



M. Lefranc, C. Letellier & L. Pastur
Éditeurs

Poincaré

Comptes-Rendus de la 9^e
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 2006



Institut Henri Poincaré

Non-Linéaire Publications

Non Linéaire Publications

Bât. 510 Université de Paris-Sud, 91405 Orsay cedex

<http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl>

La loi du 11 Mars 1957 n'autorise que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective ». **Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'éditeur est illicite.** Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

Dépôt légal : Mars 2006

ISBN 2-9516773-5-9

EAN 9782951677357

RENCONTRES DU NON LINÉAIRE

Institut Henri Poincaré, PARIS

8-10 Mars 2006

Nous remercions vivement Michel Broué, Directeur de l'Institut Henri Poincaré, pour son aide à l'organisation de ces *Rencontres* ainsi que les départements SPM et SPI du CNRS et la Délégation Générale à l'Armement pour leur soutien financier.

Le comité scientifique est composé de :

Sergio CILIBERTO	Lab. Physique — ENS Lyon
Thierry DAUXOIS	Lab. Physique — ENS Lyon
Bastien FERNANDEZ	CPT — Marseille
Josselin GARNIER	LPMA — Paris 7
Vincent HAKIM	LPS — ENS Paris
Guillaume JAMES	INSA — Toulouse
Alain JOETS	LPS — Orsay
Laurent LARGER	LOPMD — Besançon
Patrice LE GAL	IRPHE — Marseille
Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Stéphane METENS	MSC — Paris 7
Emmanuel PLAUT	LEMTA — Nancy
Luc PASTUR	LIMSI — Orsay
Stefania RESIDORI	INLN — Nice

Les *Rencontres annuelles du Non Linéaire* sont organisées par :

Marc LEFRANC	PhLAM — Lille
Christophe LETELLIER	CORIA — Rouen
Luc PASTUR	LIMSI — Orsay

Le Colloque *Ondes non linéaires : quoi de neuf?* est organisé par :

Thierry DAUXOIS	Physique — ENS Lyon
Stefania RESIDORI	INLN — Nice

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non Linéaire Publications
Bât. 510, Université de Paris-Sud, 91495 Orsay cedex

Toutes les informations concernant les *Rencontres* sont publiées sur le serveur :

<http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl/>

Renseignements :

pnl@lps.u-psud.fr

Table des matières

Caractérisation spatio-temporelle d'une spirale de Couette-Taylor <i>N. Abcha, N. Latrache, O. Crumeyrolle, I. Mutabazi</i>	1
Nonlinear equation of motion for propagating crack fronts in heterogenous materials <i>Mokhtar Adda-Bedia, Eytan Katzav</i>	7
Les sauts de mode tronquent la dynamique des oscillateurs paramétriques optiques <i>Axelle Amon, Marc Lefranc</i>	13
Contrôler l'interaction onde-particules <i>R. Bachelard, C. Chandre, X. Leoncini, M. Vittot, A. Antoniazzi, D. Fanelli</i>	19
Observation de transport de champ magnétique dans un écoulement turbulent de sodium liquide <i>M. Berhanu, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, R. Monchaux, N. Mordant, Ph. Odier, F. Ravelet, F. Pétrélis, J.-F. Pinton, R. Volk</i>	25
Caractérisation de la performance des microprocesseurs pendant l'exécution de programmes : Régularité, chaos et autres dynamiques <i>H. Berry, D. Gracia Pérez, O. Temam</i>	31
Compression isotrope d'une feuille élastique en géométrie cylindrique <i>Laurent Boué, Mokhtar Adda-Bedia, Arezki Boudaoud</i>	37
Transmission par bistabilité nonlinéaire <i>D. Chevriaux</i>	43
La diffraction non linéaire des ondes de choc acoustiques <i>F. Coulouvrat, R. Marchiano, B. Sambandam, J.-L. Thomas</i>	49
Mode d'instabilité à propagation radiale observé dans un écoulement de Couette-Taylor viscoélastique <i>O. Crumeyrolle, N. Abcha, N. Latrache, I. Mutabazi</i>	55
Application pratique de la propagation d'une flamme sur un combustible liquide <i>Eugène Degroote</i>	61
Mode globaux non linéaire et instabilité absolue des écoulements ouverts en milieu poreux chauffé par le bas. <i>A. Delache, N. Ouarzazi, G. Labrosse, M. Combarous</i>	63
Identification de la composante déterministe d'une dynamique du monde réel <i>D. J. De Oliveira, M. E. D. Gomes, L. A. Aguirre & C. Letellier</i>	69

Caractérisation expérimentale des instabilités induites par évaporation de solvant dans une solution polymère <i>F. Doumenc, C. Iorio, G. Toussaint, B. Scheid, B. Guerrier, C. Allain</i>	75
Propagation autosimilaire et similariton optique <i>J. M. Dudley, C. Billet, P.-A. Lacourt, R. Ferrière, C. Finot & G. Millot</i>	81
Les solitons optiques spatiaux vectoriels dans les milieux à non linéarité Kerr <i>Gil Fanjoux, Michaël Delqué, Jérémy Michaud, Hervé Maillotte, Thibaut Sylvestre</i>	87
Evolution d'impulsions paraboliques dans un amplificateur à fibre optique hors régime asymptotique <i>Christophe Finot, Francesca Parmigiani, Periklis Petropoulos & Dave J. Richardson</i>	93
Modulation de phase croisée lors de la collision de similaritons optiques <i>Christophe Finot & Guy Millot</i>	99
Ligne de transmission main gauche en régime non linéaire : Application à la multiplication de fréquences <i>M.-F. Foulon, J.-M. Duchamp, P. Ferrari, D. Lippens</i>	105
Grandes déviations et erreurs de transmission par solitons dans les fibres optiques <i>E. Gautier, A. Debussche</i>	111
Mélange topologique et tiges fantômes dans les écoulements bidimensionnels <i>E. Gouillart, J. -L. Thiffeault, O. Dauchot</i>	117
Solitons optiques spatio-temporels dissipatifs <i>Philippe Grellu, Jose M. Soto-Crespo, Nail Akhmediev</i>	123
Motifs d'activité et itinérance chaotique dans des réseaux de neurones en temps discret <i>B. Ibarz, Miguel A.F. Sanjuán, G. Tanaka, K. Aihara</i>	129
Bistabilité d'une surface liquide induite par la pression de radiation acoustique <i>Bruno Issenmann, Régis Wunenburger, Sébastien Manneville, Jean-Pierre Delville</i>	135
Modification géométrique de l'onde cardiaque due à une morphologie particulière du tissu cardiaque <i>Sabir Jacquir, Binczak Stéphane, Bilbault Jean-Marie, Laurent Gabriel, Athias Pierre</i>	141
Coupled Logistic Maps, growing surfaces and slow systems <i>Eytan Katzav, Leticia F. Cugliandolo</i>	147
Approximation des équations 3D de la magnétohydrodynamique par une méthode spectrale-éléments finis nodaux <i>R. Laguerre</i>	151
Transition du Map vers le Flot dans un oscillateur opto-électronique à retard <i>L. Larger, D. Fournier, P. Lacourt, S. Poinso</i>	157
Solitons spatiaux dissipatifs dans des résonateurs optiques modulés : effets de résonances <i>M. Le Berre, E. Ressayre, M. Taki, S. Coulibaly and M. Tlidi</i>	161

Cloches de liquides viscoélastiques <i>L. Lebon, L. Limat, A. Belmonte</i>	167
Influence d'un gradient de température sur la stabilité des rouleaux de Taylor <i>V. Lepiller, A. Prigent, I. Mutabazi</i>	173
Comparaison d'un observateur à modes glissants et un observateur adaptatif pour la synchronisation de systèmes chaotiques <i>M. L'Hernault, J. De Leon, J.P. Barbot, A. Ouslimani</i>	179
Observation et contrôle du chaos hamiltonien dans les interactions ondes-particules <i>A. Macor, F. Doveil</i>	185
Une nouvelle famille de systèmes chaotiques minimaux équivariants par rotation de π autour d'un axe <i>Jean-Marc Malasoma</i>	191
Un modèle global de la population de Lynx du Canada comme preuve de chaos dans un écosystème <i>J. Maquet, C. Letellier</i>	197
Modélisation locale du comportement de l'interface de contact cellule-vaisseau sanguin : approche stochastique <i>Nacim Mefti, Bernard Haussy, Jean-François Ganghoffer</i>	203
Effets combinés du bruit et d'inhomogénéités dans un milieu de réaction-diffusion <i>S. Morfu, P. Marquié</i>	209
Diagrammes de récurrence et entropie de Shannon pour l'étude des asynchronismes en ventilation non invasive <i>H. Rabarimanantsoa, C. Letellier, L. Achour, A. Cuvelier, J.-F. Muir</i>	213
Apparition d'un attracteur chaotique et anti-synchronisation de deux neurones couplés <i>M. Senneret, M. Courbage</i>	219
Étude numérique et expérimentale d'ondes non linéaires en écoulements cisailés annulaires tournants <i>Éric Serre, Emmanuel Plaut, Yannick Lebranchu</i>	225
Chaos Classique avec un objet quantique <i>Quentin Thommen, Jean-Claude Garreau, Véronique Zehnlé</i>	231
Etude du flambage dynamique d'un élastique <i>R. Vermorel, N. Vandenberghe, E. Villermanx</i>	237
Dynamiques mécano-chimiques des gels actifs <i>S. Villain, S. Métens, P. Borckmans</i>	243
Des circuits et des gènes <i>A. Wagemakers, J. M. Buldú, J. García-Ojalvo, M. A.F. Sanjuán</i>	249
Index	255

Caractérisation spatio-temporelle d'une spirale de Couette-Taylor

N. Abcha, N. Latrache, O. Crumeyrolle & I. Mutabazi

25 rue Philippe Lebon, BP 540, 76058 Le Havre cedex
nizar.abcha@univ-lehavre.fr

Résumé. La vélocimétrie par imagerie de particules (PIV) a été mise en œuvre pour caractériser le comportement spatio-temporel des régimes de vortex spirales observés dans l'écoulement de Couette-Taylor. A partir des mesures de vitesses obtenues par PIV, les variations spatio-temporelles des composantes de vitesses radiale et axiale sont établies. Nous rapportons les principales caractéristiques (nombre d'onde, fréquences) ainsi que la déstabilisation de ces régimes vers des comportements désordonnés. Par ailleurs, nous décrivons le comportement observé dans les zones des défauts de spirales qui se manifestent dans l'écoulement.

Abstract. Particles Image Velocimetry (PIV) was implemented to characterize the space-time behaviour of the of spirals vortices modes observed in Couette-Taylor flow. From the velocity measurements obtained by PIV, the variations space-time of the radial and axial velocities components are established. We report the principal characteristics (wave number, frequencies) as well as the destabilization of these modes towards disordered behaviours. In addition, we describe the behaviour observed in the zones of the defects of spirals which appear in the flow.

1 Introduction

Le système de Couette-Taylor est composé de deux cylindres coaxiaux en rotation différentielle et est le siège de plusieurs modes d'instabilités [1]. Pour de faibles vitesses de rotation des cylindres, on observe un écoulement purement azimutal, laminaire et cisailé dans la direction radiale, appelé écoulement de Couette circulaire. Dans le cas où les cylindres tournent en contrarotation, l'écoulement de Couette circulaire subit une bifurcation de Hopf supercritique et transite vers un écoulement avec des structures tourbillonnaires, appelées spirales, qui s'enroulent en hélice autour du cylindre intérieur. Pour une vitesse de rotation Ω_e du cylindre extérieur fixée, ce régime d'écoulement spiralé évolue vers des régimes plus complexes lorsque en augmentant la vitesse de rotation Ω_i du cylindre intérieur.

Si le système de Couette-Taylor est largement étudié expérimentalement, par visualisation [1], par vélocimétrie laser Doppler [2], ou par vélocimétrie ultrasonore [3]. il existe très peu de travaux présentant des mesures quantitatives de vitesses par PIV [4].

Dans cet article, nous vous présentons les principaux résultats obtenus par PIV appliquée au régime de spirales de Taylor. En particulier, nous avons mesuré le champ de vitesses au voisinage des défauts (collisions, sources)

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental comporte un cylindre intérieur de rayon $a = 4$ cm, un cylindre extérieur de rayon $b = 5$ cm, et de hauteur $L = 45,9$ cm. Le rapport des rayons est $\eta = a/b = 0,8$ et le rapport d'aspect $\Gamma = L/d = 45,9$, où $d = b - a$ est la taille de l'entrefer. Le cylindre extérieur est isolé thermiquement de l'extérieur par un bain rectangulaire en plexiglass rempli d'eau. La géométrie rectangulaire du bain favorise les observations optiques.

Les vitesses de rotation Ω_e et Ω_i du cylindre extérieur et intérieur permettent de définir les nombres de Reynolds associés, respectivement $Re_e = \Omega_e b d / \nu$ et $Re_i = \Omega_i a d / \nu$, où ν est la viscosité de l'eau. L'erreur sur les nombres de Reynolds est inférieure à 2%.

Le fluide emprisonné entre les deux cylindres est constitué d'eau (démminéralisée) ensemencée, pour la PIV, par des particules sphériques creuses de verre de diamètre moyen de 8 à 11 μm avec une concentration en masse inférieure à 10^{-4} . Le système PIV est constitué d'un double laser NdYAG (Quantel) piloté par un contrôleur MasterPIV (Tecflow), l'intervalle de temps entre les pulses lasers varie de 2,5 à 32 ms, en fonction des valeurs des nombres de Reynolds. Les paires d'images sont collectées à une fréquence de 2Hz par une caméra CCD de 1034x779 pixels, à 17 cm de la limite inférieure de l'expérience et sur une hauteur de 28 mm. Les intercorrélations entre images d'une même paire sont calculées avec le logiciel Corélia-V2IP avec une fenêtre d'interrogation de 32x32pixels, afin d'obtenir les champs de vitesse dans le plan (r, z) . A partir des champs de vitesse nous pouvons extraire les profils $v_r(z)$ de vitesse radiale dans la direction axiale à différentes position radiale. De même les profils $v_r(r)$, $v_z(z)$, $v_z(r)$ sont extraits à différentes positions. L'extraction de ces profils pour chaque champs de vitesse au cours du temps permet de former les profils spatio-temporels $v_r(z, t)$, $v_r(r, t)$, $v_z(z, t)$, $v_z(r, t)$.

