cette tension de surface effective (quelques $mN.m^{-1}$) en accord avec de précédentes mesures réalisées à plus petite échelle. Nous montrons également que cette instabilité disparaît en l'absence d'air, semblant indiquer que la tension de surface effective est issue d'un fort couplage entre le jet granulaire et l'air environnant.

Abstract. A granular jet falling out of a funnel-shaped container, subjected to small vertical vibrations develops an instability further downstream as may happen for ordinary liquids. Our results show that this instability is reminiscent of the Rayleigh-Plateau capillary instability leading to the breakup of the jet at large scales. The first stages of this instability are captured in detail allowing a determination of the dispersion relation. Surface tensions measured in this unstable regime (of the order of $mN.m^{-1}$) are in agreement with previous measurements at much smaller scales. This instability and the breakup of the jet can be inhibited when the effect of the surrounding medium is reduced by enclosing the jet in an evacuated chamber, showing that the effective surface tension measured is a result of a strong interaction with the surrounding air.

1 Introduction : Tension de surface granulaire

Il a déjà été observé que des jets granulaires en chute libre dans l'air se comportaient - en apparence - de manière similaire à un liquide [1,2]. De tels jets commencent à chuter de manière uniforme puis peuvent se briser en agrégats tout comme un liquide forme des gouttes sous l'effet de la tension de surface. Cette observation est intrigante étant donné que les forces existantes entre les grains sont bien plus faibles que les autres forces mécaniques en jeu. La formation de ces agrégats granulaires a été observée dans des jets granulaires dans l'air [3], dans un liquide [4] ou dans le vide [5]. Une étude récente [5] a pu montrer que des faibles forces de cohésion entre les grains (forces de van der Waals, ponts capillaires) suffisaient à provoquer l'apparition des agrégats et que la longueur d'onde associée à ces agrégats étaient incompatible (inférieure) à celle caractéristique de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Il paraît donc difficile de concilier l'existence de ces agrégats avec une instabilité de nature capillaire. Malgré cela, le concept d'une tension de surface granulaire a déjà été introduit dans [6], et estimée par l'analyse des fluctuations interfaciales de petites longueurs d'onde dans des jets granulaires [7]. L'explication proposée suppose une interaction entre le jet et l'air. Nous présentons ici les résultats d'expériences visant à mettre en évidence l'existence d'une tension de surface granulaire agissant à grande échelle par l'excitation de modes instables de grande longueur d'onde de manière similaire à l'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau.

2 Jets granulaires soumis à une excitation verticale : expériences et résultats

Les expériences réalisées dans le but de l'observation de cette instabilité sont les suivantes : un matériau granulaire sec et non cohésif s'écoule dans l'air, le réservoir (entonnoir) étant soumis à une oscillation

verticale sinusoïdale d'excursion $A \sin(2\pi ft)$. Les écoulements sont réalisés en faisant varier les paramètres A et f . Les particules utilisées sont des micro-billes de verre de diamètre $d = 106 - 212 \mu\text{m}$ et de densité $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-1}$. Le diamètre de sortie D de l'entonnoir et le diamètre d des billes sont choisis afin de rester dans un régime d'écoulement fluide sans cohésion apparente (dans les expériences présentées ici, $d > 100 \mu\text{m}$, $\frac{D}{d} \approx 30$). Les jets en écoulement sont filmés à l'aide d'une caméra rapide (Phantom v640) permettant une acquisition à haute cadence (4000 images par seconde) et à haute résolution (de l'ordre de $20 \mu\text{m.pixel}^{-1}$).

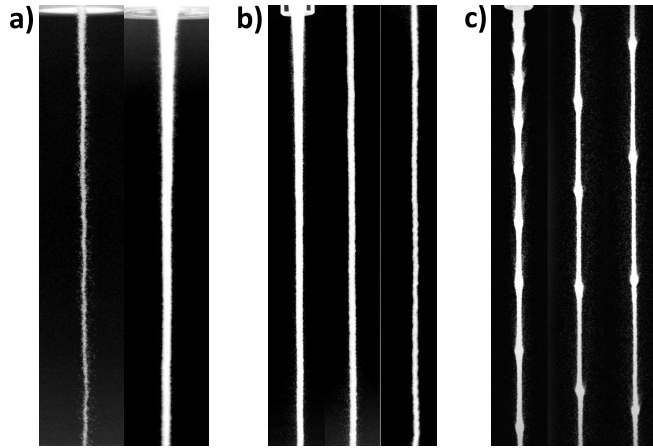


Figure 1. (a) A gauche, billes de $d = 159 \mu\text{m}$ en sortie d'un entonnoir de diamètre de sortie $D = 2 \text{ mm}$. A droite, mêmes billes en sortie d'un entonnoir de diamètre de sortie $D = 5 \text{ mm}$. (b) Micro-billes de diamètre $d = 159 \mu\text{m}$ en sortie d'un entonnoir de diamètre de sortie $D = 5 \text{ mm}$, de 0 cm à 20 cm , 20 cm à 40 cm et 40 cm à 60 cm après la sortie. (c) Mêmes diamètres qu'en (b), excitation verticale à une fréquence $f = 53 \text{ Hz}$ et amplitude $A = 50 \mu\text{m}$.

La figure 1a illustre le choix du rapport d'aspect $\frac{D}{d} > 15$ choisi. A gauche, des billes de diamètre $d = 106 - 212 \mu\text{m}$ (celles utilisées par la suite) s'écoulent d'un entonnoir de diamètre de sortie $D = 2 \text{ mm}$, produisant un jet dispersé. A droite, les mêmes billes s'écoulent d'un entonnoir de diamètre $D = 5 \text{ mm}$, produisant un comportement collectif à comparer à l'écoulement discret précédent. Nous avons déterminé que la transition entre le comportement dispersé et le comportement fluide se situait vers $\frac{D}{d} = 15$, d'où le choix dans les diamètres des billes et de l'entonnoir (pour un rapport $\frac{D}{d} \approx 30$). La figure 1b présente un jet de grains s'écoulant de l'entonnoir précédent de la sortie de l'entonnoir jusqu'à une distance $z = 60 \text{ cm}$ sous la sortie du réservoir. On observe le comportement fluide conservé sur une longue distance avec un amincissement du jet au cours de la propagation. Sur la figure 1c, le même jet est maintenant soumis à une excitation verticale d'amplitude $A = 50 \mu\text{m}$ et de fréquence $f = 53 \text{ Hz}$. On observe la conservation de l'amincissement global du jet auquel se superpose une modulation de son diamètre avec une longueur d'onde marquée et croissante au cours de la propagation. La question à laquelle nous nous intéressons ici concerne la croissance de cette modulation à grande échelle, et la rupture du jet à longue distance. Quelle est la croissance du mode imposé au jet, et conduit-elle à la rupture du jet? Le diamètre du jet est extrait des images réalisées selon la méthode décrite dans [7] et conduit à un diamètre du jet variant selon la relation $\langle D(z) \rangle = D_0 \left(1 + \frac{2gz}{v_0^2}\right)^{-1/4}$, avec v_0 la vitesse initiale en sortie de l'entonnoir (de l'ordre de $0.3 - 0.5 \text{ m.s}^{-1}$). Rappelons que cette relation suppose un comportement incompressible pour le jet granulaire. En appliquant une excitation au jet, on note que le profil moyen suit toujours la loi précédente tant que les valeurs d'amplitude imposées restent faibles (Fig. 2a) On se place pour cela dans un régime où les fluctuations du diamètre du jet induites par l'excitation verticale sont de l'ordre de 5% du diamètre moyen. Il est possible d'estimer la valeur de la fraction volumique Φ en sortie de l'entonnoir en mesurant la vitesse de sortie des billes ainsi que leur flux massique, pour une fraction volumique $\Phi_0 \approx 0.5$ en sortie, et au cours de la propagation par conservation de la masse. L'évolution de la longueur d'onde visible Fig.

1c provient de l'étirement du jet au cours de la propagation des billes sous l'effet de la gravité (les billes accélèrent comme $v(z) = \sqrt{2gz + v_0^2}$) couplé à l'incompressibilité du jet. la croissance de la longueur d'onde est donc simplement $\lambda(z) = \frac{v_0}{f} \sqrt{1 + \frac{2gz}{v_0^2}}$. La figure 2b illustre l'évolution de la longueur d'onde excitée pour diverses fréquences.

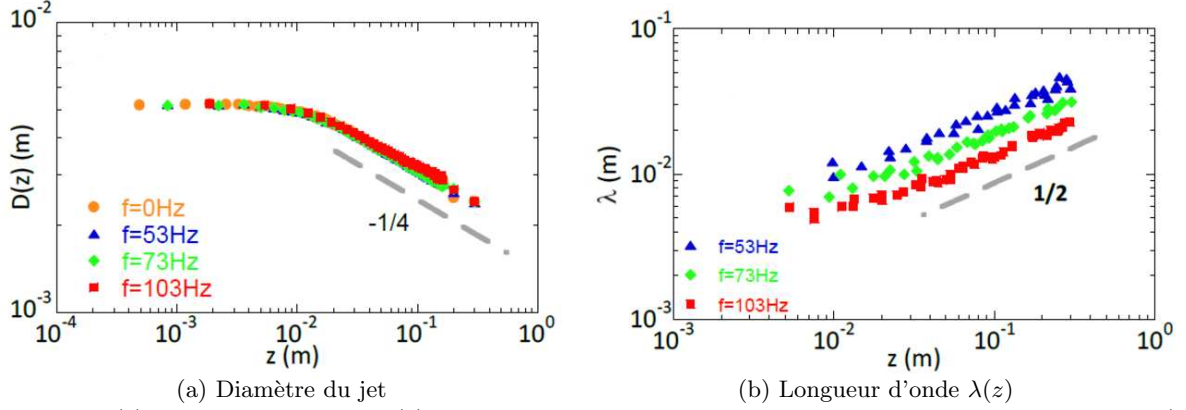


Figure 2. (a) Diamètre du jet $\langle D(z) \rangle$ pour un jet non excité et excité à trois fréquences différentes. (b) Longueur d'onde $\lambda(z)$ pour un jet excité à trois fréquences différentes.

Afin d'étudier plus précisément la croissance des modes excités dans le jet, de nouvelles séries d'images sont réalisées en réduisant la taille de la fenêtre verticale étudiée (donc avec une meilleure résolution spatiale) afin de minimiser les évolutions de $D(z)$ et $\lambda(z)$. Il est possible à partir des mesures réalisées sur ces champs de découpler la modulation imposée de l'amincissement du jet en considérant la perturbation relative sous la forme $\tilde{D}(z) = \frac{D(z) - \langle D \rangle}{\langle D \rangle}$. Afin d'étudier l'évolution temporelle de la perturbation au cours de l'écoulement, l'échelle spatiale peut être convertie en échelle temporelle par $t = \frac{v(z) - v_0}{g}$ et on peut représenter $\tilde{D}(t)$ (Fig. 3 pour différentes fréquences). Nous extrayons le taux de croissance ω de la perturbation par un ajustement exponentiel de $\langle \tilde{D}(t) \rangle$. Une autre méthode employée dans une moindre mesure est de suivre directement l'amplitude de chaque pic de la modulation. On obtient ainsi des valeurs moyennes en accord avec les taux de croissance extraits de $\langle \tilde{D}(t) \rangle$ avec une plus grande dispersion des valeurs (en raison de statistiques plus faibles). Les taux de croissance obtenus restent faibles — de l'ordre de quelques s^{-1} .

Une dernière quantité d'intérêt est le nombre d'onde réduit de la perturbation kr_0 , avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et r_0 le rayon local du jet. On se place dans la limite $kr_0 < 1$ (correspondant à $\lambda > 2\pi r_0$).

3 Instabilité de Rayleigh-Plateau granulaire

Une fois les taux de croissance ω obtenus pour les différentes fréquences analysées, nous pouvons tracer la courbe $\omega(kr_0)$. La figure 4a présente ces courbes obtenues avec plusieurs entonnoirs de différents diamètres (certains entonnoirs étant en plastique, il a été impossible d'exciter des hautes fréquences avec ceux-ci). On notera la ressemblance avec l'allure de la courbe de dispersion connue pour l'instabilité de Rayleigh-Plateau d'un liquide inviscide (forme de cloche présentant un maximum proche de $kr_0 \approx 0.7$). La relation historique en ce cas est donnée par

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho r_0^3} \frac{I_1(kr_0)}{I_0(kr_0)} (1 - (kr_0)^2),$$

avec γ la tension de surface et I_n les fonction de Bessel modifiées d'ordre n [8].

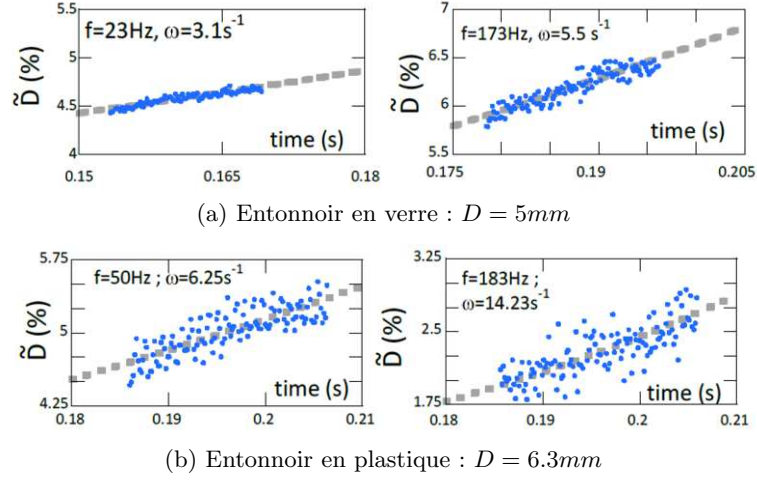


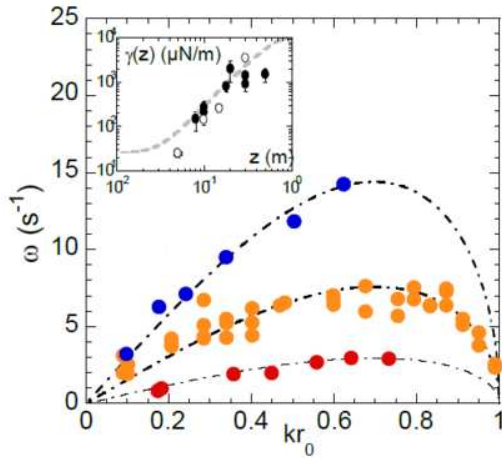
Figure 3. Diamètre du jet $\langle \tilde{D}(t) \rangle$ pour différentes fréquences obtenus sur deux entonnoirs distincts. On remarquera la plus grande dispersion des points avec l’entonnoir en plastique, attribuée à de plus grandes déformations du réservoir au cours de l’excitation.

Dans nos expériences, le seul paramètre inconnu est la tension de surface γ , que nous obtenons donc par un ajustement de nos points expérimentaux. Malgré une certaine dispersion, l’accord avec l’expression historique est bon et donne des valeurs de tension de surface de l’ordre de quelques mN.m^{-1} pour les différents entonnoirs. Cette valeur est en accord avec les précédentes mesures effectuées à plus petite échelle dans le régime stable de l’instabilité [7] (rappelées dans l’encart, Fig. 4a). Nous nous intéressons également au comportement du jet excité à grande distance : l’amincissement du jet couplé à la croissance du mode instable induit dans le jet devrait provoquer la rupture du jet, toujours en analogie avec l’instabilité capillaire pour les liquides. Ce comportement est illustré Fig. 4c. Les tailles caractéristiques correspondent à la longueur d’onde de l’excitation initiale après croissance lors de la propagation. Il a été supposé précédemment [7] que la tension de surface effective du jet granulaire était issue d’une interaction entre le jet et l’air environnant. Une expérience simple réalisée afin de tester cette hypothèse est d’étudier les modes instables d’un jet placé dans une chambre à vide. La figure 4b présente une comparaison des taux de croissance obtenus pour deux fréquences différentes à pression ambiante et à une pression $P \approx 0.1$ mbar. La figure 4c compare le jet excité dans l’air et dans le vide. On remarquera que l’excitation semble absente de l’image du bas ($P \approx 0.1$ mbar), et que le jet ne s’est pas brisé. Nous supposons donc que la présence de l’air est cruciale pour le développement de l’instabilité de type Rayleigh-Plateau que nous observons dans les jets granulaires.

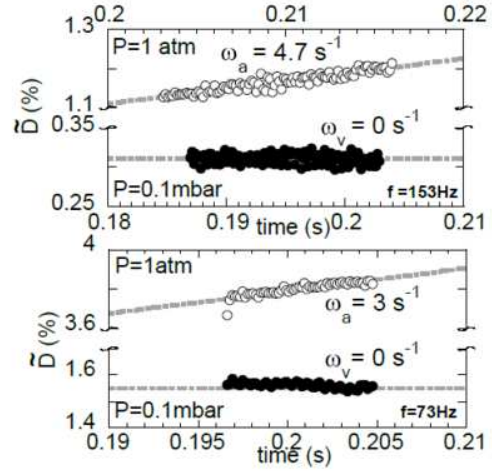
4 Perspectives : interaction entre l’air et le jet granulaire

Nous avons établi qu’en l’absence d’air, les effets de la tension de surface effective granulaire étaient significativement réduits (en supposant que cette tension de surface effective est le moteur de l’instabilité observée dans le jet). Afin d’essayer de comprendre comment se traduit le couplage entre l’air et le jet en termes de forces agissant sur le jet, nous avons cherché à mesurer la vitesse de l’air entraîné par le jet.

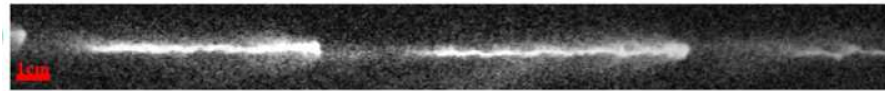
En s’intéressant au profil radial de vitesse des billes, on observe que les billes les plus proches de l’interface du jet chutent plus vite que celles plus éloignées, comme illustré Fig. 5a pour plusieurs distances après l’entonnoir. La vitesse de chute du jet étant donnée par $v(z) = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$, on notera que les billes ”libres” les plus proches de l’interface ont une vitesse verticale légèrement inférieure à celle du jet, mais supérieure à celle attendue pour une bille isolée en chute libre dans l’air immobile. On s’attend donc à ce que l’air situé près du jet soit entraîné par celui-ci. Nous mesurons cette vitesse de l’air en utilisant des micro-sphères creuses en verre de diamètre $d \approx 30 \mu\text{m}$ et de densité $\rho_{K1} = 125 \text{kg.m}^{-3}$ (considérées comme



(a) Relation de dispersion $\omega(kr_0)$ pour différents entonnoirs. Entonnoir en verre ($D = 5$ mm, en orange), en plastique ($D = 6.5$ mm, en bleu) et en plastique ($D = 12.6$ mm, en rouge).



(b) Taux de croissance donnés pour deux fréquences différentes à pression ambiante et à $P \approx 0.1$ mbar. Encart : tension de surface granulaire extraite des modes instables (noir) et des fluctuations de l'interface (blanc).



(c) Jet excité ($f = 53\text{Hz}$, $A = 50 \mu\text{m}$) à pression ambiante, $100 < z < 120$ cm



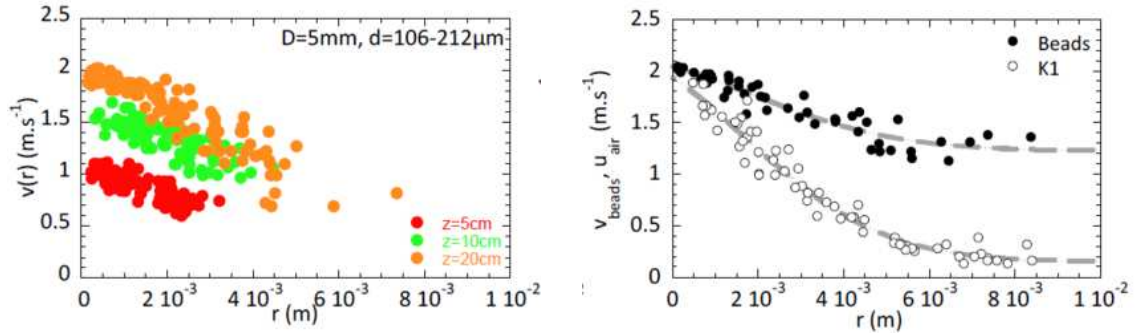
(d) Jet excité ($f = 53\text{Hz}$, $A = 100 \mu\text{m}$), pression $P \approx 0.1$ mbar, $100 < z < 110$ cm

Figure 4. Résultats expérimentaux obtenus sur un jet granulaire en chute libre dans l'air s'écoulant d'un réservoir soumis à une excitation verticale.

traceurs quasi-passifs pour l'écoulement d'air). Le profil obtenu pour l'air est présenté Fig. 5b avec celui des billes "libres" proches du jet granulaire. Nous pouvons notamment étudier le développement de la couche d'air entraînée par le jet au cours de sa chute i.e. la couche limite d'un cylindre poreux en accélération. Les travaux en cours et à venir concernent cet entraînement de l'air par le jet et les diverses forces résultant de cet entraînement (portance induite par cisaillement, turbophorèse, effet Magnus, coefficient de restitution effectif, etc).

5 Conclusion

Nous avons observé et étudié une instabilité dans un jet granulaire en chute libre dans l'air. Cette instabilité possède des similarités frappantes avec l'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau pour un liquide inviscide. De l'analyse des taux de croissance des modes instables de cette instabilité, nous obtenons une tension de surface granulaire effective dont les valeurs (quelques $\text{mN}\cdot\text{m}^{-1}$) sont en accord avec des mesures réalisées précédemment par d'autres méthodes. Cette tension de surface granulaire effective semble trouver son origine dans l'interaction entre le jet granulaire et l'air ambiant entraîné par le jet et se manifeste à différentes échelles. Des expériences montrent en effet que l'air situé près du jet est entraîné sur une certaine distance autour du jet. Nos résultats semblent donc indiquer un autre mécanisme



(a) Mesurée à grande distance sous le réservoir

(b) Mesurée par des traceurs quasi-passifs

Figure 5. Vitesse $V(r)$ des billes $d = 106 - 212 \mu\text{m}$ mesurée à différentes distances sous le réservoir (a) et vitesse des billes (points noirs) et vitesse de l'air ambiant (points blancs) mesurée par des traceurs quasi-passifs (b). Les ajustements gaussiens gris servent de guide, et ne représentent pas la forme du profil des particule ou du fluide.

conduisant à la rupture d'un jet granulaire en parallèle des effets cohésifs précédemment évoqués dans la littérature.

Références

1. N. KHAMONTOVA, *Russian Journal of Physical Chemistry*, **22**, 281 (1890)
2. J. EGGERS & E. VILLERMEAUX, *Physics of Liquid jets, Reports on Progress in Physics*, **71**, 036601 (2008)
3. M. E. MÖBIUS, Clustering instability in a freely falling granular jet, *Physical Review E*, **74**, 051304 (2006)
4. M. NICOLAS, Experimental study of gravity-driven dense suspension jets, *Physics of Fluids*, **14**, 3570-3576 (2002)
5. J. R. ROYER, D. J. EVANS, L. OYARTE, Q. GUO, E. KAPIT, M. E. MÖBIUS, S. R. WAITUKAITIS & H. M. JAEGER, High-speed tracking of rupture and clustering in freely falling granular streams, *Nature*, **459**, 1110-1113 (2009)
6. J. DURAN, Rayleigh-Taylor instabilities in thin films of tapped powder, *Physical Review Letters*, **87**, 254301 (2001)
7. Y. AMAROUCHENE, J.-F. BOUDET & H. KELLAY, Capillarylike fluctuations at the interface of falling granular jets, *Physical Review Letters*, **100**, 218001 (2008)
8. S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover, New York (1961)
9. G. PRADO, Y. AMAROUCHENE & H. KELLAY, Experimental evidence of a Rayleigh-Plateau instability in free falling granular jets, *Physical Review Letters*, **106**, 198001 (2011)

Effets de la rotation sur la convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux soumis à un gradient radial de température

Clément Savaro, Arnaud Prigent, & Innocent Mutabazi¹

LOMC, UMR 6294, CNRS-Université du Havre
 clement.savaro@etu.univ-lehavre.fr

Résumé. Nous nous intéressons dans cette étude à l'effet de la rotation du cylindre intérieur sur la convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux soumis à un gradient radial de température. Les cylindres de rayons $a = 2$ cm et $b = 2,5$ cm et de hauteur $H = 55,4$ cm sont placés verticalement. Une circulation d'eau provenant de bains thermostatés permet de contrôler la température aux parois des cylindres et de créer ainsi le gradient radial de température. Le système est caractérisé par le rapport des rayons $\eta = 0,8$ et le rapport d'aspect $\Gamma = 114$. Ses paramètres de contrôle sont le nombre de Grashof Gr relié au gradient radial de température et le nombre de Taylor Ta , relié à la vitesse de rotation du cylindre intérieur. L'écoulement est visualisé à l'aide de kalliroscope et des mesures du champ de vitesse et température sont réalisés à l'aide de cristaux liquides thermochromiques encapsulés.

Dès qu'un gradient de température est créé entre les cylindres, il se forme une grande cellule convective verticale. À partir d'un nombre de Grashof critique $Gr_c = 8000$ et sans rotation, la cellule convective est sujette à une instabilité prenant la forme de rouleaux axisymétriques se propageant respectivement vers le haut (le bas) quand le cylindre intérieur (extérieur) est le plus chaud. Dans cette étude, le nombre de Grashof est fixé à une valeur supérieure à la valeur critique et le cylindre intérieur est progressivement mis en rotation. Nous étudions alors les propriétés spatiotemporelles de l'écoulement et regardons comment l'ajout de la rotation les modifie. Une faible rotation a un faible effet perturbatif sur les rouleaux axisymétriques, diminuant seulement leur intensité. À partir d'un nombre de Taylor $Ta = 17$ les ondes modulées, aussi observées à des nombres de Grashof moins élevés, apparaissent et coexistent avec les rouleaux axisymétriques. Nous avons aussi observé la présence d'un nouveau motif ayant la forme d'un unique rouleau incliné. Ce rouleau se développe sur plus de la moitié de la hauteur totale depuis l'extrémité haute ou basse du système, selon le sens du gradient de température. Pour certains paramètres il se propage autour du cylindre intérieur sans changement, faisant penser à une onde solitaire. Mais dans la plupart des cas il interagit avec les ondes modulées ce qui provoque sa déformation voir sa disparition avant qu'il ne se reforme.

Abstract. This study deals with the effect of the rotation of the inner cylinder on the instabilities of the natural convection between two coaxial cylinders. The radius of the upright cylinders are $a = 2$ cm and $b = 2.5$ cm and the height is $H = 55.4$ cm. The temperature is controlled by a flow of water from two thermostatted baths. The system is characterized by the radius ratio $\eta = 0.8$ and the aspect ratio $\Gamma = 114$. The controls parameters are the Grashof number Gr related to the radial temperature gradient and the Taylor number Ta related to the rotation rate of the inner cylinder. We visualize the flow with kalliroscope and measure the velocity and temperature fields with encapsulated thermochromic liquid crystals.

The temperature gradient produce a single vertical convective cell along the entire height of the cylinders. Above a critical value of the Grashof number $Gr_c = 8000$ this cell can be destabilized leading to the apparition of axisymmetric rolls in the center of the system and propagating respectively upward (downward) when the inner (outer) cylinder is the hottest. In this study the Grashof number is fixed just above the critical value and the inner cylinder is gradually set in rotation. Then we study the spatiotemporal properties of the flow and their possible modification by the rotation. At low rotation rate the axisymmetric rolls are weakly disturbed. Their intensity decrease. Above a Taylor number $Ta = 17$ modulated waves, also seen at lower Grashof, appear and coexist with the axisymetrics rolls. We also observe a new pattern having the shape of a single tilted roll. This roll exist on more than half of the total height of the system from the top or the low end, depending on the direction of the temperature gradient. For some parameters it propagates around the inner cylinder without change. But in most of the cases it interacts with the modulated waves causing temporary deformation or disappearance of the pattern.

1 Introduction

Nous étudions l'écoulement d'eau confinée entre deux cylindres coaxiaux produit par deux effets moteurs distincts, la rotation du cylindre intérieur d'une part et un gradient horizontal de température d'autre part. Le premier effet correspond au système de Couette-Taylor, un modèle d'écoulement courant dans l'industrie et très utilisé dans les travaux sur les instabilités hydrodynamiques et la transition vers la turbulence. La rotation du cylindre intérieur produit un écoulement purement azimuthal qui se déstabilise à partir d'un taux de rotation critique. Il apparaît alors des rouleaux axisymétriques pouvant eux même se déstabiliser quand le taux de rotation continue à être augmenté [1,2]. Les effets de l'ajout d'un gradient de température à ce système sont bien documentés [3,4,5,6]. La cellule convective qui se forme alors apporte de profondes modifications à l'instabilité centrifuge. Les rouleaux de Taylor axisymétriques sont remplacés par un motif spirale qui peut apparaître à des vitesses de rotation bien plus faibles que les rouleaux de Taylor et même être modulé [7]. Le cas où seul le second effet est présent correspond à la convection naturelle entre deux plaques verticales où deux cylindres. Il s'agit d'une autre configuration modèle d'hydrodynamique qui permet aussi d'étudier des problèmes de transfert de chaleur. Dans ce cas lorsque le gradient de température est augmenté au-dessus d'une valeur critique la cellule convective devient instable. Des rouleaux axisymétriques propagatifs apparaissent [8,9].

Nous avons étudié les effets d'une rotation du cylindre intérieur, bien inférieure au seuil des rouleaux de Taylor, sur la première instabilité de la cellule convective. Une solution de Kalliroscope est utilisée pour visualiser l'écoulement et étudier ses propriétés spatiotemporelles. Après avoir décrit le dispositif expérimental et les techniques de mesure, nous présentons les résultats obtenus et décrivons un nouveau type de motif découvert au cours de cette étude.

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (Fig. 1) est constitué d'un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon $a = 2$ cm et d'un cylindre extérieur en verre de rayon $b = 2,5$ cm créant un gap de largeur $d = 0,5$ cm. Les extrémités hautes et basses sont définies par deux anneaux en Téflon solidaires du cylindre extérieur et séparés d'une hauteur $H = 55,4$ cm. Les caractéristiques géométriques du système sont le rapport des rayons $\eta = a/b = 0,8$ et le rapport d'aspect $\Gamma = H/d = 114$. La fréquence de rotation Ω du cylindre intérieur est assurée par un servomoteur et est contrôlée avec une précision de 1%. Elle est directement reliée à un premier paramètre de contrôle du système, le nombre de Taylor $Ta = (\Omega ad/\nu).(d/a)^{1/2}$ où ν est la viscosité du fluide. Pour imposer un gradient de température un troisième cylindre en verre de rayon $c = 5$ cm est ajouté et le gap entre celui-ci et le système est relié à un bain thermostaté qui assure une circulation d'eau à un débit de 14 litres par minutes. La température du cylindre intérieur creux est imposé de la même façon par un second bain. Le gradient de température ainsi créé permet de définir le second paramètre de contrôle, le nombre de Grashof $Gr = g\alpha\delta T d^3/\nu^2$ où g est l'accélération de la pesanteur et α le coefficient de dilatation. Le troisième paramètre de contrôle est le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$, qui caractérise le fluide qui est de l'eau dans cette étude.

