

# Des vagues sur une mer d'huile : instabilité de Kelvin-Helmholtz en cellule de Hele-Shaw

Philippe Gondret

Laurent Meignin

Christian Ruyer-Quil

Marc Rabaud

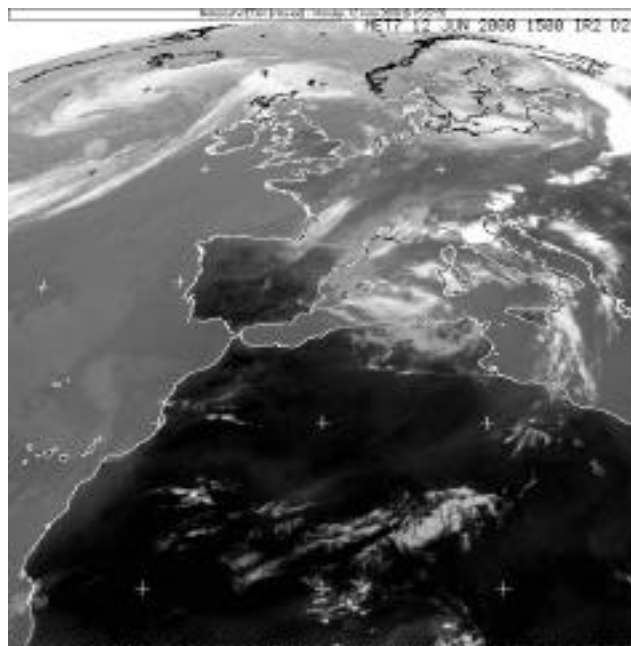
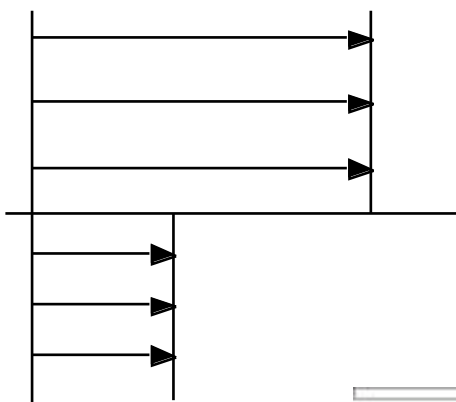
John Hinch (DAMTP, Cambridge)



Laboratoire FAST  
UMR 7608  
Orsay



# l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans l'atmosphère

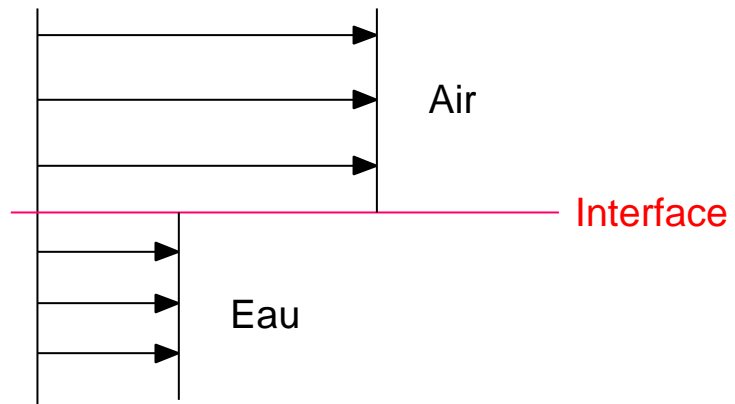


# l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans les océans ou les rivières



rencontre entre  
le Rio Negro et l'Amazone  
(lent et clair)      (rapide et boueux)

# l'instabilité de Kelvin-Helmholtz à l'interface air/eau



origine des vagues ?



# l'instabilité de Kelvin-Helmholtz historique

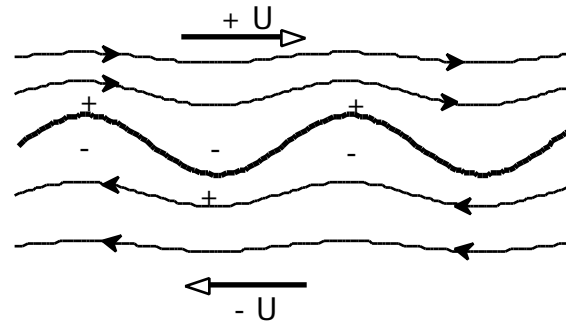
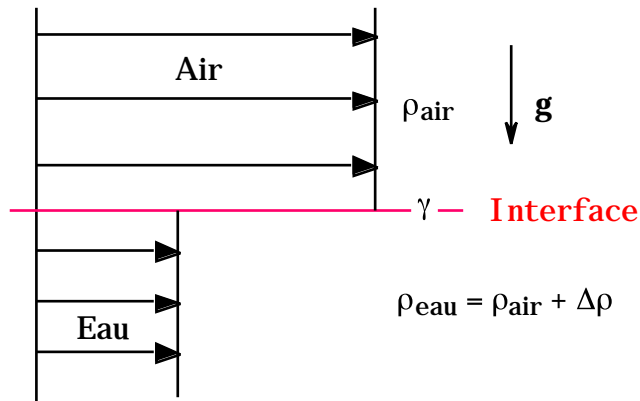


Lord Kelvin  
(1871)



H. von Helmholtz  
(1886)

naissance des vagues?  
en pratique vent > 4 Nœuds (2 m/s)



gravité et  
tension de surface  
stabilisants

inertie déstabilisante  
(effet Bernoulli)

théorie linéaire non-visqueuse  
(modes normaux)

$$U_c = \frac{\left(\rho g \gamma\right)^{1/4}}{\rho_{air}^{1/2}}$$

$$k_c = \frac{\rho g}{\gamma}^{1/2}$$

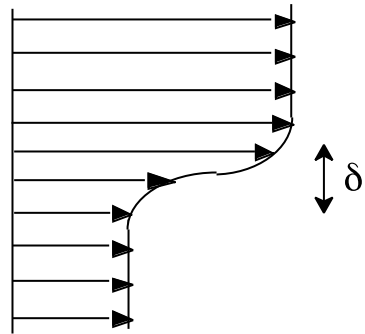
A.N. :  $U_c$  6 m/s  
(12 Nœuds 4 Beaufort)

$l_c$  2 cm

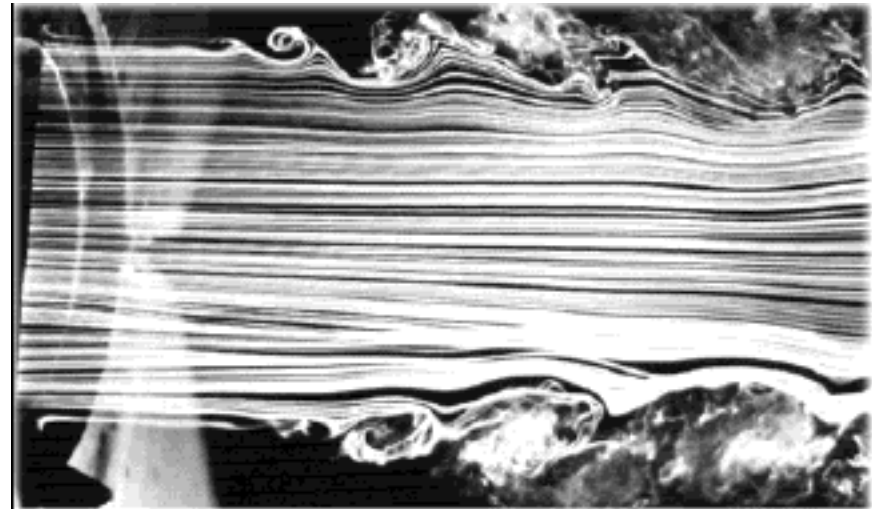
pourquoi: viscosité? profil de vitesse continu? fetch ? turbulence ? sous-critique ?