Nous avons utilisée aussi la visualisation par addition d'une suspension de 2% de Kalliroscope à l'eau déminéralisée. La lumière réfléchié par les paillettes est collectée le long d'un axe parallèle à l'axe du système par une caméra CCD linéaire. L'éclairage est assuré par un tube fluorescent positionné parallèlement à la zone enregistrée afin d'assurer une illumination homogène. L'intensité est enregistrée sur 25 à 29 cm de long, ce qui correspond à une résolution de 40 à 30 pixels par cm. Chaque ligne $I(x)$ collectée à un temps donné est assemblée aux autres lignes acquises au cours du temps afin de former un diagramme spatio-temporel $I(x, t)$.

3 Résultats

Différents régimes spiralés ont été observés au sein de la plage de valeurs de nombres de Reynolds $201 < Re_i < 276$ et $251 < Re_e < 376$, Nous présentons les résultats obtenus pour $Re_o = -299$ et différentes valeurs de Re_i . Le régime observé pour $Re_i = 201$ est constitué de spirales de forme très régulière, et est proche du seuil de déstabilisation de l'écoulement de Couette circulaire. Les champs de vitesse (Fig. 1) mesurés dans le plans (r, z) sont réguliers et mettent en évidence le mouvement des structures tourbillonnaires, avec une alternance du sens de rotation dans la direction axiale.

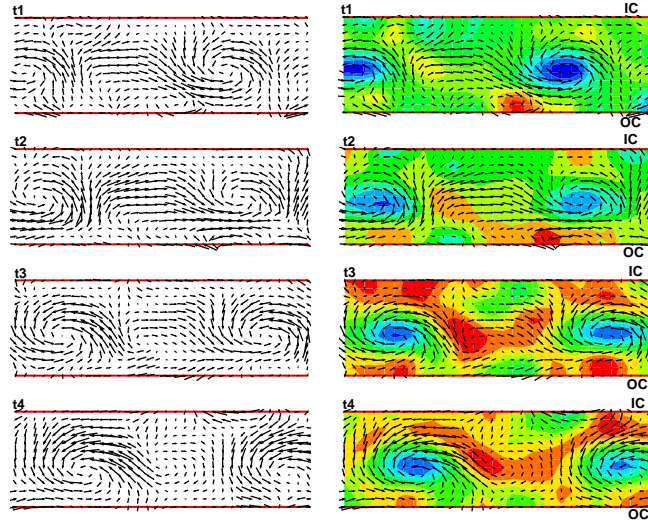


Fig.1. Champs de vitesse dans le plan (r, z) (flèches) et vorticité (échelle de couleurs) pour quatre acquisitions successives ($t_{i+1} = t_i + 0.5s$) à $Re_i = 201$. Le cylindre intérieur correspond à la ligne supérieure des images.

Le profil de vitesse instantanée correspondant à la Fig. 1 est illustré sur la Fig. 2.

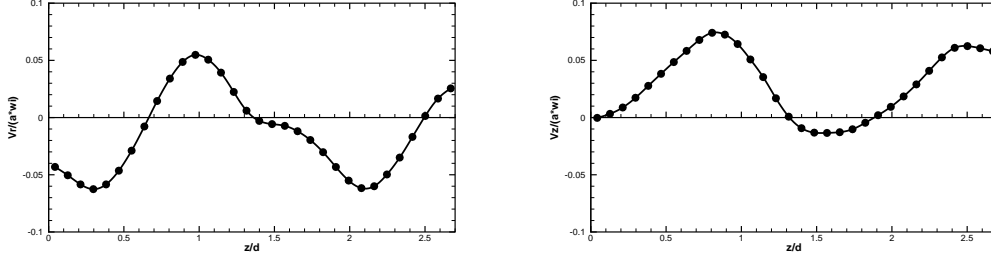


Fig.2. Profil de vitesse extrait du champs de vitesse dans le plan (r, z) , mesuré à $r = a + 0.5d$, $Re_i = 201$.

Les diagrammes spatio-temporels des deux composantes de vitesses de $v_r(r, t)$ et $v_z(r, t)$ (Fig. 3a) montrent l'alternance régulière du sens de rotation des tourbillons, ceci confirme le fait que les spirales sont des ondes radiales stationnaires formées par des paires de tourbillons contrarotatifs. Les diagrammes de $v_r(z, t)$ et $v_z(z, t)$ réalisés à $r = a + 0.5d$ (Fig. 3b) montrent que le premier mode d'instabilité se manifeste sous forme d'un motif de spirales se propageant à droite dans la direction axiale. A partir du diagramme de $v_r(z, t)$ à $r = a + 0.5d$, la périodicité spatiale et temporelle de la spirale ont été mesurées. La fréquence adimensionnée est $f^* = f d^2 / \nu = 5.2$ tandis que le nombre d'onde axial vaut $0,3 \text{ rad.mm}^{-1}$. Juste au-dessus du seuil d'instabilité, ces deux spirales contrapropagatives sont souvent séparées par une source ou un puits. Ceci est mis en évidence par le diagramme spatio-temporel obtenu par la visualisation à l'aide de paillettes de Kalliroscope, rapporté sur la figure 4 pour $Re_o = -299$ et $Re_i = 201$, qui montre clairement la position du puits et la variation de l'intensité correspondant au déplacement des ondes spirales gauche et droite. On remarquera que la zone étudiée par PIV se situe dans la partie inférieure de l'expérience. On remarque aussi que le motif du diagramme spatio-temporel de la composante radiale de la vitesse $v_r(z, t)$ et le motif du diagramme spatio-temporel obtenu par visualisation à l'aide des paillettes de Kalliroscope sont semblables.

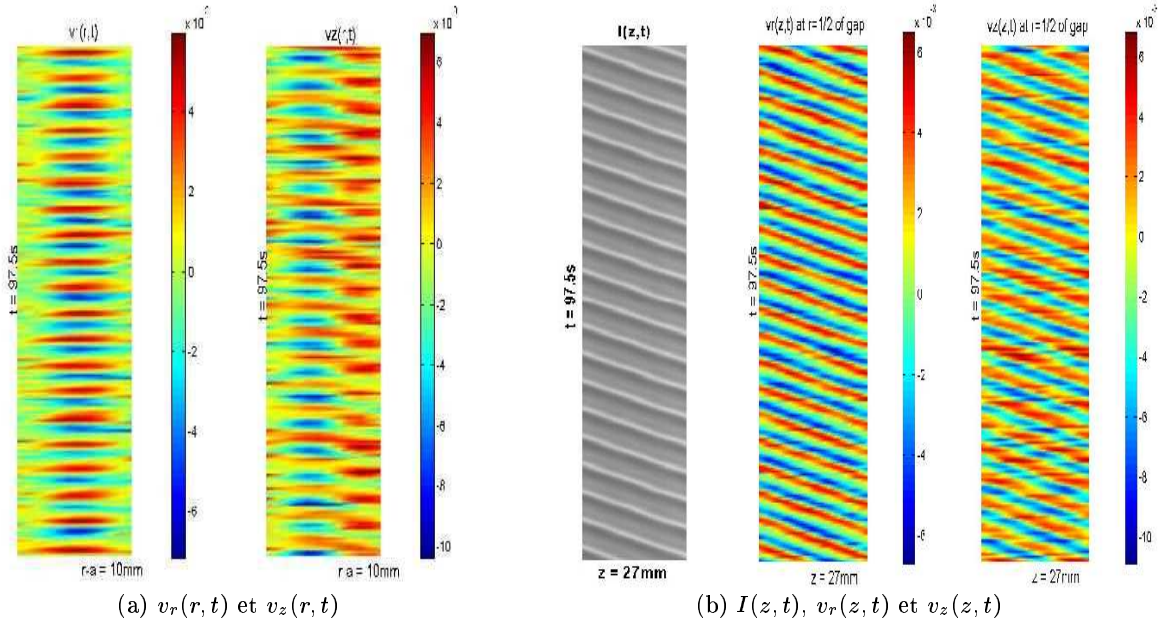


Fig.3. Diagrammes spatio-temporels pour $Re_i = 201$.

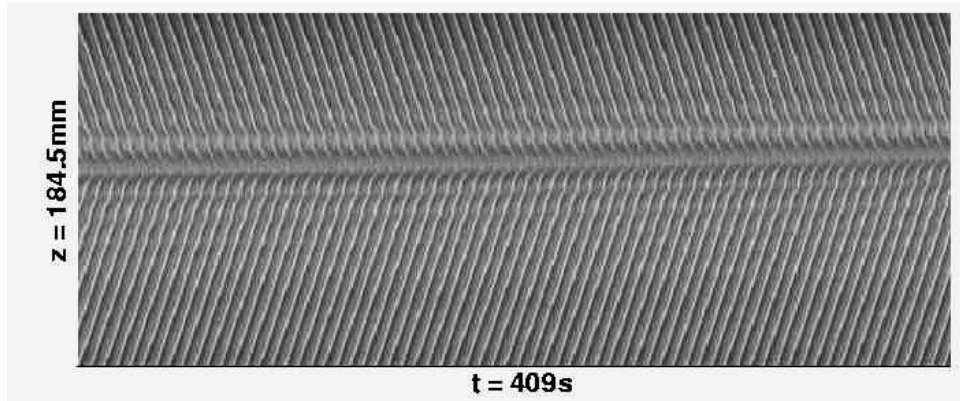


Fig.4. Diagrammes spatio-temporels (z, t) obtenu par visualisation à l'aide de Kalliroscope (paillettes réfléchissantes), $Re_i = 201$.

Pour $Re_i = 214$, nous avons observé un régime formé par des spirales ondulantes. Les diagrammes spatio-temporels des composantes radiales et axiales dans le plan (z, t) sont rapportées Fig. 5. La fréquence et le nombre d'onde principaux sont $f^* = 3$ et $0,22 \text{ rad.mm}^{-1}$, tandis que l'ondulation se caractérise par une période temporelle du même ordre que le temps d'acquisition (environ 90 s).

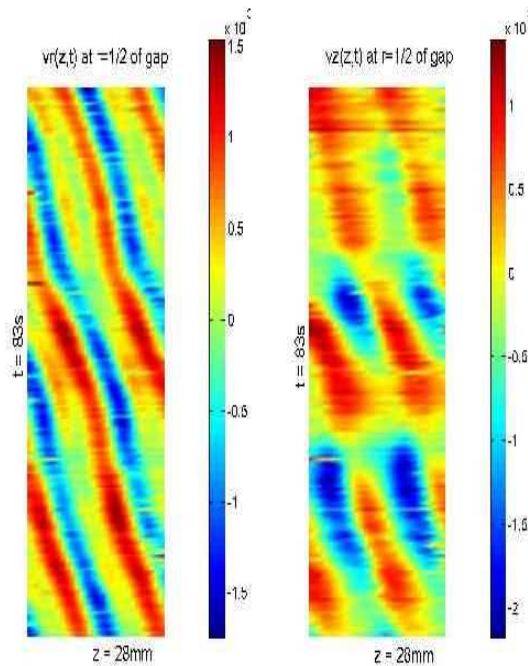


Fig.5. Diagrammes spatio-temporels (z, t) des composantes de vitesse en régime ondulant, $Re_i = 214$.

Pour $Re_i > 214$, la source entre les deux spirales devient très faible et disparaît de l'écoulement, ce qui permet aux spirales d'interférer dans ce petit espace Fig. 8. Ce motif possède des zones d'interpénétrations où on a coexistence de deux ondes gauche et droite et zones sans interpénétration avec une seule onde. Ces

spirales subissent une instabilité d'Ekhaus-Benjamin-Feir qui se manifeste par l'appariation des défauts ponctuels de phase dans le motif sous forme de dislocation ou collision entre deux spirales [5] Fig. 8.

Nous rapportons le comportement observé dans les zones de défauts de spirales dans l'écoulement pour $Re_i = 227$. Les diagrammes spatio-temporels des composantes radiales et axiales dans le plan (z,t) , rapportés Fig. 6a, présentent un défaut vers $t = 42s$. On note que la composante radiale s'annule pour $t = 42s$ à $z = 10$ mm. Ceci se confirme sur l'ensemble de l'entrefer sur le diagramme $v_r(r,t)$ et $v_z(r,t)$ pris à $z = 10$ mm, rapporté Fig. 6b. On remarque en effet des valeurs particulièrement faibles autour de $t = 42$ s, entre deux structures tourbillonnaires présentant un écoulement radial rentrant. Ceci est mis en évidence par l'évolution de deux composantes de vitesses au cours de temps, où ils s'annulent a travers le défaut, rapporté Fig. 7.

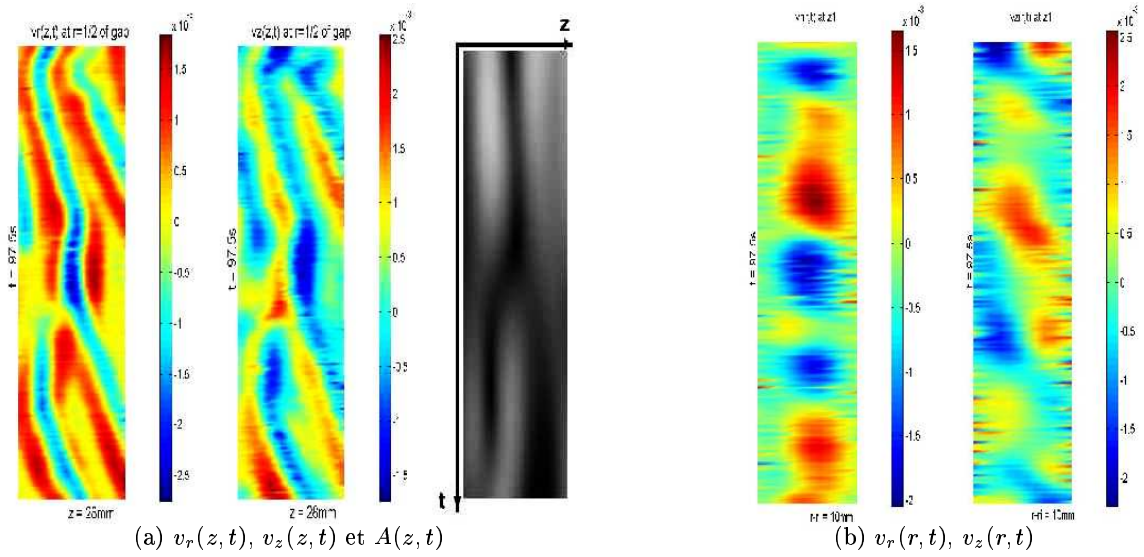


Fig.6. Diagrammes spatio-temporels (z,t) des composantes de vitesse en régime collisionnel, $Re_i = 227$.