L'eau estensemencée de Kalliroscope AQ-1000 [10], une solution de petites plaquettes réfléchissantes, qui permet une visualisation directe des motifs de l'écoulement. Les zones où le cisaillement est parallèle à l'éclairage apparaissent comme sombres alors que les zones où le cisaillement est perpendiculaire à l'éclairage apparaissent brillantes. Une nappe laser permet de faire une coupe verticale dont on filme l'évolution au cours du temps. On extrait ensuite du film un diagramme spatiotemporel qui est la superposition chronologique d'une ligne verticale prise au centre du gap (Fig. 2). Pour obtenir des données quantitatives nous analysons spectralement les motifs en dessous et autour de ce seuil. Une transformé de Hilbert ainsi que des filtres en temps et en espace autour des fréquences fondamentales du motif sélectionné sont appliqués. Ceci nous permet d'obtenir l'écriture de l'intensité lumineuse du diagramme spatio-temporel $I(z, t)$ sous la forme $|A(z, t)|e^{i\phi(z, t)}$ où A est l'amplitude du motif et ϕ sa phase. La dérivée spatiale de la phase donne le nombre d'onde k et sa dérivée temporelle la fréquence f . Le nombre d'onde et la fréquence sont respectivement adimensionnés par la largeur du gap d et le temps caractéristique de diffusion visqueuse $d^2/2\pi\nu$.

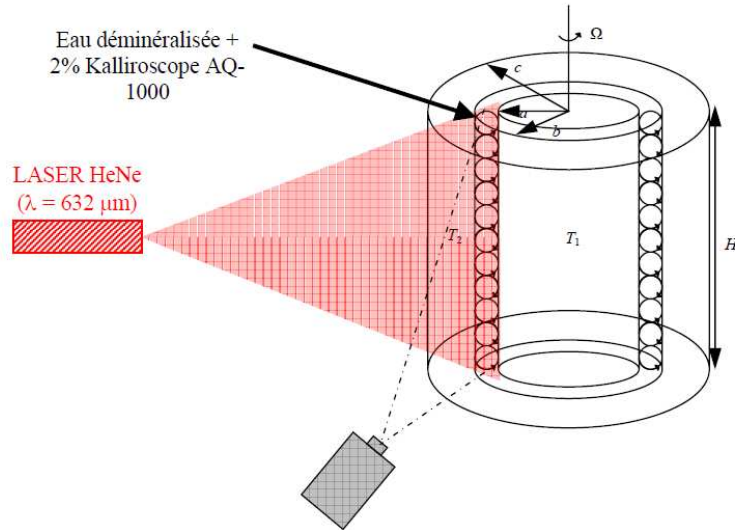


Figure 1. Schéma du dispositif expérimental et de la mesure à l'aide d'une nappe laser.

Dans cette étude nous nous plaçons à un Grashof donné puis, après avoir attendu 40 min pour que le système atteigne son état stationnaire, nous augmentons le nombre de Taylor par petits paliers. À chaque palier nous attendons 20 minutes avant de faire les mesures.

3 Effets de la rotation sur la convection naturelle

Dès la mise en place d'un gradient de température une cellule de convection apparaît avec un mouvement ascendant du côté chaud et descendant du côté froid. Cet écoulement se déstabilise pour un nombre de Grashof $Gr_c = 8000$ ce qui correspond à un δT imposé de 11°C pour un nombre de Prandtl $Pr = 5$. Il apparaît alors, au centre du système, des rouleaux axisymétriques se propageant à très faible vitesse vers le haut si le cylindre intérieur est plus chaud, ou vers le bas dans l'autre cas [11]. Nous avons comparé les diagrammes spatiotemporels obtenus pour différents nombres de Taylor avec un nombre de Grashof juste au dessus du seuil de l'instabilité Fig. 2. Dans ce qui suit le δT imposé est 12°C avec le cylindre intérieur plus chaud pour un nombre de Grashof $Gr = 9000$ et un nombre de Prandtl $Pr = 5$.

En dessous d'une valeur critique du Taylor $Ta_c = 17$, la rotation a un effet perturbatif sur les rouleaux, au delà de cette valeur d'autres instabilités apparaissent. L'effet perturbatif apparaît clairement dans les spectres spatiaux des motifs, bien que le maximum du pic ne change pas, des nombre d'ondes plus faibles apparaissent. La moyenne des nombres d'ondes et fréquences sur tout le motif pondéré par l'amplitude ne présente pas de variation significative avant le seuil d'apparition des autres motifs (Fig. 3), leurs valeurs sont $q = 2,8 \pm 0,1$ pour le nombre d'onde et $f = 3,6 \pm 0,3$ pour la fréquence et sont en accord avec la littérature [11].

Nous avons constaté une diminution de l'amplitude moyenne allant jusqu'à 40% pour $Ta = 9$ Fig. 4. Cela suggère que l'instabilité n'est que légèrement perturbée par l'écoulement de Couette avec une distorsion des rouleaux révélée par les spectres spatiaux.

Deux motifs distincts apparaissent à la valeur critique $Ta_c = 17$ (Fig. 5), aucune hystérésis n'a été trouvée pour l'apparition de ces motifs. Le premier est la spirale modulée déjà observée en première instabilité pour des nombres de Grashof plus faibles et attendue par continuité [12]. Le second, bien plus intense est une spirale solitaire inclinée avec la même inclinaison que la spirale modulée dont une des extrémités se trouve respectivement sur le bord haut (bas) du système quand le cylindre intérieur

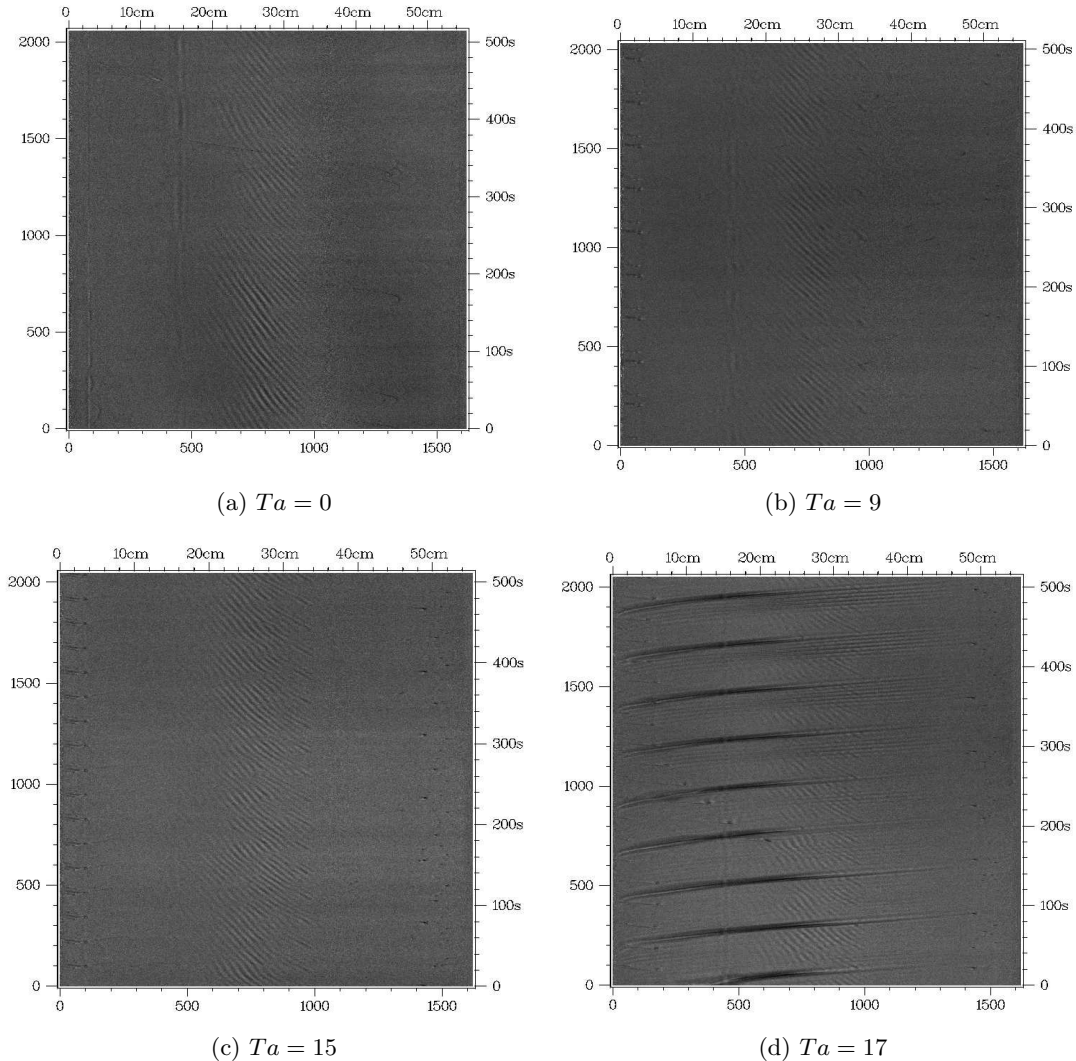
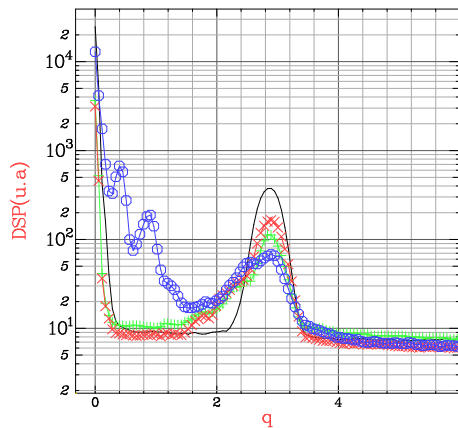


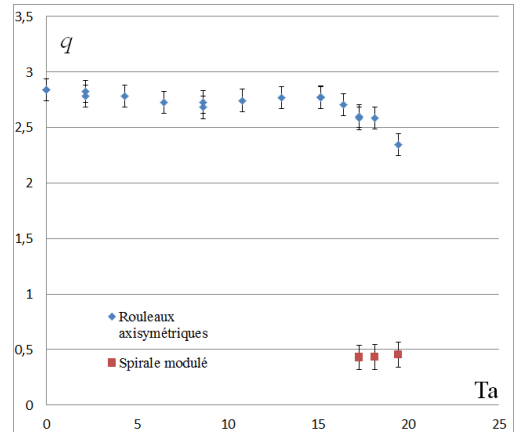
Figure 2. Diagrammes spatiotemporels pour $Gr = 9000$ (T intérieur = 32.5°C et T extérieur = 44.5°C) et différents nombres de Taylor

(extérieur) est le plus chaud. La spirale modulée et les rouleaux axisymétriques se croisent en se perturbant. Le nombre d'onde moyen des rouleaux axisymétriques diminue alors de manière significative (Fig. 3) et leur fréquence moyenne reste inchangée. La spirale solitaire efface les rouleaux axisymétriques et interagit avec la spirale modulée provoquant la déformation ou même la disparition temporaire du motif, il en résulte un motif complexe dépendant du temps. Cette interaction a probablement lieu du fait d'une légère différence de vitesse de déplacement entre les deux motifs. Nous avons constaté que pour une fréquence de rotation de 38 mHz, la fréquence de rotation de la spirale modulée est de 16 mHz, ce qui correspond à la fréquence de rotation moyenne du fluide [12] alors que la spirale solitaire tourne à 17 mHz. Nous avons exploré les paramètres $Gr - Ta$ où l'on peut observer ce motif, il apparaît au même seuil en Taylor que la spirale modulée dès que le nombre de Grashof est supérieur à la valeur critique $Gr_c = 6500$. Nous avons observé différents types de dynamiques de cette spirale, le motif peut être très complexe, avec des dislocations fréquentes ou au contraire très régulier, pouvant rester stationnaire plusieurs heures.

Le comportement du système à des taux de rotation plus élevés est similaire à ce que l'on observe pour des nombres de Grashof moins élevés, une faible augmentation du nombre de Taylor, à $Ta = 20$, suffit



(a) Spectre spatiaux adimensionnés pour $Gr = 9000$ et différents Ta . Le trait plein correspond à $Ta = 0$, les + à $Ta = 9$, les \times à $Ta = 15$ et les \circ à $Ta = 17$.



(b) Nombres d'onde moyen en fonction du nombre de Taylor.

Figure 3. Évolution du nombre d'onde en fonction du nombre de Taylor.

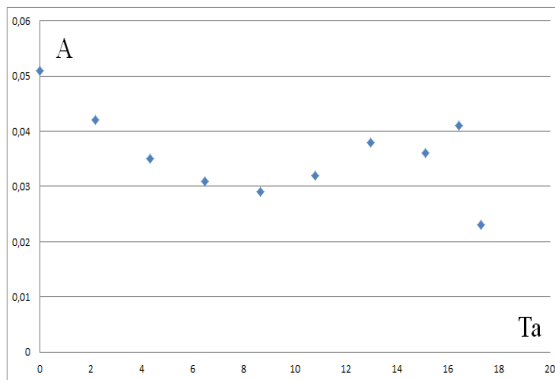


Figure 4. Amplitude moyenne du motif en fonction du nombre de Taylor.

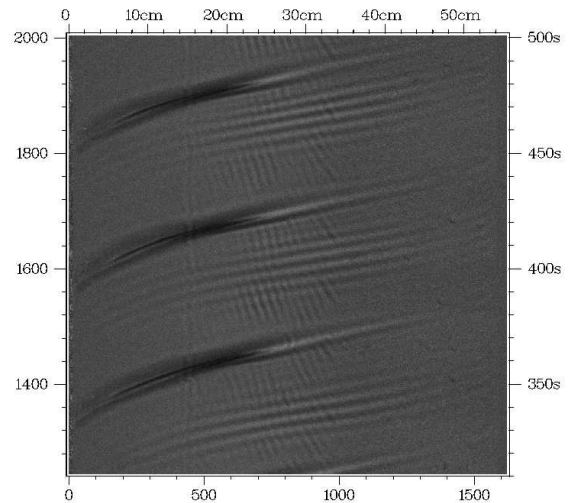


Figure 5. Diagramme spatio-temporel montrant les trois motifs, la spirale solitaire est le motif le plus intense, la spirale modulé a la même orientation et on distingue les rouleaux axisymétrique qui croisent la spirale modulée ($Gr=9000$, $Ta=17$)

pour obtenir un régime irrégulier de spirales emplissant tout le système et comportant de nombreuses dislocations.

4 Conclusion

Nous avons étudié les effets d'une faible rotation du cylindre intérieur sur l'instabilité de la cellule convective produite entre deux cylindres coaxiaux maintenus à des températures différentes. Les rouleaux axisymétriques présents pour un nombre de Grashof supérieur à $Gr_c = 8000$ et en l'absence de rotation sont faiblement perturbés par l'écoulement horizontal. Au dessus d'un nombre de Taylor critique $Ta_c = 17$

d'autres instabilités, d'une autre nature, apparaissent sous forme de spirales. Ce scénario est en fort contraste avec ce qu'il se passe sur l'autre branche du diagramme de bifurcation, lorsque l'on ajoute un faible gradient de température au système alors que les rouleaux de Taylor sont présents. Ceux-ci passent continument des rouleaux axisymétriques à des spirales sous l'effet d'un gradient de température croissant [4]. Un nouveau type d'instabilité a été découvert, celle-ci entraîne dans la plupart des cas de grandes irrégularités dans le système mais il a été trouvé des points $Gr - Ta$ où le motif est régulier. Les propriétés de ces régimes vont être étudiées de façon approfondie par une technique de PIV et thermographie par cristaux liquide encapsulés [12].

Références

1. G. I. TAYLOR, Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, **223**, 289-343 (1923)
2. C. D. ANDERECK, S. S. LIU & H. L. SWINNEY, Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, **164**, 155-183 (1986)
3. H. A. SNYDER & S. K. F. KARLSSON, Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient, *Physics of Fluids*, **7**, 1696-1706 (1964)
4. V. LEPILLER, A. PRIGENT & I. MUTABAZI, Influence d'un gradient de température sur la stabilité des rouleaux de Taylor, *Comptes Rendus des Rencontres du Non-Linéaire*, **9**, 173-178 (2006)
5. M. E. ALI & G. B. MCFADDEN, Linear stability of cylindrical Couette flow in the convection regime, *Physics of Fluids*, **17**, 054112 (2005)
6. D.-C. KUO & K. S. BALLN Taylor-Couette flow with buoyancy : Onset of spiral flow, *Physics of Fluids*, **9**, 2872 (1997)
7. R. GUILLERM, A. PRIGENT & I. MUTABAZI, Ondes modulées dans le système de Couette-Taylor soumis à un fort gradient radial de température, *Comptes Rendus des Rencontres du Non-Linéaire*, **13**, 79-84 (2010)
8. J. W. ELDER, Laminar free convection in a vertical slot, *Journal of Fluid Mechanics*, **23**, 77-98 (1965)
9. G. B. MCFADDEN, S. R. CORIELL, R. F. BOISVERT & M. E. GLICKSMAN, Asymmetric instabilities in buoyancy-driven flow in a tall vertical annulus, *Physics of Fluids*, **27**, 1359-1361 (1984)
10. M. A. DOMINGUEZ-LERMA, G. AHLERS & D. S. CANNELL, Motions of anisotropic particles : Application to visualization of three-dimensional flows, *Physics of Fluids*, **28**, 1204-1206 (1985)
11. I. G. CHOI & S. A. KORPELA, Stability of a conduction regime of natural convection in a tall vertical annulus, *Journal of Fluid Mechanics*, **99**, 725-738 (1980)
12. R. GUILLERM, *Étude expérimentale des instabilités thermo-hydrodynamiques dans un système de Couette-Taylor*, Thèse de l'Université du Havre (2010)

Rhéologie (plasticité) et blocage (jamming) d'un granulaire sec modélisé comme un graphe

Nicolas Rivier¹ & Jean-Yves Fortin²

¹ Institut de Physique et Chimie des Matériaux de Strasbourg (IPCMS), et Université de Strasbourg, 3, rue de l'Université F-67084 Strasbourg

² Groupe de Physique Statistique, Département de Physique de la Matière et des Matériaux, Institut Jean Lamour, UMR 7198, Nancy Université, BP 70239, F-54506 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex
nick@fresnel.u-strasbg.fr

Résumé. Un matériau granulaire dense et sec, avec friction tangentielle infinie, est modélisé comme un graphe connexe de grains reliés par des contacts purement répulsifs. Chaque grain peut donc soit rouler sans glisser sur un autre, soit s'en déconnecter. La stabilité sous cisaillement du granulaire est assurée par la présence de circuits impairs de grains en contact qui les empêchent de rouler l'un sur l'autre. Le matériau granulaire se trouve alors dans l'un de deux états thermodynamiques : solide fragile, bloqué ("jammed") par les circuits impairs, ou fluide sec, en leur absence. La dynamique du granulaire au voisinage de la transition de blocage, dans un tambour tournant à vitesse angulaire constante autour d'un axe horizontal, saute de manière intermittente entre les états solide et fluide. Dans l'état solide fragile, le granulaire suit un cycle limite alternant avalanches et entraînement par le tambour. C'est un comportement de "stick-slip" dans un solide soumis à une friction solide (entraînement par le tambour) et à une force de rappel (gravité). Dans l'état fluide, la force de friction est visqueuse, et le matériau granulaire tend vers un point fixe de pente constante. Si la friction tangentielle est supposée nulle, la modélisation comme un graphe et la frustration causée par les circuits impairs restent valables puisque la force entre grains demeure scalaire et répulsive.

Abstract. Dry granular matter, with infinite tangential friction, is modeled as a connected graph of grains linked by purely repulsive contacts. The degrees of freedom of a grain are non-slip rotation on, and disconnection from another. The material stability under shear (jamming) is ensured by odd circuits of grains in contact that prevent the grains from rolling on each other. A dense hard granular material has two possible states : fragile solid, blocked by odd circuits, and dry fluid or bearing, in the absence of odd circuits, that flows under shear by creation and glide of a pair of dislocations as in plasticity of continuous media. We did introduce the notions of blob, a region of the material containing only even circuits, and of critical contact that closes an odd circuit. The granular material is then represented, at low energies and critical applied shear, as a chain of blobs connected by critical contacts. A granular material inside a cylindrical drum rotating at constant velocity around its horizontal axis alternates intermittently between solid and fluid states. As a fragile solid, it follows a limit cycle of avalanches (slip) and stuck rotations with the drum. This is the stick-slip behavior of a solid subjected to solid friction (to the driving drum) and gravity. In the fluid state, the friction is viscous and the granular material flows to a fixed point with constant slope. For a vanishing tangential friction, the graph description with the frustrating odd circuits is still valid, because the force between grains remains a scalar and repulsive.

1 Introduction

We consider in this paper dry granular materials with a tangential friction that is either a) infinite [1,2] or b) vanishing [3,4]. In both cases, the granular material can be modeled as a *graph*, with in a), the dynamical variables carried by the vertices (non-slip rotation of a grain on another), whereas in b) they are carried by the edges (deformation of struts). Infinite tangential friction and non-slip rotation of the grains (a) provide a direct *mechanism* for the physical behavior of the granular material (unjammed a fragile solid into a dry fluid), and this is why we shall discuss first this model [1,2], and show that conditions b) lead, albeit indirectly, to the same geometrical organization of granular matter and the same dynamics.

Experimentally, dry granular materials have two possible states of flow under shear : a dry fluid [5,6] in which the particles roll without slip on top of each other (bearings), and a fragile solid [3,4], blocked by frustrating arches of particles in contact. The sudden transition between these two states relies on small, extended fluctuations in the medium, typical of second order transitions, unlike the melting of ordinary solids which is first-order. The fragile solid is geometrically frustrated. Indeed, flow is blocked by arches or circuits made of *odd* number of particles in contact with each other, which stabilize the solid state. In that case the particles (spheres, say) cannot roll freely on each other, thereby blocking any movement [7,8]. An odd circuit is fragile because it is inoperative once a single link is broken. This induces a long-range effect (arches can be large in a material without any global symmetry or regular ordering [9,10]) that leads to a second-order transition with scaling laws. Here the rheology takes place at various scales, from the smallest (dislocation glide determining the plasticity) to the largest (arches of size L of the system, responsible for jamming). Unjamming under external shear occurs as intermittency [11,12] rather than with hysteresis as in ordinary second-order phase transitions, because the line defect responsible for jamming (the R-loop) has negligible line tension.

A granular material is represented by a configuration of hard core spheres defining a graph where the center of each sphere is a vertex. Vertices are connected by links or edges depending on whether two adjacent spheres are in contact or not. Grains are made of spheres of radius R_i with i being the label of the individual sphere with arbitrary choice of the numbering since there is no intrinsic long-range ordering. We then define an adjacency matrix \mathbf{A} of size $n \times n$, where n is the number of vertices. The elements $A_{i,j}$ are 1 if grain i and j are in contact, 0 else. We define also a valence matrix $\Delta_{i,j} = z_i \delta_{i,j}$, where $z_i = \sum_j A_{i,j}$ is the degree or valency of the vertex i .

2 Odd circuits, arches and critical contacts

The rotation (without slip) of spheres in contact is a connection from one grain to the other along paths. In the absence of odd circuits, this connection is independent of the path chosen (pure gauge) [9,10,7,8]. An odd circuit blocks or frustrates the free rotation. The dynamics of the graph is built from the scalar degree of freedom θ_i of each sphere. The system can be described by analogy with a system of springs of coupling constant k_s connecting the vertices considered as particles with moment of inertia I , kinetic energy T and potential V , but here the springs are struts with a repulsive interaction (stress-free contact is $\theta_i = -\theta_j$)

$$T = \sum_i \frac{1}{2} I \dot{\theta}_i^2, \quad V = k_s \sum_{i,j} A_{i,j} [1 - \cos(\theta_i + \theta_j)]. \quad (1)$$

The linearized Euler-Lagrange equations are given by the characteristic set of relations $(-\lambda \mathbf{1} + \mathbf{M}) \theta = 0$ where $\mathbf{M} = \mathbf{\Delta} + \mathbf{A}$ is the dynamical matrix and $\lambda = I\omega^2/k_s$ the eigenvalue. Consider now a unitary matrix \mathbf{O} such that $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}$ and $O_{i,j} = (-1)^i \delta_{i,j}$. In the case where only even circuits are present in the system, \mathbf{M} is transformed according to $\mathbf{O}\mathbf{M}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}\mathbf{\Delta}\mathbf{O}^{-1} + \mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{A}$. $\mathbf{Q} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{A}$ is a standard dynamical matrix for a system made of springs. $-\mathbf{Q} + z_0 \mathbf{I}$ ($z_0 > z_{max}$) is a positive matrix and the theorem of Perron-Frobenius applies. Since $\sum_j Q_{i,j} = 0$, it has $\lambda = 0$ as lowest non-degenerate eigenvalue, and *Woodstock* eigenvector $\theta'_i = \sum_j O_{i,j} \theta_j = 1$, or $\theta_i = (-1)^i$.

This transformation is equivalent to coloring as $(-1)^i$ the grains enumerated by labels i . \mathbf{O} is a gauge transformation : it transforms both the coupling constants $\mathbf{M}' = \mathbf{O}\mathbf{M}\mathbf{O}^{-1}$ and $\theta' = \mathbf{O}\theta$. The critical links are identified as the only links where a pair of grains in contact have the same color. Without them, circuits are made of an even number of vertices, therefore the mapping defines a set of zero modes, one for each subgraph of even circuits (which we call *blob*). Odd circuits, through critical links, prevent the material behaving as a fluid. In their presence, the lowest eigenvalue is strictly positive (see [9,10] for details). This eigenvalue serves as an order parameter for the blocked phase, which is proportional to c , the number of critical links. Odd circuits block the system and prevent the material from behaving as a fluid. The lowest eigenvalue λ_{min} is bounded by $4c/n$ [9,10] from variational and algebraic arguments.

The set of critical links defines a minimal surface encircled by a loop. This R-loop [13] is the vorticity of the irreducible odd circuits with one critical link each (see Fig. 1). The forces in the fragile solid are concentrated on the frustrated arches blocking the material, and the lowest eigenvalue λ_{min} is a measure of the frustration. The existence of R-loops explains why it is impossible to describe continuously a granular material without defects. The "dry fluid" is in fact a perfect three-dimensional bearing [7,8] which does not resist shear, but is compressible. Under shear the grains rearrange and separate themselves to eliminate the odd circuits, and the material, albeit "dry", can contain more interstitial fluid such as water.

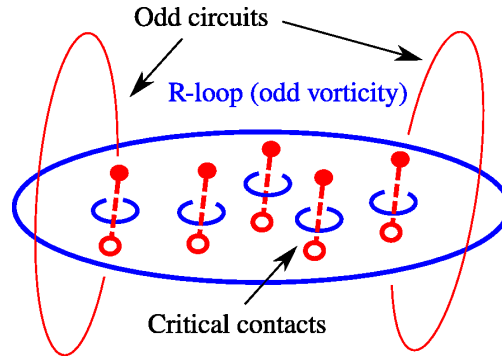


Figure 1. Minimal surface enclosing the critical links in a three-dimensional system. Each odd circuit has one critical link which crosses a surface bounded by a closed loop, R-loop. Several circuits can share the same critical link. The shortest is irreducible by definition.

The ratio c/n , with $c \sim L^{d-1}$ and $n \sim L^d$, is inversely proportional to the linear size L of the d -dimensional system, which is also the size of the largest R-loop near the transition fragile solid-dry fluid [9,10]. By contrast, in ordered crystallization, the R-loops are small, localized, and c/n is finite.

3 Chain of *blobs* (dry fluid domain represented by a generalized vertex) connected by critical contacts

For each R-loop, one can construct a chain of *blobs*, connected by one critical contact. The blobs are alternatively above and below the surface bounded by the R-loop. Blobs are regions of connected vertices without odd circuits, with zero eigenvalue or energy. The soft mode has, in each blob \mathcal{B}_α , $\theta'_i = \theta_\alpha$ uniform and arbitrary. Blobs also interact with each other through non-critical links.

The granular material is thus represented as chains of blobs. Fig. 2 represents a typical chain of such blobs \mathcal{B}_α , interacting with each other by effective coupling constants $J_{\alpha,\beta}$ for adjacent blobs of same parity α and β and by critical couplings $J_{\alpha,\beta}^*$ between consecutive blobs. Under shear, each blob can flow by plasticity (dislocation creation et glide). But the collapse of the material as a whole occurs by breaking all critical contacts. Near critical shear, only the largest R-loop survives (see Fig. 1 and 2). We can define an effective Hamiltonian for the low-lying energy states, since blobs are connected by a few links [1,2] : We can also add a time-dependent external periodic driving force (shear) of strength h_0 and phase $\theta_0(t) = \Omega t$. The elementary excitations of one particle is non-slip rotation on, and disconnection from another. A state of the material is given by the $\{\theta_\alpha\}$. The relative importance of the non-critical couplings between blobs depends on the surface-to-volume ratio of the blobs, which is small close to the unjamming transition where one largest R-loop remains and the blobs are large (see Fig. 2). The elementary excitations of the granular material are those of a chain of blobs, each with uniform θ_α , connected by critical couplings $J_{\alpha,\alpha+1}^*$. Accordingly, the density of states of low energy is a constant, independent of the energy in all space dimensions d [3,4,9,10,14].

We can identify two lowest energy states : A large enough external force h_0 imposes a homogeneous solution $\theta_\alpha = \theta_0(t)$. The penalty of such choice is located in the critical links. The other possibility is to

minimize the energy in these critical links, leading to only two alternating solutions $\theta_\alpha = \pm(-1)^\alpha\theta_0(t)$, which penalizes the blobs, rotating in the direction opposite to the driving shear : If h_0 is large, the homogeneous configuration has lower energy ; physically the driving force tends to override the internal frustration forces located in the critical links. Otherwise, if h_0 is a finite threshold $\sim J^*$, the dynamics is imposed by the critical links.

The granular material may be forced to break the odd circuits, leading to the homogeneous state. Conversely, if odd circuits are reconnected, the system reverts to the alternative state. We can describe this transition by the averaged quantity $\theta = \sum_\alpha \theta_\alpha / N_{blob}$ and the dynamics by $\dot{\theta}$. For the homogeneous state, $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = \Omega$. Otherwise, the average $\theta \simeq 0$ in the alternating state. This transition is related to the intermittency phenomena seen recently in [11,12] where a cylinder, half filled with glass beads, is set to rotate around its fixed, horizontal axis of revolution at a rate Ω . The angle $\theta(t)$ between the surface of the granular material and the horizontal plane switches intermittently between a fixed point of fluctuating, continuous flow (the homogeneous state, $\theta(t) \simeq \text{constant}$, $\dot{\theta}(t) \simeq 0$), and a limit cycle of driven rotation $\dot{\theta}(t) = \Omega$ and large avalanches $\dot{\theta}(t) < \Omega$, that are indeed the two alternating states (stick-slip of the fragile solid) [1,2]. In the fragile solid state, the driving shear is due to the drum or to gravity. In the first alternative the chain of blobs is stuck to the drum, driven from the bottom, and $\theta_\alpha = (-1)^\alpha \Omega t$. When the chain of blobs is driven from the top, by gravity, $\theta_\alpha = -(-1)^\alpha \theta(t)$, where $\theta(t)$ is the angle defined just above, this situation describing avalanches.