# comment étudier « proprement » l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ? (1)

## Écoulement stationnaire



$$\delta(x, t) \sim (\nu x)^{1/2}$$

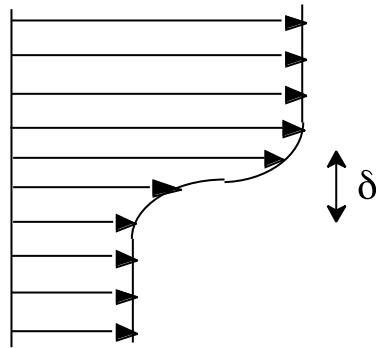


expériences de jets

Pb: écoulement inhomogène  $\delta(x)$

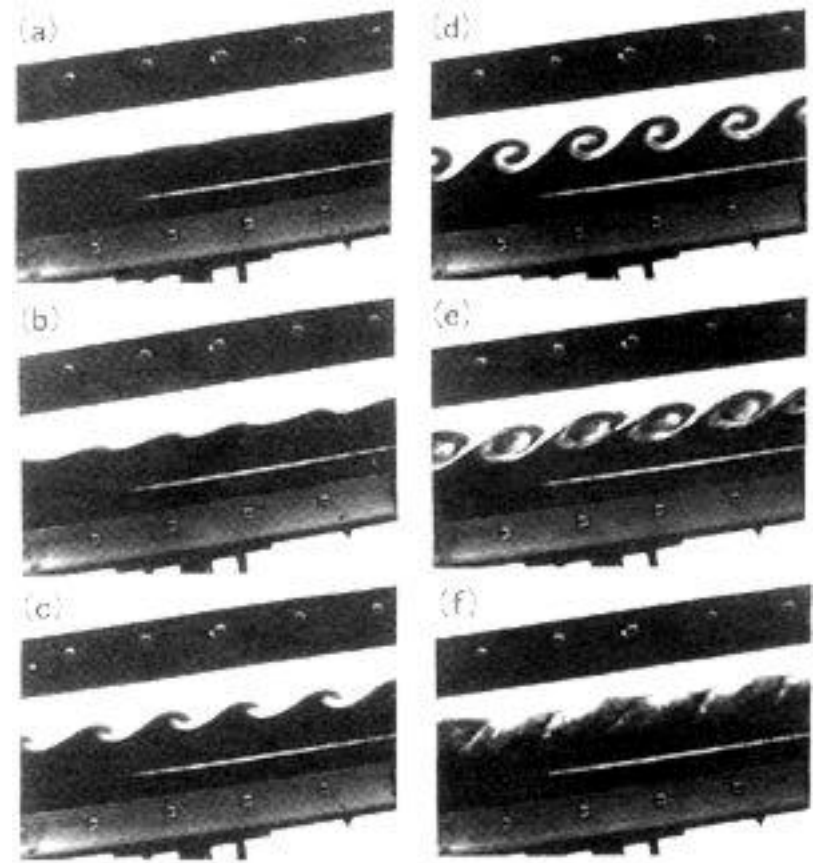
## comment étudier « proprement » l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ? (2)

Écoulement homogène spatialement



$$\delta(x,t) \sim (\nu t)^{1/2}$$

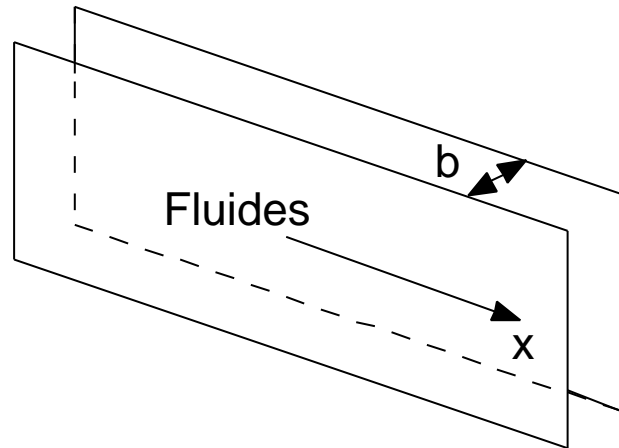
Pb: écoulement instationnaire  $\delta(t)$



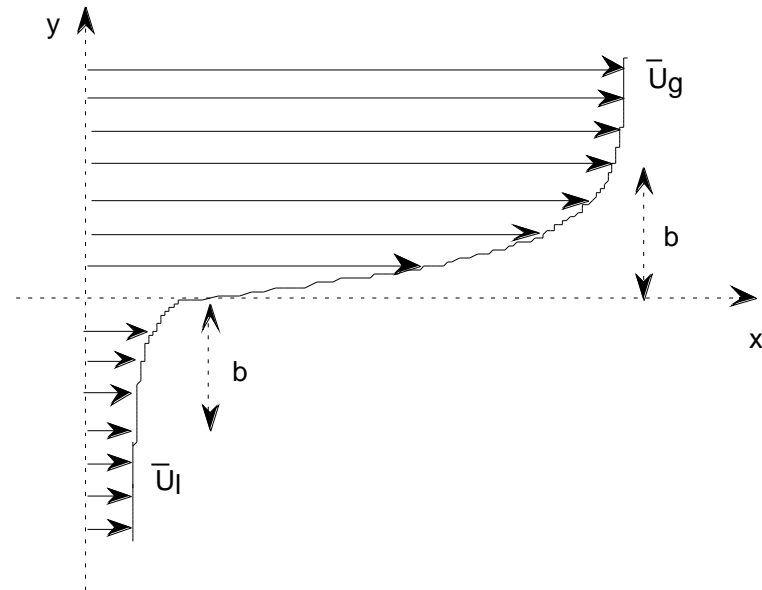
Expériences en tube inclinable  
Thorpe (1969), Pouliquen (1994)

# comment étudier « proprement » l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ? (2)

en cellule de Hele-Shaw



2 fluides en écoulement parallèle



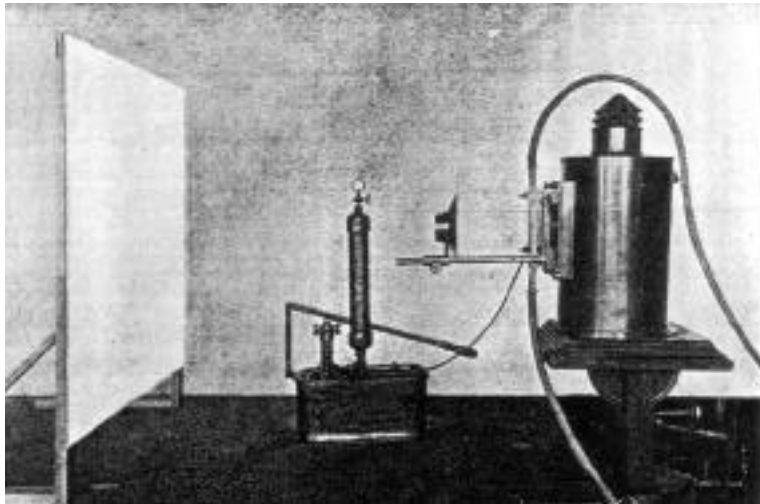
écoulement stationnaire et homogène:  $\delta = \text{cte} \sim b$



## la cellule de Hele-Shaw

d'abord utilisée pour visualiser l'écoulement autour d'obstacles

"The flow of water" *Nature* (1898)  
controverse avec Osborne Reynolds

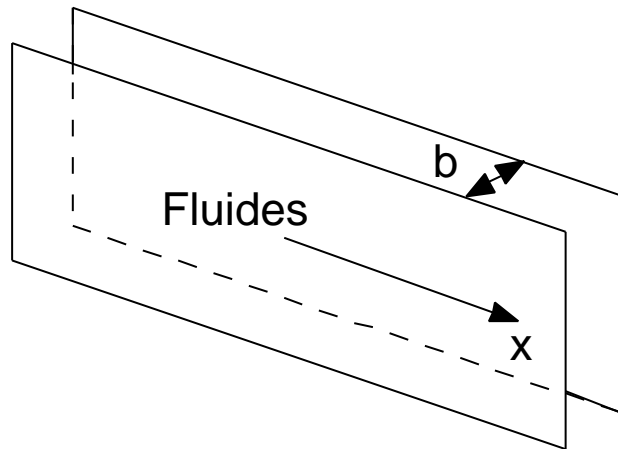


Henry Selby Hele-Shaw  
(1854-1941)

professeur à l'université de Bristol  
Fellow of the Royal Society

paradoxe : écoulement visqueux  
simulant les écoulements potentiels,  
i.e. de fluides parfaits (non visqueux)

# l'écoulement dans une cellule de Hele-Shaw



Henri Philibert Gaspard Darcy  
(1803-1858)