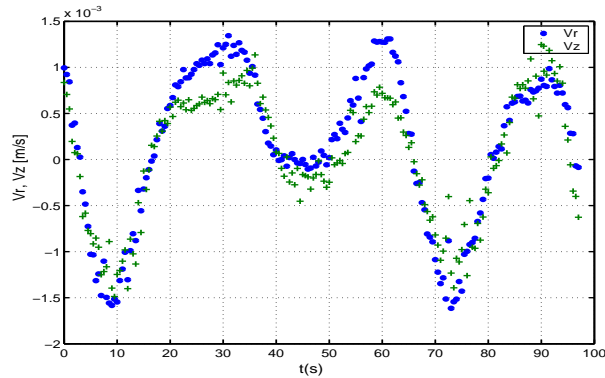


Fig.7. Evolution temporelle de deux composantes de vitesses $v_r(t)$ et $v_z(t)$, $Re_i = 201$, la vitesse s'annule au voisinage du défaut.

Pour étudier le comportement d'un défaut de phase dans le motif des spirales obtenu par visualisation à l'aide de Kalliroscope, nous suivons l'évolution des propriétés spatitemporelles comme la phase, l'amplitude, la fréquence et le nombre d'onde. La Fig. 8 présente les deux premières grandeurs autour de deux défauts, où les motifs présentent un saut de π pour la phase et une dépression ou annulation

représentée par un spot noir correspondant à un minimum pour l'amplitude. Ceci se manifeste par les très faibles composantes de vitesses radiales et axiales au cœur de défaut [6].

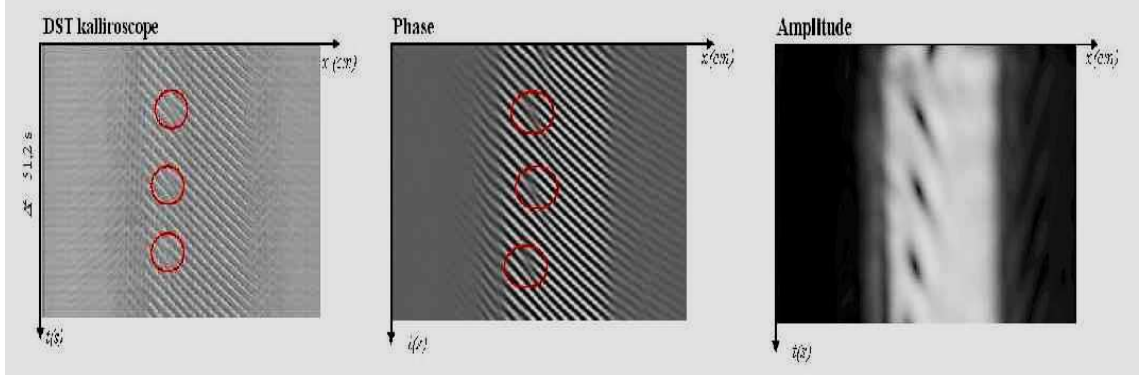


Fig.8. Diagramme spatiotemporels au voisinage de trois défauts : (a) DST, (b) Phase, (c) Amplitude.

L'autocorrélation au cours du temps de la vitesse radiale aux différents z a été calculée à partir des diagrammes spatio-temporels de $v_r(z, t)$ pour les trois régimes observés. Près du seuil (spiraies régulières) l'autocorrélation, (Fig. 9a) reproduit la périodicité temporelle des spiraies. Les niveaux de corrélation (niveau blanc) ou d'anti-corrélation (zone noire) restent élevés, même pour des décalages temporels importants. Le signal d'autocorrélation est par ailleurs homogène en espace, ce qui indique une propagation très régulière des spiraies. Pour le régime des spiraies ondulantes, le motif d'autocorrélation, Fig. 9b, est moins régulier et atteint des niveaux élevés plus rarement. En présence d'une collision, le motif d'autocorrélation, Fig. 9c, est irrégulier, et ne présente que peu de zones de forte intensité.

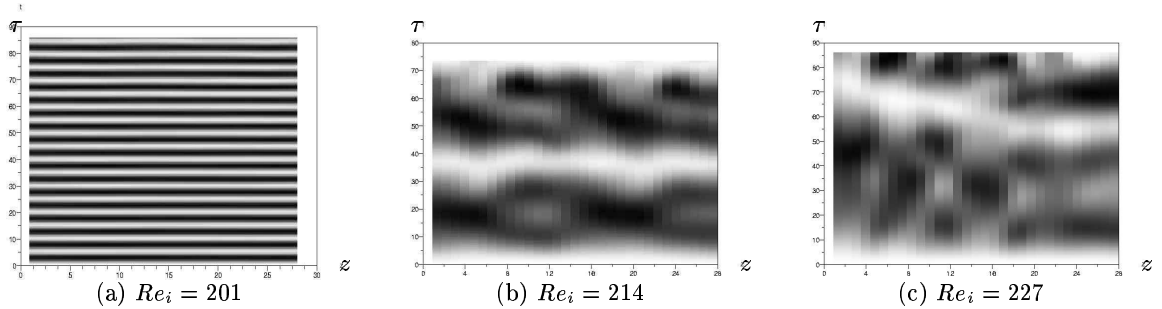


Fig.9. Autocorrélation temporelle de $v_r(z, t)$ à différents z (mm) en fonction du décalage temporel τ (s).

Références

1. C.D. ANDERECK, S.S. LIU, H.L. SWINNEY, Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, **164**, 155-183 (1993).
2. Y. TAKEDA, Quasi-periodic state and transtion to turbulence in a rotating Couette system, *J. Fluid Mech.*, **389**, 81-99 (1999).
3. W.F. LANGFORD, M. GOLUBITSKY, R. TAGG, E.J. KOSTELICH, AND H.L. SWINNEY, Primary instabilities and bicriticality in flow between counter-rotating cylinders, *Phys. Fluids*, **31**, 776-785 (1988).
4. S.T. WERELEY, R.M. LUEPTOW, Spatio-temporal character of nonwavy and wavy Taylor-Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **364**, 59-80 (1998).
5. CH. HOFFMANN, M.LÜCKE AND A. PINTER, Spiral vortices traveling between two rotating defects in the Taylor-Couette system, *Phys. Rev. E*, **72**, 056311 (2005).
6. N. LATRACHE, Etude des instabilités de liquides newtoniens ou viscoélastiques dans le système de Couette-Taylor, *Thèse de doctorat de l'université du Havre*, (2005).

Nonlinear equation of motion for propagating crack fronts in heterogenous materials

Mokhtar Adda-Bedia & Eytan Katzav

Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure,
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.
adda@lps.ens.fr

Résumé. Nous avons étudié la propagation d'un front de fissure dans un milieu hétérogène. Dans ce but, nous avons développé au second ordre le facteur d'intensité des contraintes d'un front de fissure courbe, autour de sa solution pour un front droit, en généralisant un premier résultat classique dû à Rice. Nous avons ainsi proposé une équation de mouvement pour la propagation d'un front de fissure dans un milieu hétérogène qui contient deux ingrédients principaux - l'irréversibilité de la propagation du front et les effets non linéaires. En utilisant l'équation stochastique proposée pour le mouvement du front de fissure, nous avons étudié la dynamique de propagation d'un front de fissure dans un milieu hétérogène dans le régime quasi-statique. L'approche consiste à utiliser une expansion auto-consistante (self consistent expansion) introduite par Schwartz et Edwards. Nous avons découvert une transition de phase dynamique continue entre une phase lisse (à grandes échelles) et une phase rugueuse, avec un exposant de rugosité $\alpha = 1/2$.

Abstract. In this work we study the propagation of planar crack fronts in heterogenous materials. For that purpose, we first derive the second order variation in the local static stress intensity factor of a tensile crack with a curved front, thus generalizing the classical first order result of Rice. Using this, we propose an equation of motion for the propagating crack front that contains two main new ingredients - irreversibility of the propagation of the crack front and nonlinear effects. The proposed equation allows for a systematic study of the roughening of the a moving front in the quasi-static regime by using the Self Consistent Expansion, which reveals a rough phase described by a roughness exponent $\alpha = 1/2$.

1 Introduction

The propagation of a crack front in a brittle material is the playground of a number of physical phenomena which range from dynamic instabilities of fast moving cracks [1] to quasi-static instabilities of crack paths [2,3], or of crack fronts [4,5,6,7,8,9]. Although the actual theory of brittle fracture mechanics succeeded to explain a number of instabilities, the experimentally observed self-affine roughness of a crack front propagating through a heterogeneous medium remains the subject of theoretical debate [6,7,8]. This phenomenon is of fundamental importance, because it may be regarded as an archetype of self-affine patterns induced by advancing fronts. Wetting of a disordered substrate being another example of systems with a similar structure [10,11].

In the framework of linear elastic fracture mechanics, an important step was performed by Rice [12] following a work of Meade and Keer [13]. He gave a general formula for the first order variation in elastic fields of a planar curved crack front and subsequent analysis was mainly based on this work [6,7,14,15,16,17]. However, aspects related to crack front roughness and stability could not be derived within this first order perturbation solution. A possible explanation, which has been suggested in the context of the wetting problem [11], is that higher order variations might be necessary for the study of stability and roughening properties of these fronts. For that reason, as a first step in the direction of providing a theoretical explanation we derived a formula for the second order variation in elastic fields of a planar curved crack front [18]. It uses a methodology introduced in [9] for the study of the peeling-induced crack-front instability in a confined elastic film.

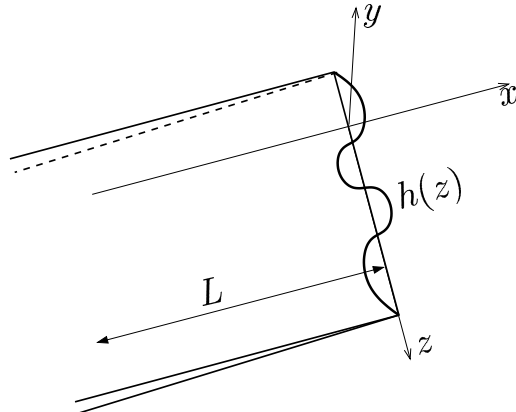


Fig.1. Schematic of the problem of a half-plane crack on $y = 0$ in an infinite body. The average penetration of the crack front in the x -direction is L . The straight reference front in the z -direction and the perturbation $h(z)$ around it are also shown.

2 The second variation in the elastic fields

The problem of a half-plane crack located in the plane $y = 0$ with a curved front (see Fig. 1) can be solved by using the linear equations of elasticity. It has been shown [13] that these equations are satisfied for a tensile loading that is symmetric to the crack plane and so no other components of the stress intensity factors (SIFs), other than K_I are present for that case. From a mathematical point of view, the starting point is one of finding a function Φ satisfying

$$\Delta\Phi(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

having vanishing derivatives at infinity. Defining $h(z)$ to be the position of the crack front, the main challenge is to solve for Φ in the presence of this curved front. This is done essentially by transforming into a set of coordinates defined at the crack front, i.e. from (x, y, z) to $(X \equiv x - h(z), y, z)$ [9]. The result of this calculation is given schematically by

$$K_I(z) = K_{I0} + K_{I1}(z) + K_{I2}(z) + O\left(h^3, \frac{h}{L}\right), \quad (2)$$

where K_{I0} is just the SIF of a straight crack under the same loading conditions, $K_{I1}(z)$ is the first order variation, derived previously by [12], and $K_{I2}(z)$ is the new result. These terms are given by

$$K_{I1}(z) = PV \int_{-\infty}^{\infty} K_0(z') \frac{h(z') - h(z)}{(z' - z)^2} \frac{dz'}{2\pi}, \quad (3)$$

$$K_{I2}(z) = -\frac{1}{8} K_0(z) h'^2(z) + PV \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(z') \frac{(h(z') - h(z))(h(z'') - h(z))}{(z' - z)^2 (z'' - z)^2} \frac{dz''}{2\pi} \frac{dz'}{2\pi}, \quad (4)$$

Let us emphasize that for the study of the crack front stability, this perturbation expansion is incomplete, because contributions of order (h/L) have been omitted (with L being the average length of the crack in the z direction — see Fig. 1). This statement is true even for a linear stability analysis. An example of the importance of such contributions is given by the linear stability analysis of the peeling-induced crack-front in a confined elastic film [9], where the (h/L) terms do rule the stability of the crack front. From a conceptual point of view these terms are important to keep contact with experiments [5], because a quasistatic moving crack front will always stop ($dK/dL < 0$), unless the applied force is increased. Indeed the experimental realizations for the study of crack front roughness use the large length scale L in order to make the interface moving, by applying an increasing opening in a cantilever beam configuration. We believe that such effects are also present in wetting experiments, where the contact line

is displaced by pulling off the substrate. In such conditions, the roughening of the interface results from a competition between the microscopic pinning effects and the destabilizing effects of the macroscopic driving.

3 The equation of motion

The next step is to propose an equation for the motion of a planar crack in a heterogeneous material. The present approach is very similar to the one introduced by Gao and Rice [14,15,16]. We write the equation of motion for the moving crack front as a stochastic partial differential equation by using two main ingredients - the irreversibility of crack front propagation and the nonlinear effects. Here, we refer to $h(z)$ as the fluctuating part of the interface, so that by definition the real location of the interface is given by $L + h(z)$, and L is its average. The proposed equation contains two important ingredients - irreversibility of the propagation of the crack front and nonlinear effects. It is given by

$$\frac{\partial h}{\partial t}(z, t) = \sqrt{1 + h'^2} [K_I(h) - K_c(z, h)] \Theta[K_I - K_c], \quad (5)$$

where $h' = \partial h / \partial z$, $\Theta(\cdot)$ is the Heaviside function, $K_I(h)$ is the stress intensity factor of the crack front (given to second order above) and $K_c(z, h)$ is a random term representing the heterogeneity in the local material toughness due to disorder. The random term can always be separated as $K_c(z, h) = K^* + \eta(z, h)$, where K^* is an average toughness and η is its fluctuating part.