4 Dynamics on graphs [15,16]

For a vanishing tangential friction [3,4], as for an infinite tangential friction, the force between two grains in contact is a scalar and the granular material can be modeled as a graph, with vertices representing the grains, and edges, the contacts between grains. A graph $\Gamma = \{V, E, F\}$ consists of several vector spaces $C_s(\Gamma) = \{C_0(\Gamma), C_1(\Gamma), C_2(\Gamma)\}$, involving vertices $i = 1 \dots n (s = 0)$, edges $\gamma = 1 \dots m (s = 1)$ and, possibly, circuits $J = 1 \dots R_1 (s = 2)$ as vectors. A general vector in i -vector space is called an i -chain. Different (graded) vector spaces are related by the boundary operators ∂ or incidence matrices $E_{i\gamma}^{(0)} = \pm 1$ if edge γ is incident on (bounded by) vertex i , $= 0$ otherwise, $E_{\gamma J}^{(1)} = \pm 1$ if edge γ is part of circuit J . This requires an orientation of the edges and of the circuits. Poincaré's identity states that the boundary of a boundary is zero, thus $\partial \cdot \partial = \mathbf{0}$ or $\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{0}$: Circuits belong to the kernel of $\mathbf{E}^{(0)}$. One recovers the $n \times n$ adjacency matrix A_{ij} by the identity

$$\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(0)t} = \mathbf{\Delta} - \mathbf{A} \quad (2)$$

independent of the orientation of the edges, where $\mathbf{\Delta}$ is the diagonal, valence matrix defined above and $\mathbf{E}^{(0)t}$ denotes matrix $\mathbf{E}^{(0)}$ transposed. Consequently, like $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{\Delta} - \mathbf{A}$ is of rank $n - 1$. Moreover, the $R_1 = m - (n - 1)$ edges not on a spanning tree (tree on Γ reaching all its vertices) form a basis for independent circuits (the famous 1847 result of Kirchhoff) [15,16]. The cyclomatic or first Betti number of the graph R_1 is the dimensionality of circuit space. The choices of any particular spanning tree, and of the orientation of the edges, are severely reduced in hard granular materials by the concept of *blobs* and *critical links* that constitute basic edges not on a spanning tree.

For an infinite tangential friction, the dynamical variables are the angles of rotation of the grains θ_i , located on the vertices of the graph. The physical state of the granular material is a vector $\mathbf{v} = \{v_i\} \in C_0(\Gamma)$. The Hamiltonian of the system is obtained from the dynamical matrix \mathbf{M} . It describes a chain of blobs α (each in a ground state of zero energy $\theta_\alpha \mathbf{a}$, $\mathbf{a} = \{a_i\} = (1, -1, 1, -1, \dots)$ alternatively on the vertices of the blob), interacting through critical links that carry a finite energy.

For a vanishing tangential friction, the dynamical variables are strained struts, located on the edges of the graph. The physical state is a vector $\mathbf{e} = \{e_\gamma\} \in C_1(\Gamma)$. Consider two edges incident on the same vertex. They should have opposite orientations to represent struts (see Fig. 3a and 3b). This is possible for even circuits only (circuits with an even number of struts). For each odd circuit, there is one *critical edge* carrying a finite energy J^* . It specifies the odd circuit, gives it its orientation and is not on the

spanning tree. Thus, $\mathbf{e} = \{e_\gamma\} = (1, -1, 1, -1, \dots - 1)$ for even circuits, $\mathbf{e} = (1, -1, 1, -1, \dots - 1; 1)$ for odd circuits (the critical edge component is 1, separated by a ;), and

$$E_{J\gamma}^{(1)t} e_\gamma = 0, \text{ even circuit}; E_{J\gamma}^{(1)t} e_\gamma = 1, \text{ odd circuit.} \quad (3)$$

The orientation is consistent at each vertex of degree z_i (i.e. all incident edges have the same orientation), except at the vertex bounding a critical edge with the wrong orientation (Figs 3b and 3c), hence

$$\begin{aligned} E_{i\gamma}^{(0)} e_\gamma &= \pm(z_i - 2) \text{ if a critical edge is incident on vertex } i \text{ with the wrong orientation,} \\ E_{i\gamma}^{(0)} e_\gamma &= \pm z_i \text{ everywhere else.} \end{aligned} \quad (4)$$

We recover the chain of blobs interacting through critical links, obtained for infinite tangential friction. But here as for electric networks, the physical state vectors are in the edge-space of Γ , where they obey the circuit and vertex equations above (known as *Kirchhoff's laws* in electrical networks, where the right-hand side = 0) [15]. Here, the critical edges are **not** on the spanning tree : they form the basis for (independent) odd circuits. Out of the R_1 independent circuits, c are specified by the critical edges. Within the blobs, the spanning tree remains arbitrary (Fig. 2).

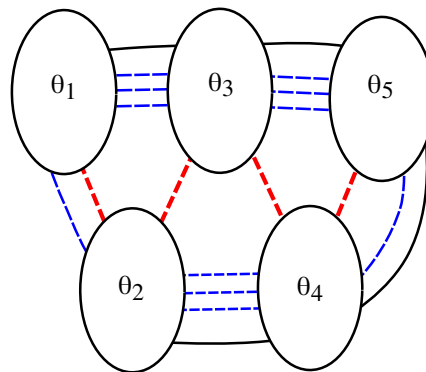
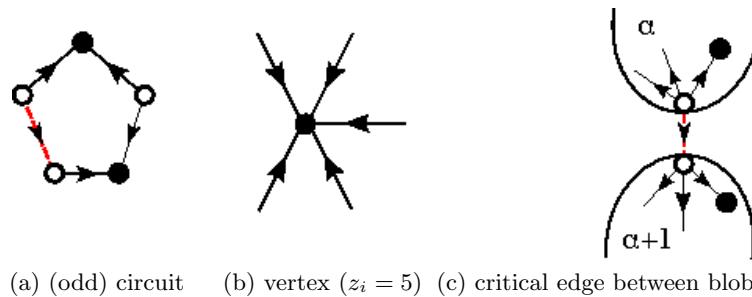


Figure 2. Chain of blobs representing the granular material near unjamming as grains in contact through struts (zero tangential friction). The blobs θ_α are dry fluid domains (each spanned by an arbitrary tree) connected by critical (red, thick-dashed) or non-critical links (blue thin-dashed and black lines). The black lines and the blobs constitute a spanning tree for the material. Cf. the nearly identical figure in [1,2] illustrating infinite tangential friction.

Each blob α has an arbitrary spanning tree, with a non-frustrated dynamics. It can be described by the variable θ_α (see Fig. 2) as a renormalized vertex in a general graph (the non-critical links between two blobs are multiple, whereas there is only one critical link between two (vertices of different) blobs). Only one non-critical link between two blobs is needed to constitute a spanning tree (in Fig. 2, one would need a non-critical link between blobs 5 and 4, or between blobs 1 and 2), so that the c critical links and almost all non-critical links constitute a basis for independent circuits.

The last section of this paper was motivated by a stimulating discussion at Yale (O'Hern group and NR, Nov.'11).



(a) (odd) circuit (b) vertex ($z_i = 5$) (c) critical edge between blobs α and $\alpha + 1$

Figure 3. Physical state for vertices (grains) connected by struts. In (c) the critical edge is incident on blob α with the proper orientation. The critical edge (red, thick-dashed line), \notin the spanning tree, imposes the orientation of the circuit.

Références

1. N. RIVIER & J.-Y. FORTIN, Unjamming in dry granular matter : Second-order phase transition between fragile solid and dry fluid (bearing) by intermittency, *Solid State Phenomena*, **172-174**, 1106-1111 (2011)
2. N. RIVIER & J.-Y. FORTIN, Mechanics of dry granular materials : Between fragile solid (jamming) and dry fluid (rheology), 20^{ème} Congrès Français de Mécanique, Besançon **477** 1-6 (2011)
3. C. S. O'HERN, S. A. LANGER, A. J. LIU, & S. R. NAGEL, Jamming at zero temperature and zero applied stress : The epitome of disorder. *Physical Review Letters*, **88**, 075507 (2002)
4. M. WYART, S. R. NAGEL, & T. A. WITTEN, Geometric origin of excess low-frequency vibrational modes in amorphous solids, *Europhysics Letters*, **72**, 486-492 (2005)
5. D. LOHSE, R. RAUH, R. BERGMANN & D. VAN DER MEER, Creating a dry variety of quicksand, *Nature*, **432**, 689-690 (2004)
6. D. A. HUERTA, V. SOSA, M. C. VARGAS & J. C. RUIZ-SUAREZ, Archimedes principle in fluidized granular systems, *Physical Review E*, **72**, 031307 (2005)
7. R. M. BARAM, H. J. HERRMANN & N. RIVIER, Space-filling bearings in three dimensions, *Physical Review Letters*, **92**, 044301 (2004)
8. N. RIVIER, Granular materials with even circuits : Ball bearings and dry quicksand, In *Powder and Grains* (R. Garcia-Rojo, H.J. Herrmann & S. McNamara, eds.) Balkema, Leiden, pp. 29-32 (2005)
9. N. RIVIER, Extended constraints, arches and soft modes in granular materials, *Journal of Non-Crystalline Solids*, **352** 4505-4508 (2006)
10. N. RIVIER & A. HEMMERLÉ, Unjamming granular materials : "Such sweet jams meticulously jarred", *AIP Conference Proceedings*, **1145**, 523-526 (2009)
11. N. FISCHER, P. GONDRET, B. PERRIN & M. RABAUD, Dynamics of dry granular avalanches, *Physical Review E*, **78** 021302 (2008)
12. N. FISCHER, P. GONDRET & M. RABAUD, Transition by intermittency in granular matter : From discontinuous avalanches to continuous flow, *Physical Review Letters*, **103**, 128002 (2009)
13. N. RIVIER, Disclination lines in glasses. *Philosophical Magazine*, **40**, 859-886 (1979)
14. S. ALEXANDER, Amorphous solids : their structure, lattice dynamics and elasticity. *Physics Reports*, **296**, 65-236 (1998)
15. N. BIGGS, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Ch. 4-5 (1974)
16. N. RIVIER, Continuous random networks. From graphs to glasses. *Advances in Physics*, **36** 95-134 (1987)

Topologie du chaos toroïdal produit par un double pendule actif

Martin Rosalie¹, Davidson Firmo², Leonardo Tôrres² & Christophe Letellier¹

¹ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, Av de l'Université, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex, France

² Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Av. Antônio Carlos 6627, Pampulha, Belo Horizonte, MG, Brazil

martin.rosalie@coria.fr

Résumé. Un pendule double actif dont la dissipation d'énergie par frottements est compensée par une boucle de rétroaction basée sur la vitesse angulaire est étudié. Un plongement différentiel à partir de l'angle θ_1 que fait le premier bras avec la verticale et de ses dérivées successives révèle un attracteur à structure toroïdale. Un diagramme de bifurcations sur le système image — pendant du système sans symétrie — permet d'identifier un attracteur lacunaire faisant suite à une cascade de doublements de période. La topologie de cet attracteur est établie sous la forme d'un gabarit.

Abstract. An active double pendulum whose energy dissipation by friction is balanced by feedback loop based on the angular velocity is investigated. A differential embedding from the angle between the first arm and the vertical axis, and its successive derivatives reveals an attractor with toroidal structure. A bifurcation diagram computed with the image system — version of the original system without any symmetry — allows to identify a banded attractor located after a period-doubling cascade. The topology of this attractor is established in terms of a template.

1 Introduction

Un pendule actif est un système utilisé depuis longtemps dans les horloges où la dissipation de l'énergie par frottements est compensée par un mécanisme complexe [1]. Un pendule double est composé de deux bras, le second étant accroché à l'extrémité du premier. De tels pendules sont connus pour présenter des comportements chaotiques, au moins de manière métastable lorsqu'il s'agit de réalisation expérimentale où les frottements ne sont pas compensés par un apport d'énergie [2]. Des comportements chaotiques, au sens strict du terme, sont observés sur un modèle numérique où les frottements peuvent être complètement annulés [3]. Précisons que dans ce cas, le pendule est conservatif. Les doubles pendules sont donc propices à l'étude des comportements chaotiques. Toutefois comme nous le verrons, la structure de l'attracteur n'est pas triviale, notamment parce que l'espace des phases est de dimension au moins égale à quatre.

L'étude présentée ici porte sur un pendule double actif dont la dissipation d'énergie par frottements est compensée grâce à un mécanisme de contrôle de la vitesse angulaire du premier bras. Ce pendule a été réalisé à l'Universidade Federal de Minas Gerais (Belo Horizonte, Brésil) [4]. L'un de leurs objectifs était de construire un pendule double actif de coût modéré, à l'inverse de ce qui se fait actuellement pour des pendules triples [5]. Notre objectif est ici de réaliser une caractérisation topologique de l'attracteur produit par ce pendule double. Notre intérêt pour cet attracteur est au moins triple : il est issu d'un système dont l'espace des phases est de dimension cinq, le système possède une symétrie centrale et l'attracteur repose sur une structure toroïdale. Ces trois propriétés constituent différents obstacles dont il va falloir s'affranchir pour parvenir à une caractérisation topologique.

2 Modélisation du pendule double actif

Le pendule double ici étudié est un pendule double actif dont la dissipation d'énergie par frottements est compensée par un mécanisme constitué d'un moteur commandé par une boucle de rétroaction basée

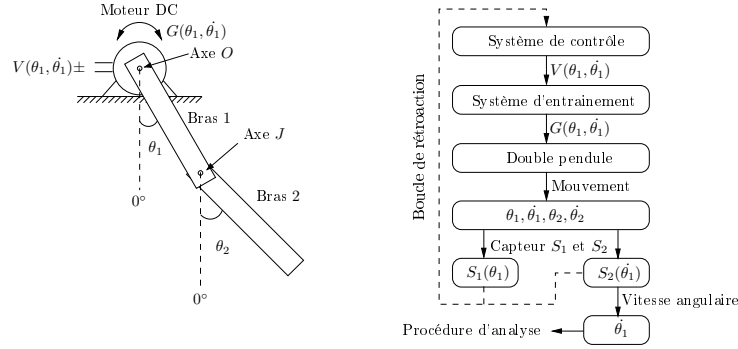


Figure 1. Schéma du montage et principe du contrôle de la dissipation d'énergie, d'après [4].

sur l'angle θ_1 et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ [4]. Il s'agit donc d'un système dissipatif produisant des oscillations entretenues. Une schématisation du montage et du processus de contrôle est représentée Fig. 1.

Les variables nécessaires à la description complète des états du pendule sont l'angle θ_1 que fait le premier bras avec la verticale, l'angle θ_2 que fait le second bras avec la verticale, les deux vitesses angulaires $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$, et le courant I_a d'alimentation du moteur monté sur l'axe O du premier bras (Fig. 1). Les équations régissant les mouvements du double pendule sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta}_1 = [15m_2l_1 \sin(\theta_1)gl_2 + 12m_1gl_1 \sin(\theta_1)l_2 + 24b_1\dot{\theta}_1l_2 - 24K_tI_a l_2 - 36l_1b_2(-\dot{\beta}) \cos(\beta) \\ \quad + 9m_2l_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 \sin(2\beta) + 24b_3l_2 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_1) - 36l_1b_4 \cos(\beta) \operatorname{sgn}(-\dot{\beta}) + 9m_2l_1gl_2 \sin(\theta_1 - 2\theta_2) \\ \quad + 12m_2l_1l_2^2\dot{\theta}_2^2 \sin(\beta)] / (-l_2[8M_m + l_1^2(8m_1 + 15m_2 - 9m_2 \cos(2\beta))]) \\ \ddot{\theta}_2 = [-12m_2l_1l_2M_m\dot{\theta}_1^2 \sin(\beta) - 72b_2m_2l_1^2\dot{\beta} - 24b_2m_1l_1^2\dot{\beta} - 18m_2^2l_1^2gl_2 \sin(2\theta_1 - \theta_2) \\ \quad - 9m_2l_2gm_1l_1^2 \sin(2\theta_1 - \theta_2) + 36m_2l_1K_t l_2 I_a \cos(\beta) - 12m_2l_2l_1^3m_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\beta) \\ \quad - 36m_2^2l_2l_1^3\dot{\theta}_1^2 \sin(\beta) - 9m_2^2l_2^2l_1^2\dot{\theta}_2^2 \sin(2\beta) - 36m_2l_1b_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\beta) - 24b_2M_m\dot{\beta} \\ \quad + 18m_2^2l_2gl_1^2 \sin(\theta_2) + 3m_2l_2gl_1^2m_1 \sin(\theta_2) + 12m_2l_2gM_m \sin(\theta_2) \\ \quad + 24b_4m_1l_1^2 \operatorname{sgn}(-\dot{\beta}) + 24b_4M_m \operatorname{sgn}(-\dot{\beta}) + 72b_4m_2l_1^2 \operatorname{sgn}(-\dot{\beta}) - 36m_2l_1b_3l_2 \cos(\beta) \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_1) \\ \quad] / (-m_2l_2^2[8M_m + l_1^2(8m_1 + 15m_2 - 9m_2 \cos(2\beta))]) \\ \dot{I}_a = \frac{V_a \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_1) h(\theta_1) - K_s \dot{\theta}_1 - R_a I_a}{L_a} \end{array} \right. \quad (1)$$

où

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \gamma \\ 1 & \text{sinon} \end{cases},$$

$\beta = \theta_1 - \theta_2$, $\dot{\beta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$, et où $\operatorname{sgn}(x)$ renvoie ± 1 selon le signe de x . Ces trois équations différentielles, dont deux du second ordre et une du premier ordre, conduisent à un système de dimension cinq impliquant des fonctions continues par morceaux ($\operatorname{sgn}(x)$ et $h(x)$). Ces équations ne comportent que des termes impairs des variables θ_1 , $\dot{\theta}_1$, θ_2 , $\dot{\theta}_2$ et I_a : le système (1) est donc équivariant sous une symétrie centrale, c'est-à-dire que le portrait de phase est globalement invariant sous l'opérateur

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

La présence de cette symétrie d'ordre 2 ($I^2 = I$, où I est l'identité) peut avoir de profondes conséquences sur l'analyse topologique [6].

3 Analyse topologique

Puisque la boucle de rétroaction a pour objectif de maintenir constante l'énergie du système, il est théoriquement possible d'écrire une intégrale du mouvement et ainsi de réduire la dimension du système d'une unité, ramenant à quatre la dimension « effective » du système. Afin de vérifier si un espace de dimension 5 peut être utilisé, la dimension de plongement est calculée par la méthode des plus proches faux voisins [7]. La quantité E_2 (Fig. 2), qui représente grossièrement la fraction de vrais voisins, révèle que celle-ci atteint près de 80% dans un espace de dimension 3 induit par les coordonnées décalées $(\theta_1(t), \theta_1(t + \tau), \theta_1(t + 2\tau))$, elle fluctue ensuite au dessus de 80%, pour finir par saturer autour de 100% pour des dimensions supérieures à 5. Nous tentons une analyse dans le sous-espace $\mathbb{R}^3(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$ induit par les dérivées successives de θ_1 (Fig. 3). Cet espace préserve la symétrie centrale puisque les dérivées successives d'une variable possèdent également les propriétés de symétrie de la variable en question.

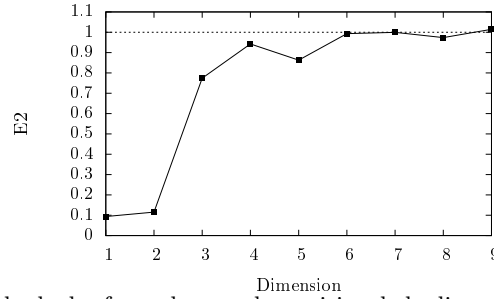


Figure 2. Estimation par la méthode des faux plus proches voisins de la dimension de plongement de l'attracteur chaotique solution du pendule double.

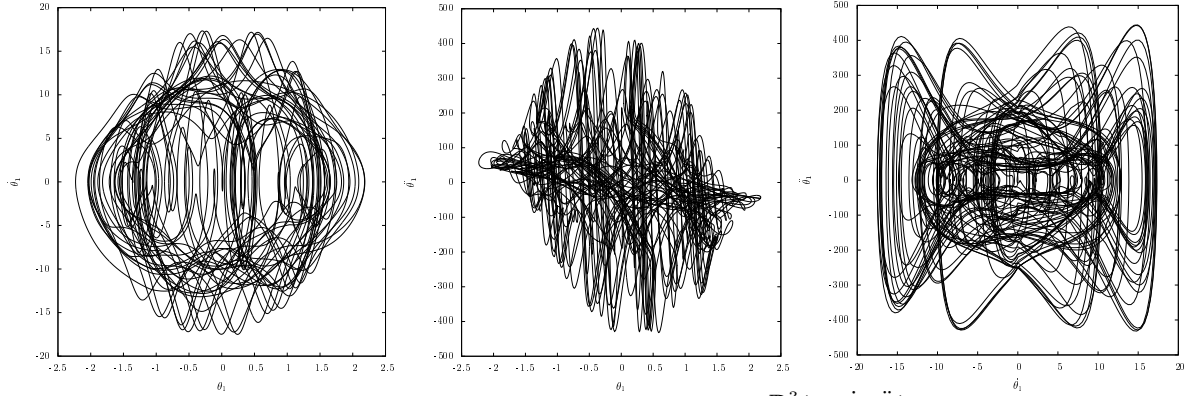


Figure 3. Représentation d'un régime chaotique dans le sous-espace $\mathbb{R}^3(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$, avec les paramètres $l_1 = 0.273$ m, $l_2 = 0.216$ m, $m_1 = 0.297$ kg, $m_2 = 0.235$ kg, $g = 9.81$ m.s $^{-2}$, $M_m = 22.10^{-6}$ kg.m 2 , $b_1 = 0.00015$ Nm.rad $^{-1}$, $b_2 = 0.00015$ Nm.rad $^{-1}$, $b_3 = 0.00015$ Nm.rad $^{-1}$, $b_4 = 0.00015$ Nm.rad $^{-1}$, $R_a = 13.74\Omega$, $L_a = 0.0311$ mH, $K_t = 0.45$ N.m.A $^{-1}$, $K_s = 0.45$ V.rad $^{-1}$.s $^{-1}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ rad, $V_a = 6.3$ V.

L'attracteur chaotique étudié présente une structure toroïdale comme le révèle la section de Poincaré (Fig. 4) définie par

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ (\theta_{1,n}, \dot{\theta}_{1,n}) \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{\theta}_{1,n} = 0 \right\}. \quad (2)$$

Cette section révèle également la symétrie centrale du système. La section de Poincaré relativement « épaisse » en raison de la dispersion des points autour d'une structure quasi-annulaire traduit le caractère

peu dissipatif du pendule (les frottements ne sont pas très importants); cela va constituer une difficulté supplémentaire lors de la caractérisation topologique.

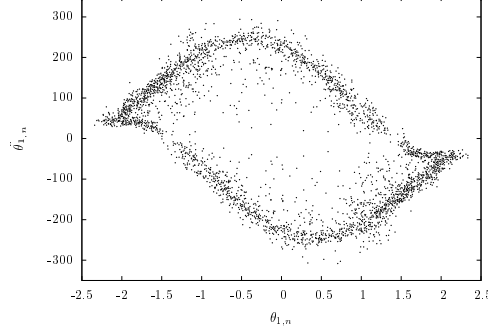


Figure 4. Section de Poincaré de l'attracteur chaotique solution du pendule double actif (Fig. 3). Même valeurs des paramètres que pour la Fig. 3.

3.1 Topologie du système image

Afin d'éviter la difficulté liée à la symétrie centrale, nous construisons un système image (dépourvu de symétrie) à l'aide d'un changement de coordonnées construit sur des termes quadratiques (donc invariant sous l'action de la symétrie) et appliqué sur le sous-espace $\mathbb{R}^3(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$ [6]. Ceci est réalisé après une renormalisation $\tilde{\theta}_1 \rightarrow \theta_1/2.5, \dot{\tilde{\theta}}_1 \rightarrow \dot{\theta}_1/20$ et $\ddot{\tilde{\theta}}_1 \rightarrow \ddot{\theta}_1/500$. Nous utilisons ensuite le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \tilde{\theta}_1^2 + \dot{\tilde{\theta}}_1^2 + \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \tilde{\theta}_1 \ddot{\tilde{\theta}}_1 \\ y = \dot{\tilde{\theta}}_1^2 + \ddot{\tilde{\theta}}_1^2 + \dot{\tilde{\theta}}_1 \ddot{\tilde{\theta}}_1 + \dot{\tilde{\theta}}_1 \tilde{\theta}_1 \\ z = \tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_1 \ddot{\tilde{\theta}}_1 + \ddot{\tilde{\theta}}_1 \tilde{\theta}_1 + \dot{\tilde{\theta}}_1 \ddot{\tilde{\theta}}_1, \end{array} \right. \text{ suivi de la rotation} \left\{ \begin{array}{l} X = x \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - z) \\ Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z), \end{array} \right. \quad (3)$$

afin de disposer de projections planes évitant une trop grande superposition des structures de l'attracteur. Pour nous affranchir d'une dernière difficulté liée au fait que l'attracteur se développe sur la totalité d'une surface toroïdale — ce qui constitue un obstacle majeur à l'obtention aisée d'un gabarit — nous cherchons dans le diagramme de bifurcations en fonction du paramètre V_a , une zone où l'attracteur est lacunaire. Le diagramme est réalisé dans la section de Poincaré définie par

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ (Y_n, Z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid X_n = 0, \dot{X}_n > 0, Y_n < 0 \right\}. \quad (4)$$

Une cascade de doublements de période est observée sur l'intervalle $V_a \in [4, 25; 4, 47]$. Nous choisissons de nous placer juste après le point d'accumulation de cette cascade et surtout avant la crise de frontière ($V_a \simeq 4.4605$) conduisant à une structure toroïdale à nouveau complètement visitée (Fig. 5).

L'attracteur ainsi sélectionné ($V_a = 4.4602$) est représenté Fig. 6. Les discontinuités qui peuvent être observées sont présentes dans l'attracteur symétrique mais amplifiées par le changement de variables (3) appliqué à l'espace $\mathbb{R}^3(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1)$. Une application de premier retour (Fig. 7) révèle une structure suggérant une application unimodale lisse, signature de la cascade de doublements de période. Toutefois, nous retrouvons une structure légèrement feuilletée et diffuse, signature du caractère légèrement dissipatif du système. Une autre caractéristique, un peu plus ennuyeuse du point de vue de la topologie de l'attracteur est révélée, la présence d'une seconde branche décroissante sur la partie droite de l'application de premier retour (Fig. 7) à la section de Poincaré

$$\mathcal{P}_i \equiv \left\{ (X_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2 \mid Z_n = 0.2, \dot{Z}_n < 0 \right\}, \quad (5)$$

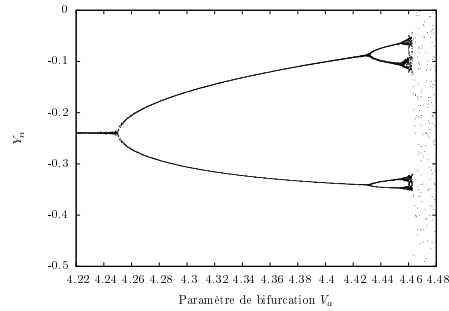


Figure 5. Diagramme de bifurcations du double pendule actif en fonction du paramètre V_a , les autres paramètres étant ceux de la Fig. 3.

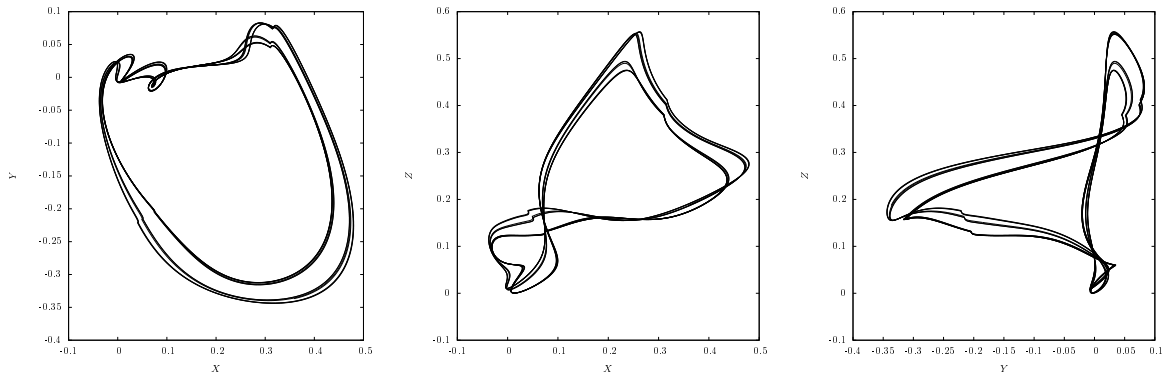


Figure 6. Image de l'attracteur chaotique lacunaire de l'attracteur solution du pendule double actif (1) apparaissant peu après la cascade de doublements de période. ($V_a = 4.4602$, les autres paramètres étant ceux de la Fig. 3.)

phénomène déjà observé dans d'autres systèmes [8]. L'attracteur se développe donc sur une variété complexe dont nous allons étudier une approximation en ne considérant qu'un gabarit à deux branches.

À partir de l'application de premier retour, une partition repose sur la coordonnée du maximum ; la trajectoire chaotique peut-être alors codée selon la dynamique symbolique définie par

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } -Y_n < 0,3254 \\ 1 & \text{si } -Y_n > 0,3254. \end{cases} \quad (6)$$

Le symbole « 0 » correspond à une branche de torsion paire (nombre pair de demi-tours) et le domaine « 1 » à une branche de torsion impaire. Cela correspond donc à un fer-à-cheval de Smale. Il reste à déterminer la torsion globale appliquée à ce fer-à-cheval. Ceci est réalisé par la détermination des nombres d'enlacement [9]. Le caractère peu développé de l'application de premier retour ne nous permet pas de disposer de nombreuses orbites périodiques (branche croissante peu développée, Fig. 7). Nous avons trouvé pour nombre d'enlacement $lk(1, 10) = -11$, $lk(1, 1011) = -22$, et $lk(10, 1011) = -43$, ce qui est correctement décrit par la matrice d'enlacement

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} -10 & -11 \\ -11 & -11 \end{bmatrix} = -10 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

soit un fer-à-cheval associé à une torsion globale de -10π . Les éléments diagonaux $M_{i,i}$ correspondent à la torsion locale de la $i^{\text{ème}}$ branche et les éléments $M_{i,j}$ aux permutations entre la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ branches. Cette matrice d'enlacement correspond au gabarit représenté Fig. 8.