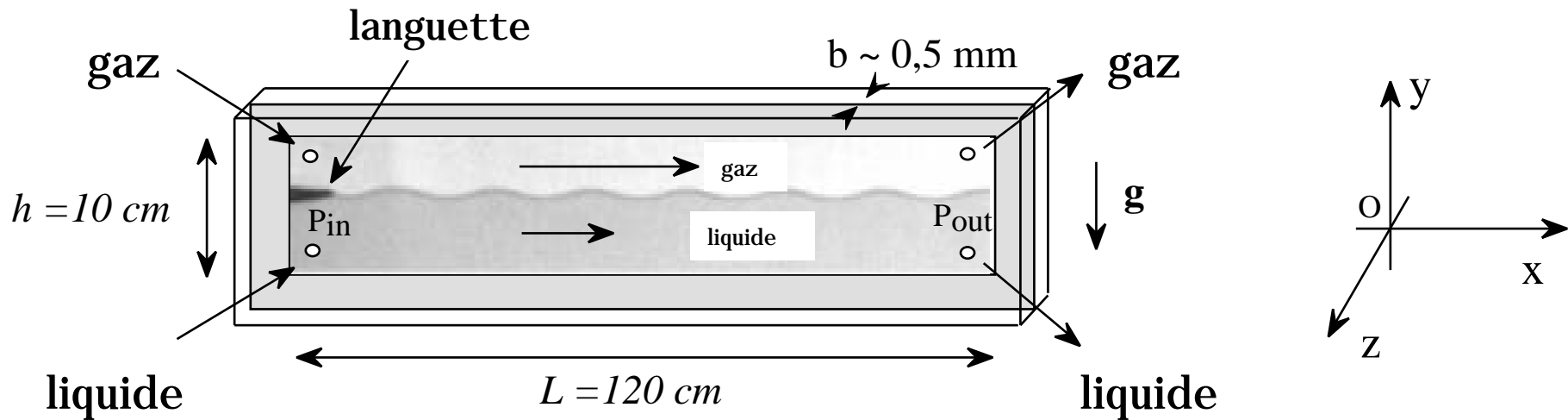
Ingénieur des Ponts & Chaussées  
Les fontaines publiques de la ville de Dijon  
(1856)

Recherches expérimentales sur le  
mouvement de l'eau dans les tuyaux  
(1857)

Loi de Darcy : 
$$\vec{U} = -\frac{b^2}{12\eta} \vec{P}$$

(pour les milieux poreux 
$$\vec{U} = -\frac{K}{\eta} \vec{P}$$
 )

## notre dispositif expérimental



air & huile silicone  $\frac{\eta_l}{\eta_g}$  1000  $\frac{U_g}{U_l}$  1000  $\Delta U \sim U_g$  paramètre de contrôle

$Re_b = \frac{\rho U b}{\eta} \sim$  100 pour l'air ( $U_g \sim 5$  m/s)  
 0,1 pour l'huile ( $U_g \sim 5$  mm/s) écoulement // laminaire  
( $Re < 900$ )

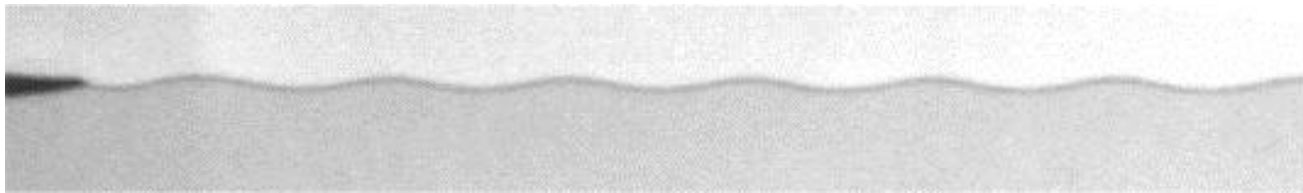
$Re_k = \frac{\rho U b^2 k}{\eta} \sim$  20 pour l'air théorie lubrification pour l'instabilité

# étude expérimentale du seuil de l'instabilité

- réponse à une perturbation périodique localisée ( $f, A_0$ )



Au-dessous du seuil  
( $U_g < U_{gc}$ )



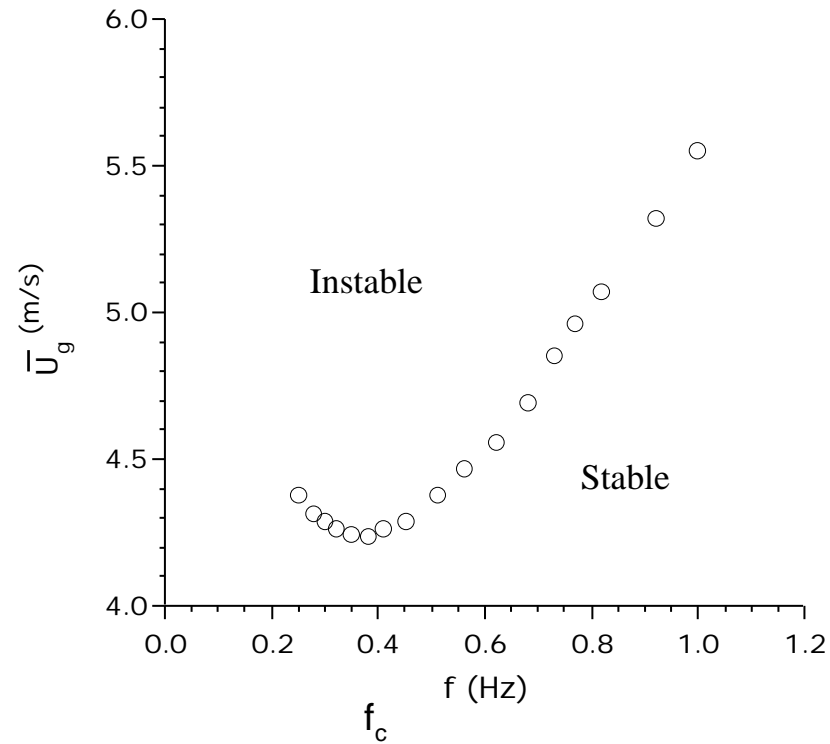
Au seuil  
( $U_g = U_{gc}$ )



Au-dessus du seuil  
( $U_g > U_{gc}$ )

ondes propagatives (vitesse  $c$ )

# courbe de stabilité marginale



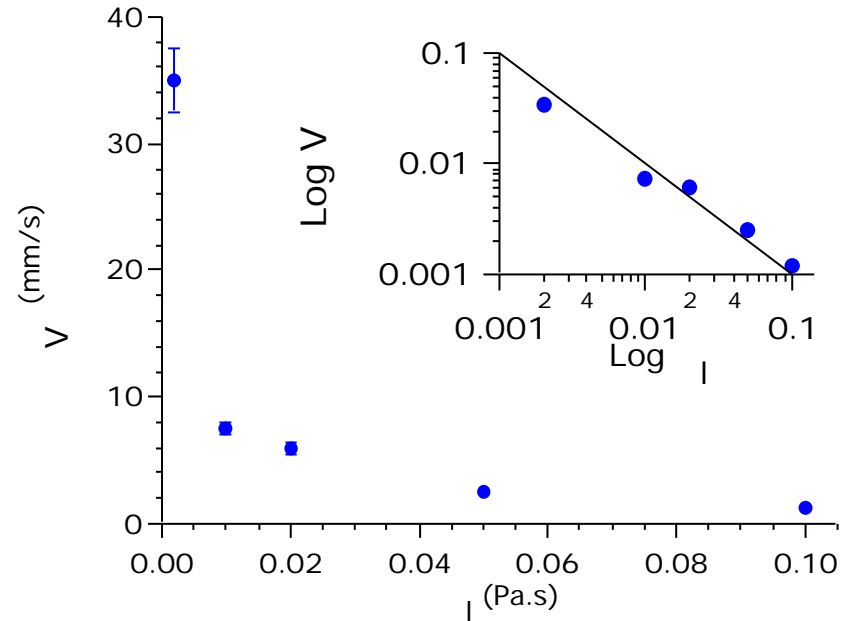
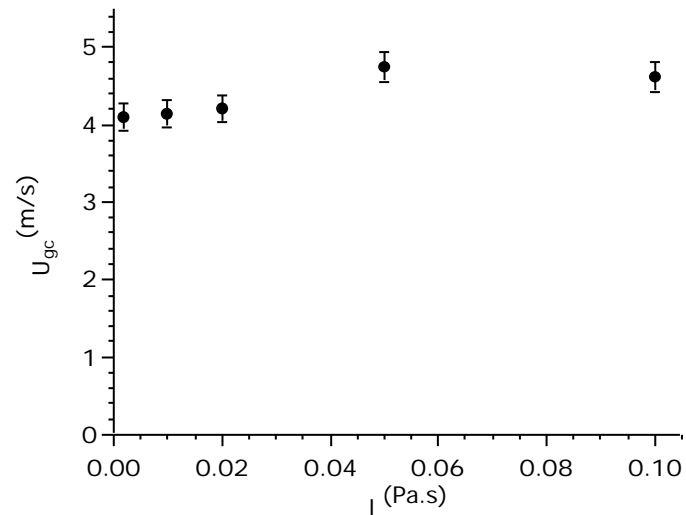
**Minimum**

$U_{gc} = 4,2$  m/s seuil de l'instabilité

$f_c = 0,4$  Hz fréquence la plus instable

( $\lambda_c = 1$  cm longueur d'onde la plus instable)

# effet de la viscosité de l'huile



- seuil  $U_{gc}$  évolue peu avec  $\eta_l$ :  $U_{gc} \approx 4,5$  m/s
- vitesse de phase  $c$  varie avec  $\eta_l$ :  $c \sim 1/\eta_l$
- longueur d'onde au seuil constante :  $\lambda_c \sim 1$  cm