Solutions of stochastic growth models such as Eq. (5) exhibit scaling behavior which is described using the time dependent height-height correlation function

$$\left\langle [h(z, t) - h(z', t')]^2 \right\rangle^{1/2} = |z - z'|^{2\alpha} f\left(\frac{|z - z'|}{|t - t'|^\mu}\right), \quad (6)$$

where α (sometimes denoted as ζ) is the roughness exponent of the interface and μ is the dynamic exponent (sometimes denoted as z). The brackets $\langle \dots \rangle$ denote average over disorder.

For the proposed model we identify three different regimes : A static regime for which $K_0 \ll K^*$ (where the Heaviside function in (5) can be safely approximated by 0) ; A regularly moving interface for large values of K_0 (where the Heaviside function can be safely approximated by 1) ; And an intermediate complex regime, where $K_0 \sim K^*$. In this last regime, a very important factor seems to be the stabilizing terms (i.e. those terms of order h/L that were dropped out in the derivation) that will make sure that the crack will stop after a while (as indeed seen in experiments).

Based on that picture, we hypothesize that a frozen dynamically rough interface is seen in experiments [5]), rather than a rough phase determined by a static pinned interface. In other words, we stress the point that the crack tends to stop due to its physical nature even without the presence of heterogeneities. This is indeed the case in cantilever beam experiments [5], where the crack faces are increasingly opened in order to induce crack front motion. As a result the front starts moving until it stops. The heterogeneities only induce roughness and as we argue, a dynamical roughness, which is then frozen due to the irreversibility of the fracture process.

In order to test this picture, we approximate this system by neglecting consistently all mechanisms which deal with the slowing down of the interface, as well as the freezing of it. The assumption here is that the specific aspect of fine-tuning the opening stress mode (for example by imposing a time-dependent external loading) is exactly what the experiment does. Then we analyze the system at that critical point whichever means were taken to get there. This involves neglecting the Heaviside function on the right-hand side of Eq. (5). We suspect that this term does play a role in the final stages of freezing, namely by imposing differential arrest along the interface (note again that the interface would stop anyway, even without this term). This would tend to increase the roughness. Thus, we would consider the results obtained below as a lower bound for the roughness, offering a quantitative physical explanation up to the last steps of the freezing.

Following the previous arguments, we approximate the noise term for the moving front, where $h \simeq vt$, by $\eta(z, h) \simeq \eta(z, vt) = \hat{\eta}(z, t)$, i.e. as a ‘‘thermal noise’’ [11]. Also, we do keep nonlinear terms, since we claim (and will justify later) that they play an important role in roughening the interface. Obviously a linear equation of the kind described above (i.e. taking into consideration only the linear term in $K_I(h)$) would not yield any roughness, and actually even if the KPZ nonlinearities (i.e. h^2 terms) are kept, we would also end up with a smooth surface, or at most logarithmically rough (this is a special case of the so called Fractal KPZ equation studied previously in [19]). When keeping consistently second order terms, the resulting equation of motion becomes

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h'(z')}{(z' - z)} \frac{dz'}{2\pi} + K_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz''}{2\pi} \frac{h'(z')h'(z'')}{(z' - z)(z'' - z')} - \frac{3}{8} \left(\frac{4}{3}K^* - K_0 \right) h'^2 + (K_0 - K^*)\hat{\eta}(z, t), \quad (7)$$

with noise correlations described by

$$\langle \hat{\eta}(z, t) \hat{\eta}(z', t') \rangle = 2D\delta(z - z')\delta(t - t'), \quad (8)$$

where D is the variance of the noise. The constant term, $(K_0 - K^*)$, in Eq. (7) can be put aside by transforming into a co-moving coordinate system. Moreover, by looking at the KPZ term (i.e. h'^2) we can estimate the region where this discussion is relevant. Roughly, when the coefficient of that term remains negative (i.e. for $K_0 < \frac{4}{3}K^*$), we are still in the quasi-static regime since in that case a rough interface would decrease the velocity, while for higher values of the applied stress ($K_0 > \frac{4}{3}K^*$) the system would be in the regularly moving regime. This estimate is consistent with our assumption that the dynamics of interest is not necessarily at $K_0 \simeq K^*$, but in some range above it.

4 The Self Consistent Expansion

We now apply the self-consistent-expansion (SCE) method to this simplified equation of motion in order to derive results for the scaling exponents [20]. This method was developed by Schwartz and Edwards [21,22] and has been applied successfully to the Kardar Parisi-Zhang (KPZ) equation [23]. The method gained much credit by being able to give sensible predictions for the KPZ scaling exponents in the strong-coupling phase above one dimension where many renormalization group (RG) approaches failed. Another point which is especially relevant for our purpose is that for a family of models with long-range interactions (of the kind treated presently) SCE reproduced exact one-dimensional results while RG failed to do so [24].

The SCE method is based on going over from the Fourier transform of the equation in Langevin form to a Fokker-Planck form and on constructing a self-consistent expansion of the distribution of the field concerned. We then consider the simplified version of the equation of motion in Fourier components

$$\frac{\partial h_q(t)}{\partial t} = -c_q h_q - \sum_{\ell, m} M_{q\ell m} h_\ell h_m + \hat{\eta}_q(t), \quad (9)$$

where $c_q = \frac{K_0}{2}|q|$ and $M_{q\ell m} = -\frac{K_0}{4\sqrt{L_z}}|q||\ell|\delta_{q, \ell+m}$, L_z being the linear size of the front. Note that in contrast to the KPZ problem $M_{q\ell m}$ has the symmetries

$$M_{q\ell m} = M_{-q, \ell, m} = M_{q, -\ell, m} = M_{q, \ell, -m}. \quad (10)$$

Last, $\hat{\eta}_q(t)$ is a noise term with zero average described by its variance

$$\langle \hat{\eta}_q(t) \hat{\eta}_{q'}(t') \rangle = 2D\delta_{q, -q'}\delta(t - t'). \quad (11)$$

Rewriting this equation in a Fokker-Planck form we get

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_q \frac{\partial}{\partial h_q} \left[D_0 \frac{\partial}{\partial h_{-q}} + c_q h_q + \sum_{\ell, m} M_{q\ell m} h_\ell h_m \right] P = 0, \quad (12)$$

where $P(\{h_q\}, t)$ is the probability functional for having a height configuration $\{h_q\}$ at time t .

The expansion is formulated in terms of the steady-state structure factor $\phi_q = \langle h_{-q} h_q \rangle$ (or two-point function), and its corresponding steady-state decay rate that describes the rate of decay of a disturbance of wave vector q in steady state, namely

$$\omega_q^{-1} = \frac{\int_0^\infty \langle h_{-q}(0) h_q(t) \rangle dt}{\langle h_{-q} h_q \rangle}. \quad (13)$$

From the scaling form (6) it follows that for small q 's ϕ_q and ω_q behave as power laws in q , namely $\phi_q = A|q|^{-\Gamma}$ and $\omega_q = B|q|^\mu$, where z is the dynamic exponent, and the exponent Γ is related to the roughness exponent by $\alpha = (\Gamma - 1)/2$.

The main idea of SCE is to write the Fokker-Planck equation $\partial P/\partial t = OP$ in the form $\partial P/\partial t = [O_0 + O_1 + O_2]P$, where O_0 , O_1 and O_2 are zero, first and second order operators in some parameter. The evolution operator O_0 is chosen to have a simple form $O_0 = -\sum_q \frac{\partial}{\partial h_q} \left(D_q \frac{\partial}{\partial h_{-q}} + \omega_q h_q \right)$, where $D_q/\omega_q = \phi_q$. Note that ϕ_q and ω_q are still unknown. Next, an equation for the two-point function is obtained. The expansion has the form $\phi_q = \phi_q + e_q \{\phi_p, \omega_p\}$, where e_q is a functional of all ϕ 's and ω 's. This reflects the fact that the lowest order in the expansion is exactly the unknown ϕ_q . In the same way, an expansion for ω_q is given by $\omega_q = \omega_q + d_q \{\phi_p, \omega_p\}$. Now, the two-point function and the characteristic frequency are determined by setting $e_q \{\phi_p, \omega_p\} = 0$ and $d_q \{\phi_p, \omega_p\} = 0$. To second order in the expansion, we get the following two coupled integral equations

$$D_0 - \frac{K_0}{2} |q| \phi_q + I_1(q) \phi_q + I_2(q) = 0, \quad (14)$$

$$\omega_q - \frac{K_0}{2} |q| + J(q) = 0, \quad (15)$$

with

$$I_1(q) = \frac{K_0^2}{32\pi} |q| \int d\ell |\ell| \frac{|\ell|(|q-\ell|+|q|)\phi_{q-\ell} + |q-\ell|(|\ell|+|q|)\phi_\ell}{\omega_q + \omega_\ell + \omega_{q-\ell}}, \quad (16)$$

$$I_2(q) = \frac{K_0^2}{32\pi} q^2 \int d\ell |\ell| \frac{(|\ell|+|q-\ell|)\phi_\ell \phi_{q-\ell}}{\omega_q + \omega_\ell + \omega_{q-\ell}}, \quad (17)$$

$$J(q) = \frac{K_0^2}{32\pi} |q| \int d\ell |\ell| \frac{|\ell|(|q-\ell|+|q|)\phi_{q-\ell} + |q-\ell|(|\ell|+|q|)\phi_\ell}{\omega_\ell + \omega_{q-\ell}}. \quad (18)$$

It is interesting to mention here that Eq. (14) can be understood as emanating from the short time balance of the original equation, while Eq. (15) comes from its long time balance [22].

These equations can be solved exactly in the asymptotic limit (i.e. for small q 's) to yield the required scaling exponents governing the steady-state behavior and the time evolution. We will not get more into technical details, but rather summarize our results. We found two possible phases : First, a flat phase described by $\alpha = 0$ and $\mu = 1$, corresponding to the system in the moving regime. This phase is always possible. Second, we see the possibility of having a rough phase with $\alpha = 1/2$ and $\mu = 2$, which is possible only for some critical values of the forcing at slow velocities.

5 Summary and Discussion

Having in mind the roughness of a propagating crack front in heterogeneous materials we derived the second order variation in the stress intensity factor of a tensile crack with a curved front propagating in a brittle material. We pointed out that for linear stability analysis one has to take into account the contributions coming from the large scales and so the complete resolution of a given problem must be fully performed for that purpose. Then, we proposed an equation of motion of planar crack fronts in heterogeneous media that contains both the irreversibility of the propagation of the crack front and

nonlinear effects. We show that the proposed equation can be useful in studying the roughening of propagating crack fronts. We do so by using the method of the self-consistent expansion. We found the possibility of having a rough moving phase with $\alpha = 1/2$ (and $\mu = 2$) which is relevant for $K_0 \sim K^*$ due to destabilization of the nonlocal elasticity by the nonlinear term. This result is in agreement with the roughness exponent measured in experimental systems [4,5]. Since in our analysis we neglected the irreversibility of the fracture process (which becomes important during the last steps of freezing, and so tends to further roughen the line), our analysis provides a lower bound for the experimental results (recall that experimental results vary between 0.5–0.6). We hope that analysis of the full equation would yield results which are even closer to the experimental measurements. On the other hand, an interesting challenge to experiments would be determination of the dynamic exponent μ from direct measurements.

Acknowledgements – This work was supported by EEC PatForm Marie Curie action (E.K.). We thank D. Vandembroucq and A. Boudaoud for fruitful discussions. Laboratoire de Physique Statistique de l’Ecole Normale Supérieure is associated with the CNRS (UMR 8550) and Universities Paris VI and Paris VII.

Références

1. J. FINEBERG and M. MARDER, *Physics Reports* **313**, 2 (1999).
2. B. COTTERELL and J. R. RICE, *International Journal of Fracture* **16**, 155 (1980).
3. M. ADDA-BEDIA and Y. POMEAU, *Physical Review E* **52**, 4105 (1995).
4. P. DAGUIER, E. BOUCHAUD and G. LAPASSET, *Europhysics Letters* **31**, 367 (1995).
5. J. SCHMITTBUHL and K. J. MÅLØY, *Physical Review Letters* **78**, 3888 (1997); A. DELAPLACE, J. SCHMITTBUHL and K. J. MÅLØY, *Physical Review E* **60**, 1337 (1999).
6. D. S. FISHER, *Physics Reports* **301**, 113 (1998).
7. E. BOUCHAUD *et al.*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **50**, 1703 (2002).
8. J. SCHMITTBUHL, A. HANSEN and G. G. BATROUNI, *Physical Review Letters* **90**, 045505 (2003); **92**, 049602 (2004); M. J. ALAVA and S. ZAPPERI, *Physical Review Letters* **92**, 049601 (2004).
9. M. ADDA-BEDIA and L. MAHADEVAN, preprint (2005).
10. A. PREVOST, E. ROLLEY and C. GUTHMANN, *Physical Review B* **65**, 064517 (2002); S. MOULINET, C. GUTHMANN and E. ROLLEY, *European Physical Journal E* **8**, 437 (2002).
11. R. GOLESTANIAN and E. RAPHAËL, *Physical Review E* **67**, 031603 (2003); P. LEDOUSSAL, K.J. WIESE, R. GOLESTANIAN and E. RAPHAËL, cond-mat/0411652.
12. J. R. RICE, *Journal of Applied Mechanics* **54**, 571 (1985).
13. K. P. MEADE and L. M. KEER, *Journal of Elasticity* **14**, 79 (1984).
14. H. GAO and J. R. RICE, *Journal of Applied Mechanics* **56**, 828 (1989).
15. S. RAMANATHAN and D. S. FISHER, *Physical Review B* **58**, 6026 (1998).
16. S. ROUX, D. VANDEMBROUCQ and F. HILD, *European Journal of Mechanics A Solids* **22**, 743 (2003); Y. CHARLES *et al.*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **52**, 1651 (2004).
17. J. B. LEBLOND, *Mécanique de la rupture fragile et ductile*, Hermes Science Publications, 2003.
18. M. ADDA-BEDIA, E. KATZAV and D. VANDEMBROUCQ, preprint (2005).
19. E. KATZAV, *Physical Review E* **68**, 31607 (2003).
20. M. ADDA-BEDIA and E. KATZAV, preprint (2005).
21. M. SCHWARTZ and S.F. EDWARDS, *Europhysics Letters* **20**, 301 (1992); *Physical Review E* **57**, 5730 (1998).
22. E. KATZAV and M. SCHWARTZ, *Physical Review E* **70**, 011601 (2004).
23. M. KARDAR, G. PARISI and Y. C. ZHANG, *Physical Review Letters* **56**, 889 (1986).
24. E. KATZAV, *Physica A* **308**, 25 (2002); *Physica A* **309**, 72 (2002); *Physical Review E* **68**, 46113 (2003).