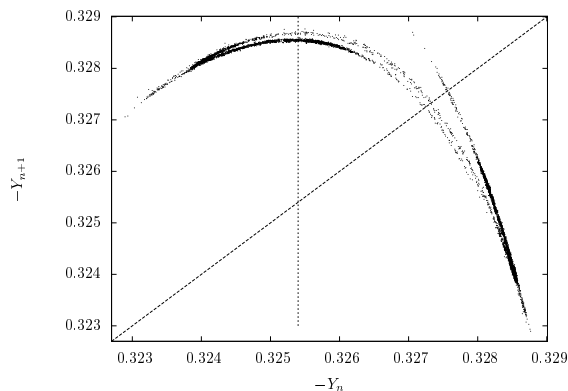


Figure 7. Application de premier retour à la section de Poincaré \mathcal{P}_i sur l'une des bandes de l'attracteur chaotique représenté Fig. 6.

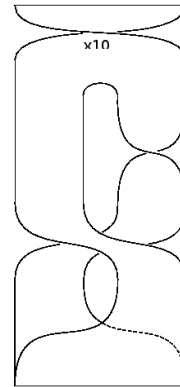


Figure 8. Gabarit schématisant la topologie de l'attracteur lacunaire solution du pendule double actif (1).

4 Conclusion

À partir des équations d'un pendule double actif, nous avons pu numériquement reproduire le comportement observé sur le système physique. Après avoir montré que la dimension de plongement pouvait être égale à 3, nous avons choisi d'étudier le système à l'aide du plongement différentiel de la variable θ_1 . La symétrie centrale a été enlevée à l'aide d'un changement de variables, puis, en utilisant un diagramme de bifurcations, nous avons choisi un attracteur chaotique lacunaire à l'issue d'une cascade de doublements de période. L'application de premier retour résultante révèle une structure qui est, en première approximation, unimodale et lisse. Un gabarit schématisant la structure de l'attracteur image est alors proposé. Cette caractérisation topologique de l'attracteur lacunaire constitue une première caractérisation topologique d'un attracteur chaotique toroïdal. Cette étude constitue une étape préliminaire qu'il fallait réaliser avant d'entamer une caractérisation de l'attracteur se développant sur l'ensemble du tore.

Références

1. C. HUYGENS, *Horologium oscillatorium sive de motu pendularium*, (1673)
2. T. SHRINBOT, C. GREBOGI, J. WISDOM & J. A. YORKE, Chaos in a double pendulum, *American Journal of Physics*, **60**, 491-499 (1992)
3. T. STACHOWIAK & T. OKADA, A numerical analysis of chaos in the double pendulum, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**(2), 417-422 (2006)
4. D.L. FIRMO, L.A.B. TÔRRES & E.G. NEPOMUCENO, Simulation and dynamical characterization of an active mechanical chaotic double pendulum, *Proceedings of the 9th Congress of Mechanical Engineering COBEM* (2007)
5. J. AWREJCIEWICZ, B. SUPEL, C.-H. LAMARQUE, G. KUDRA, G. WASILEWSKI & P. OLEJNIK, Numerical and experimental study of regular and chaotic motion of triple physical pendulum, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **18**, 10, 2883-2815 (2008)
6. R. GILMORE & C. LETELLIER, *Symmetry of chaos*, Oxford University Press (2007)
7. L. CAO, Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series, *Physica D*, **110**, 1, 43-50 (1997)
8. M. ROSALIE & C. LETELLIER, Vers une topologie du chaos toroïdal, *Comptes-Rendus des Rencontres du Non Linéaire*, **14**, 151-156 (2011)
9. C. LETELLIER, P. DUTERTRE & B. MAHEU, Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system : toward a systematic topological characterization, *Chaos*, **5**, 1, 272-281 (1995)

Génération d'ondes à la surface d'un fluide par un fond mobile

Gerardo Ruiz-Chavarria^{1,2}, Michael Berhanu² & Eric Falcon²

¹ Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

² Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS - 75 013 Paris, France
gruiz@unam.mx

Abstract. A tsunami occurs usually in the presence of an earthquake produced by a relative sliding motion of tectonic plates at the sea-ground. A wave of large wavelength compared to the ocean depth is so generated. We present an experimental study of the generation of this phenomenon, as it is still quite unknown. Indeed, most of theoretical works consider that the initial deformation of the free surface is given by a translation of the sea-ground to the free surface. However, this assumption is not valid if the sea-ground vertical velocity is small compared to the velocity of generated surface waves. In order to study an analogous of tsunami formation in the laboratory, a tank is filled with a shallow water layer. An elastic membrane located at the bottom of the tank can be deformed periodically or impulsively. Measurements of velocity field in the fluid using PIV and measurements of the free surface displacement were performed in order to better understand wave formation from a dynamic deformation of the tank bottom. First, at small enough frequency of the sinusoidal forcing, a phase difference is observed between bottom displacement and free surface displacement. This phase difference changes as the excitation frequency increases, showing the necessity to take in account the ground dynamic to describe appearance of a such wave. In a second part, we study the impulsive regime relevant for tsunami formation. In preliminary measurements, we show that, in case of a slow bottom deformation, the displacement of the free surface cannot be simply extracted from a simple translation of the bottom displacement to the free surface. Indeed, a wave train is forming at the free surface during the bottom deformation. The measured shape of this interface as a function of time is found in qualitative agreement with a linear model.

1 Introduction

Un tsunami est généralement engendré par la déformation du fond marin lors d'un tremblement de terre. La zone de rupture entre deux plaques tectoniques s'étale sur des longueurs typiques de quelques centaines de kilomètres. Au voisinage de la zone de rupture se produit une déformation verticale à la surface de l'océan de l'ordre d'une dizaine de centimètres engendrant une vague de faible amplitude en pleine mer et de longueur d'onde très supérieure à la profondeur typique de l'océan $h \sim 4$ km. La période typique d'une telle vague est comprise entre 10 et 30 minutes et sa vitesse de phase est $c = \sqrt{gh} \simeq 200$ m/s, soit environ 700 km/h. Les phases de propagation et de déferlement près de la côte sont relativement bien comprises, contrairement à la phase de génération qui a été beaucoup moins étudiée. L'hypothèse la plus couramment utilisée pour la génération est que la déformation de la surface libre est exactement la même que celle du fond marin. Cette hypothèse dite « passive » ne prend pas en compte la vitesse de rupture entre les plaques tectoniques ou son temps caractéristique.

Hammack a mis en évidence, dès les années 70, l'importance de la dynamique de la déformation sur la génération d'ondes de surface [1]. Pour cela, il utilise un canal rempli d'eau au fond duquel se trouve un bloc solide dont il fait varier l'amplitude et la durée de son déplacement afin de déterminer les écarts au modèle passif. Il met en évidence que l'amplitude des vagues produites décroît lorsque la vitesse de déplacement du fond diminue par rapport à la vitesse de phase des vagues, tout choses étant égales par ailleurs. Il développe aussi une modélisation basée sur une théorie linéaire pour la forme initiale de la surface libre en considérant un déplacement arbitraire du fond. Plus récemment, le problème a été abordé numériquement par Dutykh et al. [2] et le processus de génération passive a été comparé à un modèle hydrodynamique linéaire [3]. Les non-linéarités ont été prises en compte ultérieurement lors de simulations numériques de l'écoulement en eau peu profonde. Enfin, le problème complet a été abordé en résolvant les équations de l'élasticité pour le fond solide et les équations hydrodynamiques [4]. Ces travaux récents

pourraient être validés en les confrontant à des mesures en laboratoire où une déformation de la surface libre est produite par une déformation contrôlée du fond. L'évolution des techniques expérimentales permet de caractériser à la fois l'écoulement hydrodynamique et la forme spatiotemporelle des interfaces, permettant de compléter fructueusement les travaux précurseurs de Hammack.

2 Dispositif expérimental

Nous étudions la déformation de la surface libre d'une couche d'eau soumise à une déformation du fond au sein d'une cuve en plexiglass de $110 \times 110 \times 30$ cm³. L'épaisseur de la couche d'eau est $h = 2.5$ cm, les longueurs d'ondes testées sont $10 \leq \lambda \leq 20$ cm ($kh = 2\pi h/\lambda \sim 1$) et les vitesses de phase correspondantes de 0.2 à 0.5 m/s. La cuve est trouée en son centre sur un diamètre de 6 cm et une membrane élastique garantie l'étanchéité. La membrane est en contact avec un piston connecté par une tige verticale à un vibreur électromagnétique situé en dessous de la cuve. Le piston présente une symétrie de révolution, de diamètre 5 cm, permettant d'obtenir une déformation de la membrane axisymétrique au centre de la cuve. En supposant que le champ de vitesse et la déformation de la surface libre restent aussi axisymétriques, il suffit donc de mesurer ces valeurs dans un plan passant par le centre pour caractériser entièrement le phénomène. Deux types de déformation du fond sont considérées : i) une déformation périodique liée à un forçage sinusoïdal de fréquence f avec $3 \leq f \leq 9$ Hz, ou ii) une impulsion positive de la forme $U = U_0 [1 - \exp(-t/\tau)]$.

Le champ vitesse au sein de la couche de fluide et le déplacement de la surface libre sont mesurées. Le champ de vitesse est obtenu par PIV (Dantec), composé d'une caméra rapide Phantom V9.1, d'un laser vert continu (2 W, 532 nm) et du logiciel Dynamic Studio. Le champ de vitesse est mesuré dans un plan vertical qui passe par le centre la cuve, correspondant au plan illuminé par la nappe laser. L'ensemencement du fluide est réalisé avec des sphères creuses en verre dont la taille est de 10 μ m. La taille du capteur CCD de la caméra est de 1632×1200 pixels.

Pour la détermination de la déformation de la surface libre, nous avons enregistré des images à la caméra rapide entre 200 et 400 fps sur un domaine vertical de 17×4 cm en utilisant la nappe laser de la PIV. La détection de l'interface a été faite avec des outils de traitement d'images du logiciel Scilab. Afin de lisser la forme de l'interface une interpolation des données est réalisée avec un polynôme d'ordre 6. La même procédure a été faite pour la détermination de la forme de la membrane au fond de la cuve à partir des images de la caméra.

3 Forçage sinusoïdal du fond

En réponse à une excitation sinusoïdale de fréquence $3 \leq f \leq 9$ Hz envoyée au vibreur, la membrane subit un déplacement périodique $b_0(t) = b_m \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f$. L'amplitude maximale de la déformation du fond $b_m = 1$ mm est fixée quelque soit f . La vitesse maximale de la déformation du fond est donc $V_m = b_m \omega$ correspondant à $0.02 \leq V_m \leq 0.06$ m/s. Pour les longueurs d'ondes correspondantes, on se trouve donc dans le régime où $V_m < c$ avec $c = \Omega/k$ la vitesse de phase des ondes et $\Omega^2 = gk \tanh(kh)$ la relation de dispersion.

La Fig. 1 montre l'évolution de la position du fond $b(t)$ et celle de la surface libre $\eta_0(t) \equiv \eta(x=0, y=0, t)$ au centre de la cuve (et de la membrane) pour $f = 4$ et 9 Hz. Pour $f = 4$ Hz, on observe que $b_0(t)$ et η_0 ne sont pas en phase : la surface libre est en retard par rapport au fond. Pour $f = 9$ Hz, les deux déformations sont synchronisées. La différence de phase $\phi(f)$ entre $b_0(t)$ et $\eta_0(t)$ est tracée en Fig. 2 en fonction de la fréquence f . $\phi(f)$ augmente puis atteint une valeur constante pour $f \geq 6$ Hz pour laquelle les déformations du fond et de la surface libre sont synchronisées.

La Fig. 3 montre la forme de la surface libre en fonction de la distance x par rapport au centre de la cuve à un instant donné pour $f = 4$ et 9 Hz. Dans le premier cas, la propagation s'étend au-delà de la taille de la membrane. Pour $f = 9$ Hz, la déformation de la surface libre reste localisée à l'aplomb de la membrane.

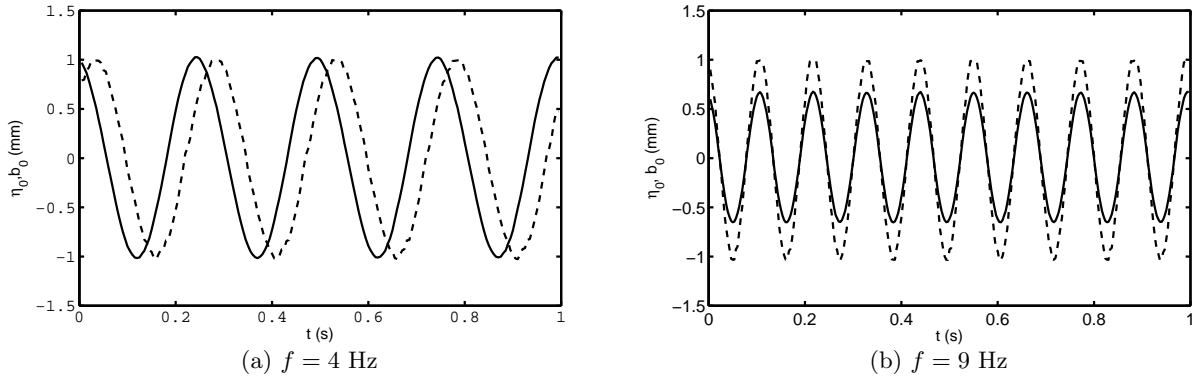


Figure 1. Evolution temporelle de la déformation du fond $b_0(t)$ (—) et de la surface libre $\eta_0(t)$ (- -) pour deux fréquences de forçage différentes. Pour $f \leq 6$ Hz, $b_0(t)$ et $\eta_0(t)$ sont synchronisés avec une différence de phase de 2π .

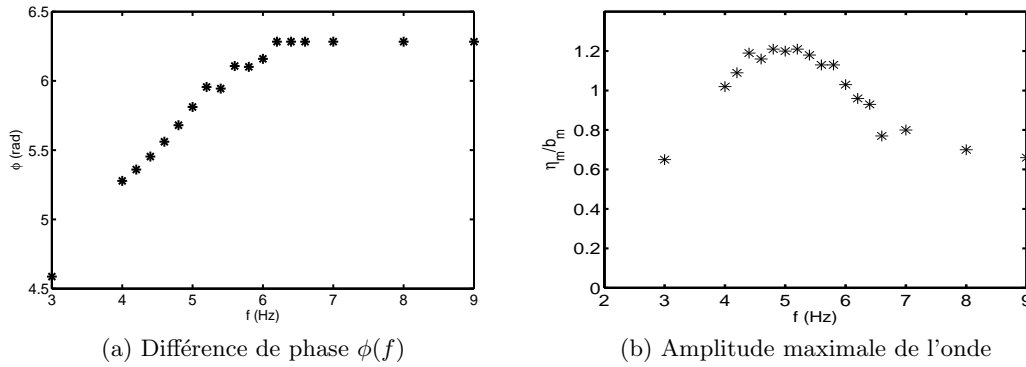


Figure 2. Différence de phase $\phi(f)$ (a) entre les déformations du fond $b_0(t)$ et de la surface libre $\eta_0(t)$ en fonction de la fréquence. Amplitude maximale de l'onde (b) divisée par celle de la déformation du fond en fonction de f .

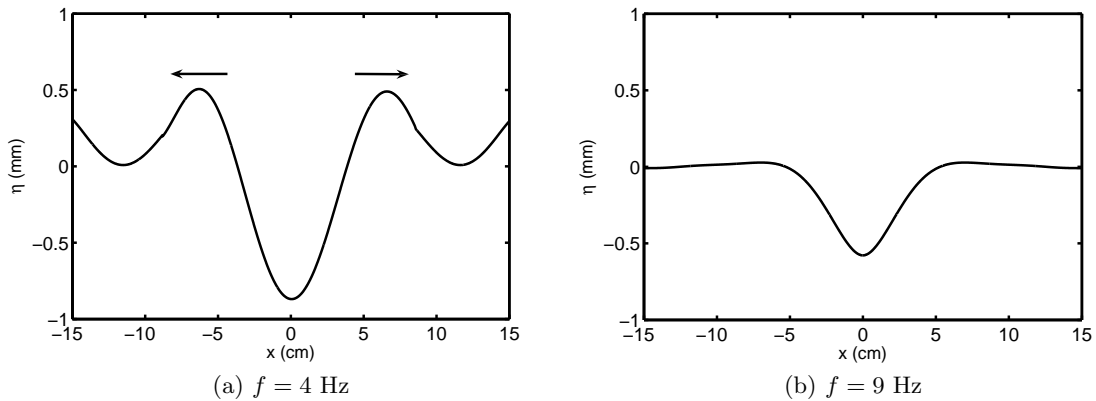


Figure 3. Forme spatiale de la surface libre η par rapport à la distance x au centre de la cuve à un instant donné pour deux fréquences de forçage différentes. Pour $f = 4$ Hz, la vague s'éloigne du centre alors que pour $f = 9$ Hz, une forte atténuation spatiale de la déformation de la surface libre est observée. La taille typique de la zone déformée initiale du fond est $-2,5 \leq x \leq 2,5$ cm.

La Fig. 4 montre le champ de vitesse au sein du fluide dans un plan vertical qui passe par le centre de la cuve à deux instants différents pour $f = 4$ et 9 Hz. Pour $f = 4$ Hz, la composante verticale de la vitesse à un x fixé a des variations importantes entre le fond et la surface libre, ce qui est en accord avec la différence de phase observée ci-dessus. D'autre part, même si la vitesse diminue avec la distance x , elle ne s'annule pas. De plus, la vitesse horizontale change de signe avec la distance x pour une altitude z donnée. Pour $f = 9$ Hz, les variations de la composante verticale de la vitesse en fonctions de l'altitude z à un x fixé à l'aplomb de la membrane ($x \leq 2.5$ cm) sont moins importantes que pour le cas précédent, l'atténuation en s'éloignant du centre étant aussi beaucoup plus importante.

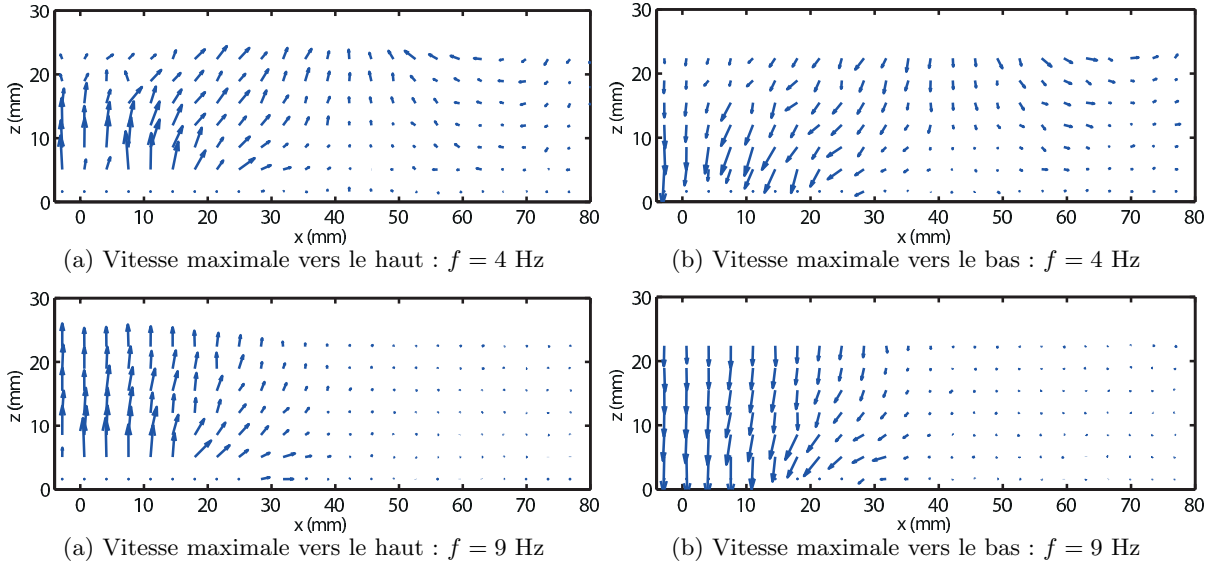


Figure 4. Champ de vitesse au sein du fluide dans une région située à l'aplomb de la moitié de la taille de la membrane à deux instants différents séparés d'une demi-période où la vitesse de la membrane est maximale vers le haut (a et c) ou maximale vers le bas (b et d). Fréquence de $f = 4$ Hz (a et b) et $f = 9$ Hz (c et d). Centre de la membrane est située à $x = 0$. La taille typique de la zone déformée initiale du fond est $x \leq 2.5$ cm.

Ces résultats peuvent s'interpréter comme décrits par la suite. Si la vitesse de déformation de la membrane est suffisamment rapide, le mouvement des particules fluides suit intégralement la déformation du fond. Il en résulte une déformation de la surface libre qui peut se déduire par simple prolongation des vecteurs vitesses. La déformation reste localisée au voisinage immédiat de la membrane. En revanche, pour une vitesse de déformation assez lente comparée à la vitesse des ondes de surface, la déformation de la surface libre a le temps de relaxer vers sa position d'équilibre en émettant radialement des ondes de surfaces du fait de la force de rappel de gravité. Le rapport entre ces deux vitesses, à la transition entre les régimes de déformation lente et rapide, est trouvée être $V_m/c = \omega b_m/\sqrt{g\bar{h}} = 0.08$. Par ailleurs, en régime sinusoïdal, nous observons pour certaines fréquences la formation au bout d'un certain temps d'un régime d'ondes stationnaires oscillant à la fréquence d'excitation. La forme et l'amplitude de ce régime stationnaire est un problème non trivial qui ne peut pas être étudié en utilisant un modèle linéaire, du fait de l'existence de résonances et de l'implication vraisemblable des parois.

4 Forçage impulsionnel du fond

Des expériences ont été réalisées avec une impulsion de tension appliquée au vibreur de la forme $U(t) = U_0 [1 - \exp(-t/\tau_v)]$ avec $\tau_v = 10^{-3}$ s. Du fait de la réponse du vibreur, la membrane se déplace plus lentement produisant une vitesse maximale V_m mesurée d'environ 0.1 m/s. En effet, la forme de la

déformation imposée expérimentalement à la membrane est bien décrite par $b_0(t) = b_m [1 - \exp(-t/\tau)]$, avec $\tau = 8.4 \times 10^{-2}$ s et $b_m = 5$ mm. Sur la Fig. 5, les déformations du fond $b_0(t)$ et de la surface libre $\eta_0(t)$ au centre de la cuve sont représentées en fonction du temps. L'amplitude maximale de la déformation de la surface libre est trouvée 5 fois plus faible que celle de la membrane. De plus, $b_0(t)$ a une déformation exclusivement positive, tandis que $\eta_0(t)$ atteint une amplitude maximale, suivie d'une diminution jusqu'à des valeurs négatives avant de tendre vers sa position d'équilibre.

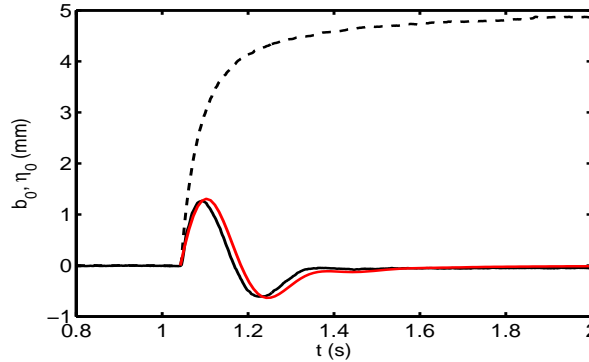


Figure 5. Evolution temporelle de la déformation du fond $b_0(t)$ (---), de la surface libre $\eta_0(t)$ (—) au centre de la cuve ($x = 0$), et de la surface libre calculée par le modèle (— rouge) d'Eq. (1). La déformation du fond est 5 fois plus grande que celle de la surface libre.

La présence d'une élévation suivie d'une dépression au centre du système en réponse à un déplacement purement positif du fond est très différente des prédictions de la méthode dite passive où la déformation est simplement translatée à la surface libre. Cela provient du fait qu'à la surface de l'eau un train d'ondes se forme dans la région où le fond se déforme. Pour s'en convaincre, la Fig. 6 montre la déformation de la surface libre $\eta(x, 0, t)$ pour $x = 2$ cm et $x = 10$ cm, et est comparée au modèle décrit ci-dessous. Après $x = 2$ cm de propagation, l'amplitude maximale de $\eta(t)$ a diminué, et un autre maxima semble apparaître derrière le front d'ondes. Après s'être propagée, le pulse s'amortit et se déforme.

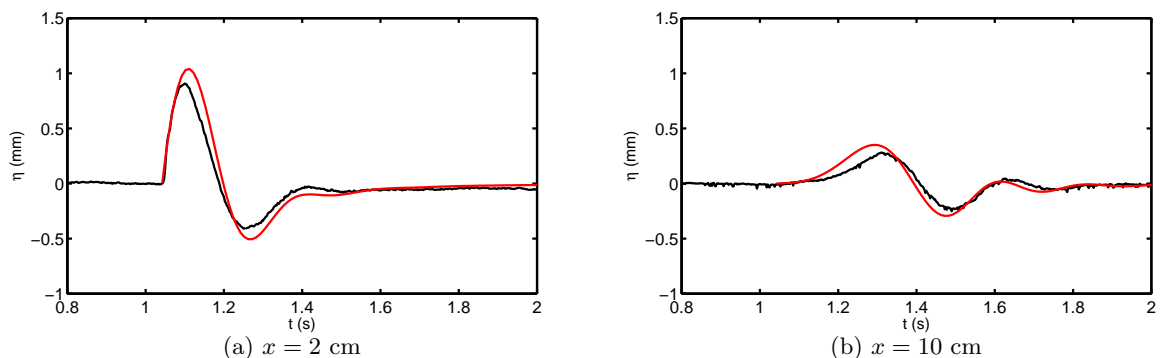


Figure 6. Evolution temporelle de la déformation de la surface libre $\eta(t)$ — traits continus noirs — comparée au modèle (1) — en rouge — en deux endroits de la cuve.

Ces résultats peuvent se comparer quantitativement à un modèle hydrodynamique linéaire inspiré du travail de Hammack [1] et adapté au cas axisymétrique. Valide lorsque l'amplitude de déformation

reste faible par rapport au niveau d'eau, cette approche permet d'exprimer la forme de la surface libre en fonction de la transformée de Fourier spatiale de la déformation du fond $\tilde{b}(k, t)$. La dépendance temporelle se déduit par une transformée de Laplace de la fonction $b_0(t)$. Dans notre cas on obtient :

$$\eta(r, t) = \frac{-2b_m}{\pi} \int_0^\infty \frac{k J_0(kr) \tilde{b}(k)}{\cosh(kh)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \Omega^2} \left[e^{-\alpha t} - \cos(\Omega t) - \frac{\Omega}{\alpha} \sin(\Omega t) \right] dk \quad (1)$$

avec $\Omega^2 = gk \tanh(kh)$, β la demi-extension horizontale de la déformation (estimée à 2 cm dans notre cas) et α l'inverse du temps caractéristique de déformation τ . En fonction des longueurs d'onde excitées du fait de la forme et de l'extension horizontale de la membrane, les fréquences correspondantes (prédites par la relation de dispersion) sont aussi excitées, expliquant l'apparition d'un train d'ondes se propageant radialement à partir du centre. Les résultats numériques obtenus en supposant que la forme de la membrane s'écrit comme le produit d'un dôme gaussien par la fonction $b_0(t)$ permet de reproduire qualitativement les résultats (cf. traits en rouge des Figs. 5 et 6), validant la description par le modèle linéaire pour ce choix de paramètres expérimentaux.

5 Conclusions

Nous rapportons des expériences relatives à l'observation de la formation de vagues produites par le déplacement d'un fond mobile afin de déterminer l'influence de sa dynamique sur la déformation de la surface libre. Ce problème non trivial est relié au mécanisme de naissance des tsunamis dans les océans par les séismes sous-marins. Bien que les ordres de grandeur entre l'expérience et le phénomène naturel restent très différents, nos mesures sont d'un apport certain dans la compréhension et la modélisation de ce problème. Dans le cas d'un forçage périodique, non résolu théoriquement, on observe que la déformation de la surface libre au centre de la cuve se déphase par rapport à celle du fond lorsque la fréquence de forçage diminue. A suffisamment haute fréquence cette déformation reste localisée, tandis qu'à plus basse fréquence des ondes de surface sont émises, propageant une déformation dont l'amplitude décroît avec la distance au centre. Pour un régime impulsif et une déformation du fond assez lente, on observe que la déformation de la surface libre ne se déduit pas simplement d'une translation de la déformation du fond à la surface libre. En effet, il se forme un train d'ondes qui se propagent radialement à partir du centre. Ces résultats sont qualitativement reproduits par un modèle linéaire inspiré des travaux d'Hammack [1] et reprenant les valeurs des paramètres expérimentaux. La suite de nos travaux consistera à faire varier le temps de déformation typique du fond pour caractériser le passage d'un régime de déformation lente à un régime de déformation rapide. Enfin, en augmentant l'amplitude relative de la déformation du fond par rapport à la profondeur, les effets non-linéaires pourront être amplifiés et ainsi leur rôle dans la physique des tsunamis pourra être étudié.

Nous remercions F. Dias pour les discussions qui ont initiées ce travail, et A. Lantheaume pour la conception et la construction de la cuve. G. Ruiz-Chavarria a obtenu un soutien financier du programme « Research in Paris 2011 » de la Ville de Paris pour travailler à l'Université Paris Diderot. Le système de mesure PIV a été financé par l'Université Paris Diderot dans le cadre de la création du laboratoire LIED.

Références

1. J. L. HAMMACK, A note on tsunamis : their generation and propagation in an ocean of uniform depth, *Journal of Fluids Mechanics*, **60**, 769-799 (1973)
2. D. DUTYKH, F. DIAS & Y. KERVELLA, Linear theory of wave generation by a moving bottom, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **343**, 499-504 (2006)
3. Y. KERVELLA, D. DUTYKH & F. DIAS, Comparison between three-dimensional linear and nonlinear tsunami generation models, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **21**, 245-269 (2007)
4. D. DUTYKH & F. DIAS, Tsunami generation by dynamic displacement of sea bed due to dip-slip faulting, *Mathematics ans Computers in Simulation*, **80**, 837-848 (2009)

Accrochage de fréquence sans accrochage de phase de deux modes laser couplés

Jérémy Thévenin¹, Marco Romanelli¹, Marc Brunel¹, Marc Vallet¹, et Thomas Erneux²

¹ Institut de Physique de Rennes, UMR CNRS 6251, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

² Université Libre de Bruxelles, Optique Non Linéaire Théorique, Campus Plaine, CP 231, 1050 Bruxelles, Belgique

marco.romanelli@univ-rennes1.fr

Résumé. Nous étudions expérimentalement et numériquement les propriétés de synchronisation de deux modes laser, couplés de façon cohérente par rétro-injection optique. L'intensité du couplage étant fixée, nous observons trois régimes de synchronisation, en fonction du désaccord de fréquence initial entre les modes. Lorsque le désaccord est suffisamment faible, la phase du battement entre les deux modes est fixe. A l'opposé, pour des désaccords très élevés, la phase relative dérive. Outre ces deux cas familiers, nous identifions une situation intermédiaire, dans laquelle la phase relative oscille tout en restant bornée. L'accrochage des fréquences est donc préservé, même en absence d'accrochage de phase.