## analyse théorique

équation Navier - Stokes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{u}$$

en moyennant dans l'épaisseur  $b$  avec profil de vitesse parabolique :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{6}{5} (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{12\eta}{b^2 \rho} \vec{U}$$

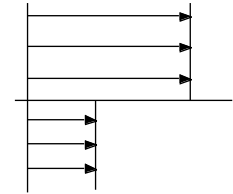
méthodes perturbatives et fonction polynomiales :

$$\frac{6}{5} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{54}{35} (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{12\eta}{b^2 \rho} \vec{U} \quad (\text{1er ordre en Re})$$

(Ruyer-Quil, 2001)

# analyse linéaire de stabilité

perturbations  $\exp[i(kx - \omega t)]$  + conditions aux limites



relation de dispersion

$$\omega^2 - \frac{16}{7} \frac{(\rho_g U_g + \rho_l U_l)k}{\rho_g + \rho_l} - i \frac{10(\eta_g + \eta_l)}{(\rho_g + \rho_l)b^2} \omega + \frac{9}{7} \frac{(\rho_g U_g^2 + \rho_l U_l^2)k^2}{\rho_g + \rho_l} - \frac{5}{6} \frac{\rho_g k + \gamma (\pi/4)k^3}{\rho_g + \rho_l} - i \frac{10(\eta_g U_g + \eta_l U_l)k}{(\rho_g + \rho_l)b^2} = 0$$

seuil de l'instabilité

$$U_{gc} = \frac{35}{54} \frac{\left( \frac{\rho_g \gamma \pi}{4} \right)^{1/4}}{\rho_g^{1/2}}$$

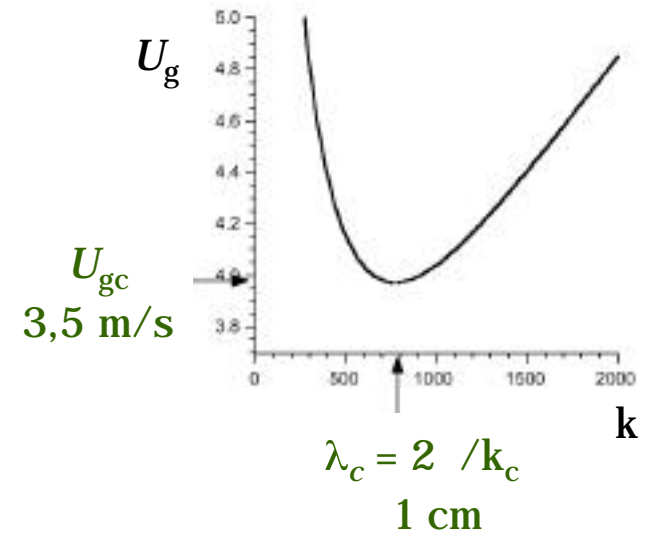
longueur d'onde

$$\lambda_c = 2\pi \frac{\pi \gamma}{4 \rho_g}$$

vitesse des ondes

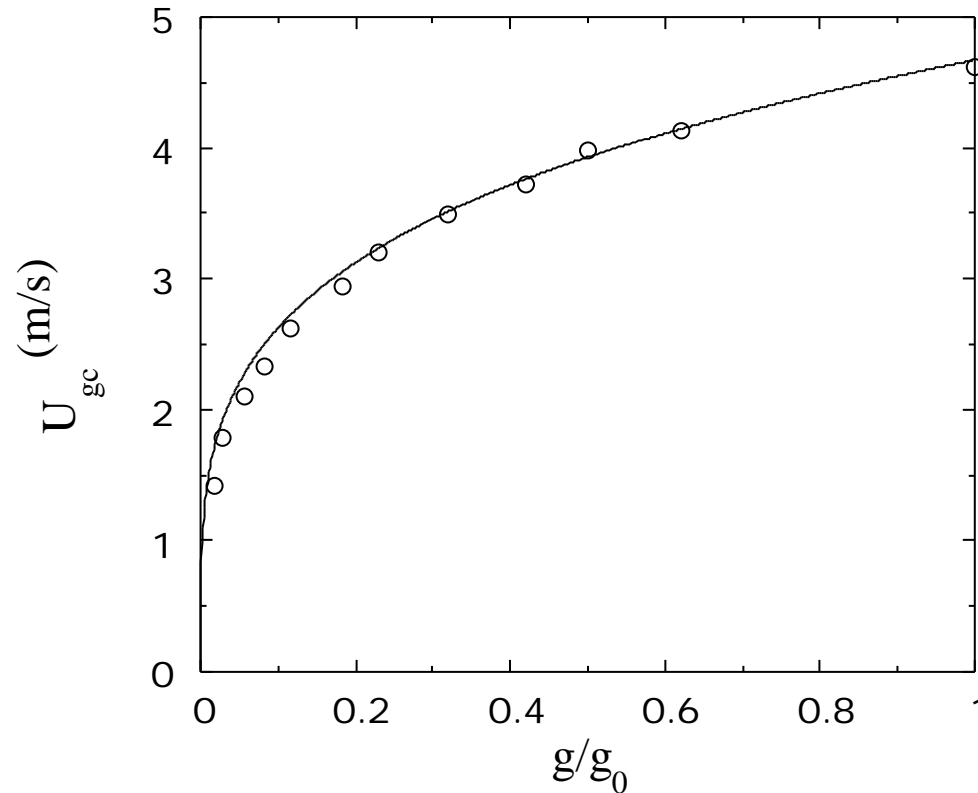
$$c = 2 \frac{\eta_g}{\eta_l} U_g = 2U_l$$

$$c \sim 1/\eta_l$$





retour à l'expérience :  
 effet de la gravité sur le seuil  
 (cellule inclinée => gravité réduite)  
 $g_{\text{eff}} = g \sin$



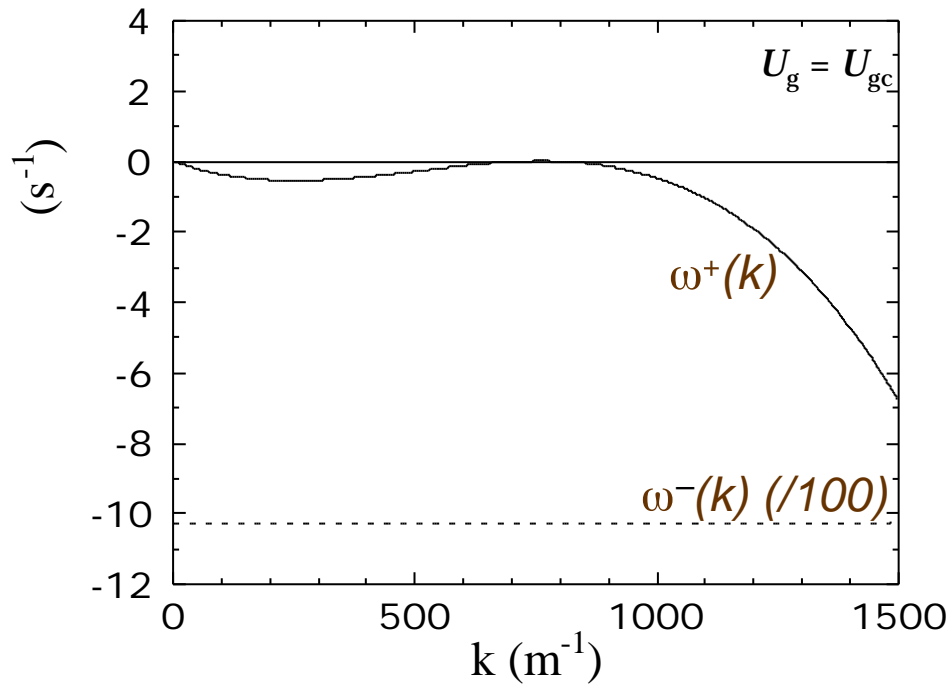
$$U_{gc} = \frac{35}{54} \frac{1/2 \left( \frac{\rho g \gamma \pi}{4} \right)^{1/4}}{\rho_g^{1/2}}$$

$U_{gc} \sim g^{1/4}$  vérifié !