Les sauts de mode tronquent la dynamique des oscillateurs paramétriques optiques

Axelle Amon¹ & Marc Lefranc²

¹ Laboratoire PALMS, UMR CNRS 6627, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

² Laboratoire PhLAM, UMR CNRS 8523, Université de Lille 1, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
axelle.amon@univ-rennes1.fr

Résumé. Les études théoriques de la dynamique des oscillateurs paramétriques optiques (OPO) supposent généralement que les désaccords en fréquence des champs par rapport aux modes de cavité sont des paramètres libres. Or, ces désaccords sont susceptibles de changer sous l'effet de sauts de mode. Nous montrons que les limitations imposées par ce phénomène peut empêcher l'apparition de certaines instabilités.

Abstract. Theoretical investigations of dynamical behavior in optical parametric oscillators (OPO) have generally assumed that the cavity frequency detunings of the interacting fields are free parameters. However, detunings can change as mode hops occur. We show that limitations imposed by this phenomenon can prevent the occurrence of some instabilities.

1 Introduction

Les OPO sont des sources de lumière cohérente largement accordables. Leur utilité est aussi bien liée à cette accordabilité (spectroscopie) qu'aux propriétés quantiques propres au système (génération d'états comprimés, photons jumeaux). D'autre part, en tant que système non-linéaire, les OPO sont susceptibles de présenter une grande richesse de phénomènes dynamiques temporels et spatio-temporels. Il est donc surprenant de constater que très peu des instabilités identifiées sur le plan théorique aient à ce jour été mises en évidence expérimentalement. Ainsi, le modèle le plus simple de l'OPO triplement résonnant, le modèle champ moyen monomode dégénéré, prévoit l'apparition d'un comportement périodique par une bifurcation de Hopf [1] suivi d'une transition vers le chaos par dédoublement de période [2]. Or, bien que ces résultats théoriques soient connus depuis vingt-cinq ans et qu'il ait été vérifié expérimentalement que le modèle reproduisait bien les observations à faible taux de pompage [3], la bifurcation de Hopf du modèle monomode n'a, à notre connaissance, jamais été observée expérimentalement. Il est généralement avancé que c'est la limitation expérimentale du taux de pompage qui empêche d'observer ces instabilités en raison, soit de la puissance du laser de pompe lui-même, soit de l'apparition de comportement multimode à forte puissance.

Nous montrons dans cet article que dans les configurations expérimentales les plus communes, l'impossibilité d'observer la bifurcation de Hopf est due à la limitation du désaccord en fréquence du signal et non au niveau de pompage. En effet, on sait qu'un OPO sélectionne spontanément un point de fonctionnement correspondant à un petit désaccord [4]. Contrairement aux hypothèses de nombreux articles théoriques, le désaccord du signal d'un OPO n'est donc pas un paramètre contrôlable du système mais une variable dynamique. Les restrictions que lui impose le phénomène des sauts de mode peut interdire l'observation d'instabilités prédites pour des grandes valeurs du désaccord.

Dans une première partie nous rappelons les grandes lignes du modèle champ moyen monomode dégénéré d'un OPO triplement résonnant (TROPO) et nous donnons l'expression analytique à pompe infinie du plus petit désaccord pour lequel la bifurcation de Hopf peut se produire. Dans une deuxième partie nous donnons l'expression du désaccord maximal autorisé par les sauts de mode. Nous comparons ces deux limites pour des valeurs typiques des paramètres, et montrons leur incompatibilité dans de nombreuses configurations. Nous présentons dans une dernière partie des simulations numériques à valeur

finie du taux de pompage confirmant que dans la plupart des dispositifs expérimentaux, les sauts de mode empêchent d'observer la bifurcation de Hopf, et que les configurations pour lesquelles cette observation serait possible semblent difficiles à mettre en oeuvre.

2 Instabilité de Hopf du modèle champ moyen monomode dégénéré

Rappelons tout d'abord les équations gouvernant la dynamique d'un TROPO. Dans un tel système, deux champs sous-harmoniques (le signal et le complémentaire) sont générés à partir d'un champ pompe A_p par interaction paramétrique dans un cristal non linéaire placé dans une cavité résonante pour les trois champs. Le modèle le plus simple pour décrire ce système est un modèle champ moyen monomode dégénéré dans lequel l'amplitude du champ du signal A_s décrit l'évolution commune des champs générés :

$$\dot{A}_s = -(1 + i\Delta_s)A_s + A_s^*A_p, \quad (1)$$

$$\dot{A}_p = \gamma [-(1 + i\Delta_p)A_p - A_s^2 + E], \quad (2)$$

où Δ_s et Δ_p sont les désaccords des champs signal et pompe, et E le taux de pompage. L'unité de temps est le temps de décroissance du champ du signal dans la cavité et γ est le rapport entre les temps de vie des photons du signal et ceux de la pompe dans la cavité. Le seuil d'émission paramétrique

$$E_{seuil}^2 = (1 + \Delta_p^2)(1 + \Delta_s^2). \quad (3)$$

correspond au taux de pompage au-dessus duquel les équations (1) et (2) admettent des solutions stationnaires non nulles [2]. Ces solutions se déstabilisent par une bifurcation de Hopf donnant naissance à des solutions périodiques au-delà d'un taux de pompage donné par

$$E_H^2 = \left[\frac{\gamma^2(1 + \Delta_p^2) + 4(1 + \gamma)}{-2(1 + \gamma)^2 \left[1 + \frac{2(1 + \Delta_p \Delta_s)}{\gamma(1 + \Delta_p^2)} \right]} - (\Delta_p \Delta_s - 1) \right]^2 + (\Delta_p + \Delta_s)^2, \quad (4)$$

à condition que les désaccords vérifient l'inégalité :

$$\Delta_p \Delta_s < - \left[1 + \frac{\gamma(1 + \Delta_p^2)}{2} \right]. \quad (5)$$

A taux de pompage plus élevé, une cascade de doublement de période conduit à un régime chaotique.

L'inégalité (5) assure que E_H soit fini, ce dernier tendant vers l'infini lorsqu'on s'approche de l'égalité. Or, il est généralement admis que les instabilités prévues dans les OPO ne sont pas observées expérimentalement parce qu'elles apparaissent à des taux de pompage trop élevés. Comme nous voulons au contraire étudier le rôle joué par les désaccords dans l'apparition des instabilités, nous considérerons dans un premier temps que la puissance de pompe disponible est infinie. Dans ces conditions, l'égalité dans (5) peut être atteinte, et délimite à elle seule les régions de l'espace des paramètres à l'intérieur desquels l'instabilité de Hopf est susceptible de se produire.

La figure 1 représente pour différentes valeurs de γ les courbes du plan (Δ_p, Δ_s) où l'équation (5) est une égalité, les zones où la bifurcation de Hopf peut se produire étant situées du côté des grands désaccords. Cette figure montre clairement que la bifurcation ne peut apparaître que pour des valeurs non nulles des désaccords. On peut notamment calculer la valeur minimale que le désaccord du signal doit prendre :

$$\Delta_s^{\min} = \min\{|\Delta_s|\} = \sqrt{\gamma(\gamma + 2)}, \quad (6)$$

qui correspond à un désaccord de la pompe $|\Delta_p| = \sqrt{(\gamma + 2)/\gamma}$.

Nous voyons donc que de même qu'il existe un seuil sur le taux de pompage pour observer des instabilités, il existe un seuil sur les désaccords. Le problème est que pour atteindre cette valeur expérimentalement, la dextérité du manipulateur ne suffit pas. En effet les désaccords ne sont pas des paramètres contrôlables du système mais des variables dynamiques : l'oscillateur paramétrique optique cherche constamment à minimiser le désaccord du signal. Dans la partie suivante nous donnons donc une expression analytique de la limite supérieure que ce mécanisme impose aux valeurs prises par les désaccords.

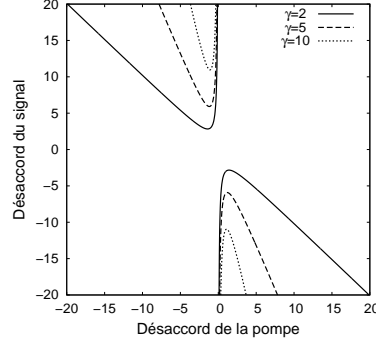


Fig.1. Carte (Δ_p, Δ_s) des domaines d'instabilités à pompe infinie pour différentes valeurs du paramètre γ .

3 Sélection de mode dans un OPO

Nous rappelons ici le principe de la sélection d'un mode d'oscillation dans l'OPO, plus précisément d'un couple de modes signal/complémentaire. La manière dont l'OPO "choisit" spontanément sa fréquence a été étudiée en détail dans les travaux consacrés à l'accord en fréquence des OPO (voir par exemple [4]), c'est à dire l'évolution des fréquences générées lorsqu'on fait varier un paramètre de contrôle. Cette évolution est discontinue : elle comporte des sauts de modes. En effet, l'OPO choisit parmi tout un peigne de modes de fonctionnement celui qui conduira au seuil le plus bas. Quand le peigne se déplace à cause de l'ajustement d'un paramètre, un nouveau mode peut devenir plus favorable. Le système bascule alors sur ce nouveau mode avec un saut de fréquence. Ces sauts peuvent se faire entre des modes adjacents sur le peigne ou entre des modes plus éloignés. Nous nous intéresserons uniquement au premier cas, le deuxième étant d'une part plus rare, et d'autre part leur prise en compte ne changeant pas nos conclusions.

Le désaccord du champ du signal (resp. du complémentaire) est défini par $\Delta\omega_{s(c)} = \omega_{s(c)} - \omega_{s(c)}^R$, où $\omega_{s(c)}^R$ est une fréquence de résonance de la cavité pour le champ du signal (resp. du complémentaire) et $\omega_{s(c)}$ les fréquences des champs. Ces dernières sont reliées à la fréquence de la pompe par la relation de la conservation de l'énergie : $\omega_s + \omega_c = \omega_p$. On peut définir le désaccord total du mode :

$$\Delta\omega = \Delta\omega_s + \Delta\omega_i = \omega_p - \omega_s^R - \omega_i^R. \quad (7)$$

Si $\delta\omega_{s(c)}$ est l'intervalle spectral libre de la cavité pour le champ du signal (resp. du complémentaire), il existe un nombre entier $N_{s(c)}$ tel que $\omega_{s(c)}^R = N_{s(c)}\delta\omega_{s(c)}$. Lorsque $|\delta\omega_s - \delta\omega_c| \ll \delta\omega_{s,c}$, les sauts de modes se font entre modes adjacents et correspondent à des variations d'une unité et opposées des nombres N_s et N_c . Les modes de cavité impliqués dans le saut de mode ont donc comme fréquences :

$$\omega_s^R = (N_s \pm 1)\delta\omega_s, \quad (8)$$

$$\omega_i^R = (N_i \mp 1)\delta\omega_i. \quad (9)$$

Si on considère les désaccords totaux de deux modes adjacents notés respectivement $\Delta\omega$ et $\Delta\omega'$:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_p - N_s\delta\omega_s - N_i\delta\omega_i, \\ \Delta\omega' &= \omega_p - (N_s + 1)\delta\omega_s - (N_i - 1)\delta\omega_i, \end{aligned}$$

la différence $\Delta\omega' - \Delta\omega = \delta\omega_i - \delta\omega_s$ entre les deux désaccords est alors indépendante du couple de modes considéré, et le désaccord le plus proche de zéro sera nécessairement dans l'intervalle $[-\frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_i|}{2}, \frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_i|}{2}]$. La valeur la plus grande atteignable avant un saut de mode est donc la valeur absolue des extrémités de cet intervalle :

$$\Delta\omega_{max} = \frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_i|}{2}. \quad (10)$$

Notons que cette valeur peut être retrouvée à partir de l'expression du désaccord total donnée par Eckardt *et al.* [4] si on se place dans le cas particulier du désaccord maximal.

Pour comparer cette limite à celle obtenue en (6), nous allons exprimer $\Delta\omega_{max}$ avec la même normalisation. Si les finesses de la cavité pour les champs signal et complémentaire peuvent être considérées comme égales, et qu'on note cette valeur \mathcal{F}_s , on peut montrer que

$$\Delta_s = \frac{2\mathcal{F}_s\Delta\omega}{\delta\omega_s + \delta\omega_i}. \quad (11)$$

La valeur maximale du désaccord autorisé est alors donnée par

$$|\Delta_{max}| = \mathcal{F}_s \frac{|\delta\omega_s - \delta\omega_i|}{\delta\omega_s + \delta\omega_i}, \quad (12)$$

ou de manière équivalente par

$$|\Delta_{max}| = 2\mathcal{F}_s \frac{|\delta n| l_c}{[L]}, \quad (13)$$

où L_{cav} est la longueur de la cavité, l_c celle du cristal, $n_{s(c)}$ les indices respectifs des champs et c la célérité de la lumière dans le vide. $[L]$ est la longueur optique moyenne d'un aller-retour dans la cavité : $[L] = 2(L_{cav} + (\frac{n_s+n_i}{2} - 1)l_c)$ et $\delta n = \frac{|n_s-n_i|}{2}$.