Abstract. We study, experimentally and numerically, the synchronization properties of two laser modes. In order to stabilize the frequency difference, we introduce a coherent coupling by optical feedback. For a given coupling strength, we observe three synchronization regimes, depending on the detuning between the uncoupled modes. For a sufficiently weak detuning, the beat-note phase is fixed. Conversely, for strong detuning, the two modes oscillate almost independently. Besides these familiar behaviors, we identify an intermediate situation, where the relative phase fluctuates but remains bounded, and frequency locking is preserved, in spite of the absence of phase locking.

1 Introduction

La tendance des oscillateurs couplés à se verrouiller sur une fréquence commune est observée dans un grand nombre de systèmes, comme les oscillateurs biologiques, les réactions chimiques, les oscillateurs électriques, les lasers, etc [1]. Quand l'amplitude des oscillations est constante, l'évolution de la phase relative Φ entre les oscillateurs obéit généralement à l'équation d'Adler :

$$\frac{\dot{\Phi}}{2\pi} = \Delta\nu - f_A \sin \Phi, \quad (1)$$

où $\Delta\nu$ est le désaccord entre leur fréquences propres, et f_A l'intensité du couplage (ramenée à une fréquence).

L'éq. 1 montre que le comportement de deux oscillateurs couplés est déterminé par le rapport $\Delta\nu/f_A$. Si $|\Delta\nu/f_A| \leq 1$, l'éq. 1 admet une solution stationnaire stable, ce qui signifie que les phases des deux oscillateurs se verrouillent. Au contraire, si $|\Delta\nu|$ est supérieur à f_A , les deux oscillateurs ne parviennent pas à se synchroniser, et leur phase relative croît indéfiniment. Ce comportement simple est bien vérifié, par exemple, par un laser de classe A injecté optiquement, dans les limites de couplage et désaccord faibles [2]. D'autre part, des analyses théoriques [3,4] ont montré que, pour des lasers de classe B couplés, l'amplitude des oscillations ne peut plus être évacuée du problème. Il en résulte une dynamique plus complexe, et, en particulier, un régime intermédiaire entre l'accrochage de phase et le décrochage pur et simple apparaît, pour certaines valeurs des paramètres. Dans ce régime, la phase relative n'est pas stationnaire, mais elle reste *bornée*. Cela implique que les oscillateurs ont la même fréquence moyenne; c'est pourquoi nous parlons d'accrochage de fréquence sans accrochage de phase. Ce régime de synchronisation n'est

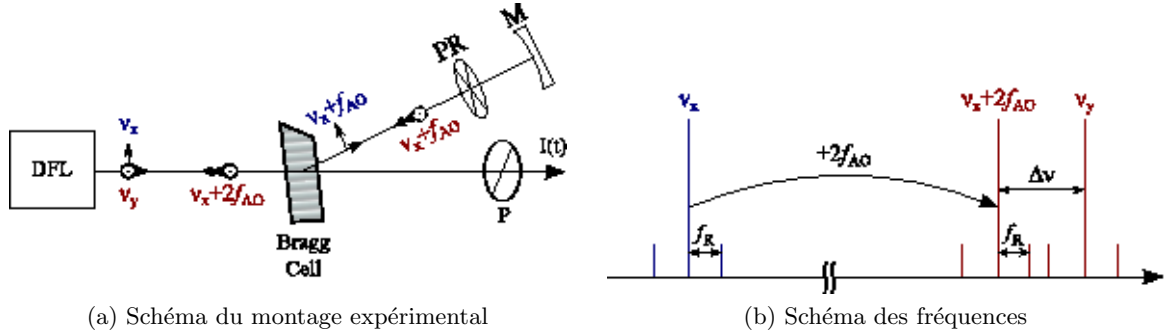


Figure 1. (a) Schéma du montage expérimental. DFL : laser bifréquence émettant sur deux modes de polarisation, de fréquence ν_x et ν_y respectivement. Bragg cell : modulateur acousto-optique. PR : lame quart d'onde. M : miroir. P : polariseur à 45° . L'intensité $I(t) = |E_x + E_y|^2$ est détectée sur une photodiode rapide. (b) Schéma des fréquences mises en jeu par l'expérience.

pas spécifique aux lasers, ayant été prédit également pour des oscillateur de van der Pol couplés [5]. Cependant, à notre connaissance, aucune observation expérimentale d'un tel comportement n'avait été décrite jusqu'à présent.

Nous avons réalisé une expérience permettant d'observer l'accrochage de fréquence sans accrochage de phase [7]. Nous avons mesuré la phase relative entre deux modes laser couplés par rétroaction optique et trouvé que, pour $\Delta\nu > f_A$, elle demeure bornée; la plage de synchronisation s'étend ainsi au-delà de f_A , même s'il s'agit d'une synchronisation « imparfaite ». Expérimentalement, nous nous sommes placés dans le cas $f_A \lesssim f_R$, où f_R est la fréquence des oscillations de relaxation, caractéristique des lasers de classe B [2]. Dans ce cas, les modes laser sont très sensibles aux perturbations externes, et par conséquent on observe la synchronisation pour des taux de couplage extrêmement faibles (la puissance réinjectée d'un mode vers l'autre vaut environ 10^{-5} en valeur relative).

2 Montage expérimental

Nous utilisons un laser bifréquence Nd :YAG pompé par diode à 808 nm, et émettant à 1064 nm. Le laser oscille simultanément sur deux états propres E_x et E_y , de polarisation rectiligne suivant \hat{x} et \hat{y} , et de fréquence ν_x et ν_y . Deux lames quart d'onde, placées à l'intérieur de la cavité laser, permettent d'ajuster finement le désaccord $\Delta\nu_0 = \nu_y - \nu_x$ entre 0 et 1 GHz (moitié de l'intervalle spectral libre de la cavité). Le battement à la fréquence $\Delta\nu_0$ est beaucoup plus stable que les fréquences individuelles ν_x et ν_y , grâce au fait que les fluctuations de longueur de la cavité sont identiques pour les deux modes propres [8]. Ce fait a une grande importance pour l'expérience, nous permettant de contrôler $\Delta\nu_0$ à quelques kHz près. Dans toutes les expériences, nous réglons $\Delta\nu_0 = 200$ MHz. Les deux modes sont couplés optiquement par une cavité de réinjection, qui contient un modulateur acousto-optique (Bragg cell), une lame quart d'onde et un miroir [9] (Fig. 1). Le modulateur acousto-optique décale les deux fréquences optiques d'une quantité f_{AO} ; ensuite, le double passage par la lame quart d'onde transforme la polarisation \hat{x} en \hat{y} et réciproquement. Enfin, le faisceau émis est réinjecté dans la cavité laser après un deuxième passage par le modulateur acousto-optique. Au bilan, deux champs sont renvoyés dans la cavité : un champ polarisé suivant \hat{x} , oscillant à la fréquence $\nu_y + 2f_{AO}$, et un champ polarisé suivant y , de fréquence $\nu_x + 2f_{AO}$. En choisissant f_{AO} autour de 100 MHz nous obtenons une réinjection quasi-résonante dans l'état propre E_y , comme l'illustre la Fig. 1 (b). Au contraire, E_x n'est pas affecté par la réinjection, car le décalage entre ν_x et $\nu_y + 2f_{AO}$ est trop important. Pour la même raison, les aller-retours multiples dans la cavité externe n'ont pas d'effet sur la dynamique. Nous obtenons un signal proportionnel au battement $I = |E_x + E_y|^2$ en envoyant le faisceau émis sur une photodiode rapide, derrière un polariseur à 45° .

3 Modèle

Nous écrivons un système d'équations de type Lang-Kobayashi [10] pour les deux champs optiques couplés et les inversions de population associées $n_{x,y}$:

$$\frac{dE_x}{dt} = [-\Gamma_x + \kappa(n_x + \beta n_y)] \frac{E_x}{2} + 2i\pi\nu_x E_x, \quad (2)$$

$$\frac{dE_y}{dt} = [-\Gamma_y + \kappa(n_y + \beta n_x)] \frac{E_y}{2} + 2i\pi\nu_y E_y + \gamma_e E_x(t - \tau) e^{4if_{AO}t + i\Psi}, \quad (3)$$

$$\frac{dn_{x,y}}{dt} = \gamma_{||} P_{x,y} - \left[\gamma_{||} + \zeta \left(|E_{x,y}|^2 + \beta |E_{y,x}|^2 \right) \right] n_{x,y}. \quad (4)$$

Les populations $n_{x,y}$ sont alimentées par les termes de pompage $P_{x,y}$ et relaxent avec un taux $\gamma_{||}$; de plus, elles sont dépeuplées par l'émission stimulée, qui est prise en compte par les termes proportionnels aux intensités des champs. Les champs intracavité relaxent avec des taux $\Gamma_{x,y}$ et sont alimentés par des termes d'émission stimulée ; l'équation pour E_y inclut aussi le terme de couplage cohérent dû à la réinjection du champ E_x . La constante de couplage γ_e englobe la réflectivité du miroir de la cavité externe, l'efficacité de diffraction du modulateur acousto-optique, le recouvrement spatial entre le mode de cavité et le faisceau réinjecté, et toutes les pertes optiques résiduelles ; τ and Ψ sont respectivement le retard et le déphasage associés à l'aller-retour dans la cavité externe. κ et ζ quantifient les couplages entre populations et champs. Le modèle prend également en compte la saturation croisée des populations via le coefficient β .

On peut simplifier les équations en considérant que les taux de pompage et les pertes sont identiques pour les deux modes, ce qui donne $\Gamma_x = \Gamma_y = \gamma$ et $P_x = P_y = P$. On peut également poser le retard égal à zero. En effet, l'échelle de temps qui caractérise la dynamique du laser est fixée par la fréquence des oscillations de relaxation f_R . Dans nos conditions expérimentales $\tau = 5.1$ ns, alors que $1/f_R = 14$ μ s ; la réinjection peut donc être considérée comme instantanée. Nous introduisons les variables suivantes :

$$E_x = \bar{E}_x \sqrt{\frac{\gamma_{||}}{\zeta}} e^{2i\pi\nu_x t} e^{-i\psi}, \quad (5)$$

$$E_y = \bar{E}_y \sqrt{\frac{\gamma_{||}}{\zeta}} e^{2i\pi(\nu_x - 2f_{AO})t}, \quad (6)$$

$$n_{x,y} = \frac{\gamma}{\kappa} N_{x,y}, \quad (7)$$

$$\Delta\nu = \frac{\nu_y - \nu_x - 2f_{AO}}{\gamma}, \quad (8)$$

et écrivons les champs comme $\bar{E}_{x,y} = \sqrt{I_{x,y}} e^{i\phi_{x,y}}$. ϕ_x étant constante, nous obtenons le système

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dI_x}{dt} = [N_x + \beta N_y - 1] I_x, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dI_y}{dt} = [N_y + \beta N_x - 1] I_y + 4\pi f_A \sqrt{I_x I_y} \cos \Phi, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \Delta\nu - f_A \sqrt{\frac{I_x}{I_y}} \sin \Phi, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dN_{x,y}}{dt} = \epsilon [r - (1 + I_{x,y} + \beta I_{y,x}) N_{x,y}], \quad (12)$$

où nous avons introduit la *fréquence d'Adler* $f_A = \frac{\gamma_e}{2\pi\gamma}$, le taux de pompage normalisé $r = \frac{kP}{\gamma}$, le paramètre $\epsilon = \frac{\gamma_{||}}{\gamma}$, et $\phi_y = \Phi$. La formulation (9-12) est plus proche des expériences, car nous pouvons mesurer les intensités des champs ainsi que leur phase relative. Elle est aussi plus "lisible" ; en particulier, nous observons que la phase entre les champs est régie par une équation (éq. 11) de type Adler. La différence avec l'équation d'Adler standard est que le terme en $\sin\Phi$ dépend du rapport entre les

amplitudes des champs. Dans la pratique, cependant, les équations (9-12) se prêtent mal à l'intégration numérique. D'une part, le terme en $\sqrt{I_y}$ au dénominateur de l'éq. (11) est délicat à manier quand I_y devient petit ; d'autre part, les échelles de temps sont très différentes ($\epsilon = 1.9 \cdot 10^{-5}$). En outre, la limite $\epsilon \rightarrow 0$ est singulière, c.à.d. qu'elle conduit à des solutions non physiques. Tous ces problèmes peuvent être éliminés en utilisant des variables normalisés, et l'échelle de temps adéquate [2]. Nous introduisons la variable sans dimensions $s = \Omega_R t$, où $\Omega_R = \sqrt{\gamma_{||}\gamma} [r(1 + \beta) - 1]$ est la fréquence angulaire des oscillations de relaxation. Les équations (4-3) deviennent

$$\frac{de_x}{ds} = \frac{(m_x + \beta m_y) e_x}{1 + \beta} \quad (13)$$

$$\frac{de_y}{ds} = \frac{(m_y + \beta m_x) e_y}{1 + \beta} + i2\pi\Delta' e_y + \frac{\gamma_e}{\Omega_R} e_x \quad (14)$$

$$\frac{dm_{x,y}}{ds} = 1 - (|e_{x,y}|^2 + \beta|e_{y,x}|^2) - \epsilon' m_{x,y} [1 + (\eta - 1)(|e_{x,y}|^2 + \beta|e_{y,x}|^2)] \quad (15)$$

avec $e_{x,y} = \bar{E}_{x,y}/\sqrt{r(1 + \beta) - 1}$, $N_{x,y} = \frac{1}{1 + \beta} \left(1 + \frac{\Omega_R}{\gamma} m_{x,y}\right)$, $\eta = r(1 + \beta)$, $\epsilon' = \gamma_{||}/\Omega_R$, et $\Delta' = (\nu_y - \nu_x - 2f_{AO})/\Omega_R$.

Les équations précédentes sont intégrées en utilisant une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 à pas adaptatif. Les valeurs des paramètres utilisées dans les calculs numériques sont données Tab. 1. Tous ces paramètres ont été mesurés expérimentalement [8].

Table 1. Paramètres utilisés dans les simulations.

Paramètre	valeur	
Durée de vie de la population	$1/\gamma_{ }$	230 μ s
Durée de vie des photons	$1/\gamma$	4.32 ns
Fréquence angulaire des oscillations de relaxation	Ω_R	$4.49 \cdot 10^5$ rad.s ⁻¹
Saturation croisée	β	0.6
Taux de pompage	η	1.2
Constante de couplage	γ_e	$3.59 \cdot 10^5$ rad.s ⁻¹

4 Résultats numériques et expérimentaux

Nous construisons un diagramme de bifurcation en intégrant numériquement les équations d'évolution et en traçant les extrema locaux X_Φ de la phase Φ en fonction de $\Delta\nu$ (Fig. 2). Lorsque $\Delta\nu \in [0, f_A]$, Φ est constante, ce qui signifie que la fréquence du mode propre E_y coïncide avec $\nu_x + 2f_{AO}$, ou, dit autrement, que le battement entre les modes est verrouillé sur la fréquence imposée par la source RF qui commande le modulateur acousto-optique. Au delà de f_A nous observons un comportement différent par rapport au cas standard : la phase reste bornée jusqu'à la valeur f_B de $\Delta\nu$ (à l'exception de deux régions étroites autour de f_R et f_A). Cela implique que la fréquence moyenne du battement coïncide avec la fréquence RF externe ; dans la région $f_A < \Delta\nu < f_B$ on a donc accrochage de fréquence sans accrochage de phase. Les deux oscillateurs décrochent complètement seulement lorsque $\Delta\nu > f_B$. Notons que, la fonction $\Phi(t)$ étant limitée par définition dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, le décrochage de la phase se présente comme une série temporelle en dents de scie, avec des sauts brusques lorsque $\Phi(t)$ atteint la valeur de π . Par conséquent, les valeurs $-\pi$ et π sont des extrema locaux dans la série temporelle lorsque la phase dérive, et leur présence dans le diagramme de bifurcation indique que la phase n'est plus bornée.

Afin de comparer les prédictions du modèle à l'expérience, nous faisons battre les modes E_x et E_y sur une photodiode rapide derrière un polariseur à 45°. Lorsque E_y est verrouillé sur la fréquence réinjectée $\nu_x + 200$ MHz, le signal de battement $I(t)$ présente une oscillation à 200 MHz accrochée en phase à la deuxième harmonique du signal RF qui pilote le modulateur acousto-optique. Il est donc suffisant de

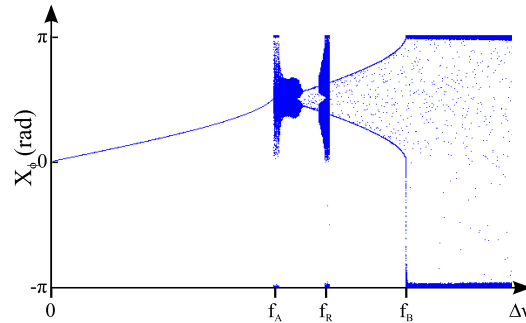


Figure 2. Diagramme de bifurcations numériques de la phase Φ en fonction de $\Delta\nu$. Trois régimes différents apparaissent : $\Delta\nu < f_A$, accrochage de phase; $f_A < \Delta\nu < f_B$, accrochage de fréquence sans accrochage de phase; $\Delta\nu > f_B$, dérive de phase.

mesurer la phase du signal de battement par rapport à la deuxième harmonique du signal RF, pour obtenir la phase du champ E_y relative au champ injecté. En utilisant un oscilloscope numérique rapide (40 GS/s), nous pouvons obtenir des histogrammes de la phase Φ . Une mesure de Φ est obtenue comme la valeur moyenne de Φ sur 100 périodes, c-à-d sur une durée de 500 ns; chaque histogramme contient 5000 mesures de la phase. Les données brutes sont présentées en Fig. 3 (g,h,i), ainsi que les histogrammes (d,e,f) obtenus à partir des séries temporelles calculées numériquement (a,b,c).

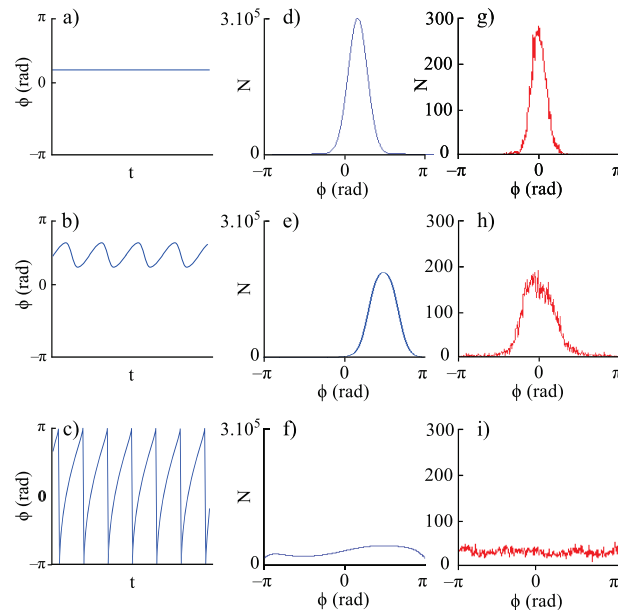


Figure 3. Série temporelles numériques de la variable Φ pour (a) $\Delta\nu = 0.3 f_A$ (phase accrochée), (b) $\Delta\nu = 1.33 f_A$ (phase bornée), et (c) $\Delta\nu = 3.2 f_A > f_B$ (phase décrochée). Histogrammes numériques des valeurs de Φ dans les cas accroché(d), borné (e), et décroché (f). (g,h,i) Histogrammes expérimentaux correspondants.

Pour $\Delta\nu = 0.3 f_A$ (Fig. 3g), dans la plage d'accrochage de phase, on obtient une distribution de phase relativement étroite, dont la largeur est cohérente avec une mesure indépendante de la dérive différentielle de fréquence des deux modes (0.4 kHz/s). Cette variation résiduelle est vraisemblablement due à des fluctuations de la pompe ainsi qu'à des dérives mécaniques. Evidemment, l'histogramme correspondant

à la série temporelle (a), obtenue numériquement, serait une distribution delta de Dirac ; afin de prendre en compte les bruits expérimentaux, nous l'avons convolué avec une distribution gaussienne de déviation standard appropriée ($\sim \pi/12$). Les Figs 3e et 3h montrent les histogrammes calculés et mesurés pour $\Delta\nu = 1.33 f_A$, dans la région de phase bornée. L'histogramme expérimental est plus large que celui de la Fig. 3g, mais montre que la phase relative reste piégée en une région bornée de l'intervalle $[-\pi, \pi]$, confirmant ainsi qu'il y a synchronisation même au delà de f_A . Il est à noter que, sans prendre en compte le bruit, la série temporelle de Fig. 3b produit un histogramme qui a deux maxima séparés. En convoluant cet histogramme avec la distribution gaussienne *déduite auparavant*, on obtient un bon accord avec les données expérimentaux. Enfin, pour $\Delta\nu = 3.2 f_A$, le décrochage de la phase relative produit un histogramme plat (Figs 3c, 3f et 3i).

5 Conclusions

En conclusion, nous avons montré expérimentalement qu'il existe une plage de synchronisation pour des désaccords supérieurs à f_A , la limite établie par l'approximation d'Adler. Lorsque le désaccord est compris entre f_A et f_B , l'accrochage de phase n'est plus possible, néanmoins les fréquences moyennes restent accrochées. Ces résultats sont retrouvés par un modèle théorique. A présent, nous sommes en train d'étendre cet étude aux lasers à semiconducteur [11], ainsi qu'au cas d'un couplage retardé [12]. Enfin, on peut aussi se demander si la dynamique ici étudiée joue un rôle dans les gyrolasers à état solide [13].

Références

1. A. PIKOVSKY, M. ROSENBLUM & J. KURTHS, *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, (2001)
2. T. ERNEUX & P. GLORIEUX, *Laser dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, (2010)
3. P. A. BRAZA & T. ERNEUX, Constant phase, phase drift, and phase entrainment in lasers with an injected signal, *Physical Review A*, **41**, 6470-6479 (1990)
4. M. K. S. YEUNG & S. H. STROGATZ, Nonlinear dynamics of a solid-state laser with injection, *Physical Review E*, **58**, 4421-4435 (1998)
5. R. E. KRONAUER, C. A. CZEISLER, S. F. PILATO, M. C. MOORE-EDE, & E. D. WEITZMAN, *American Journal of Physiology*, **242**, R3 (1982)
6. T. CHAKRABORTY & R. H. RAND, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **23**, 369 (1988)
7. J. THÉVENIN, M. ROMANELLI, M. VALLET, M. BRUNEL, & T. ERNEUX, Resonance assisted synchronization of coupled oscillators : frequency locking without phase locking, *Physical Review Letters*, **107**, 104101 (2011)
8. M. BRUNEL, O. EMILE, M. VALLET, F. BRETENAKER, A. LE FLOCH, L. FULBERT, J. MARTY, B. FERRAND, & E. MOLVA, Experimental and theoretical study of monomode vectorial lasers passively Q switched by a Cr^{4+} : yttrium aluminum garnet absorber, *Physical Review A*, **60**, 4052 (1999)
9. L. KERVEVAN, H. GILLES, S. GIRARD & M. LAROCHE, Beat-note jitter suppression in a dual-frequency laser using optical feedback, *Optics Letters*, **32**, 1099 (2007)
10. J. THÉVENIN, M. VALLET, M. BRUNEL, H. GILLES & S. GIRARD, Beat-note locking in dual-polarization lasers submitted to frequency-shifted optical feedback, *Journal of the Optical Society of America B*, **28**, (5), 1104 (2011)
11. S. WIECZOREK, B. KRAUSKOPF, T. B. SIMPSON & D. LENSTRA, The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers, *Physics Reports*, **416**, 1-128 (2005)
12. H.-J. WÜNSCHE, S. BAUER, J. KREISSL, O. USHAKOV, N. KORNEYEV, F. HENNEBERGER, E. WILLE, H. ERZGRÄBER, M. PEIL, W. ELSÄSSER & I. FISCHER, Synchronization of delay-coupled oscillators : A study of semiconductor lasers, *Physical Review Letters*, **94**, 163901 (2005)
13. S. SCHWARTZ, G. FEUGNET, P. BOUYER, E. LARIONTSEV, A. ASPECT & J.-P. POCHOLLE, Mode-coupling control in resonant devices : Application to solid-state ring lasers, *Physical Review Letters* **97**, 093902 (2006)

Turbulence anisotrope des pseudo-ondes d'Alfvén en deux dimensions

Natalia Tronko¹, Sébastien Galtier², & Sergey Nazarenko³

¹ Centre for Fusion Space and Astrophysics, University of Warwick, Gibbet Hill road, CV4 7AL Coventry, UK

² Institut d'Astrophysique Spatiale UMR 8617 - Université Paris-Sud Bât. 121, F-91405 Orsay Cedex, France

³ Department of Mathematics, University of Warwick, Gibbet Hill road, CV4 7AL Coventry, UK

nathalie.tronko@gmail.com

Résumé. Nous présentons une analyse des équations cinétiques de turbulence faible obtenues dans le cadre de la magnétohydrodynamique en deux dimensions (2D). Contrairement au cas tridimensionnel, les pseudo-ondes d'Alfvén jouent un rôle central dans la dynamique non-linéaire. On montre que le régime 2D se caractérise par une absence d'universalité avec une turbulence de nature nonlocale pour laquelle il n'existe aucune solution exacte en loi de puissance pour le spectre d'énergie. Notre exposé est illustré par des simulations numériques des équations cinétiques de turbulence faible.

Abstract. We present an analysis of the kinetic equations of weak turbulence obtained in the framework of two-dimensional (2D) magnetohydrodynamics. Contrary to the three-dimensional case, the pseudo-Alfvén waves play a central role in the nonlinear dynamics. We show that the 2D regime is characterized by an absence of universality with a non-local turbulence for which there is no power law exact solution for the energy spectrum. Our presentation is illustrated with numerical simulations of the kinetic equations of weak turbulence.

1 Introduction

La Magnéto-Hydro-Dynamique (MHD) est un modèle souvent utilisé pour l'étude du comportement turbulent des plasmas astrophysiques comme le vent solaire [1]; c'est aussi un outils indispensable pour étudier la stabilité d'un plasma confiné magnétiquement dans un tokamak [2]. Notre travail s'est focalisé sur le régime de turbulence faible – appelé aussi turbulence d'ondes – pour le système MHD incompressible en deux dimensions (2D). On considère la présence d'un fort champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 appartenant au même plan que les champs fluctuants : $(\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{v}})$. L'étude précédente [3] dans laquelle un champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 est placé dans le plan perpendiculaire aux fluctuations, a montré l'existence de solutions de type Kolmogorov-Zakharov et la localité de la turbulence. Sur la Fig. 1, nous présentons les deux types d'ondes d'Alfvén possibles en MHD 3D : celles dont les fluctuations sont transverses au fort champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 (ondes d'Alfvén de cisaillement) et celles dont les fluctuations sont le long de \mathbf{B}_0 (pseudo-ondes d'Alfvén). Ces dernières sont souvent négligées en 3D car elles ont une dynamique esclave des premières. En revanche en 2D, ce sont elles qui gèrent la dynamique de la MHD.

Il est bien connu que le comportement de la turbulence MHD 3D est qualitativement différent de la turbulence classique (c'est-à-dire hydrodynamique). Dans le cas qui nous intéresse, la turbulence MHD tend vers un état très anisotrope tel que $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$: en effet, en présence d'un fort champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 , la cascade d'énergie se fait essentiellement, voire exclusivement, dans la direction perpendiculaire à \mathbf{B}_0 . On retrouve cette propriété dans le cas du système MHD 2D. Notre étude a pour objectif de comparer le comportement de ces deux systèmes et de mettre en évidence les différences fondamentales. Notre objectif est aussi de mettre en garde contre l'utilisation parfois abusive de modèles ou de simulations MHD 2D pour décrire le cas 3D très anisotrope.

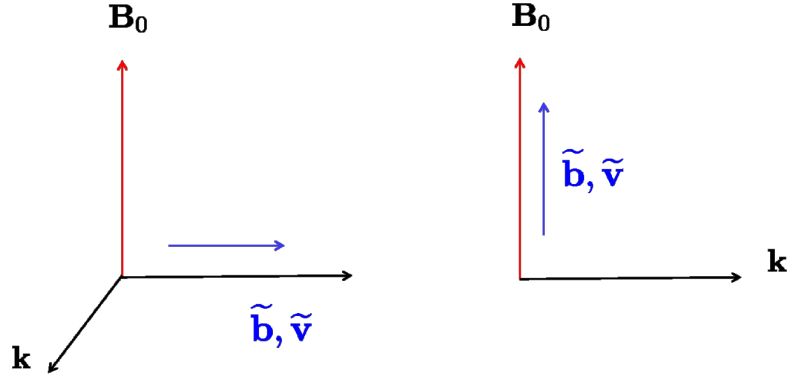


Figure 1. Les ondes d'Alfvén de cisaillement (à gauche) et les pseudo-ondes d'Alfvén (à droite).

2 Régime de turbulence faible

2.1 Paquets d'ondes d'Alfvén

Dans l'approche de turbulence faible, l'état statistique d'un système peut être représenté par un grand nombre d'ondes interagissant faiblement entre-elles. L'information sur le comportement d'un tel système peut être obtenue à travers l'équation cinétique d'ondes du spectre d'énergie. La dérivation d'une telle équation par une décomposition en séries asymptotiques en puissance des faibles nonlinéarités pour les ondes d'Alfvén a été réalisée pour la première fois en 2000 par Galtier et al. [3]. Dans ce travail, les auteurs ont considéré un fluide MHD incompressible 3D.

Une des raisons qui explique qu'une telle étude n'avait pas été réalisé auparavant est que l'application du formalisme de turbulence faible était considérée comme incompatible avec les ondes d'Alfvén incompressibles. En effet, dans ce cas la vitesse de groupe est la même pour tous les paquets d'ondes d'Alfvén indépendamment de leur vecteur d'ondes. Cela peut potentiellement mener à des effets cumulatifs à longue échelle temporelle qui seraient néfastes pour l'application de la théorie de turbulence faible. Cependant l'étude précédente [3] a montré que les ondes d'Alfvén représentent une exception à cette règle car les ondes qui se propagent dans la même direction n'interagissent pas entre-elles, alors que celles qui se propage dans des directions opposées ont une durée d'interaction finie pendant laquelle elles ne peuvent échanger qu'une quantité d'énergie finie. L'outil principal de notre travail est le formalisme cinétique d'ondes résumé dans l'ouvrage de Zakharov et al. [4] et plus récemment dans celui de Nazarenko [5].