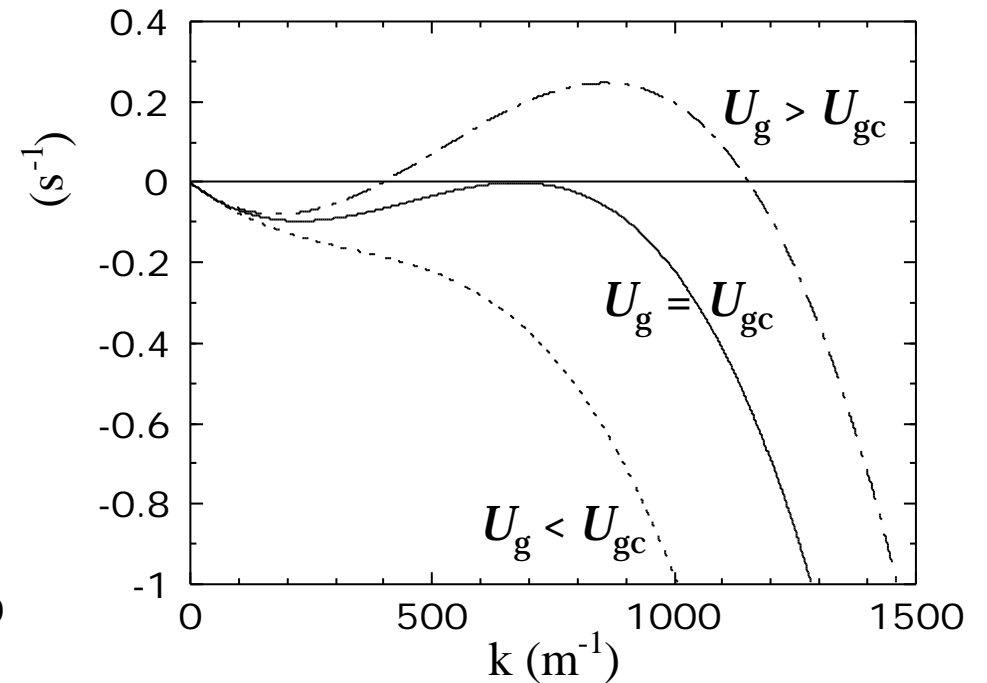
# analyse linéaire de stabilité temporelle

perturbations  $\exp[i(kx - \omega t)]$  avec  $\left\{ \begin{array}{l} k \text{ réel} \\ \omega = \omega_r + i \omega_i \text{ complexe} \end{array} \right.$

2 branches  $\omega(k)$



branche instable  $\omega^+(k)$



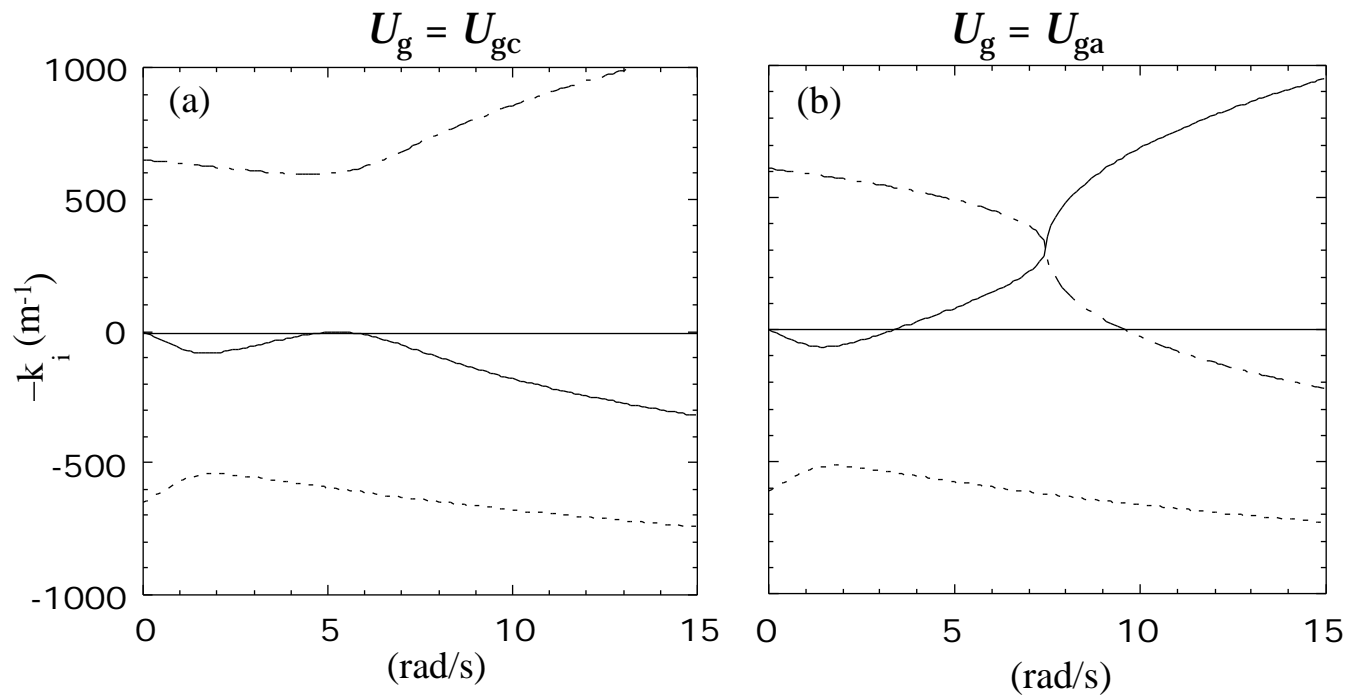
$U_{gc} = 3,50 \text{ m/s}$

$\lambda_c = 0,9 \text{ cm}$

# analyse linéaire de stabilité spatiale

perturbations  $\exp[i(kx - \omega t)]$  avec  $\begin{cases} \text{réel} \\ k = k_r + i k_i \text{ complexe} \end{cases}$

3 branches  $k(\omega)$



seuil stable/instable

$$U_{gc} = 3,5 \text{ m/s}$$

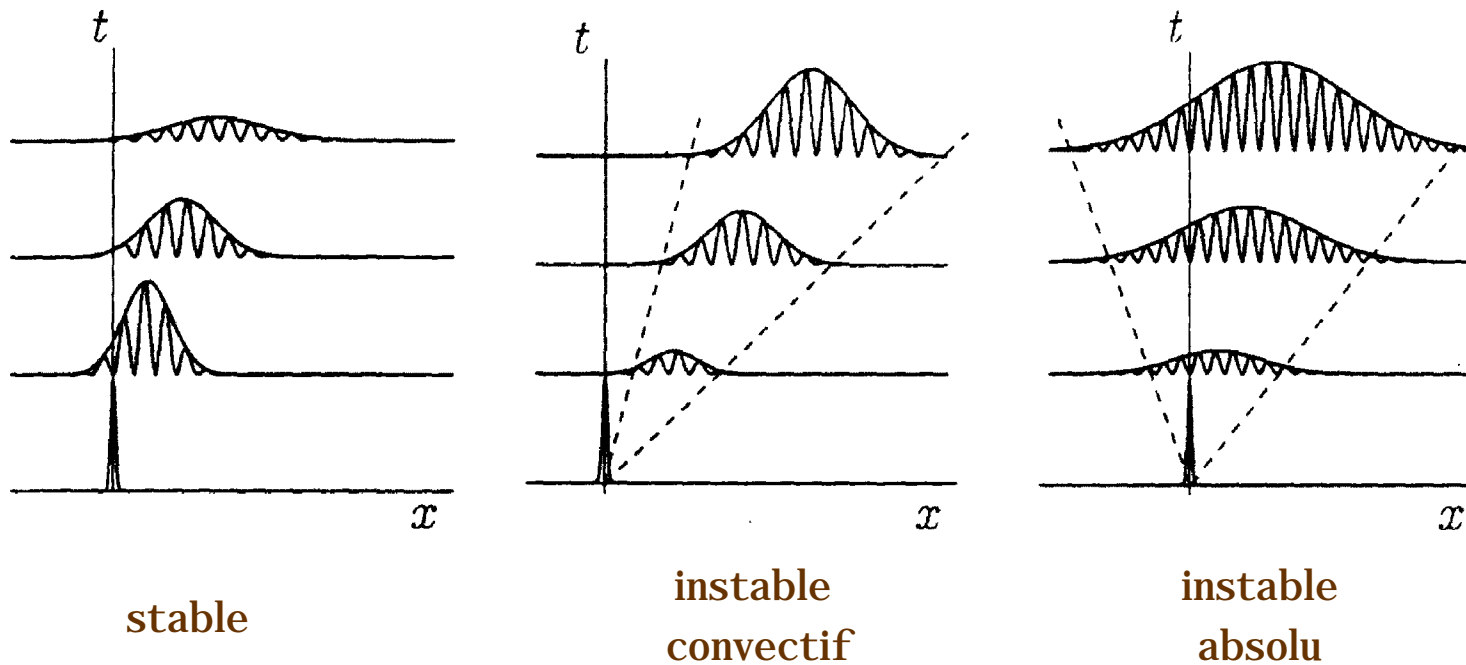
seuil convectif/absolu

$$U_{ga} = 3,7 \text{ m/s}$$

# transition convectif/absolu

propriété des *écoulements ouverts*

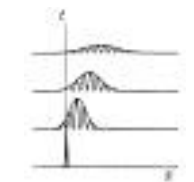
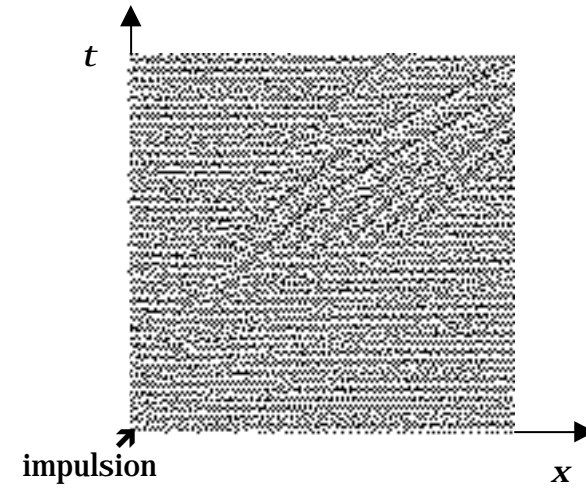
Huerre & Monkewitz (1990)