Le désaccord maximal augmente donc avec la finesse de la cavité pour le signal ou la biréfringence. Par contre la taille de la cavité doit être choisie la plus petite possible pour maximiser les intervalles spectraux libres. Sur la figure 2, la courbe en trait plein donne Δ_{max} en fonction de la taille de la cavité pour nos conditions expérimentales ($n_s = 1.75$, $n_c = 1.83$, $l_c = 15mm$ et $\mathcal{F}_s = 500$).

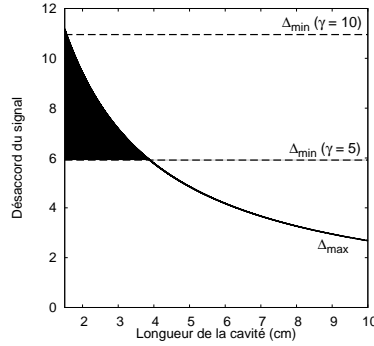


Fig.2. Courbes donnant le désaccord maximal autorisé par les sauts de mode (trait plein) et les désaccords minimaux pour observer l'instabilité (traits pointillés).

Il ne nous reste plus qu'à confronter ces valeurs limites à celles obtenues en (6) pour déterminer si les domaines instables existent toujours quand on restreint Δ_s à l'intervalle $[-\Delta_{max}, \Delta_{max}]$. Sur la figure 2, les droites pointillées horizontales correspondent à $\Delta_s = \Delta_{min}$ pour deux valeurs de γ différentes. La plus haute correspond à $\gamma = 10$, une valeur expérimentale typique. Le domaine de valeurs de Δ_s compris entre cette droite et la courbe en trait plein est quasiment vide : il n'est pas possible de trouver une configuration de l'OPO permettant d'observer la bifurcation de Hopf, et cela quelle que soit la puissance de pompe disponible. Dans cette configuration, ce sont donc les sauts de mode, et non la puissance de la pompe, qui limitent l'exploration de l'espace des paramètres. La droite pointillée la plus basse correspond à $\gamma = 5$. Le domaine de valeurs du désaccord autorisées par la sélection de mode et remplissant les conditions de bifurcation apparaît en noir sur la figure. Il est donc possible, pour des cavités suffisamment courtes et des faibles valeurs de γ de remplir ces conditions à pompe infinie. Cependant diminuer $\gamma = \mathcal{F}_s/\mathcal{F}_p$ en

gardant \mathcal{F}_s constant pour ne pas modifier Δ_{max} oblige à augmenter \mathcal{F}_p ce qui rend le fonctionnement de l'OPO plus difficile comme nous le décrirons plus loin.

Dans cette partie, nous avons donc donné l'expression du désaccord maximal autorisé par les sauts de mode, et montré que cette limite peut empêcher d'atteindre le domaine d'instabilité, et ce même en considérant une pompe infinie. Le taux de pompage n'est donc pas le seul facteur limitant l'observation d'instabilités dans les OPO.

4 Cas d'un taux de pompage fini

Nous cherchons maintenant à déterminer comment sont modifiées nos conclusions à pompe finie. Tout d'abord, nous estimons qualitativement l'influence de la réduction du taux de pompage sur nos valeurs limites des désaccords. Ensuite nous explorons numériquement quelques cas pour illustrer nos propos.

L'expression de Δ_{min} donnée en (6) a été calculée à partir du cas d'égalité de la relation 5. Ce cas correspond à une valeur infinie du seuil de la bifurcation de Hopf. Pour une valeur finie de la pompe, la relation 5 doit pour faire descendre le seuil d'instabilité s'éloigner de l'égalité, et donc les domaines d'instabilité de la figure 1 rétrécissent et s'éloignent de l'origine. La valeur minimale du désaccord du signal à pompe finie sera donc supérieure à Δ_{min} .

En ce qui concerne la limitation par la sélection de mode, celle-ci ne fait pas intervenir le taux de pompage. Cependant, il faudra tenir compte pour un taux de pompage fini E du seuil d'oscillation paramétrique donné par l'équation 3 : il pourra exister des situations dans lesquelles le désaccord est inférieur à Δ_{max} mais où l'amplitude du signal sera nulle car le taux de pompage est inférieur à $\frac{E_{seuil} \cdot L}{\sqrt{\frac{E^2}{1+\Delta_p^2} - 1}}$. La valeur maximale du désaccord sera donc donnée par la plus petite des deux valeurs Δ_{max} et $\sqrt{\frac{E^2}{1+\Delta_p^2} - 1}$.

Au total, la prise en compte d'une pompe finie augmente Δ_{min} et diminue Δ_{max} , restreignant encore plus l'intervalle de valeurs du désaccord du signal dans lequel l'observation de la bifurcation est possible. La figure 3 montre les zones d'instabilité observées dans quatre simulations numériques. Elles ont été effectuées pour une même puissance de laser de pompe (4 W) et une même taille de cavité (3 cm), mais pour différentes valeurs des finesses de cavité signal et pompe. Ces résultats confirment entièrement nos prédictions. Sur la figure 3(a), on constate que le taux de pompage accessible expérimentalement ne permet pas d'obtenir des zones instables. Sur les figures 3(b) et (c) des zones instables à pompe finie existent mais elles sont presque entièrement en dehors de l'intervalle autorisé par les sauts de mode. Enfin, sur la figure 3(d) les zones instables ont une taille raisonnable, d'environ 17% de la surface comprise entre les droites $\pm\Delta_{max}$. On remarquera que dans les cas des figures 3(b), (c) et (d) les zones instables à pompe finie (en noir) sont bien approchées par les courbes à pompe infinie (tirets) près du désaccord minimal. On en conclut que s'il n'y avait pas de limites sur les désaccords, notre puissance de pompe expérimentale serait tout à fait suffisante pour atteindre la zone instable.

Il faut noter que si le cas de la figure 3(d) semble favorable à l'observation de la bifurcation de Hopf, il correspond en fait à des valeurs des finesses peu réalistes. En effet, un TROPO requiert une finesse de la cavité pour la pompe beaucoup plus faible que la finesse du signal de manière à ce que la condition de triple résonance ne soit pas trop critique à réaliser. Or les domaines instables à l'intérieur de l'intervalle $\pm\Delta_{max}$ ne deviennent de taille non négligeable que pour de faibles valeurs de γ c'est-à-dire quand les finesses de la pompe et du signal sont du même ordre. Ceci rend le dispositif délicat à manier, il nécessite notamment une grande stabilité de la taille de la cavité. Comme d'autre part l'OPO est très sensible aux effets thermiques [5], et qu'une augmentation des finesses de la cavité engendre une forte augmentation des puissances intra-cavité, le risque d'instabilités thermiques et de dérive de la taille de la cavité sera d'autant plus important dans un tel dispositif. Les configurations de l'OPO pour lesquelles la bifurcation de Hopf du modèle monomode serait observable ne sont donc absolument pas naturelles.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons donc montré dans un exemple simple, la bifurcation de Hopf du modèle champ moyen monomode dégénéré, que les sauts de mode peuvent tronquer la dynamique d'un TROPO.

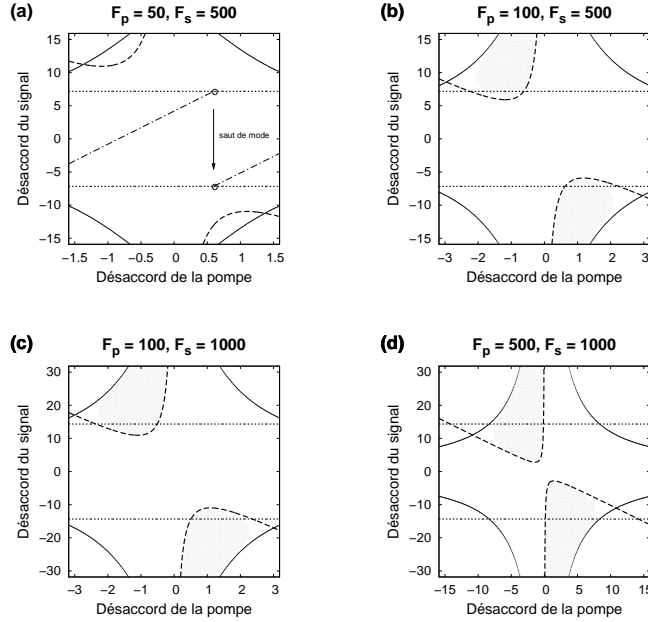


Fig.3. Cartes (Δ_p, Δ_s) pour différentes valeurs de \mathcal{F}_p et \mathcal{F}_s . Les courbes en trait plein aux quatre coins délimitent la zone à l'intérieur de laquelle l'émission paramétrique a lieu, les deux courbes en tirets en haut à gauche et en bas à droite correspondent aux courbes de la figure 1 (égalité de la relation (5)). Les droites parallèles horizontales indiquent l'intervalle $[-\Delta_{max}, \Delta_{max}]$. Enfin, les zones noircies correspondent aux zones d'instabilité à pompe finie. (a) : la ligne en points et tirets montre un exemple d'évolution possible des désaccords lorsqu'on accorde la cavité : le basculement d'un segment à un autre lorsque la valeur limite est atteinte correspond à un saut de mode.

Nous avons d'abord étudié ce modèle à taux de pompage infini, et nous avons obtenu l'expression du plus petit désaccord du signal nécessaire à l'observation de l'instabilité. Nous avons ensuite montré à partir de l'étude des mécanismes des sauts de mode qu'il existe une valeur maximale que les désaccords peuvent prendre. En comparant ces deux valeurs, nous en avons déduit que l'existence de cette limite supérieure peut empêcher d'atteindre les conditions requises pour observer la bifurcation de Hopf, même à pompe infinie. Nous avons ensuite présenté des simulations numériques à pompe finie renforçant nos conclusions. Même s'il existe des configurations expérimentales pour lesquelles la bifurcation de Hopf devrait être observable, celles-ci nous semblent correspondre à des dispositifs expérimentaux peu praticables. Pour conclure, nous soulignons que si notre étude s'est attachée à détailler le cas d'une bifurcation d'un modèle particulier, l'analyse devrait pouvoir se généraliser à de nombreuses études d'instabilités dans les OPO.

Références

1. P. DRUMMOND, K. MCNEIL AND D. WALLS, Non-equilibrium transitions in sub/second harmonic generation I. Semiclassical theory, *Optica Acta*, **27**, 321 (1980).
2. L. A. LUGIATO, C. OLDANO, C. FABRE, E. GIACOBINO AND R. J. HOROWICZ, Bistability, self-pulsing and chaos in optical parametric oscillators, *Il Nuovo Cimento*, **10D**, 959 (1988).
3. C. RICHY, K. I. PETSAS, E. GIACOBINO, C. FABRE AND L. LUGIATO, Observation of bistability and delayed bifurcation in a triply resonant optical parametric oscillator, *J. Opt. Soc. Am. B*, **12**, 456 (1995).
4. R. ECKARDT, C. NABORS, W. KOSLOVSKY AND R. BYER, Optical parametric oscillator frequency tuning and control, *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**, 646 (1991).
5. P. SURET, D. DEROZIER, M. LEFRANC, J. ZEMMOURI AND S. BIELAWSKI, Self-pulsing instabilities in an optical parametric oscillator : Experimental observation and modeling of the mechanism, *Phys. Rev. A*, **61**, 021805(R) (2000).

Contrôler l'interaction onde-particules

R. Bachelard¹, C. Chandre¹, X. Leoncini¹, M. Vittot¹, A. Antoniazzi² & D. Fanelli²

¹ Centre de Physique Théorique, CNRS Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France

² Dipartimento di Energetica and CSDC, Università di Firenze, INFN, via S. Marta, 3, 50139 Firenze, Italy
bachelard@cpt.univ-mrs.fr

Résumé. L'interaction entre une onde et un faisceau de particules chargées peut être décrite dans le cadre Hamiltonien, dans lequel une structure cohérente de particules, appelée *macro-particule*, est responsable des oscillations de l'intensité de l'onde. On rencontre notamment ce comportement dans les Lasers à Electrons Libres ou dans les Tubes à Ondes Progressives. Dans cet article, nous proposons une méthode de contrôle afin d'influencer la macro-particule grâce à une petite perturbation du Hamiltonien. Nous montrons que l'élargissement de la macro-particule est associée à la reconstruction de tores invariants.

Abstract. The interaction between a wave and a bunch of charged particles can be cast in a Hamiltonian form for which there is a coherent structure of particles, called macro-particle, responsible for the oscillations of the intensity of the wave. This is encountered in a Free Electron Laser or a Travelling Wave Tube. In this article, we apply a control technique to influence the macro-particle by a slight modification of the Hamiltonian. We show that the enlargement of the macro-particle is associated with the recreation of invariant tori.

1 Introduction

L'interaction auto-cohérente entre une onde électromagnétique (ou un ensemble d'ondes) et un faisceau de particules chargées est omniprésente dans la physique atomique, la physique des accélérateurs et la physique des plasmas. Elle est au coeur du fonctionnement de nombreux appareils, dont le Laser à Electrons Libres (LEL), utilisé pour générer une lumière fortement cohérente et puissante, dont la longueur d'onde est réglable. A la différence des lasers classiques, l'effet laser est obtenu grâce à un faisceau d'électrons ultra-relativistes. Le mécanisme responsable de l'émission cohérente des électrons repose sur leur interaction avec une onde, à travers un onduleur par exemple. Grâce au champ magnétostatique généré par ce dernier, les électrons suivent des trajectoires sinusoïdales, le long desquelles ils émettent une radiation synchrotron. L'onde initialement introduite dans le laser est alors amplifiée le long de l'onduleur jusqu'à ce que l'effet laser soit atteint.

L'évolution conjointe de l'onde générée et du faisceau de N électrons a été décrite, de manière simplifiée, dans le formalisme Hamiltonien par Bonifacio *et al* [1] (dans le cadre d'un LEL Simple-Passage). Ce Hamiltonien à $N + 1$ degrés de liberté présente une partie cinétique, associée aux particules, ainsi qu'un terme potentiel, représentant l'interaction auto-cohérente entre les particules et l'onde. Les interactions directes entre particules sont donc négligées, même si ces dernières interagissent par le biais de l'onde.