2.2 Équations 2D en variables d'Elsässer

Dans notre étude, on considère le modèle MHD 2D inviscide suivant :

$$\partial_t \psi + \{\phi, \psi\} = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t \nabla^2 \phi + \{\phi, \nabla^2 \phi\} - \{\psi, \nabla^2 \psi\} = 0, \quad (2)$$

où les fonctions $\phi = \phi(x, y)$ et $\psi = \psi(x, y)$ correspondent, respectivement, aux flux d'un champ de vitesse et d'un champ magnétique (qui est supposé être normalisé à une vitesse). Les crochets de Poisson sont donnés par la relation :

$$\{f, g\} = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g. \quad (3)$$

Par la suite, on supposera la présence d'un fort champ magnétique ambiant \mathbf{B}_0 . Ainsi, la fonction de flux magnétique peut être décomposée comme $\psi = \psi_0 \pm \tilde{\psi}$, où la partie $\psi_0 = -B_0 y$ correspond au champ magnétique de fond orienté dans la direction \hat{x} et $\tilde{\psi}$ représente la partie fluctuante. Avec ces nouvelles

notations, le système (1)–(2) s'écrit :

$$\partial_t \tilde{\psi} + \{\phi, \tilde{\psi}\} = B_0 \partial_x \phi, \quad (4)$$

$$\partial_t \nabla^2 \phi + \{\phi, \nabla^2 \phi\} - \{\tilde{\psi}, \nabla^2 \tilde{\psi}\} = B_0 \partial_x \nabla^2 \tilde{\psi}. \quad (5)$$

On peut remarquer qu'après le remplacement de la dérivée partielle par rapport à x en dérivée partielle par rapport à z dans le membre de droite de ce système, on obtient le modèle 3D de MHD réduite (dit RMHD) [6].

Afin de pouvoir mettre en évidence la structure sous-jacente de ce système, on introduit les fonctions de flux d'Elsässer :

$$\zeta^\pm = \phi \mp \tilde{\psi}. \quad (6)$$

Le système (4)–(5) s'écrit alors (après application du Laplacien sur (4)) :

$$\nabla^2 (\partial_t \zeta^\pm \pm B_0 \partial_x \zeta^\pm) = -\frac{1}{2} (\{\zeta^-, \nabla^2 \zeta^+\} + \{\zeta^+, \nabla^2 \zeta^-\} \mp \nabla^2 \{\zeta^+, \zeta^-\}). \quad (7)$$

On remarque ici l'absence d'interaction entre les variables d'Elsässer de même signe : cela s'explique par le fait que les ondes qui se propagent dans la même direction n'interagissent pas entre-elles. Ainsi, le formalisme cinétique d'ondes pourra être utilisé dans le cadre de ce problème.

3 Équations cinétiques d'ondes – Méthode

3.1 Régime linéaire

La première étape du développement du formalisme de turbulence d'ondes passe par l'identification des modes propres dans le régime linéaire. On cherche donc des solutions sous la forme d'onde :

$$\zeta^\pm \propto e^{i(k_x x + k_y y) - i\omega^\pm t}, \quad (8)$$

et on identifie les fréquences propres :

$$\omega^\pm = \pm B_0 k_x. \quad (9)$$

À partir de ces relations, on identifie les ondes qui se propagent parallèlement au champ magnétique ambiant (dans un sens ou dans l'autre) avec la vitesse de groupe $\mathbf{v}_g^\pm = \pm B_0$.

3.2 Régime non-linéaire

À l'étape suivante, on place notre système dans une boîte périodique 2D de dimensions $L_x \times L_y$ et on définit la transformée de Fourier pour les variables d'Elsässer :

$$\hat{\zeta}_k^\pm = L_x^{-1} L_y^{-1} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \zeta^\pm(\mathbf{x}) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (10)$$

Dans l'espace de Fourier le système (7) s'écrit :

$$k^2 \left(\partial_t \hat{\zeta}_k^\pm \pm i B_0 k_x \hat{\zeta}_k^\pm \right) = [k_1, k_2]_z (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}) \hat{\zeta}_{k_1}^\mp \hat{\zeta}_{k_2}^\pm. \quad (11)$$

On passe maintenant à l'étape clef dans le formalisme cinétique d'ondes en introduisant les variables qui rendent compte de la séparation des échelles en temps. Autrement dit, on passe dans la représentation d'interaction :

$$c_k^\pm = i k \hat{\zeta}_k^\pm e^{i\omega^\pm t} / \epsilon, \quad (12)$$

où c_k^\pm est l'amplitude de l'onde dont la variation temporelle est lente, ω^\pm est la fréquence rapide et ϵ est un paramètre petit qui mesure le degré de non-linéarité de notre système. Il peut être défini comme étant le

rapport des amplitudes d'un champ magnétique fluctuant sur l'amplitude du champ magnétique ambiant $\epsilon = \tilde{b}/B_0$. Autrement dit, la présence d'un fort champ magnétique ambiant introduit la séparation des échelles de mouvement dans notre système. Dans la représentation d'interaction, le système (11) s'écrit :

$$\dot{c}_k^\pm = -i\epsilon \sum_{1,2} V_{k12} e^{\pm 2ik_{1x}t} c_1^\mp c_2^\pm \delta_{12}^k, \quad (13)$$

avec $c_{1,2}^\pm = c^\pm(\mathbf{k}_{1,2})$ et le coefficient d'interaction :

$$V_{k12} \equiv V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_2) [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]_z}{k k_1 k_2}. \quad (14)$$

3.3 Équation cinétique pour le spectre

Après avoir obtenu l'expression du système initial dans la représentation d'interaction, on peut poursuivre le développement du formalisme de turbulence d'ondes. On utilise la séparation d'échelles en temps pour introduire une échelle de temps intermédiaire T qui est supposé être beaucoup plus grande que celle du régime purement linéaire $t_L = 2\pi/\omega_L$, mais aussi beaucoup plus petite que le temps non-linéaire t_{nl} du système, ce qui revient à considérer l'inégalité :

$$t_L \ll T \ll t_{nl}. \quad (15)$$

On cherche ensuite la solution pour $t = T$ sous forme de décomposition en série par rapport au petit paramètre ϵ :

$$b_k^\pm = c_k^{\pm;(0)} + \epsilon c_k^{\pm;(1)} + \epsilon^2 c_k^{\pm;(2)} + \dots, \quad (16)$$

où l'on suppose que $c_k^{\pm;(0)} = c_k^\pm(0)$ en régime linéaire. Après avoir substitué cette décomposition dans le système (13), on peut obtenir les expressions pour les amplitudes aux ordres supérieurs. Une fois le calcul des propagateurs terminé, on considère la limite $T \rightarrow \infty$. On utilise par la suite les expressions pour ces amplitudes afin d'obtenir la dynamique du spectre donné par les interactions triadiques :

$$n_k^\pm(T) - n_k^\pm(0) = \left\langle |c_k^\pm|^2 \right\rangle + \left\langle c_k^{(\pm,0)*} c_k^{(\pm,2)} \right\rangle + \left\langle c_k^{(\pm,0)} c_k^{(\pm,2)*} \right\rangle, \quad (17)$$

où le spectre d'énergie des pseudo-ondes d'Alfvén n_k^\pm est définie par les règles de quantification :

$$\langle c_1^\pm c_2^\pm \rangle = \delta_{12} n_1^\pm, \quad \langle c_1^\pm c_2^{*\pm} \rangle = \delta_1^2 n_1^\pm, \quad \langle c_1^\pm c_2^\mp \rangle = 0. \quad (18)$$

Dans le cadre de cet article, nous n'allons pas rentrer plus dans le détail des calculs ; nous allons passer directement à la présentation du résultat final pour l'équation cinétique d'ondes, puis nous allons nous concentrer sur son analyse. L'équation cinétique d'ondes obtenue asymptotiquement pour le système MHD 2D s'écrit :

$$\dot{n}_k^\pm = 4\pi\epsilon^2 \int V_{k12}^2 n_1^\mp [n_2^\pm - n_k^\pm] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(2k_{1x}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (19)$$

3.4 Limite fortement anisotrope

L'équation (19) mène à une dynamique fortement anisotrope avec des transferts nonlinéaires d'énergie uniquement dans la direction transverse au champ magnétique moyen. Cette propriété nous permet de prendre la limite anisotrope $k_x \ll k_y$ pour lequel le système se simplifie en partie. Il devient :

$$\begin{aligned} \partial_\tau n^\pm(k_{2x}, k_y; \tau) \\ = 4\pi\epsilon^2 \int n^\mp(0, k_{1y}; 0) [n^\pm(k_{2x}, k_{2y}; \tau) - n^\pm(k_{2x}, k_y; \tau)] \delta(k_y - k_{1y} - k_{2y}) dk_{1y} dk_{2y}. \end{aligned} \quad (20)$$

On peut remarquer qu'après avoir défini la nouvelle variable temporelle $\tau = k_x^2 t$, on a pu éliminer toute dépendance en nombre d'ondes parallèle k_x dans le membre de droite de l'équation cinétique d'ondes. Dans ces nouvelles variables, on voit que l'interaction entre les ondes est donnée uniquement par les composantes perpendiculaires des vecteurs d'ondes k_y, k_{y1}, k_{y2} .

4 Propriétés de la turbulence des pseudo-ondes d'Alfvén

Le but de cette section est de présenter les propriétés générales de la dynamique 2D du régime de turbulence d'ondes d'Alfvén. En particulier, on à la localité de la turbulence MHD.

4.1 Solutions de type Kolmogorov-Zakharov

On commence notre analyse en considérant que le système atteint l'état stationnaire et que l'on peut par conséquent négliger la dérivée temporelle dans l'équation cinétique (20). On recherche alors les solutions sous la forme de loi de puissance :

$$n_k^\pm \propto k_y^{\nu^\pm}. \quad (21)$$

On sépare l'intégrale dans l'équation (20) en deux parties. Ensuite on effectue la transformation conforme de Zakharov sur l'une d'entre-elles :

$$k'_{1y} = \frac{k_y k_{1y}}{k_{2y}}, \quad k'_{2y} = \frac{k_y^2}{k_{2y}}, \quad (22)$$

et on somme avec la partie non-transformée. La solution à flux constant correspond à la condition suivante sur les exposants ν^\pm :

$$\nu^+ + \nu^- = -2. \quad (23)$$

L'étude de la convergence de l'intégrale montre cependant qu'il n'existe aucune solution possible puisque la zone de convergence au sens propre n'existe pas. On remarque finalement que la solution associée au régime de turbulence équilibrée avec $\nu^+ = \nu^- = -1$ possède une divergence logarithmique.

4.2 Évolution dynamique du spectre d'énergie

Une des propriétés remarquables de l'équation cinétique d'ondes (20) en MHD 2D est sa simplicité. Afin de comprendre l'évolution du spectre d'énergie, on peut intégrer (numériquement) l'équation cinétique dans le cas simple d'une turbulence équilibrée ($n^+ = n^-$) en considérant deux cas. La première situation correspond à l'introduction d'une source gaussienne et d'une dissipation modélisé par un frottement uniforme. Dans ce cas, l'équation cinétique peut être résolue analytiquement. Dans la seconde situation, le frottement uniforme est remplacé par un frottement visqueux : ici les solutions sont obtenus numériquement (schéma de Crank-Nicolson en Fortran 90). Ces deux études différentes donnent le même résultat pour la dynamique du spectre. Nous illustrons le comportement de ce système avec la Fig. 2 qui montre l'évolution du spectre d'énergie en fonction du temps. On remarque que dans la limite des temps longs $\tau \rightarrow \infty$, limite pour laquelle le système devient stationnaire, le spectre d'énergie devient plat. On remarque que ce résultat numérique est différent de celui prédit par la transformation de Kolmogorov-Zakharov pour lequel la turbulence équilibrée se caractérise par la solution $\nu^+ = \nu^- = -1$.

On constate aussi que le transfert d'énergie entre les échelles – la cascade d'énergie – est absent. L'énergie initialement contenue dans le système est en fait transportée globalement vers l'état d'équilibre dynamique. Ceci peut être vu en faisant le calcul de l'énergie totale transférée dans le système. Pour les deux situations, on obtient :

$$B \propto \frac{\sigma_f}{(\lambda \sigma_d)^\alpha}, \quad (24)$$

avec σ_f et σ_d les amplitudes de forçage et de dissipation, alors que le paramètre λ contient l'information à propos des conditions initiales. L'exposant $\alpha = 1/2$ correspond au cas d'un frottement constant et $\alpha = 3/4$ à celui d'un frottement visqueux. Par ailleurs, on peut voir que l'information à propos de la source et de la dissipation, ainsi sur les conditions initiales est transmise tout le long de l'évolution. Aussi, nous pouvons conclure que la turbulence MHD 2D est non locale.

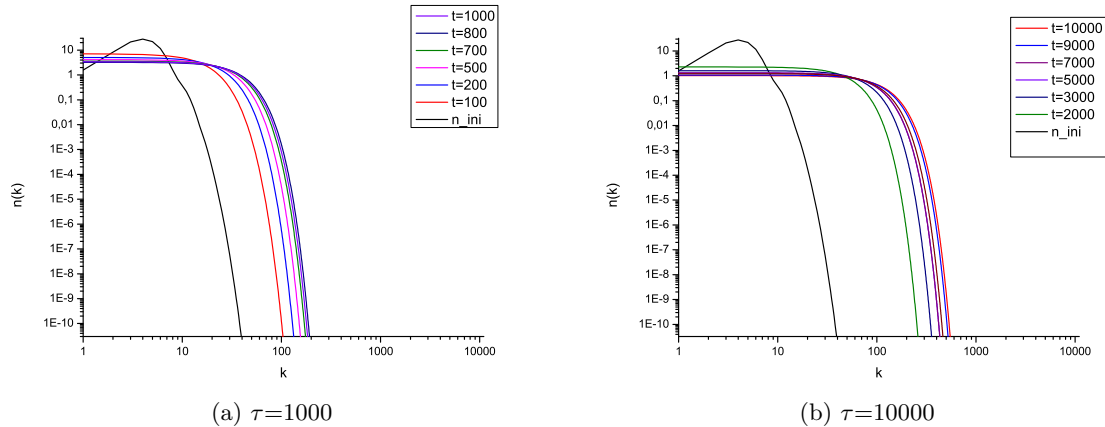


Figure 2. Évolution du spectre d'énergie $n(k)$ vers un état stationnaire pour lequel le spectre est plat.

5 Conclusion

Notre étude analytique et numérique montre qu'un fluide MHD en régime de turbulence faible a un comportement en deux dimensions très différent de celui en trois dimensions. En particulier, on constate l'absence de solution universelle de type Kolmogorov-Zakharov pour le spectre de l'énergie, ainsi que l'absence de cascade d'une échelle à l'autre. Notre étude montre aussi que la non-localité marginale pour les solutions de type Kolmogorov ne peut pas être éliminée à l'aide de corrections logarithmiques, comme proposés par Kraichnan [7].

Références

1. S. GALTIER, Multi-scale turbulence in the inner solar wind, *Journal of Low Temperature Physics*, **145**, 59–74 (2006).
2. J.-M. RAX, *Physique des Tokamaks*. Les Éditions de l'École Polytechnique (2011).
3. S. GALTIER, S.V. NAZARENKO, A.C. NEWELL, A. POUQUET, A weak turbulence theory for incompressible MHD, *Journal of Plasma Physics*, **63** (5), 447–488 (2000).
4. V.E. ZAKHAROV, V.S. L'VOV AND G. FALKOVICH, *Kolmogorov spectra of turbulence 1. Wave turbulence*. Springer, Berlin (1992).
5. S.V. NAZARENKO, *Wave turbulence*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2011).
6. H.R. STRAUSS, Nonlinear, three-dimensionnal magnetohydrodynamics of noncircular tokamaks, *Physics of Fluids*, **19**, 134–140 (1976).
7. R. KRAICHNAN, Inertial-range transfer in two-and three-dimensional turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **47** (3), 525–535 (1971).

Etude de la croissance de la zone fluidifiée lors de l'injection d'air dans des grains immergés

Valérie Vidal, Germán Varas & Jean-Christophe Géminard

Laboratoire de Physique, Université de Lyon, Ecole Normale Supérieure de Lyon - CNRS
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France
valerie.vidal@ens-lyon.fr

Résumé. Lorsqu'on injecte de manière ponctuelle de l'air en base d'une couche de grains immergée dans l'eau, on observe au cours du temps la formation d'une zone fluide qui, en régime stationnaire, prend une forme parabolique que l'on peut interpréter par analogie avec un processus de diffusion [1,2]. Nous montrons ici que le coefficient de diffusion effectif associé ne dépend pas du débit d'injection, et ne présente pas de variation significative lorsqu'on change l'angle d'inclinaison α de la cellule expérimentale, i.e. la gravité effective dans le système. Pour $\alpha > 60^\circ$, le chemin ouvert par l'air à travers le milieu reste stable au cours du temps : on ne peut plus définir de zone fluide, et on observe l'éjection progressive des grains hors de la couche. Nous décrivons également la dynamique de croissance de la zone fluidifiée, et l'existence de trois régions distinctes : (1) une zone centrale fluide dans laquelle deux rouleaux de convection transportent les grains autour du chemin suivi par l'air ; (2) une zone compacte loin du centre ; (3) une zone de '*stick-slip*' (SSZ) séparant la zone fluide de la zone compacte. La largeur de la SSZ diminue au cours du temps, jusqu'à disparaître lorsque le système atteint un état stationnaire. Nous comparons ces observations expérimentales à des phénomènes similaires observés dans des processus géologiques.

Abstract. When air is injected punctually at the bottom of a granular layer immersed in water, we observe the formation of a fluidized zone which, in stationary regime, exhibits a parabolic shape which can be explained in terms of a diffusion process [1,2]. Here we show that the associated diffusion coefficient does not depend on the injected flow-rate, and does not exhibit any significant variation when changing the tilt angle α of the experimental cell, i.e. the effective gravity in the system. For $\alpha > 60^\circ$, the path opened by the air through the medium remains stable in time. We cannot define a fluidized zone anymore, and the grains are progressively ejected outside of the layer. We also describe the growth dynamics of the fluidized zone, and report the existence of three different regions : (1) a central fluidized zone in which two convection rolls transport the grains around the path followed by the air ; (2) a compact zone far from the center ; (3) a '*stick-slip*' zone (SSZ) separating the fluidized and the compact zones. The SSZ width decreases with time, until disappearing when the system reaches a stationary state. We compare these experimental observations to similar phenomena observed in geological processes.

1 Introduction

L'invasion de gaz dans un milieu granulaire est un phénomène que l'on retrouve dans une grande variété de contextes, allant de l'industrie pétrolière [3,4] aux problèmes de décontamination des sols, où l'injection d'air dans le sous-sol permet de chasser ou de dégrader chimiquement les polluants [5]. Des processus naturels impliquent également l'émission de gaz à travers un milieu complexe, tels que les sédiments marins dans le cas d'émission de méthane au large des côtes américaines dans l'Atlantique Nord [6] ou de CO₂, potentiellement responsable des grands changements climatiques [7].

Dans une étude précédente, nous avons modélisé ce phénomène en injectant ponctuellement de l'air en base d'une couche de grains immergée dans l'eau et observé, au cours du temps, la formation d'une zone fluidifiée [1,2]. Dans une cuve cylindrique (3D) ou dans une cellule de Hele-Shaw (2D) verticale, nous avons montré que cette zone, aux temps longs, a une forme parabolique. Un modèle analytique simple considérant les différents chemins parcourus par l'air dans le système permet d'expliquer cette géométrie en terme de processus de diffusion [1,2]. Ces travaux ont montré qu'un paramètre unique, sans dimension, gouverne la dynamique du système : le paramètre $\chi = 2\sigma_p/\rho g d$, défini comme le rapport entre la largeur de la distribution des surpressions capillaires dans le milieu (σ_p) et la pression hydrostatique $\rho g d/2$ sur

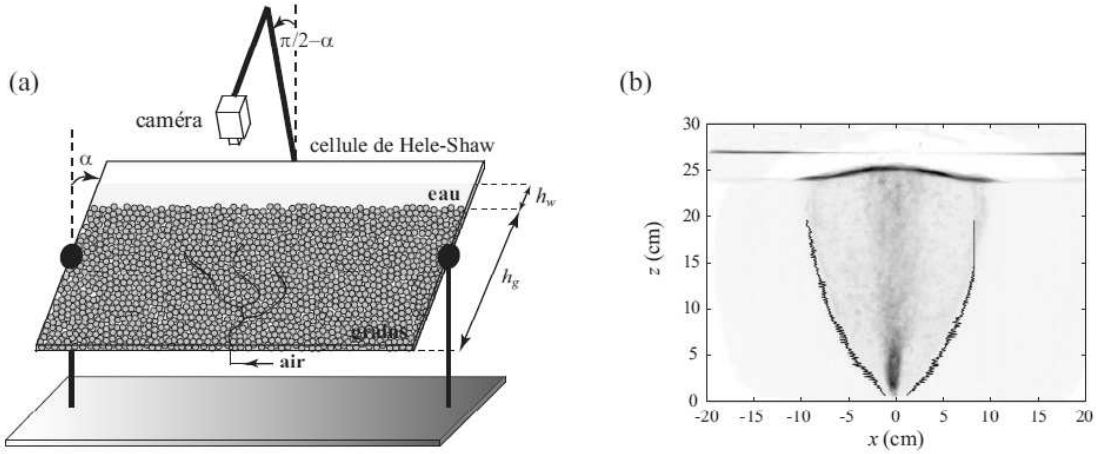


Figure 1. (a) Dispositif expérimental : de l'air est injecté à débit constant Φ en base d'une couche de grains immergée dans l'eau (voir texte). La cellule peut être inclinée entre $\alpha = 0^\circ$ (verticale) et $\alpha = 90^\circ$ (horizontale). (b) Exemple d'image d'invasion finale, obtenue en sommant la séquence d'images [$\Phi = 0.91$ mL/s]. Les lignes noires représentent le contour de la région fluidisée, obtenu par détection automatique. Noter que la détection est limitée à $z \leq 16$ cm, afin d'éviter les déformations dues à la surface libre.

la taille typique d'un grain (de diamètre d , avec ρ la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur). Une étude numérique a montré que pour des grandes valeurs de ce paramètre χ , on sort du régime "diffusif" [8]. Cette étude numérique, cependant, considère un milieu non-déformable et, bien qu'étant capable de décrire la morphologie de la zone fluidifiée aux temps longs, ignore sa dynamique de formation.

Nous présentons ici l'étude expérimentale de la dynamique de croissance de la zone fluidifiée lorsqu'on injecte de l'air à débit constant Φ à la base d'une couche de grains immergée dans l'eau. Nous utilisons une cellule de Hele-Shaw (Fig. 1a) que l'on peut incliner par rapport à la verticale avec un angle compris entre $\alpha = 0^\circ$ (cellule verticale) et $\alpha = 90^\circ$ (cellule horizontale), permettant ainsi de faire varier la gravité effective dans le système – et donc, le paramètre χ (voir [1,2,8] pour une description complète du dispositif expérimental). Sauf spécification particulière, les grains utilisés sont des billes de verre sphériques (USF Matrasur) tamisées, de diamètre 250–425 μm , et les hauteurs de la couche de grains et d'eau sont $h_g = 22$ cm et $h_w = 2$ cm, respectivement.

2 Etat stationnaire : dynamique à temps longs

Afin de quantifier la morphologie de la zone fluide en fonction du débit d'injection Φ et de l'angle α , nous avons considéré, pour chaque jeu de paramètres, l'état stationnaire pour lequel le contour de la zone fluide n'évolue plus de manière significative. Typiquement, ce dernier correspond à l'injection d'un volume d'air suffisamment grand, l'expérience pouvant durer de quelques heures à quelques dizaines d'heures selon le débit d'injection. Pour les différents débits, la durée totale de l'expérience est fixée de manière à ce que le volume total d'air traversant le système reste constant.

Afin de déterminer le contour de la zone fluide, on calcule pour une série donnée la différence entre deux images successives, et l'on additionne les images ainsi obtenues. Le bon contraste obtenu par cette méthode permet de détecter automatiquement le contour de la région fluidifiée (ligne noire, Fig. 1b), qui délimite la zone où les grains ont bougé au cours du temps. Afin d'éviter les déformations dues à la présence de la surface libre des grains, nous limitons la détection jusqu'à environ 2-3 cm sous la surface. Le tracé de x en fonction de \sqrt{z} montre que les contours droit et gauche se superposent sur une droite [1,2], dont la pente permet de définir l'analogie d'un coefficient de diffusion D , donné par $x = \sqrt{Dz}$.

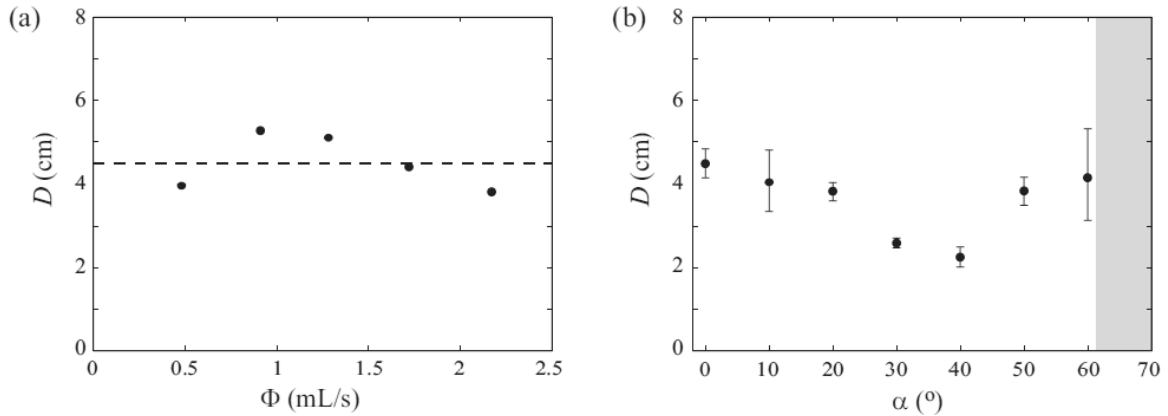


Figure 2. (a) Coefficient de diffusion D en fonction du débit injecté Φ . La ligne pointillée représente la valeur moyenne $D = 4.5 \pm 0.7$ cm [$\alpha = 0^\circ$]. (b) Coefficient de diffusion D en fonction de l'angle de tilt α . Les points et barres d'erreur sont obtenus d'après les moyennes et fluctuations lors de l'étude en (a) de la variation en fonction du débit, pour un angle donné. Pour $\alpha > 60^\circ$, on ne peut plus définir de zone fluide (zone grise, voir texte).

2.1 Dépendance en fonction du débit Φ

La figure 2a montre le coefficient de diffusion D en fonction du débit d'injection Φ . Aucune variation significative n'est observée. Les valeurs sont légèrement dispersées autour d'un coefficient de diffusion moyen $D = 4.5 \pm 0.7$ cm. Ces résultats préliminaires montrent que pour une cellule verticale ($\alpha = 0^\circ$) et dans la gamme de débits utilisés, la dynamique de passage de l'air à travers le milieu influe peu sur la morphologie finale de la zone fluide.

2.2 Dépendance en fonction de l'angle α

Lorsqu'on incline la cellule expérimentale, on observe l'existence d'un angle limite ($\sim 60^\circ$) au-delà duquel il n'est plus possible de définir une zone fluide. En effet, pour $\alpha > 60^\circ$, l'air ouvre un chemin à travers le milieu et la gravité effective dans le système n'est plus capable de le refermer. On observe alors la formation de canaux (Fig. 3) qui restent stables sur des échelles de temps très longues (typiquement, plusieurs heures). Ces canaux peuvent adopter des géométries diverses (Figs. 3a,b). On observe dans

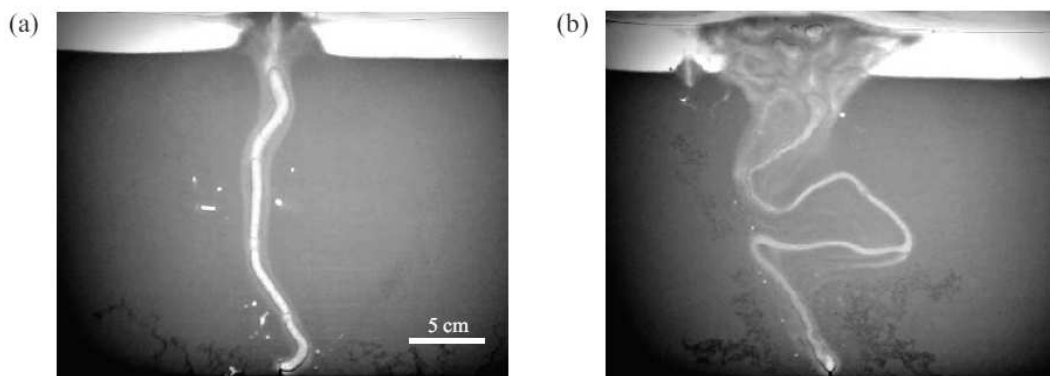


Figure 3. Formation de canaux stables pour $\alpha = 80^\circ$. Ces structures peuvent adopter des morphologies différentes selon le débit d'injection, formant des chemins droit (a) [$\Phi = 2.17$ mL/s] ou en zig-zag (b) [$\Phi = 0.91$ mL/s]. À temps longs, les grains sont expulsés hors de la couche, et il n'est plus possible de définir une zone fluide.

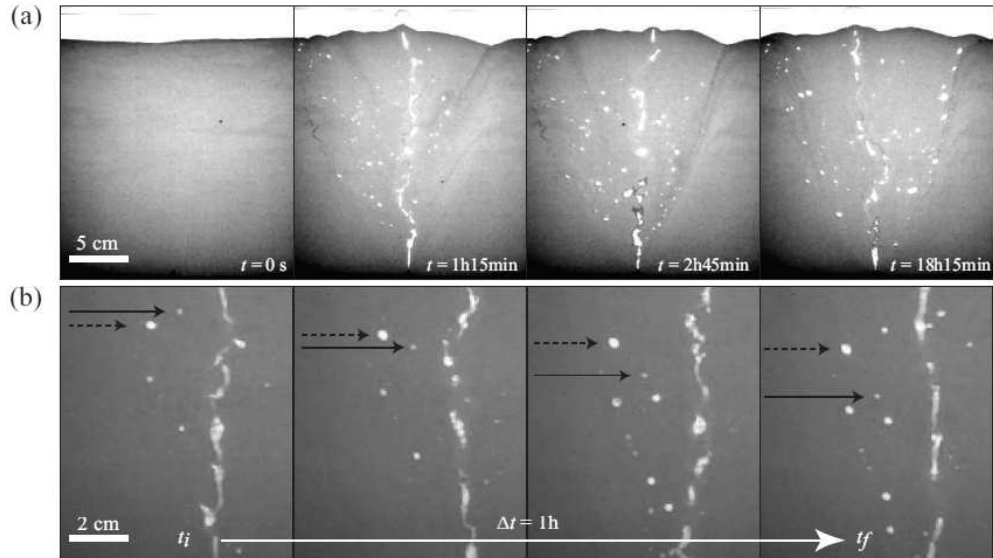


Figure 4. (a) Formation de la zone fluide au cours de l'expérience. La déformation part de la surface du lit granulaire, et se propage vers le bas. (b) Zoom à l'intérieur de la zone fluide : au centre, l'air remonte à travers la couche de grains, engendrant deux rouleaux de convection dans la zone fluide, qui entraînent les bulles vers le bas. La vitesse de l'écoulement descendant décroît près de la limite de la zone fluide. Les flèches permettent de suivre le mouvement de deux bulles pendant environ 1h [$\Phi = 0.91$ mL/s, $\alpha = 0^\circ$].

ce cas l'éjection progressive des grains hors de la couche initiale et, aux temps longs, la formation d'un delta analogue aux embouchures de rivières. Il n'est pas possible dans ces régimes d'observer la formation d'une zone fluide. Pour $\alpha < 60^\circ$, on observe une légère décroissance de D en fonction de α , suivi par un retour à une valeur constante ($D \sim 4$ cm). Cette évolution non-triviale ne peut être expliquée par un simple modèle analytique [1] ou numérique [8] dans lequel la matrice de grains est fixe et l'on considère l'ensemble des chemins parcourus par l'air dans le système, qui prédirait une croissance de D en fonction de α ou, en d'autres termes, en fonction de χ (quand α augmente, la gravité effective diminue, et χ augmente). Cette différence peut s'expliquer par le fait que la dynamique des grains, qui n'est pas prise en compte dans ces modèles, joue un rôle fondamental dans la formation de la zone fluide.