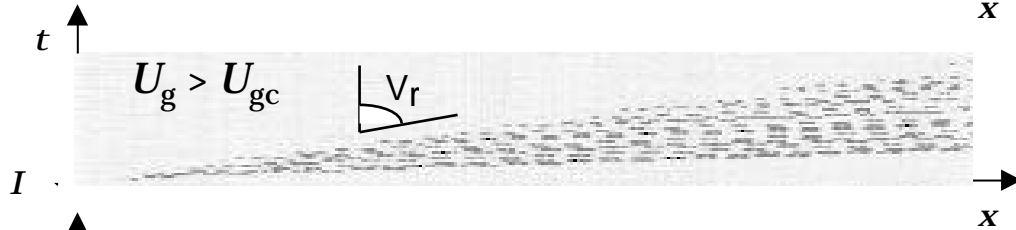
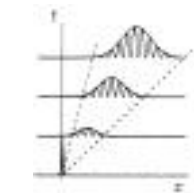
observe-t-on expérimentalement la transition  
d'un régime instable convectif à absolu ?

# réponse expérimentale à une impulsion

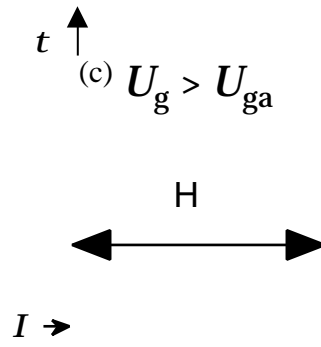
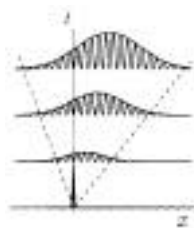
## création d'un paquet d'ondes



amortissement  
**stable**



amplification mais advection  
**instable convectif**

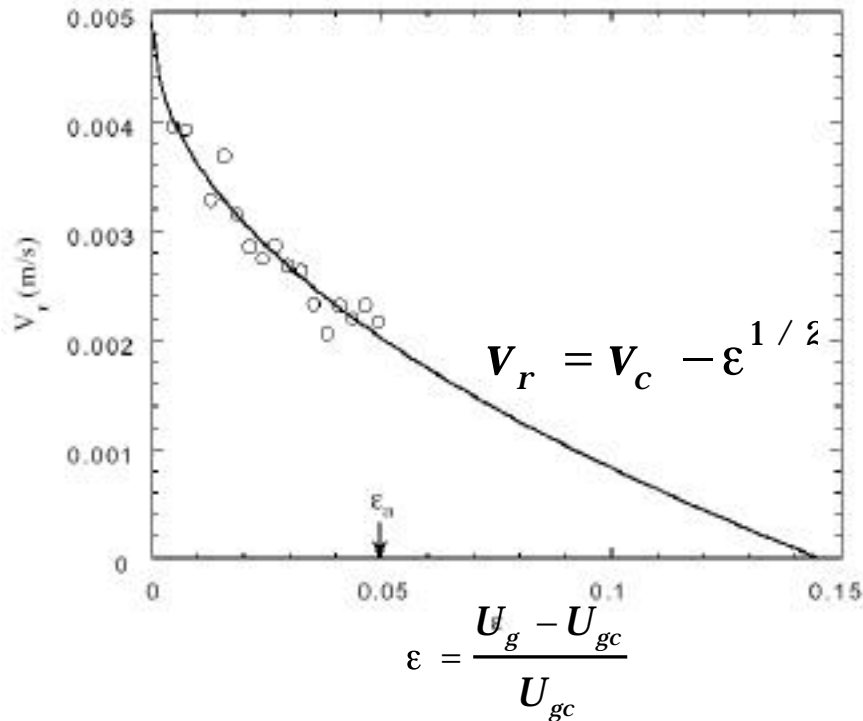


amplification prépondérante  
**instable absolu**

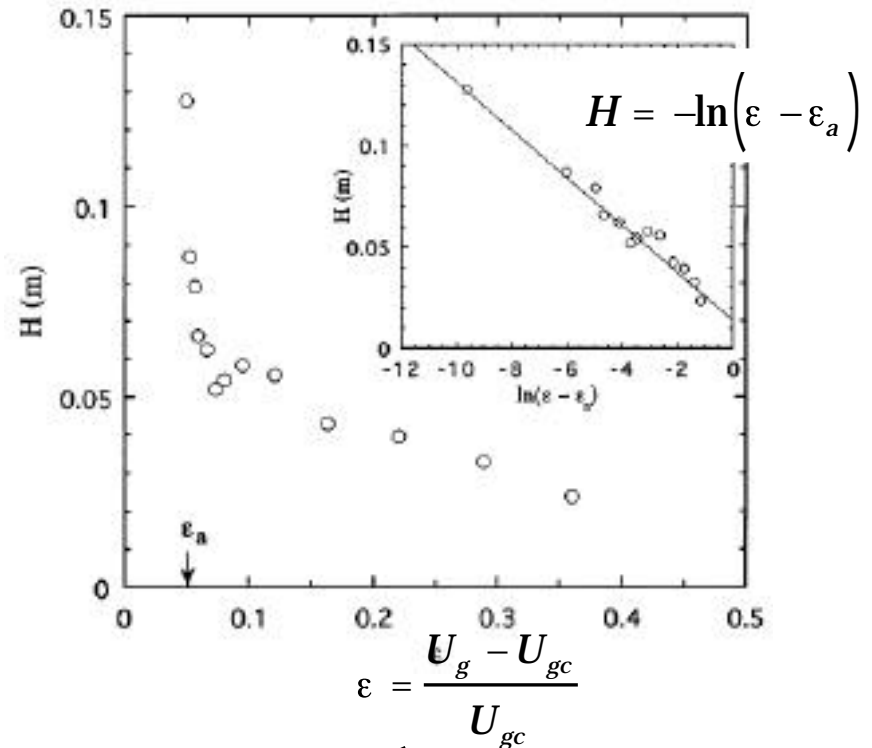
→  
x

# détermination expérimentale précise de la transition C/A

Vitesse du front arrière  $V_r$  du paquet d'ondes dans le régime instable convectif