La théorie prévoit une instabilité exponentielle, suivie d'un régime saturé, caractérisé par de larges oscillations de l'amplitude de l'onde. Un examen asymptotique de l'espace des phases permet de mettre en évidence un paquet de particules piégées dans la résonance de l'onde, qui évoluent de manière cohérente dans l'espace, à la manière d'une *macro-particule*. Les autres particules sont quasiment uniformément distribuées entre deux frontières oscillantes, et circulent à travers un domaine appelé *mer chaotique*.

Cette observation permet de décrire par un Hamiltonien simplifié la dynamique saturée du laser. Dans cette description, seuls quatre degrés de liberté sont pris en compte, respectivement associés à l'onde, la macro-particule, ainsi qu'aux deux frontières oscillantes qui délimitent la mer chaotique [3].

Or la macro-particule tourne autour d'un point fixe, et cette dynamique particulière est à l'origine des oscillations de l'intensité. On peut donc supposer qu'une réduction importante de ces oscillations peut être obtenue en élaborant une stratégie de contrôle vis-à-vis de la macro-particule. En particulier, il s'agit

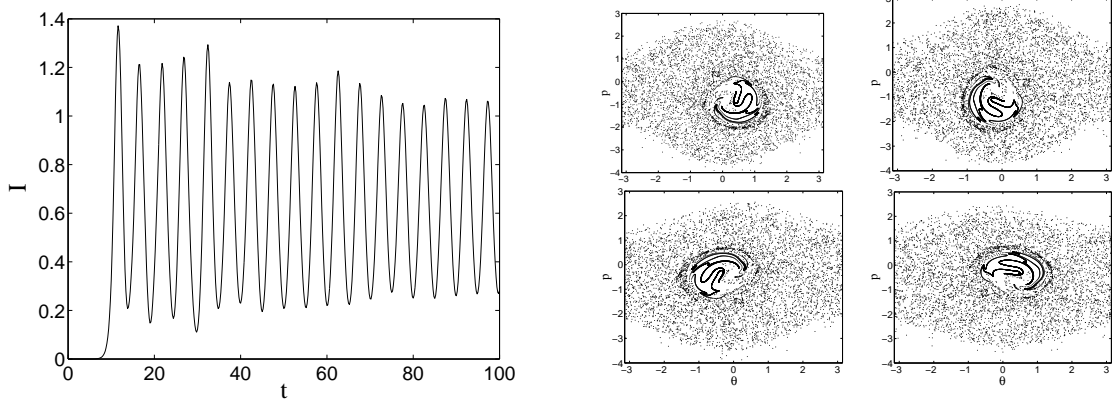


Fig.1. A gauche : intensité normalisée de l'onde issue du LEL, simulée à partir du Hamiltonien (1). A droite : $N = 10000$ électrons dans l'espace des phases, à $t = 400, 401.25, 402.5$ et 403.75 .

de confiner spatialement cet agrégat. Ajoutons que la structure de macro-particule est fortement liée au facteur de *bunching*, un facteur d'importance primordiale dans la dynamique du LEL [3].

Il a été montré [9] qu'une onde-test, de fréquence voisine de celle de l'onde, avait pour effet de détruire la macro-particule, oeuvrant au dépiégeage des particules. Les conséquences de cette stratégie ont été observées sur un Tube à Ondes Progressives [6], notamment l'amortissement des oscillations, toutefois accompagnée par une baisse systématique de la valeur moyenne de l'intensité.

Dans cet article, nous nous concentrons sur la macro-particule, entité née de l'interaction entre l'onde et les particules. Nous développons une technique afin d'influencer - sinon de contrôler - son évolution, ouvrant la perspective, à terme, de stabiliser l'intensité du laser. A cette fin, nous étudions la dynamique d'une particule-test et calculons un *terme de contrôle* approprié, de faible amplitude, qui agit comme une perturbation de la dynamique. Celui-ci a pour effet de générer un élargissement de la macro-particule. On observe aussi une régularisation de la dynamique, ainsi qu'en témoignent les tores invariants apparus autour du coeur de particules piégées.

L'article est organisé de la manière suivante : dans la section 2, nous introduisons le modèle de particule-test et précisons rapidement son obtention à partir du Hamiltonien initial à N particules. Dans la section 3, nous présentons le contrôle de la dynamique d'une particule-test, à travers la reconstruction de tores invariants de sa dynamique. Enfin, nous discutons les possibles implications de la présente analyse.

2 Le modèle de particule-test

La dynamique de l'interaction d'une onde avec N particules peut être décrite par le Hamiltonien [1] :

$$H_N = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2} - 2\sqrt{\frac{I}{N}} \cos(\theta_i + \phi) \right], \quad (1)$$

où les (θ_i, p_i) sont la position et l'impulsion du i -ème électron, tandis que (ϕ, I) représente la phase et l'intensité de l'onde.

Dans le modèle de particule-test, les variables conjuguées (ϕ, I) sont remplacées par deux fonctions du temps $\phi(t)$ et $I(t)$, obtenues à partir de simulations de la dynamique complète à N particules. En d'autres termes, nous négligeons formellement la rétroaction des électrons sur le champ.

Le Hamiltonien à N particules (1) s'écrit alors comme la somme de N Hamiltoniens découplés

$$\tilde{H}_N = \sum_{i=1}^N H_{1p}(\theta_i, p_i, t), \quad (2)$$

avec

$$H_{1p}(\theta, p, t) = \frac{p^2}{2} - 2\sqrt{\frac{I(t)}{N}} \cos(\theta + \phi(t)). \quad (3)$$

La dynamique du LEL peut alors être étudiée à travers l'évolution d'une particule-test, dont le Hamiltonien H_{1p} ne possède que deux degrés de liberté. Les fonctions $I(t)$ and $\phi(t)$ interviennent alors comme des paramètres externes, et sont choisies ici conformément à leur comportements asymptotiques dans la dynamique auto-cohérente, grâce à une méthode d'analyse en fréquence [7]. Ainsi, dans le référentiel de l'onde, le terme d'interaction s'écrit :

$$2\sqrt{\frac{I(t)}{N}} e^{i\phi(t)} \approx F - \epsilon \sum_{k=1}^K W_k e^{i\omega_k t} = F - \epsilon W(t). \quad (4)$$

3 Contrôle de la dynamique d'une particule-test

La méthode de contrôle Hamiltonien présentée ici s'applique aux systèmes proches de l'intégrabilité. Le Hamiltonien s'écrit alors $H = H_0 + V$, où H_0 est intégrable, et V une perturbation d'ordre ϵ (par rapport à H_0). Les résultats utilisés ici ont été prouvés rigoureusement dans [4,10]. En pratique, on peut montrer qu'il existe un *terme de contrôle* f approprié, d'ordre ϵ^2 , tel que le Hamiltonien $H_0 + V + f$ possède un tore invariant à une fréquence choisie ω_0 . Dans notre cas, la perturbation correspond aux fluctuations de l'intensité. Le terme d'interaction de (3) peut s'écrire

$$2\sqrt{\frac{I(t)}{N}} \cos(\theta - \phi(t)) = F \cos \theta - \epsilon \text{Re}(e^{i\theta} W(t)). \quad (5)$$

Ainsi, notre Hamiltonien intégrable correspond à un pendule :

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - F \cos \theta, \quad (6)$$

tandis que la perturbation V , dépendante du temps, s'identifie à

$$V(t, \theta) = \epsilon \text{Re}(e^{i\theta} W(t)). \quad (7)$$

Le Hamiltonien (6) est développé en séries, dans ses variables action-angle (φ, J) (voir [8]), au voisinage de $J = J_0$, qui correspond à l'action à laquelle on cherche à reconstruire le tore invariant.

$$H_0(J) = E_0 + \omega_0(J - J_0) + \delta(J - J_0)^2 + O((J - J_0)^3). \quad (8)$$

De même, la fonction de θ de la perturbation V définie en (7) est développée comme suit :

$$e^{i\theta} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=-L}^L \alpha_{m,n}(J - J_0)^m e^{in\varphi} + h.o.t. \quad (9)$$

Le terme de contrôle s'écrit alors [10] :

$$f(\varphi, t) = V(J_0, \varphi, t) - V(J_0 - \Gamma \partial_\varphi V(J_0, \varphi, t), \varphi, t), \quad (10)$$

où Γ est un opérateur linéaire qui agit sur un élément de la base de Fourier selon

$$\Gamma e^{i(\omega t + n\varphi)} = \frac{e^{i(\omega t + n\varphi)}}{i(\omega + n\omega_0)}. \quad (11)$$

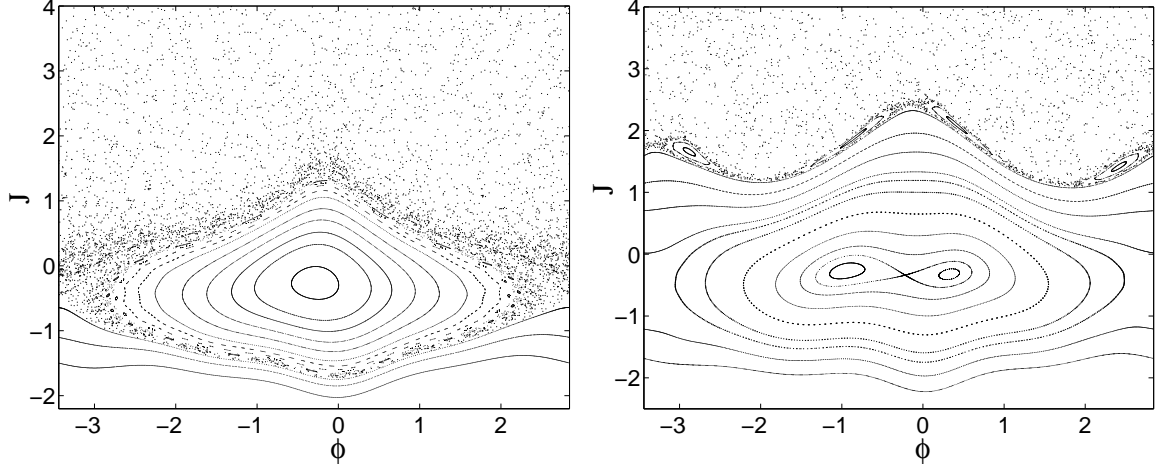


Fig.2. Sections de Poincaré d'une particule-test de Hamiltonien $H_0(J)+V(J, \varphi, t)$ (à gauche) et $H_0(J)+V(J, \varphi, t)+f(\varphi, t)$ (à droite), dans les variables action-angle du pendule.

Au second ordre en ϵ (qui est le principal terme), le terme de contrôle s'écrit

$$f(\varphi, t) = \epsilon^2 w(\varphi, t) \Gamma \partial_\varphi v(\varphi, t) - \epsilon^2 \delta (\Gamma \partial_\varphi v(\varphi, t))^2, \quad (12)$$

avec

$$\Gamma \partial_\varphi v(\varphi, t) = \sum_{k,n} \frac{n \alpha_{0,n} W_k}{\omega_0 n + \omega_k} e^{i(n\varphi + \omega_k t)}, \quad (13)$$

et

$$w(\varphi, t) = \sum_{k,n} \alpha_{1,n} W_k e^{i(n\varphi + \omega_k t)}. \quad (14)$$

Numériquement, nous ne considérons que deux modes de Fourier pour $W(t)$ (i.e. $K = 2$), et onze modes pour la partie dépendante de θ (i.e. $L = 5$). L'amplitude de la perturbation est d'ordre $\epsilon = 1/5$. Le développement en série est effectué autour de $J_0 \approx 1.33$ (ce qui correspond à une énergie $E_0 = 0$).

Dans les variables action-angle, la régularisation de la dynamique apparaît clairement (voir Fig.2). Le terme de contrôle a permis de reconstruire non seulement le tore KAM prédit par la théorie, mais aussi un ensemble infini de tores invariants autour (l'existence de cet ensemble provient de la nature robuste du tore d'action J_0 et découle du théorème KAM).

Notons que la transformation exacte entre les variables initiales (θ, p) et les variables action-angle (φ, J) comporte une singularité au niveau des séparatrices du pendule. Afin d'implémenter le contrôle sur tout l'espace des phases, et car seul son effet au voisinage de $J = J_0$ importe, nous utilisons un changement de variables simplifié, mais régulier, qui représente une très bonne approximation (à 4% près) de l'original dans la zone de contrôle $J = J_0$ (voir Fig.3) :

$$\tan \varphi = \frac{\theta}{p}. \quad (15)$$

Dans les variables originales (θ, p) variables, notre terme de contrôle s'écrit donc :

$$\tilde{f}(\theta, p, t) = f(\arctan \frac{\theta}{p}, t), \quad (16)$$

et sa régularité est celle de la fonction $(\theta, p) \mapsto \arctan \frac{\theta}{p}$. Ainsi, la dynamique contrôlée d'une particule-test est décrite par le Hamiltonien :

$$H_c(\theta, p, t) = H_{1p}(\theta, p, t) + \tilde{f}(\theta, p, t) \quad (17)$$

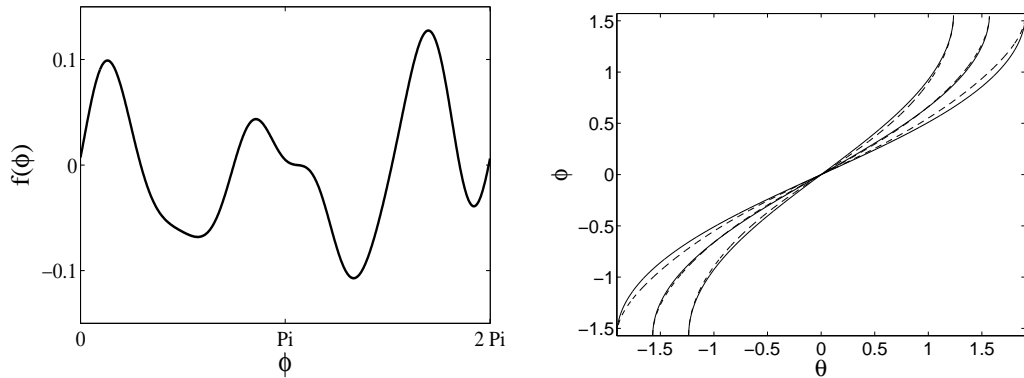


Fig.3. A gauche : terme de contrôle $f(\phi)$. A droite : comparaison des changements de variables exact et simplifié : φ est tracé en temps que fonction de θ , à énergie constante (donc à action J constante). Le trait continu correspond au changement de variables exact, le pointillé au changement simplifié. Les courbes correspondent, de gauche à droite, à $E = 0.5, 0$ (zone de contrôle) et -0.5 .