3 Etat transitoire : croissance de la zone fluide

3.1 Description

Nous décrivons ici des observations préliminaires de la dynamique de formation de la zone fluide et, en particulier, de la dynamique en régime transitoire de l'interface séparant la zone fluide centrale de la zone compacte à l'extérieur. Lorsque l'air traverse le système aux premiers instants, la zone fluide commence à se former principalement en surface de la couche de grains, où ces derniers ne sont pas contraints et peuvent se réarranger facilement. Elle s'élargie ensuite progressivement, tout en se propageant vers le bas (Fig. 4a). Noter que les bords de la zone fluide sont bien définis grâce au contraste dû au changement de densité entre la zone fluide centrale et la zone externe compacte.

Les bulles piégées à l'intérieur de la zone fluide agissent comme des traceurs de l'écoulement, que nous pouvons suivre au cours du temps (Fig. 4b). De part et d'autre de la remontée centrale de l'air, nous observons ainsi une recirculation qui s'organise en deux rouleaux de convection entraînant les grains vers le haut au voisinage de l'écoulement d'air central et vers le bas lorsqu'on s'éloigne du centre, avec une vitesse descendante qui décroît lorsqu'on se rapproche du bord de la zone fluide (voir les deux bulles servant de traceurs, flèches noires, Fig. 4b). Lors de cette recirculation de grains, des bulles provenant de la remontée

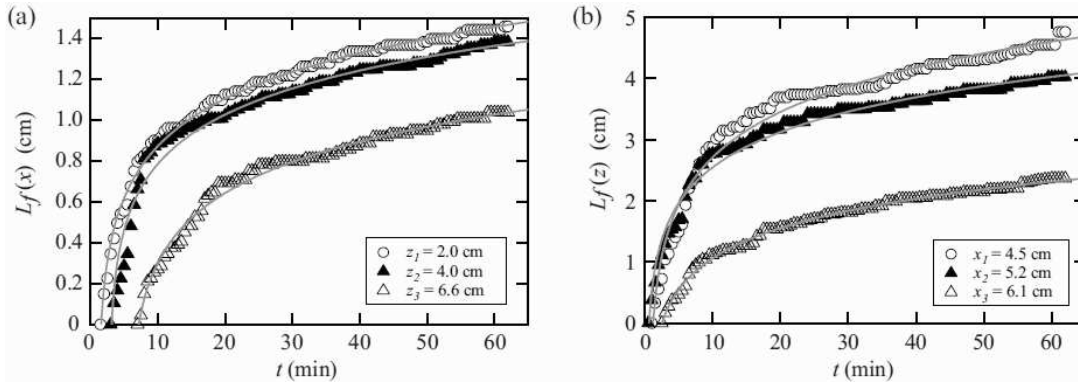


Figure 5. Evolution du contour de la zone fluidifiée. (a) selon une direction horizontale [$L_f(x)$], pour différentes positions verticales (z_1, z_2, z_3); (b) selon une direction verticale [$L_f(z)$], pour différentes positions horizontales (x_1, x_2, x_3) [lignes grises : fit logarithmique].

centrale peuvent être piégées, coalescer entre elles ou être entraînées de nouveau par l'écoulement central après avoir atteint la base de la couche. Ces observations montrent que l'arrangement des grains dans la zone fluide évolue en permanence.

3.2 Croissance de l'interface

Afin de quantifier l'évolution du contour de la zone fluidifiée (défini en section 2), nous déterminons au cours du temps la distance $L_f(x)$ (resp. $L_f(z)$) entre l'axe central de remontée de l'air (resp. la surface libre) et la position du contour de la zone fluide, pour une hauteur z (resp. une distance au centre x) fixée (Fig. 5). La position horizontale du front $L_f(x)$ augmente rapidement à temps court ($t < 10$ min), avant de ralentir (Fig. 5a). Les données peuvent être ajustées par une fonction logarithmique (lignes grises, Fig. 5a). La croissance verticale du front $L_f(z)$ est plus rapide que sa croissance horizontale (Fig. 5b, comparer les échelles avec le cas précédent) et peut aussi être ajustée par une fonction logarithmique (lignes grises, Fig. 5b).

En régime transitoire, on observe qu'entre la zone fluide et la zone compacte, on a une région bien définie dans laquelle se produisent des événements similaires au phénomène de stick-slip que l'on rencontre lorsqu'on cisaille une couche granulaire : les grains se déplacent vers le bas (flèche noire, Fig. 6a) par avalanches successives. On peut interpréter cette dynamique comme une conséquence du cisaillement induit sur les bords de la zone fluide par l'écoulement descendant de grains généré par la recirculation dans cette même zone. La *zone de stick-slip* (SSZ) évolue dans le temps : sa largeur décroît lorsque la zone fluide croît, jusqu'à disparaître complètement en régime stationnaire (Fig. 6b).

4 Discussion et conclusion

Les résultats présentés montrent que la morphologie de la zone fluide, aux temps longs, ne dépendent ni du débit d'injection, ni de la gravité effective dans le système de manière significative. L'étude de la dynamique de croissance de la zone fluidifiée révèle l'existence de trois zones : (1) une zone centrale dans laquelle deux rouleaux de convection transportent les grains autour du chemin suivi par l'air lors de sa remontée dans le milieu; (2) une zone compacte à l'extérieur de la zone fluidifiée; (3) une zone dite de '*stick-slip*' (SSZ) à l'interface entre la zone fluide et la zone compacte. La largeur de la SSZ diminue au cours du temps, jusqu'à disparaître lorsque le système atteint un état stationnaire. Ces différentes zones se retrouvent dans des processus géologiques, en particulier, lors de la formation de conduits géants de kimberlite ('Massive Volcaniclastic Kimberlite [9]) : des bulles remontent dans le conduit central fluidifié, entraînant le matériau dans un écoulement convectif; des roches sont transportées

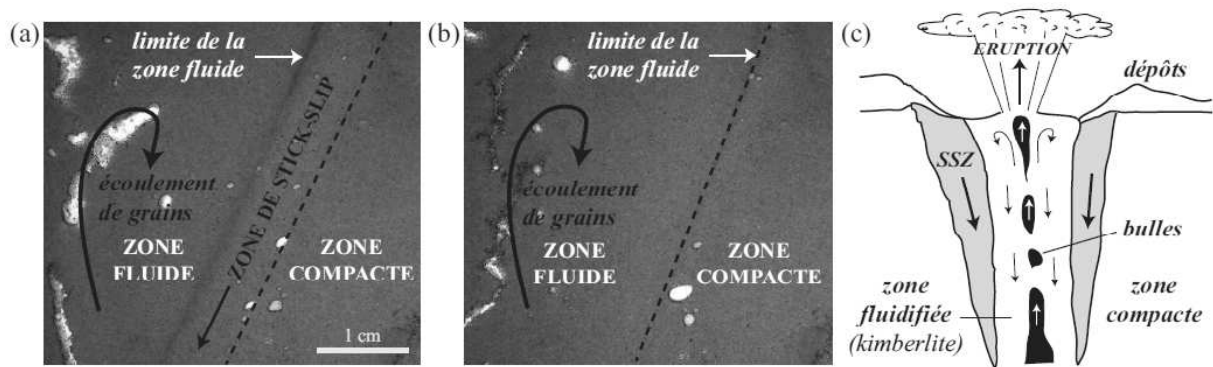


Figure 6. (a) La zone de stick-slip (SSZ), comprise entre la zone fluide et la zone compacte, est caractérisée par des événements discrets (voir texte). (b) Cette zone disparaît en régime stationnaire, lorsque la zone fluide atteint sa géométrie finale [$\Phi = 2.17$ mL/s]. (c) Représentation schématique d'un 'Massive Volcanoclastic Kimberlite' (d'après [9]) : on retrouve dans cet exemple géologique les zones décrites dans l'expérience. Les kimberlites (diamants bruts) se trouvent dans la zone fluide centrale.

par un écoulement descendant intermittent (avalanches) sur les bords de la zone fluide ; enfin, la zone loin du centre reste immobile [9,10]). La compréhension de la dynamique de la zone fluide, région où se trouvent les kimberlites, reste l'un des enjeux important, tant du point de vue économique que scientifique.

Références

1. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Venting dynamics of an immersed granular layer, *Physical Review E* **83**, 011302 (2011)
2. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, 'Venting' dans un milieu granulaire immergé, *Comptes Rendus des Rencontre du Non-Linéaire*, **14**, 175-180 (2011)
3. T. MÖRZ, E.A. KARLIK, S. KREITER & A. KOPF, An experimental setup for fluid venting in unconsolidated sediments : New insights to fluid mechanics and structures, *Sedimentary Geology*, **196**, 251-267 (2007)
4. L. NAUDTS, J. GREINERT, Y. ARTEMOV, S.E. BEAUBIEN, C. BOROWSKI & M. DE BATIST, Anomalous sea-floor backscatter patterns in methane venting areas, Dnepr paleo-delta, NW Black Sea, *Marine Geology*, **251**, 253-267 (2008)
5. R. SEMER, J. A. ADAMS & K. R. REDDY, An experimental investigation of air flow patterns in saturated soils during air sparging, *Geotechnical & Geological Engineering*, **16**, 59-75 (1998)
6. K. R. NEWMAN, M. H. CORMIER, J. K. WEISSEL, N. W. DRISCOLL, M. KASTNER, E. A. SOLOMON, G. ROBERTSON, J. C. HILL, H. SINGH, R. CAMILLI & R. EUSTICE, Active methane venting observed at giant pockmarks along the U.S. mid-Atlantic shelf break, *Earth and Planetary Science Letters*, **267**, 341-352 (2008)
7. H. SVENSEN, S. PLANKE, A. MALTHE-SØRENSEN, B. JAMTVEIT, R. MYKLEBUST, T.R. ELDEM & S. REY, Release of methane from a volcanic basin as a mechanism for initial Eocene global warming, *Nature* **429**, 542-545 (2004)
8. G. VARAS, V. VIDAL & J.-C. GÉMINARD, Morphology of air invasion in an immersed granular layer, *Physical Review E*, **83**, 061302 (2011)
9. R. J. BROWN, M. FIELD, T. GERNON, M. GILBERTSON & R. S. J. SPARKS, Problems with an in-vent column collapse model for the emplacement of massive volcanoclastic kimberlite, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **178**, 847-850 (2008)
10. T.M. GERNON, M.A. GILBERTSON, R.S.J. SPARKS & M. FIELD, Gas-fluidisation in an experimental tapered bed : Insights into processes in diverging volcanic conduits, *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **174**, 49-56 (2008)

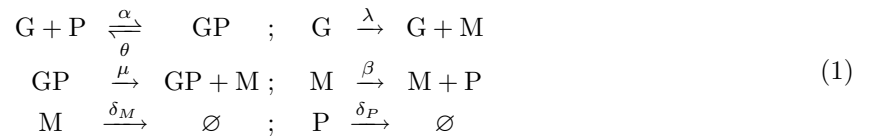
Stochastic resonance in a self-repressing gene with transcriptional memory

Jingkui Wang, Quentin Thommen, & Marc Lefranc

Université Lille 1, Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules, CNRS, UMR 8523, UFR de Physique, Bât. P5, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France
 quentin.thommen@univ-lille1.fr

Abstract. Biochemical reaction networks are subjected to large fluctuations due to small molecule numbers, yet underlie reliable biological functions. Most theoretical approaches describe them as purely deterministic or stochastic dynamical systems, depending on which point of view is favored. Here, we investigate the dynamics of a self-repressing gene using an intermediate approach based on a moment expansion of the master equation, taking into account the binary character of gene activity. We thereby obtain deterministic equations which describe how nonlinearity feeds back fluctuations into the mean-field equations, providing insight into the interplay of determinism and stochasticity. This allows us to identify a region of parameter space where fluctuations induce relatively regular oscillations.

The simplest gene regulatory network is formed by a single gene which is regulated by its own protein. In the case of negative feedback (the gene is repressed by the protein), it serves as a paradigmatic genetic oscillator, which has for example been proposed as a model for the somite clock [1]. Accordingly, its dynamics has been actively investigated throughout mathematical biology [2,3,4,5,6,7,8,9]. The self-repressing gene reaction network involves four chemical species : the free gene G , RNA M , protein P and the DNA-protein complex GP . These molecular actors interact via the following biochemical reactions :



Parameter α (resp., θ) is the DNA-protein binding (resp., unbinding) rate, δ_m (resp., δ_p) is the linear mRNA (resp., protein) degradation rate, λ (μ) is the transcription rate of unbound (resp., bound) gene and β is the translation rate.

Besides its biological significance, the self-regulating gene is interesting from a mathematical viewpoint because it combines two qualitatively different types of variables. On the one hand, proteins and RNAs may be present in high copy numbers, and can therefore be described by macroscopic variables in the large volume limit. On the other hand, the gene, which is a DNA fragment, is a single molecule. We assume that it can only be in two distinct states, bound or unbound, and therefore must be described mathematically by a binary variable. In most theoretical treatments, the difficulty of including this binary variable is circumvented by assuming that fluctuations of the gene state are fast compared to transcription, translation, and degradation. Under this approximation, the binary gene state gene is replaced by a continuous variable which is the average occupancy time.

To explore the rich dynamics induced by fluctuations associated to gene state switching, a stochastic treatment is needed. A key point is that fluctuations interact with nonlinearities and modify the mean-field behavior, because averaging does not commute with evaluating a nonlinear function (the definition of variance is the simplest example of this fact). In particular, fluctuations may destabilize a system towards an oscillatory behavior. To capture the role of fluctuations in a simple setting, we study a model where nonlinearity only occurs in the transcriptional regulation by a monomer, RNA and protein degradation being linear. The most general probabilistic description of the chemical reaction network (1) is provided via the chemical master equation. If $P_{g,m,p}(t)$ denotes the probability to find a bound (resp., unbound)

gene, represented by $g = 0$ (resp., $g = 1$), accompanied by m ARN and p protein copies at time t , its time evolution is governed by the following master equation in the limit where θ/α is large and μ is zero :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{g,m,p} = & (-1)^g [\alpha p P_{g,m,p} - \theta P_{g,m,p}] + \delta_{g,1} \lambda [P_{1,m-1,p} - P_{g,m,p}] + \beta m [P_{g,m,p-1} - P_{g,m,p}] \\ & + \delta_m [(m+1) P_{g,m+1,p} - m P_{g,m,p}] + \delta_p [(p+1) P_{g,m,p+1} - p P_{g,m,p}]. \end{aligned} \quad (2)$$

The asymptotic probability distribution satisfying (2) has been widely investigated [10,11] but gives only a static picture of the dynamics, averaged over time. To better understand the influence of stochastic fluctuations on the temporal dynamics of the self-repressing gene, we reformulate the master equation as an infinite hierarchy of coupled differential equations whose variables are the joint cumulants of random variables g , m and p . To be specific, the first-order and second-order joint cumulants of random variables x and y are the averages and the covariances

$$\langle x \rangle = \sum_{g,m,p} x P_{g,m,p}; \quad \Delta_{x,y} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle,$$

while the third-order joint cumulants are defined by

$$K_{x,y,z} = \langle xyz \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z \rangle - \langle x \rangle \Delta_{y,z} - \langle y \rangle \Delta_{x,z} - \langle z \rangle \Delta_{x,y}.$$

By rescaling parameters and joint cumulants according to

$$\begin{aligned} r_t = \frac{1}{\delta_m}; \quad r_g = 1; \quad r_m = \frac{\delta_p \theta}{\beta \alpha}; \quad r_p = \frac{\theta}{\alpha}; \quad \Theta = r_t \theta; \quad \Lambda = \lambda \frac{r_t}{r_m}; \quad \delta = \frac{\delta_p}{\delta_m}, \\ T = r_t t; \quad X = r_x \langle x \rangle; \quad \Delta_{X,Y} = r_x r_y \Delta_{x,y}; \quad K_{X,Y,Z} = r_x r_y r_z K_{x,y,z} \quad x, y, z \in \{g, m, p\}; \end{aligned} \quad (3)$$

the following normalized time evolution equations for averages and covariances are obtained :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} P &= \delta (M - P); & \frac{d}{dT} \Delta_{P,P} &= 2\delta (\Delta_{P,M} - \Delta_{P,P}); \\ \frac{d}{dT} M &= \Lambda G - M; & \frac{d}{dT} \Delta_{M,M} &= \Lambda [2\Delta_{G,M} + \mu G] - 2\Delta_{M,M}; \\ \frac{d}{dT} G &= \Theta (1 - G - GP - \Delta_{G,P}); & \frac{d}{dT} \Delta_{P,M} &= \Lambda \Delta_{G,P} - (\delta + 1) \Delta_{P,M} + \delta \Delta_{M,M}; \\ \frac{d}{dT} \Delta_{G,P} &= \delta [\Delta_{G,M} - \Delta_{G,P}] - \Theta [K_{G,P,P} + G \Delta_{P,P} + (P+1) \Delta_{G,P}]; \\ \frac{d}{dT} \Delta_{G,M} &= \Lambda G (1 - G) - \Delta_{G,M} - \Theta [K_{G,M,P} + G \Delta_{P,M} + (P+1) \Delta_{G,M}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Since G is a binary variable, $\Delta_{G,G} = G(1-G)$ and is slaved by G . Because of the nonlinearity, Eqs. (4) do not form a closed system as the time derivatives of joint cumulants involve joint cumulants of higher order. In particular, Eqs. (4) do not constrain the two third-order joint cumulants $K_{G,M,P}$ and $K_{G,P,P}$ which are unspecified. As is well known, the simplest way to truncate the hierarchy of moment equations is to set all second-order cumulants to zero [12]. This neglects all fluctuations and leads to deterministic rate equations for the time averages. Here, these equations predict that only stable stationary states can be observed in the system studied.

Incorporating fluctuations in the dynamics requires truncating the hierarchy at a higher order. As a first approximation, it would seem natural to set third-order joint cumulants to zero, which amounts to represent the stochastic variables by Gaussian probability distribution functions whose means and variances vary with time and interact with each other. In our case, however, this is not necessarily a correct approach because of the coexistence of macroscopic variables (g and p) interacting with a binary (microscopic) variable (g). In the following, we consider two limiting cases depending on the value of the gene response time.

In the first case, we assume that the unbinding and binding rates are very large compared to other dynamical rates and keep their ratio constant ($\Theta \rightarrow \infty$, θ/α constant). The gene remains bound or unbound for very short amounts of time, during which mRNA and proteins copy numbers can be considered as constant. RNA and protein levels keep a memory of many previous state switching cycles, and reach a stationary state with an expected gaussian distribution. In this case the third-order cumulants $K_{G,M,P}$

and $K_{G,P,P}$ vanish so that Equations (4) become closed. In the limit where the overall transcription rate is large ($\Lambda \gg 1$), the stationary state is given by

$$G^* \simeq \Delta_{GY}^* \simeq \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \left(1 + \frac{\delta}{2\Theta(1+\delta)} \right); \quad \Delta_{GX}^* \simeq \frac{-1}{\sqrt{\Lambda}} \left(1 + 2\frac{\delta}{\Theta(1+\delta)} \right); \quad (5a)$$

$$P^* \simeq M^* \simeq \Delta_{PP}^* \simeq \Delta_{MP}^* \simeq \Delta_{MM}^* \simeq \sqrt{\Lambda} \left(1 + \frac{\delta}{2\Theta(1+\delta)} \right). \quad (5b)$$

where we include the correction to first order in Θ^{-1} . An interesting finding is that this correction only depends on the combination $\Theta(1+\delta)/\delta$. A linear stability analysis then indicates that the stationary state is always stable, in agreement with the rate equation approximation.

Conversely, let us assume that the gene reacts infinitely slowly ($\Theta \rightarrow 0$). The dynamics is then driven by the gene jumping between two states according to a Poisson process. When the gene is active ($G_{ON} = 1$), protein and RNA levels quickly converge to high level states $M_{ON} = P_{ON} = \Lambda$. When the gene is inactive, protein and RNA levels are low ($M_{OFF} = P_{OFF} = 0$). At the end of an ON/OFF cycle, the system is always in the same state, with no memory of previous cycles. Protein temporal profiles feature a sequence of spikes, distributed in time according to a Poisson process.

In this limit case, averages, covariances and third-order joint cumulants can easily be derived thanks to the high correlation between variables. The gene is active during a time $t_{ON} = 1/(\theta\Lambda)$ and inactive during a time $t_{OFF} = 1/\theta$ so that its average activity is $G^* = t_{ON}/(t_{ON} + t_{OFF}) = 1/(1 + \Lambda)$ and $P^* = M^* = G^*\Lambda$. If the transcription rate is large ($\Lambda \gg 1$), the different variables scale according to :

$$G^* \simeq \Lambda^{-1}; \quad P^* = M^* = \Delta_{G,P}^* = \Delta_{G,M}^* \simeq 1; \quad \Delta_{P,P}^* = \Delta_{M,M}^* = \Delta_{P,M}^* = K_{G,P,P}^* = K_{G,M,P}^* \simeq \Lambda. \quad (6)$$

If we further assume that $\theta\Lambda \ll \delta, 1$, the following reduced system uncouples from the other equations, regardless of whether the third-order joint cumulants are vanishing or not :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P &= \delta(M - P); & \frac{d}{dt}\Delta_{G,P} &= \delta(\Delta_{G,M} - \Delta_{G,P}); \\ \frac{d}{dt}M &= \Lambda G - M; & \frac{d}{dt}\Delta_{G,M} &= \Lambda G(1 - G) - \Delta_{G,M}; \\ \frac{d}{dt}G &= \Theta(1 - G - GP - \Delta_{G,P}). \end{aligned} \quad (7)$$

Besides the averages, this system involves the covariances of the gene state variable with protein and mRNA levels. The stationary state of Eqs. (7) is given by $G^* = \Lambda^{-1}$, with all other variables equal to 1, thus satisfying scaling (6) exactly. The dynamical behaviour of Eqs. (7) can be studied by carrying out a stability analysis around the fixed point. It reveals that unlike with the mean-field equations, the system exhibits a Hopf bifurcation leading to oscillatory behaviour, revealing that it can be destabilized by the stochastic fluctuations. Under the approximation $\Lambda \gg 1$, the oscillation criterion is simply

$$\mathcal{H}(\Theta) = 4\Theta^2 + \Theta \left[2(1 + \delta) - \frac{\delta}{(1 + \delta)}\Lambda \right] + \delta < 0. \quad (8)$$

If the gene is infinitely slow ($\Theta \rightarrow 0$), the criterion is never satisfied because $\mathcal{H}(0) = \delta > 0$. For intermediate values of Θ , the quantity \mathcal{H} can become negative provided Λ is high enough and δ is not too large compared to 1. However this can only occur when $\Lambda\Theta \geq \delta + 1$, which a priori conflicts with the assumptions under which the reduced model (7) has been derived. We therefore carry out stochastic simulations of the chemical model (1) to assess the relevance of the two truncations of the moment equation hierarchy considered here : Eqs. (7) or Eqs. (4) with third-order cumulants set to zero.

We first study how the average value of the gene activity as a function of Θ is reproduced by the two truncations. Fig. (1a) shows how this average depends on Θ and δ due to the presence of fluctuations, an effect which is not captured by the mean-field equations. An important result is that the reduced parameter $\Theta(1 + \delta^{-1})$ which appeared in (5) is indeed the main parameter controlling the fixed point location throughout the range of Θ explored, as curves obtained for various values of θ and δ superimpose relatively well. The limit values predicted by (6) and (5) for the two extreme regimes $\Theta \rightarrow 0$ and $\Theta \rightarrow \infty$,

respectively, are indeed recovered. Fig. 1b displays the average gene activity predicted from the fixed point of Eqs. (4) with the third-order cumulants set to zero. The agreement with stochastic simulations is fairly good : the limit values in Fig. 1a and Fig. 1b are identical, the same global shape with a maximum around $\Theta = 1/(1 + \delta^{-1})$ is observed and the evolution of the maxima with δ is correctly reproduced. The main discrepancy is that the transition from the fast to the slow gene regime is more abrupt in Fig. 1b than in Fig. 1a. In contrast to this, the fixed point of Eqs. (7) does not depend on Θ nor δ , thus incorrectly predicts a constant gene activity (Fig. 1c). At this stage, the model (4) with vanishing third-order cumulants correctly captures the effect of fluctuations but not the simpler model (7).

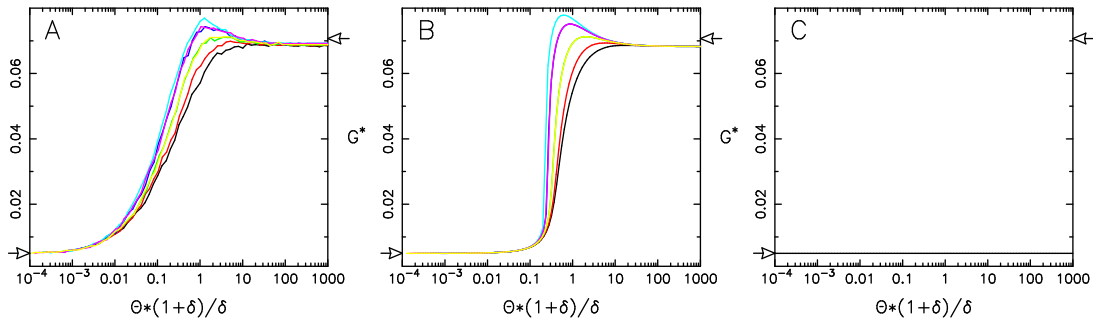


Figure 1. Average gene activities as a function of the reduced parameter $\Theta(1 + \delta^{-1})$ (a) Numerical estimation using stochastic simulations with parameter values : $\theta/\alpha = 100$, $\Lambda = 200$, $\lambda = \beta$. Each color corresponds to a given value of δ , varying from 10^2 (black) to 10 (cyan). (b) Fixed point value of gene activity in model (4) with vanishing third-order joint cumulants. (c) Fixed point value of gene activity in model (7). Arrows indicate the gene activity limiting values given by (5) for large Θ and by (6) for small Θ .

Let us now consider the dynamics of protein level fluctuations. Without feedback, gene switching is a purely Poissonian process. Protein levels follow the gene state with a characteristic time scale determined by protein and mRNA lifetimes. With feedback, the probability of switching evolves rapidly in time as protein levels increase (gene is active) or decrease (gene is inactive). This feedback may reduce the stochasticity arising from gene switching, with protein peaks occur more regularly.

The regularity of a stochastic oscillatory behavior is often quantified using a temporal autocorrelation function, which is sensitive to reproducibility both in time and in amplitude. However, temporal regularity is certainly more relevant than amplitude regularity for biological protein signals. The highly nonlinear response of many signaling cascades can protect them against fluctuations in amplitude, for example by saturating output above an input threshold. A standard technique for assessing temporal regularity is to divide the state space into two regions I and II and to study the distribution of the times where the system leaves I to enter II. It is often useful to require a minimal excursion in region II to avoid spurious transitions induced by noise. Here, we detect events where the protein level crosses successively the mean protein level P^* and the $P'^* = P^* + 0.25\sqrt{\Delta_{pp}^*}$ level before falling back below the mean protein level.

Given the list of times where the system transits from low to high protein levels, we compute the probability of detecting n transitions within a time interval of fixed duration. The probability distribution is then characterized by its variance to mean ratio (Fano factor). This method is inspired by how the temporal distribution of photons from a light source is generally characterized, with the event of interest being a photon detection. A Fano factor close to unity indicates that transition times follow a Poisson distribution. A Fano factor greater (less) than unity indicates a super-Poissonian (resp., sub-Poissonian) distribution corresponding to a bunching (resp., anti-bunching) of transition events. Transition anti-bunching can be viewed as a stochastic counterpart of deterministic oscillations.

Fig. 2 shows stochastic simulations of the chemical reaction network (1) for a slow, an intermediate and a fast gene, as well as the probability distribution of the number n of transitions within a given time window. As expected, protein spikes in the slow gene case (Fig. 2a) are slaved to the switching process, leading to a Poisson probability distribution for n (Fig. 2d) and accordingly a unity Fano factor. In the

intermediate gene response time case (Fig. 2b), protein spikes are mostly antibunched (see red circles). The probability distribution of spike number is gaussian-like (Fig. 2e), the Fano factor being around 0.35. This anti-bunching degrades in the case of a fast gene (Fig. 2c) with the Fano factor rising to 0.5. Thus, we observe a resonance effect involving the time in which the gene responds to protein variations and the time during which previous gene states are remembered, which is controlled by the protein and RNA decay rates.

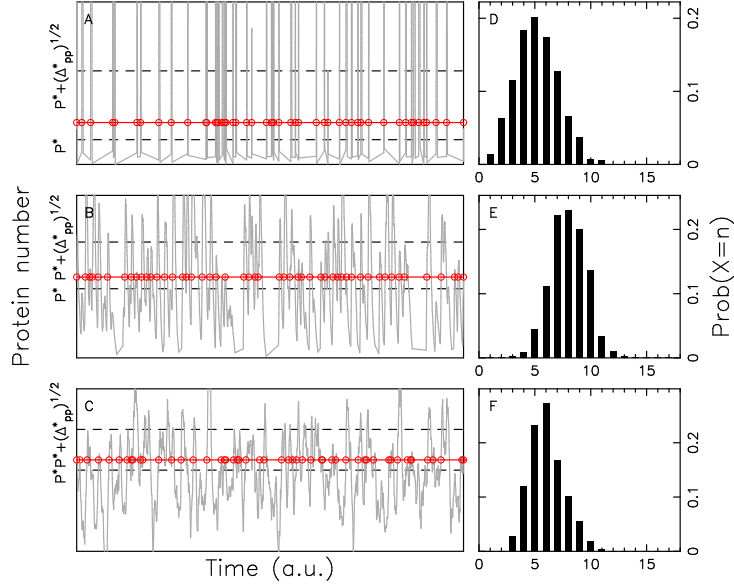


Figure 2. Dynamical behaviour. Time evolution of protein copy number for $\Lambda = 200$, $\delta = 1$ and $\theta = 5 \cdot 10^{-3}$ (a), $\theta = 0.5$ (b), $\theta = 500$ (c). The dashed lines indicate mean protein level and mean protein level plus variance. Red lines correspond to the high trigger level and spiking events are indicated by red circles. Probabilities of observing n spikes during a given time window for each of the three regimes (d)-(f).