“Healing length”  $H$  dans le régime instable absolu



~~$H = (\varepsilon - \varepsilon_a)^{-1/2}$~~

si C/A linéaire

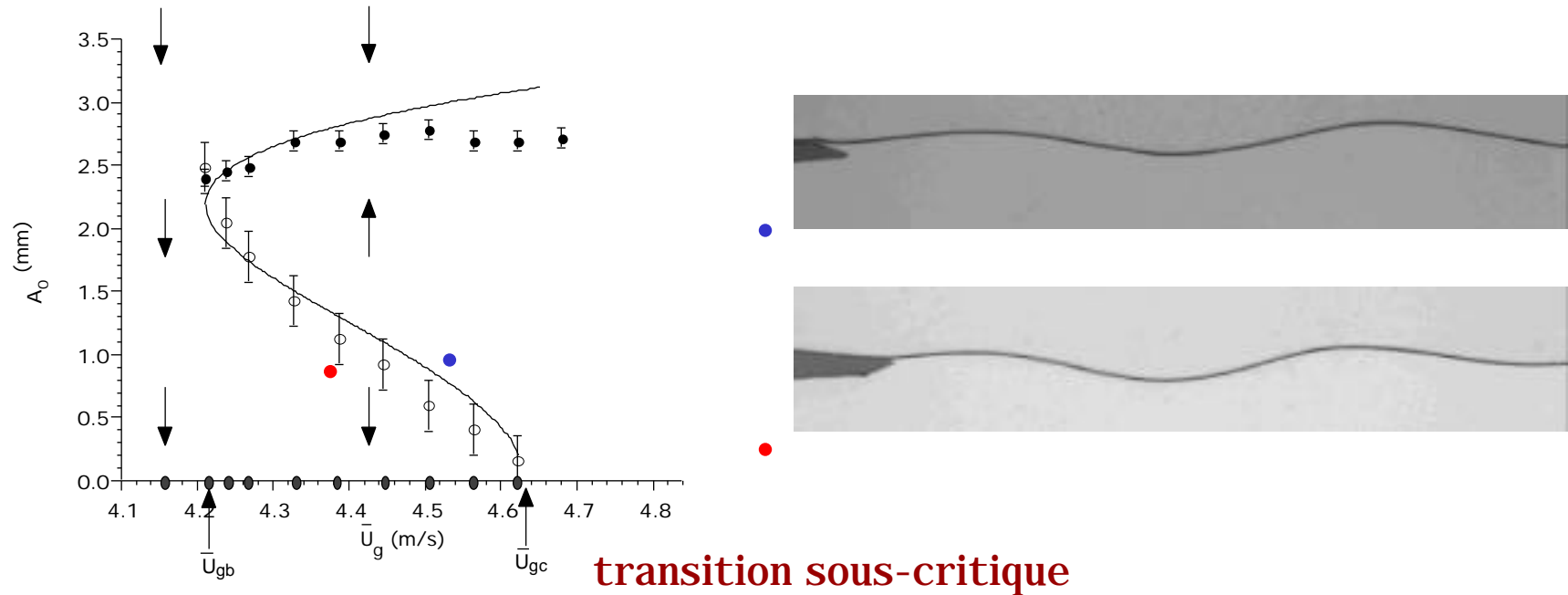
ex : Taylor-Couette + écoult  
Rayleigh-Bénard

transition C/A non-linéaire

cf Couairon & Chomaz (1997)

la transition stable/instable convectif est aussi non-linéaire !

le seuil de l'instabilité dépend de l'amplitude du bruit



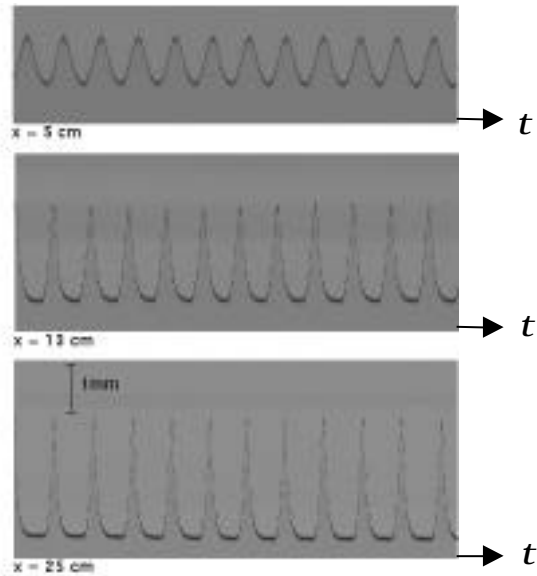
$$\text{CGL5} \quad \tau_0 \frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x} = \varepsilon (\mathbb{1} + ic_0) A + \xi_0^2 (\mathbb{1} + ic_1) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + g (\mathbb{1} + ic_2) |A|^2 A - h |A|^4 A$$

détermination expérimentale des 8 coefficients

$$v_g = 2 \frac{\eta_g}{\eta_l} U_{gc} = 6.1 \text{ mm/s} \quad \xi_0 = \frac{1}{2k_c} = 0.65 \text{ mm} \quad \tau_0 = \frac{70}{9} \frac{1}{\text{Re}_c \omega_c} = 0.07 \quad ; \quad c_0 = \frac{70}{9} \frac{1}{\text{Re}_c} = -0.33 \quad c_1 = 0$$

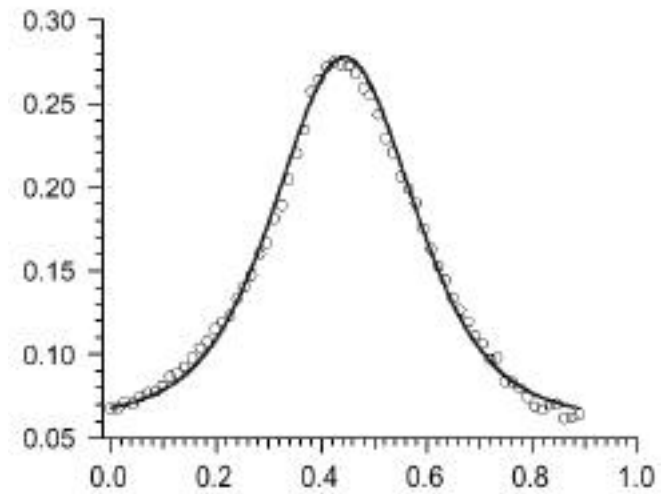
$$g = 3.8 \times 10^{-2} \text{ mm}^{-2} \quad h = 3.9 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-4} \quad c_2 = 0.65$$

## forme non-linéaire des ondes



évolution rapide vers une forme saturée non-linéaire :

ondes cnoïdales  
(ondes solitaires à 0)