We have studied systematically how the Fano Factor depends on the gene unbinding rate Θ and the relative protein decay rate δ in stochastic simulations of reaction network (1). As Fig. (3) shows, regularity of protein spikes is enforced when (1) the decay rates δ_p and δ_m are comparable ($\delta \sim 1$) and (2) the reduced parameter $\Theta * (1 + \delta^{-1})$ is close to unity. Quite remarkably, the parameter space region where protein spikes are more regularly spaced is extremely well approached with the region where the reduced model (7) displays deterministic oscillations. This suggests that this model captures well the dynamical interaction of mean-field variables and fluctuations, although it did not reproduce satisfactorily the average gene activities in Fig. 2. This probably indicates that the dynamically important joint cumulants are those involving the gene state variable. This is not surprising given that gene state remains binary in all limits and is thus the most stochastic variable.

Conclusion

In conclusion, we have studied the stochastic time evolution of the self-repressing gene and characterized the regularity of protein spikes using a Fano-like indicator. This allowed us to evidence a dynamical resonance phenomenon where a more regular time evolution of protein concentration is observed for certain values of the relative protein degradation rate and of the gene response time. Average quantities, on one hand, and the location of the resonance in parameter space, on the other hand, are reproduced separately by two reduced deterministic models obtained from a truncation of the moment equations

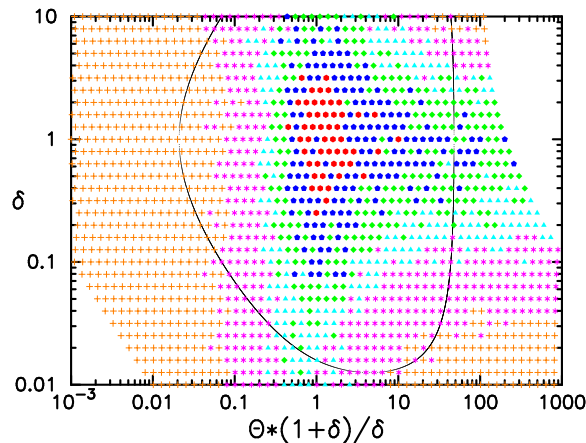


Figure 3. Fano factor. Dependency of the Fano factor F quantifying spiking regularity on δ and $\Theta * (1 + \delta^{-1})$. Stochastic simulations of network (1) have been carried out with $\Lambda = 200$; $\beta = \lambda$; $\theta/\alpha = 100$. Different values of the Fano factor F are indicated by red hexagons ($F < 0.35$), blue pentagons ($0.35 < F < 0.4$), green diamonds ($0.4 < F < 0.45$), cyan triangles ($0.45 < F < 0.5$), magenta stars ($0.5 < F < 0.7$), and orange crosses ($0.7 < F$). The black line encloses the region where the reduced model (7) oscillates.

hierarchy. It remains to combine these two models to reach a global description of how averages and fluctuations interact through nonlinearity in the self-repressing gene circuit.

Références

1. H. HIRATA, S. YOSHIURA, T. OHTSUKA, Y. BESSHO, T. HARADA *et al.*, Oscillatory expression of the bHLH factor Hes1 regulated by a negative feedback loop, *Science*, **298**, 840 (2002)
2. B. C. GOODWIN, Oscillatory behavior of enzymatic control processes, *Advances in Enzyme Regulation*, **3**, 425 (1965)
3. J. S. GRIFFITH, Mathematics of cellular control processes I. negative feedback to one gene., *Journal of Theoretical Biology*, **20**, 202 (1968)
4. R. D. BLISS, P. R. PAINTER & A. G. MARR, Role of feedback inhibition in stabilizing the classical operon, *Journal of Theoretical Biology*, **97**, 177 (1982)
5. A. GOLDBETER, A model for circadian oscillations in the Drosophila period protein (per), *Proceedings of the Royal Society of London B*, **261**, 319 (1995)
6. J.-C. LELOUP, D. GONZE & A. GOLDBETER, Limit cycle models for circadian rhythms based on transcriptional regulation in Drosophila and Neurospora, *Journal of Biological Rhythms*, **14**, 433 (1999)
7. M. H. JENSEN, K. SNEPPEN & G. TIANA, Sustained oscillations and time delays in gene expression of protein hes1, *FEBS Letters*, **541**, 176 (2003)
8. N. A. M. MONK, Oscillatory expression of hes1, p53 and nk- κ b driven by transcriptional time delays, *Current Biology*, **13**, 1409 (2003)
9. J. LEWIS, Autoinhibition with transcriptional delay : a simple mechanism for the zebrafish somitogenesis oscillator, *Current Biology*, **13**, 1398 (2003)
10. J. E. M. HORNOS, D. SCHULTZ, G. C. P. INNOCENTINI, J. WANG, A. M. WALCZAK *et al.*, Self-regulating gene : An exact solution, *Physical Review E*, **72**, 051907 (2005)
11. D. LEPZELTER, H. FENG & J. WANG, Oscillation, cooperativity, and intermediates in the self-repressing gene, *Chemical Physical Letters*, **490**, 216 (2010)
12. N. G. VAN KAMPEN, *Stochastic processes in physics and chemistry* Elsevier (2007)

Bifurcation par modulation d'enveloppe d'un cycle limite dans une dynamique non linéaire à double retard

Lionel Weicker¹, Thomas Erneux¹, Maxime Jacquot², Yanne Chembo², & Laurent Larger²

¹ Université Libre de Bruxelles, Groupe d'Optique Non linéaire Théorique, 1050 Bruxelles, Belgique.

² FEMTO-ST / dépt. Optique, UMR CNRS 6174, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cedex, France.
lweicker@ulb.ac.be

Résumé. Motivés par un montage expérimental en optique ayant permis de concevoir et démontrer un système complet de communication sécurisée par chaos [3] et fonctionnant sur un réseau optique installé au débit record de 10Gb/s [4], nous nous sommes intéressés à la route vers le chaos d'une dynamique non linéaire contrôlée par deux retards très distincts. Le système en question est un oscillateur opto-électronique soumis à deux feedbacks retardés. Le fait que ces deux retards soient très distincts induit des oscillations rapides modulées par une enveloppe carrée lentement variable. Ce système est décrit mathématiquement par deux équations différentielles à retard que nous avons étudiées à l'aide d'outils numériques et analytiques. Cette étude nous a permis de déterminer les conditions théoriques qui mènent à l'apparition de ces oscillations à enveloppe crénelée.

Abstract. Motivated by an experimental set-up in optics that enabled to design and demonstrate a full communication system secured by chaos [3] and operated over an installed optic network at a record bit rate of 10Gb/s [4], we investigated the route to chaos of a nonlinear delayed dynamic with two very different time delays. The system considered in this study is an opto-electronic oscillator subject to two delayed feedbacks. The interplay of a large and a relatively small delay is responsible of the onset of fast oscillations modulated by a slowly varying square-wave envelope. This system is described mathematically by two coupled delay-differential equations, which we analyze by using numerical and analytical tools. This study leads to the theoretical conditions needed for the onset of these crenellated oscillations.

1 Introduction

Du fait de leur complexité structurelle [1], et de leurs nombreuses applications potentielles [2], les dynamiques à retard connaissent un vif intérêt dans la communauté internationale des dynamiques non linéaires. Motivés par un montage expérimental en optique ayant permis de concevoir et démontrer un système complet de communication sécurisée par chaos [3] et fonctionnant sur un réseau optique installé au débit record de 10Gb/s [4], nous nous sommes intéressés à la route vers le chaos d'une dynamique non linéaire contrôlée par deux retards très distincts. Le long de cette route vers le chaos, une première bifurcation de Hopf est rencontrée, mais celle-ci est ensuite suivie d'une déstabilisation de l'enveloppe d'oscillation, pour donner naissance au même cycle limite que celui de la bifurcation de Hopf, mais avec une modulation d'enveloppe lente, de fréquence commensurable.

Dans un premier temps, nous présentons le dispositif expérimental : un oscillateur électro-optique à double retard et à non linéarité non locale dans le temps sur la phase optique. Ensuite nous abordons les caractéristiques temporelles des régimes dynamiques observés expérimentalement autour de cette bifurcation particulière. Par après, nous effectuons une rapide comparaison entre les traces temporelles expérimentales et numériques. Ce modèle est ensuite analysé dans les conditions d'apparition de cette modulation d'enveloppe du cycle limite de la bifurcation de Hopf, en mettant en avant un certain nombre d'approximations basées sur les échelles de temps propres à l'oscillateur opto-électronique. Une approche perturbative à échelle de temps multiples nous permet ensuite de décrire les conditions théoriques qui mènent à l'apparition des oscillations à enveloppe crénelée. La partie analytique est décrite en détail dans [9]. Dans cet article, nous proposons des simulations numériques qui renforcent et confirment la comparaison quantitative entre traces temporelles expérimentales et leur étude analytique.

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental étudié est schématisé sur la figure 1. De manière simplifiée, le fonctionnement du système est le suivant : un laser à semiconducteur émet une lumière en direction d'un modulateur de phase (PM) (point 1). La phase optique du signal injecté est ensuite modulée en fonction de la tension appliquée au modulateur. L'intensité du signal sortant du modulateur (point 2) est ajustée par un atténuateur optique variable (point 3). La lumière atténuée entre ensuite dans un interféromètre passif déséquilibré de type Mach-Zehnder. Cet interféromètre convertit de façon non linéaire la variation de phase optique, en des variations de l'intensité lumineuse. Ces dernières seront ensuite détectées par une photodiode (PD) (point 4). Le signal électrique à la sortie de la photodiode sera alors converti en tension et filtré (point 5), pour ensuite être amplifié (point 6) avant d'être réinjecté dans le PM.

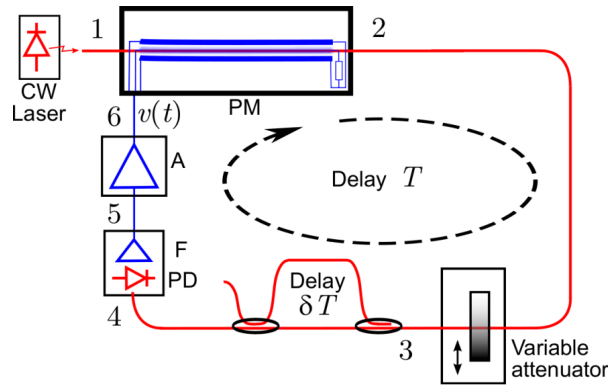


Figure 1. Schéma du dispositif expérimental

Ce système peut être modélisé mathématiquement par l'équation intégréo-différentielle à retard suivante

$$\frac{1}{\theta} \int_0^t x(\chi) d\chi + \tau \frac{dx}{dt} + x = -\frac{\beta}{2} \sin[2(x(t-T) - x(t-T-\delta T))] \quad (1)$$

où x est proportionnel à la tension $v(t)$, β représente le gain de la contre-réaction, celui-ci étant ajustable par l'atténuateur variable, T est le retard total engendré par le système, δT est le retard entre les deux bras de l'interféromètre, $f_{high} = (2\pi\tau)^{-1}$ et $f_{low} = (2\pi\theta)^{-1}$ correspondent aux fréquences de coupures de la photodiode. Il est utile de préciser ici que (1) est un cas particulier du fonctionnement de l'interféromètre, pour lequel la phase statique de la condition d'interférence vaut $\pi/4$. Les valeurs expérimentales des différents paramètres utilisés sont reportées Tab. 1.

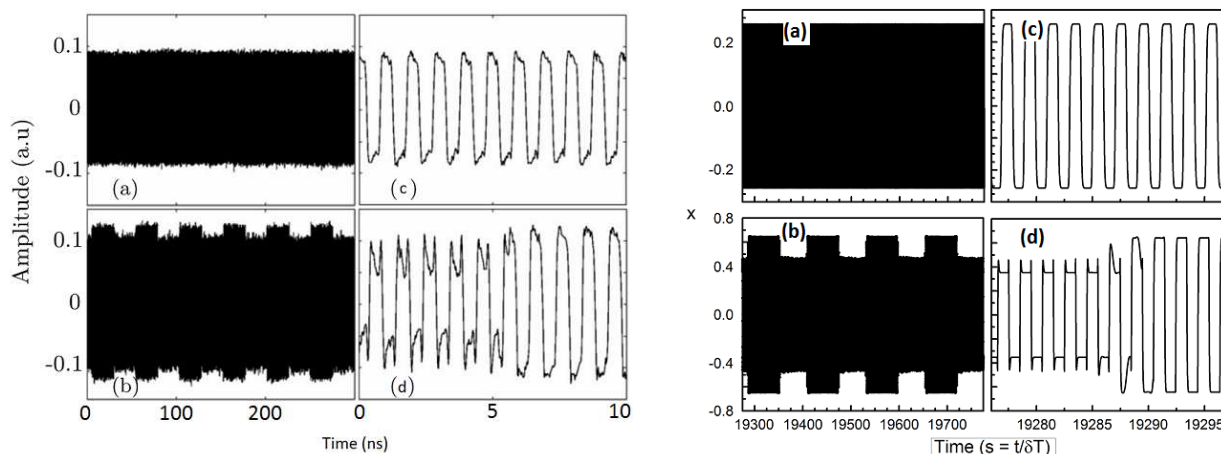
Table 1. Valeurs expérimentales des paramètres du système.

Paramètre	Valeur
β	0 - 6
τ	12.2 ps
θ	5.3 μ s
T	24.35 ns
δT	400 ps

3 Résultats expérimentaux

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à l'influence du paramètre β sur la dynamique du système. Pour de faibles valeurs de β , le système admet l'état $x = 0$ comme état stationnaire. Ensuite, lorsque β est progressivement augmenté, de l'état stationnaire émerge une bifurcation ($\beta \simeq 0.5$) vers un régime d'oscillations rapides (séries temporelles (a) et (c) de la figure 2(a)). Ces oscillations ont une période $T_1 \simeq 0.83$ ns. Nous remarquons que T_1 possède une valeur proche de $2\delta T \simeq 0.8$ ns, ce qui suggère que seul δT joue un rôle pour cette première bifurcation. En augmentant progressivement le paramètre β , nous observons un changement de comportement dans la dynamique du système. Au delà d'un certain $\beta_C \simeq 1.13$ apparaît un autre type d'oscillations : des oscillations rapides modulées par une enveloppe carrée lentement variable (séries temporelles (b) et (d) de la figure 2(a)). La période de l'enveloppe lentement variable vaut $T_2 \simeq 50$ ns, ce qui est proche de $2T \simeq 48.7$ ns alors que la période des oscillations rapides à l'intérieur de l'enveloppe est toujours T_1 . Ceci suggère que pour des valeurs supérieures à β_C , à la fois δT et T jouent un rôle actif pour une deuxième bifurcation. Pour des valeurs bien plus grandes de β , des oscillations chaotiques sont observées (régimes dynamiques utilisés en communications optiques sécurisées par chaos).

Nous allons dans un premier temps vérifier numériquement que notre modèle mathématique reproduit bien ces comportements et ensuite nous allons effectuer un traitement analytique permettant de caractériser ces deux premières bifurcations.



(a) Résultat expérimental. A gauche, une vue globale des séries temporelles. A droite, un agrandissement des figures a) et b). a) et c) Pour $\beta \simeq 0.6$: oscillations rapides de périodes $T_1 \simeq 0.83$ ns ; b) et d) Pour $\beta \simeq 1.3$: ondes crénelées avec enveloppe carrée lentement variable de période $T_2 \simeq 50$ ns et dont les oscillations rapides à l'intérieur de cette enveloppe ont une période $T_1 \simeq 0.83$ ns. Figure reprise de [3].

(b) Résultat numérique. A gauche, une vue globale des séries temporelles. A droite, un agrandissement des figures a) et b). a) et c) Pour $\beta = 0.6$: ondes obtenues au-delà de la première bifurcation. La période des oscillations est proche de 2 ; b) et d) $\beta = 1.3$: ondes crénelées dont la période de l'enveloppe lentement variable est proche de 2ζ et la période des oscillations rapides à l'intérieur de l'enveloppe est proche de 2.

Figure 2. Séries temporelles obtenues pour différentes valeurs de β .

4 Simulations numériques

Pour faciliter le traitement numérique de l'équation (1), nous redéfinissons l'échelle de temps en introduisant le nouveau temps $s \equiv t/\delta T$. Nous définissons aussi une nouvelle variable $\delta T y \equiv \int_0^t x(\chi) d\chi$,

ce qui nous mène à deux équations différentielles à retard :

$$\begin{cases} \epsilon_2 \frac{dx}{ds} = -x - \epsilon_1 y - \frac{\beta}{2} \sin[2(x_\zeta - x_{\zeta-1})] \\ \frac{dy}{ds} = x \end{cases} \quad (2)$$

où $x_\zeta = x(s - \zeta)$, $\zeta \equiv T/\delta T$, $\epsilon_1 \equiv \delta T/\theta$ et $\epsilon_2 \equiv \tau/\delta T$. En tenant compte des valeurs expérimentales des paramètres, nous déterminons $\zeta = 60.875$, $\epsilon_1 = 7.5472 \cdot 10^{-5}$ et $\epsilon_2 = 0.0305$.

Les simulations numériques ont été effectuées à l'aide du logiciel Dynamics Solver¹. La méthode utilisée est l'algorithme Dormand-Prince 8(5,3) avec une tolérance de 10^{-8} . Les résultats obtenus sont affichés sur la figure 2(b). Proche de la première bifurcation, nous obtenons des oscillations de période proche de 2 en terme d'unité de temps s . Ceci correspond à des oscillations de période $2\delta T$ en unité de t (séries temporelles a) et c) de la figure 2(b)). Pour $\beta = 1.3$, on obtient des oscillations rapides modulées par une enveloppe carrée lentement variable de période proche de $T_2 \simeq 2\zeta$ en unité de temps s . Ceci correspond à des oscillations de période proche de $2T$ en unité de temps t . La période des oscillations rapides reste inchangée et est proche de 2 (séries temporelles b) et d) de la figure 2(b)). Nous notons le bon accord entre l'expérience et le numérique notamment en comparant les figures 2(a) d) et 2(b) d). Sur ces figures, nous pouvons observer que les transitions rapides des ondes carrées sont bien reproduites quantitativement par les équations du modèle. Nous allons maintenant déterminer analytiquement les conditions théoriques qui mènent à l'apparition de ces deux premières bifurcations.

5 Traitement analytique

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux deux premières bifurcations observées expérimentalement et numériquement.

5.1 Première bifurcation

Suite aux observations expérimentales et numériques, nous pouvons anticiper une première bifurcation proche de $\beta = \beta_H = 1/2$. Cette bifurcation mène à des oscillations en ondes carrées de période proche de 2. Etant données les faibles valeurs de ϵ_1 et ϵ_2 , nous introduisons $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ dans l'équation (2), ce qui mène à

$$x(s) = -\frac{\beta}{2} \sin[2x_\zeta - 2x_{\zeta+1}]. \quad (3)$$

Cette équation définit une application qui relie $x(s)$ à x_ζ et $x_{\zeta+1}$. L'analyse de stabilité linéaire [9] suggère la relation suivante entre le paramètre $\zeta \gg 1$ et la demi période $P \sim 1$

$$\frac{\zeta}{P} = p + O(\epsilon) \quad (4)$$

où $p = 2n + 1$ est un grand nombre impair et $\epsilon \equiv p^{-1}$. Nous pouvons donc réécrire x_ζ et $x_{\zeta+1}$ comme $x_\zeta = x_{pP} + O(\epsilon)$ et $x_{\zeta+1} = x_{(p+1)P} + O(\epsilon)$. L'équation (3) devient donc

$$x_k = -\frac{\beta}{2} \sin(2x_{k-p} - 2x_{k-p-1}) \quad (5)$$

où $x_k \equiv x(s)$ et $x_{k-1} \equiv x_P$. Pour déterminer les extrema des solutions oscillantes, nous cherchons un point fixe d'ordre 2, ce qui correspond à insérer la condition $x_k = x_{k-2}$ dans l'équation (5). Ceci donne le résultat suivant

$$u_1 = -u_0, \quad (6)$$

1. J.M. AGUIRREGABIRIA, *Dynamics Solver*, Free program to simulate continuous and discrete dynamical systems available from <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>.

$$u_0 = \frac{\beta}{2} \sin(4u_0) \quad (7)$$

où $u_0 = x_k$ et $u_1 = x_{k-1}$. Le résultat des points fixes d'ordre 2 est porté en pointillés sur la figure 3 et correspond aux extrema des oscillations émergeant de la première bifurcation. Dans les unités de temps t , la période vaut

$$T_1 = 2P \delta T = 2\delta T + O(\epsilon). \quad (8)$$

Ce résultat correspond bien aux observations expérimentales et numériques.

5.2 Deuxième bifurcation

Suite aux observations expérimentales et numériques, nous cherchons à présent une solution qui dépend à la fois du temps s et d'un temps plus lent $\rho \equiv \epsilon s$. Nous allons ensuite appliquer la méthode des échelles multiples [5,6,7]. Cette méthode nous permet de traiter les deux temps comme étant indépendants ce qui implique les expressions suivantes

$$x_\zeta = x(s - \zeta, \rho - 1 + O(\epsilon)), \quad (9)$$

$$x_{\zeta+1} = x(s - \zeta - 1, \rho - 1 + O(\epsilon)). \quad (10)$$

De l'équation (2), avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, (9) et (10), nous obtenons

$$x(s, \rho) = -\frac{\beta}{2} \sin[2x(s - pP, \rho - 1) - 2x(s - (p+1)P, \rho - 1)] + O(\epsilon). \quad (11)$$

Nous procédons ensuite de la même façon que pour l'équation (5) et obtenons, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, l'application suivante

$$x_k(\rho) = -\frac{\beta}{2} \sin[2x_{k-p}(\rho - 1) - 2x_{k-p-1}(\rho - 1)]. \quad (12)$$

Comme précédemment, nous recherchons un point fixe d'ordre 2 de l'équation (12) satisfaisant la condition $x_k = x_{k-2}$. Les extrema $u_0 = x_k$ et $u_1 = x_{k+1}$ satisfont maintenant les conditions suivantes

$$u_1 = -u_0, \quad (13)$$

$$u_0(\rho) = \frac{\beta}{2} \sin[4u_0(\rho - 1)]. \quad (14)$$

Cette équation est équivalente à l'application sinus $v_{j+1} = r \sin(\pi v_j/4)$ avec $u_0(\rho) = \pi c_{j+1}/4$, $u_0(\rho - 1) = \pi v_j$, et $r = 2\beta/\pi$ [8]. L'équation (14) décrit les effets de la modulation sur les temps longs des oscillations rapides de période $2P$. Ses points fixes d'ordre 1 satisfont la condition $u_0(\rho - 1) = u_0$ et l'équation (14) se réduit alors, comme attendu, à l'équation (7). Nous savons déjà que ce résultat correspond aux extrema des oscillations de période $2P$ dans les unités de temps s . Mais l'équation (14) admet aussi d'autres points fixes (figure 3) qui mènent, au fur et à mesure que β augmente, à des oscillations chaotiques. C'est exactement ce qui a été observé de façon expérimentale et numérique.

L'enveloppe des oscillations lentes montrées sur les figures 2(a)-b) et 2(b)-b) apparaît pour $\beta = 1.3$ ce qui correspond au domaine $\beta_C \simeq 1.13 < \beta < 1.31$ de la deuxième bifurcation. Les points fixes d'ordre 2 de l'équation (14) correspondent donc aux extrema de l'enveloppe lentement variable (figure 3). La période des oscillations crénelées vaut $T_2 = 2\epsilon^{-1}$ dans les unités de temps s . Ce qui donne, en terme d'unités de temps t

$$T_2 = 2\delta T \epsilon^{-1} \simeq 2T \simeq 2p\delta T \simeq 2T. \quad (15)$$

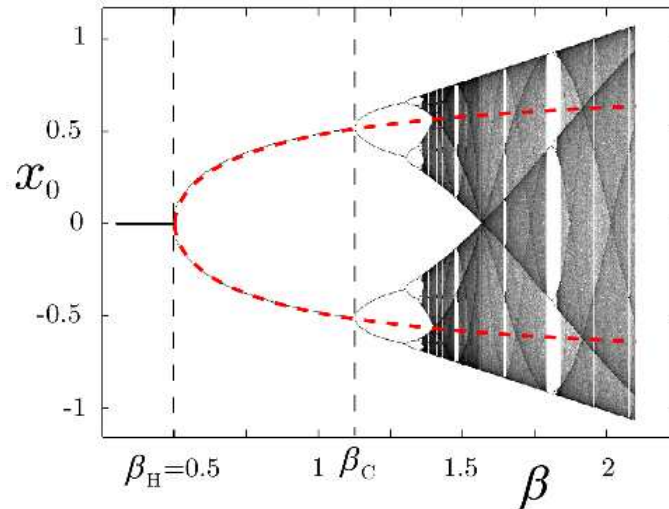


Figure 3. Diagramme de bifurcation. Les pointillés correspondent aux extrema u_0 et u_1 des solutions 2-périodiques en onde carrée. Les points gris correspondent aux extrema obtenus par le map (14).

6 Conclusion

Nous avons étudié de façon expérimentale, numérique et analytique les premières instabilités d'un oscillateur opto-électronique à double retard. Bien que le modèle utilisé soit un modèle composé de 2 équations différentielles à retard, une analyse asymptotique basée sur une nette séparation des deux retards a donné une bonne description des premières bifurcations observées lorsque le gain du feedback est augmenté. Cette analyse a mis en évidence l'importance et le rôle joué par ces deux retards.

Remerciements

Ces travaux ont été soutenus par le FRIA (LW) et le FNRS (TE), ainsi que par le projet Européen PHOCUS (FET IST FP7 No.240763, MJ, YC et LL).

Références

1. T. ERNEUX, *Applied Delay Differential Equations*, Springer (2009).
2. L. LARGER & J.M. DUDLEY, Optoelectronic chaos, *Nature, News & Views*, **465**, 41-42 (2010).
3. R. LAVROV, M. PEIL, M. JACQUOT, L. LARGER, V. UDALTSOV & J. DUDLEY, Electro-optic delay oscillator with non-local non linearity : optical phase dynamics, chaos, and synchronization, *Physical Review E*, **80**, 026207 (2009).
4. R. LAVROV, M. JACQUOT, L. LARGER, Nonlocal nonlinear electro-optic phase dynamics demonstrating 10 Gb/s chaos communications, *IEEE Journal in Quantum Electronics*, **46**, 1430-1435 (2010).
5. C.M. BENDER, S.A. ORSZAG, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Mc Graw Hill, New York (1978).
6. J. KEVORKIAN, J.D. COLE, *Multiple scale and singular perturbation methods*, Springer (1996).
7. F. VERHULST, *Methods and Applications of Singular Perturbations : Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*, Springer (2005).
8. S. H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 369, Addison-Wesley, Reading, MA (1995).
9. L. WEICKER, T. ERNEUX, M. JACQUOT, Y. CHEMBO & L. LARGER, Crenelated fast oscillatory outputs of a two-delay electro-optic oscillator, *Physical Review E*, **85**, 026206 (2012).

Index

- Aguirre Luis A., 139
Amarouchene Yacine, 167
Amon Axelle, 19
- Back Aurore, 25
Balois Thibaut, 31
Barbot Jean-Pierre, 55
Ben Amar Martine, 31
Berhanu Michael, 37, 191
Bielawski Serge, 91
Bodea Simona, 43
Bouchet Freddy, 49
Boutat-Baddas Latifa, 55
Bruand Ary, 19
Brunel Marc, 197
- Calif Rudy, 61
Chatelain Clément, 31
Chembo Yanne, 221
Ciarletta Pasquale, 31
Clément Eric, 19
Couprie Marie-Emmanuelle, 91
Crassous Jérôme, 19
Crumeyrolle Olivier, 67, 115
- Daviaud François, 133
Deike Luc, 73
Denis Fabrice, 139
Driss Boutat, 55
Dubreuil Nicolas, 151
Dubrulle Bérengère, 133
Duchemin Laurent, 79
Duchesne Alexis, 85
- Egbers Christoph, 67
Erneux Thomas, 197, 221
Evain Clément, 91
- Falcon Eric, 37, 73, 191
Fernandez Bastien, 97
Filhol Jean-Marc, 91
Firmo Davidson, 185
Fortin Jean-Yves, 179
Frénod Emmanuel, 25
Freitas Ubiratan, 103
Fresnel Émeline, 103
- Géminard Jean-Christophe, 209
Galtier Sébastien, 203
Gassa Feugaing Martial, 115
Gréhan Gérard, 115
Guéniat Florimond, 121
- Hanusse Patrick, 127
Herbert Eric, 133
- Jacquot Maxime, 221
Josserand Christophe, 79
- Kellay Hamid, 167
- Labat Marie, 91
Larger Laurent, 221
Laurie Jason, 49
Le Quéré Patrick, 109
Lebon Luc, 85
Lecas Thomas, 145
Lefranc Marc, 215
Letellier Christophe, 103, 139, 185
Limat Laurent, 85
Loulergue Alexandre, 91
- Malik S., 67
Mallet Eric, 103
Manneville Sébastien, 161
Mathelin Lionel, 121
Messager Valérie, 103
Mikikian Maxime, 145
Mira Christian, 1
Mutabazi Innocent, 67, 115, 173
- Nadji Amor, 91
Nazarenko Sergey, 203
Nguyen Van Bau, 19
- Oden Jérémy, 151
- Padilla Vincent, 133
Pastur Luc, 121
Peixinho Jorge, 157
Percier Baptiste, 161
Pirat Christophe, 85
Pocheau Alain, 43
Podvin Bérengère, 109

Prado Gaël, 167
Prigent Arnaud, 173

Rivier Nicolas, 179
Romanelli Marco, 197
Rosalie Martin, 185
Ruiz-Chavarria Gerardo, 191

Saint-Michel Brice, 133
Savaro Clément, 85, 173
Schmitt François G., 61
Sergent Anne, 109
Smieszek Marlene, 67
Szwaj Christophe, 91

Tôrres Leonardo, 185
Taberlet Nicolas, 161
Tawidian Hagop, 145
Thévenin Jérémie, 197

Thommen Quentin, 215
Trebaol Stéphane, 151
Tronko Natalia, 203
Tsimring Lev, 97
Tuckerman Laurette, 109

Vallée Olivier, 145
Vallet Marc, 197
Varas Germán, 209
Vidal Valérie, 209

Wang Jingkui, 215
Weicker Lionel, 221

Xin Shihe, 109

Yacoub Emad, 103

Zhenlan Gao, 109