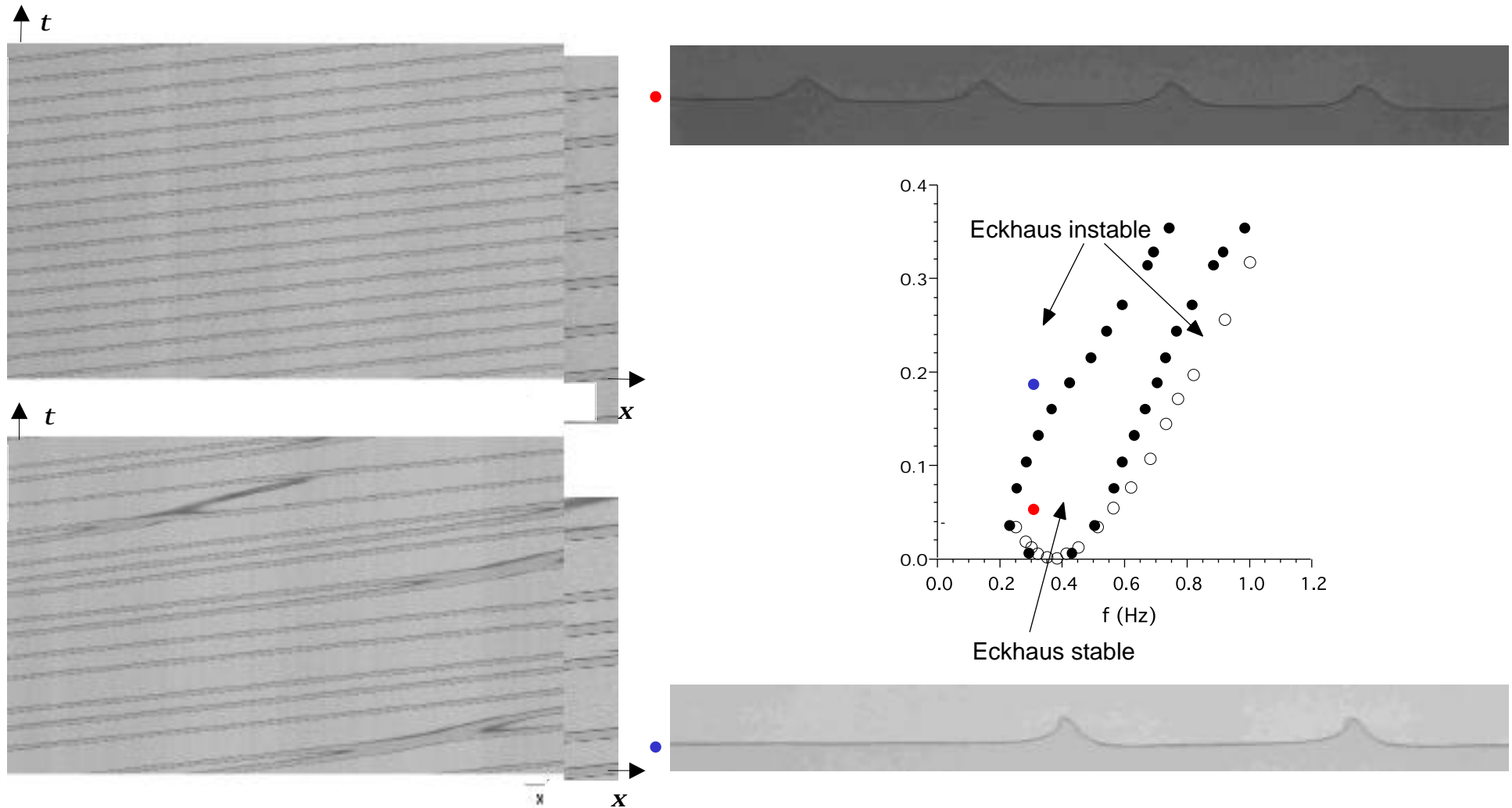


soliton type KdV



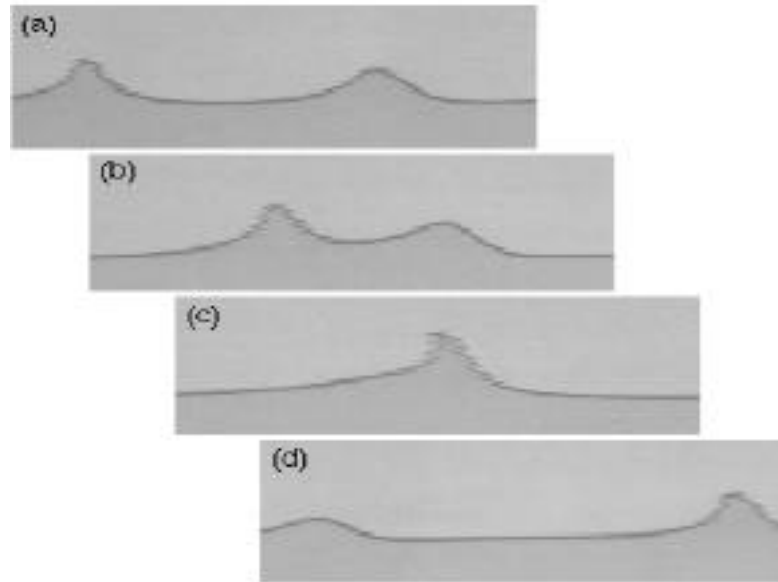
# dynamique non-linéaire des ondes

interactions par instabilité secondaire du train d'ondes



# détail de l'interaction

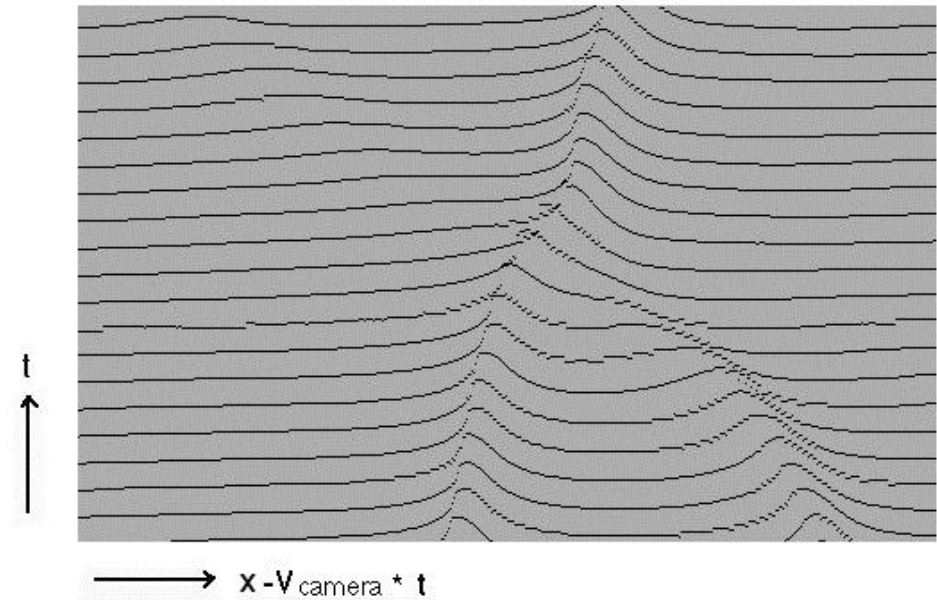
- référentiel du laboratoire



Déplacement des fluides

interaction type saute-mouton :  
« simple » échange de position

- référentiel des ondes



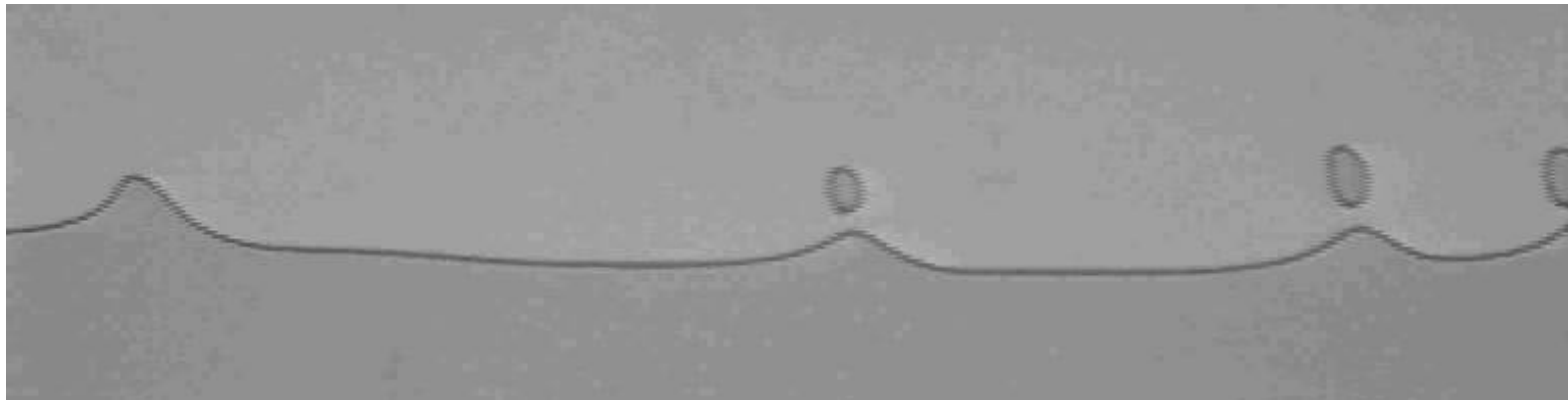
déphasage inversement proportionnel  
à l'amplitude de l'onde

## régime de fort cisaillement

interactions nombreuses, émission de gouttes



milieu diphasique



# conclusions

- écoulement parallèle ouvert (homogène spatialement)
  - instabilité sous-critique
  - transition convectif/absolu non-linéaire
- 
- modélisation du régime linéaire : Kelvin-Helmholtz-Darcy
  - modélisation du régime non-linéaire ?
- effets 3D, forme courbe de l'interface, dissipation de la ligne de contact,  
couplage mode critique  $k_c$  et mode neutre  $k = 0$

# perspectives

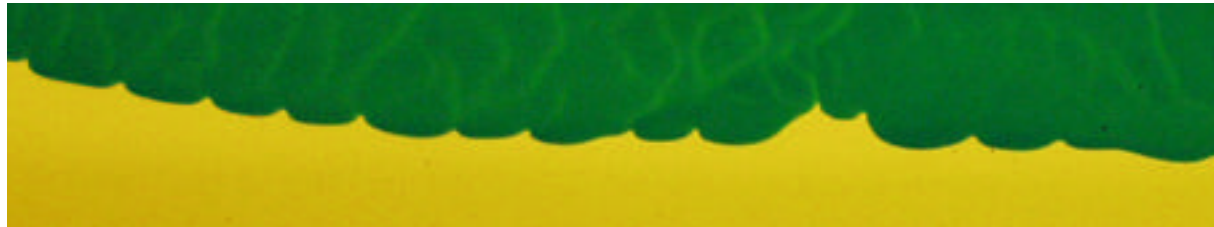
instabilité de Kelvin-Helmholtz à deux liquides

bifurcation supercritique ?

prédictions de Weizman (1979)

-/ + < 0.283 : sous-critique

-/ + > 0.283 : super-critique



Huile silicone - éthanol

# références

P. Gondret, N. Rakotomala, M. Rabaud, D. Salin & P. Watzky

Viscous parallel flows in finite aspect ratio Hele-Shaw cell: analytical and numerical results

Phys. Fluids **9**, 1841 (1997)

P. Gondret & M. Rabaud

Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell

Phys. Fluids **9**, 3267 (1997)

P. Gondret, P. Ern, L. Meignin & M. Rabaud

Experimental evidence of a non-linear transition from convective to absolute instability

Phys. Rev. Lett. **82**, 1442 (1999)

L. Meignin, P. Gondret, P. Ern & M. Rabaud

Gap-size effect for the Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell

Phys. Rev. E **64**, 026308 (2001)

L. Meignin, P. Gondret, C. Ruyer-Quil & M. Rabaud

Subcritical Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell

Phys. Rev. Lett. **90**, 234502 (2003)