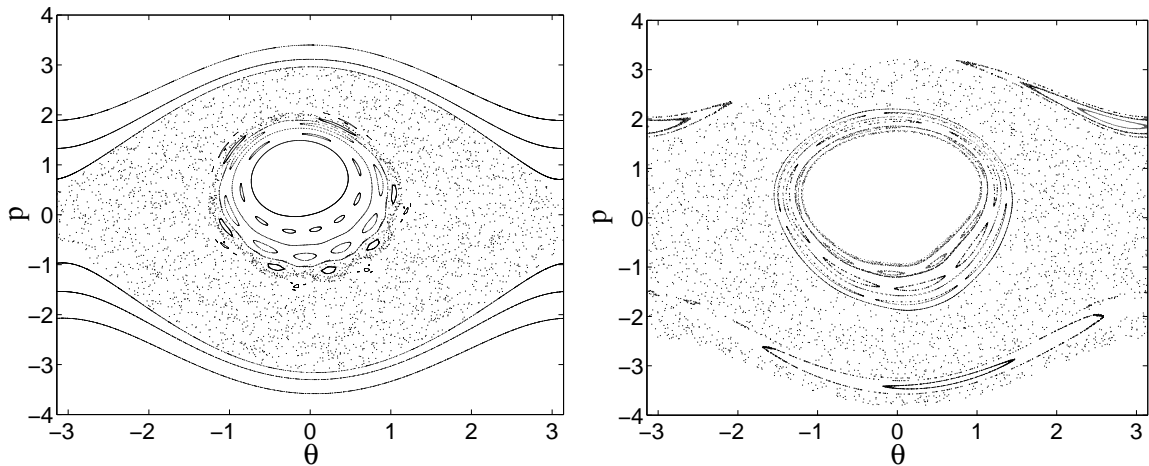


Fig.4. Sections de Poincaré d'une particule-test de Hamiltonien $H_{1p}(\theta, p, t)$ (à gauche) et $H_{1p}(\theta, p, t) + \tilde{f}(\theta, p, t)$ (à droite).

Dans ces variables (voir Fig.4), le contrôle permet à nouveau de reconstruire un ensemble de tores invariants autour de la macro-particule, dans le modèle de la particule-test. En d'autres termes, on observe un élargissement de la macro-particule.

Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une étude du régime saturé du LEL Simple-Passage à travers la dynamique d'une particule-test. En particulier, nous avons montré qu'il était possible d'augmenter la taille de la macro-particule à l'aide d'une petite perturbation du système, auquel est donc associé un faible coût en énergie. L'idée principale est de reconstruire des tores invariants de la dynamique en des endroits précis : cette méthode est parfaitement générique et pourrait être utilisée pour fixer la taille de la macro-particule, afin d'améliorer le facteur de "bunching". De même, en limitant le domaine de l'espace des phases parcouru par la macro-particule, il serait possible de stabiliser l'intensité du laser. Deux pistes s'ouvrent dorénavant pour cette méthode : La première est d'implémenter le contrôle décrit ci-dessus dans le cadre de la dynamique auto-cohérente à N particules, afin de voir quels bénéfices en retirerait l'onde.

La seconde serait d'appliquer cette méthode de contrôle à la description Hamiltonienne réduite de [2,3]. Soulignons que l'efficacité expérimentale de la méthode de contrôle a été vérifiée expérimentalement sur un Tube à Ondes Progressives [5], en l'absence de rétroaction avec l'onde.

Références

1. R. BONIFACIO *et al.*, Physics of the high-gain FEL and superradiance. *Rivista del Nuovo Cimento*, **3**, 1-69 (1990).
2. J.L. TENNYSON, J.D. MEISS, ET P.J. MORRISON, Self-Consistent Chaos in the Beam-Plasma Instability, *Physica D*, **71**, 1-17 (1994).
3. A. ANTONIAZZI, Y. ELSKENS, D. FANELLI ET S. RUFFO, Statistical mechanics and Vlasov equation allows for a simplified Hamiltonian description of Single-Pass Free Electron Laser saturated dynamics, *Europ. Phys. J. B.*, in press (2006).
4. M. VITTOT, Perturbation theory and control in classical or quantum mechanics by an inversion formula, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **37**, 6337-6357 (2004).
5. C. CHANDRE, G. CIRAOLO, F. DOVEIL, R. LIMA, A. MACOR ET M. VITTOT, Channeling chaos by building barriers, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 074101 (2005).
6. G. DIMONTE, J.H. MALMBERG, Destruction of Trapped-Particle Oscillations, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 401-404 (1977).
7. J. LASKAR, Introduction to Frequency Map Analysis, *Proc. of NATO ASI Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, (C. Simò Ed, Kluwer), 134-150 (1999).
8. A.J. LICHTENBERG, ET M.A. LIBERMANN, *Regular and Stochastic Motion* Springer, New York (1983).
9. G.R. SMITH, ET N.R. PEREIRA, Phase-locked particle motion in a large-amplitude plasma wave, *Phys. Fluids*, **21**, 2253-2262 (1978).
10. M. VITTOT, C. CHANDRE, G. CIRAOLO ET R. LIMA, Localized control for non-resonant Hamiltonian systems, *Nonlinearity*, **18**, 423-440 (2005).

Observation de transport de champ magnétique dans un écoulement turbulent de sodium liquide

M. Berhanu¹, A. Chiffaudel², F. Daviaud², S. Fauve¹, R. Monchaux², N. Mordant¹, Ph. Odier³, F. Ravelet², F. Pétrélis¹, J.-F. Pinton³, & R. Volk³

¹ Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, CNRS UMR 8550, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

² Service de Physique de l'Etat Condensé, Direction des Sciences de la Matière, CEA-Saclay, CNRS URA 2464, 91191 Gif-sur-Yvette cedex, France

³ Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, CNRS UMR 5672, 46 Rue d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

mberhanu@lps.ens.fr

Résumé. Des mesures récentes ont permis de mettre en évidence expérimentalement le transport du champ magnétique pour un écoulement turbulent de sodium liquide. Ce phénomène est prévu dans le cadre de la magnétohydrodynamique [1,2] : l'équation d'évolution du champ magnétique, quand celui ci est suffisamment faible pour ne pas modifier l'écoulement, comporte un terme d'advection par l'écoulement et un terme diffusif dû à la résistivité électrique du fluide. On se place alors dans la problématique de l'advection d'un vecteur passif par un écoulement turbulent. La portée de ce phénomène s'étend à l'astrophysique et la géophysique, en étant invoqué à la fois pour les plasmas interstellaires, mais aussi lors de la génération de tous les champs magnétiques naturels par effet dynamo. Les premières mesures ont été effectuées avec l'expérience Von Karman Sodium 2 au centre de Cadarache du CEA [5]. Le protocole adopté consiste à introduire dans un écoulement confiné fortement turbulent de sodium liquide, une source localisée de champ magnétique, en l'occurrence un aimant permanent et de mesurer le champ magnétique à une distance de la source telle que le champ mesuré au repos soit d'amplitude inférieure au champ magnétique terrestre. Au delà de la simple mise en évidence du transport, on a pu par la suite, caractériser plus finement ce phénomène à la fois dans l'espace et le temps par l'étude de ses propriétés spectrales et statistiques. De plus l'examen des signaux expérimentaux révèlent deux faits remarquables : l'intermittence de l'amplitude du champ transporté ainsi que l'orientation préférentielle de sa direction.

1 Introduction

L'étude de la turbulence magnétohydrodynamique présente un fort intérêt en astrophysique et en géophysique. En effet la plupart des fluides astrophysiques sont assez ionisés pour coupler la matière neutre aux ions et aux champs et les écoulements suffisamment rapides pour être turbulents. De plus les champs magnétiques des planètes, dont la Terre, sont produits grâce à des mouvements turbulents de couches internes conductrices spontanément par effet dynamo (conversion d'énergie cinétique en énergie électromagnétique). Mais l'origine de la génération de champ magnétique ainsi qu'une modélisation correspondant aux observations restent à déterminer. Pour ces deux exemples on invoque [1] un effet de transport du champ magnétique par l'écoulement turbulent, dans le premier cas lors de l'observation du champ magnétique loin des sources supposées et dans le second pour un bouclage de l'effet dynamo. Dans cet article on s'intéresse plus précisément à l'observation expérimentale et l'étude du transport du champ magnétique, par les écoulements turbulents.

Dans le cadre de la magnétohydrodynamique, l'équation dite de l'induction exprime l'évolution du champ magnétique \vec{B} en présence d'un écoulement de fluide conducteur dont le champ de vitesse est \vec{v} , avec μ_0 la perméabilité magnétique du vide et σ la conductivité électrique du fluide.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} \quad (1)$$

On peut alors définir la diffusivité magnétique $\nu_m = (\mu_0 \sigma)^{-1}$, caractérisant la diffusion du champ magnétique (reliée à la dissipation Joule). Le terme $\vec{v} \cdot \nabla (\vec{v} \wedge \vec{B})$ quant à lui, est le terme d'induction

à proprement parler. Il est responsable du transport du champ magnétique et peut dans certains cas être à la source d'un effet dynamo. L'introduction de nombres caractéristiques adimensionnés permet une analyse plus pertinente du problème. Tout d'abord le nombre de Reynolds $R_e = \frac{LV}{\nu}$, avec L une longueur caractéristique, V une vitesse caractéristique et ν la viscosité cinématique, traduit le rapport dans l'équation de Navier-Stokes entre l'advection du champ de vitesse et la diffusion visqueuse du champ de vitesse. Dans la suite ce nombre sera considéré comme très grand, les écoulements seront turbulents. Le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \frac{LV}{\nu_m}$ traduit dans l'équation de l'induction le rapport entre le terme d'induction et le terme diffusif. Le nombre de Prandtl magnétique $P_m = \frac{\nu}{\nu_m}$, caractéristique de la nature du fluide utilisé, valant pour le sodium $2 \cdot 10^{-5}$ compare la diffusion de quantité de mouvement et la diffusion du champ magnétique. En absence d'effet dynamo le champ magnétique sera principalement celui imposé par l'expérimentateur, trop faible pour influencer l'écoulement, on aura un vecteur passif. Lors des expériences à Reynolds magnétique variant entre l'unité et 30, le comportement est intermédiaire entre deux limites. A petit R_m l'évolution est de type diffusif; on observe en particulier le phénomène d'effet de peau. A grand R_m le terme dit d'induction peut s'interpréter comme l'advection d'un vecteur. En effet le théorème d'Alven montre que pour une diffusivité magnétique nulle, les lignes de champ magnétique se confondent avec les lignes de courant de l'écoulement [2]. Ainsi si à l'instar d'un scalaire passif, le champ magnétique suit une équation d'advection diffusion, un des buts de cette étude est d'identifier des effets propres au transport d'un vecteur passif par la turbulence.

2 Dispositif et protocole expérimental

La plate forme expérimentale von Karman Sodium 2 consiste à la génération d'un écoulement fermé fortement turbulent de sodium liquide dans une cuve cylindrique de diamètre intérieur de 578 mm et de longueur 604 mm, par la contrarotation de deux disques de rayon $R=154.5$ mm sur lesquels sont fixés 8 pales courbes de hauteur 41.2 mm. Par rapport à la première version [5], le volume de fluide en mouvement et la puissance des moteur ont été doublés et un dispositif de refroidissement a été installé pour réguler la température du sodium. On peut ainsi atteindre des fréquences de rotation Ω de l'ordre de 20 Hz. Ce dispositif permet d'effectuer des expériences de magnétohydrodynamique pour des valeurs du nombre de Reynolds magnétique qui s'évalue ici par $R_m = 2\pi\mu_0\sigma R^2\Omega$, comprises entre 10 et 30. L'écoulement moyen ainsi généré comporte de cellules de recirculation de part et d'autre du plan médian dû à l'éjection radiale du fluide aux niveau des disques, en plus des mouvements de rotation. L'écoulement contrarotatif se caractérise de plus par un très fort taux de turbulence, les fluctuations étant du même ordre que l'écoulement moyen. L'utilisation d'un aimant cylindrique *NdFeB* de 22 mm de diamètre et 10 mm de hauteur s'est avérée comme une manière simple et efficace de produire un champ magnétique localisé, avec à sa surface un champ de 0.5 T, mais seulement 1mT lorsqu'on s'en éloigne de 100 mm et assimilable à un dipôle magnétique à partir de 20 mm. On le place au fond d'un doigt de gant vertical dans le plan médian (M sur la figure 1), à une distance de 195 mm de l'axe du cylindre. Les mesures de champ magnétiques sont effectués grâce à 30 transducteurs à effet Hall (Sentron 2SA-10), disposés sur un axe le long d'un doigt de gant horizontal dans le plan médian de telle sorte qu'on puisse mesurer les 3 composantes du champ en dix points séparés de 28 mm. La distance entre le point de mesure et l'aimant varie alors entre 200 et 360 mm, distances pour lesquelles le champ rayonné par l'aimant est très inférieur au champ magnétique terrestre qui est de l'ordre de 0.05 G (1 Gauss = 10^{-4} Tesla). De plus des mesures en absence d'aimant pour une vitesse de rotation des disques donnée montre que dans ce cas l'écart type reste en dessous de 0.2 G. Afin d'isoler la contribution du champ dû à l'aimant, on étudiera de préférence les fluctuations qui seront effectivement attribuées à l'aimant lorsqu'elles excèdent 0.4 G. La position de l'aimant par rapport à la sonde est très particulière vis à vis de l'écoulement moyen. En effet du fait de l'aspiration des disques, la sonde n'est absolument pas dans le sillage de l'aimant. On mesure ainsi le transport dû à l'effet des fluctuations turbulentes importantes par rapport à l'écoulement moyen.

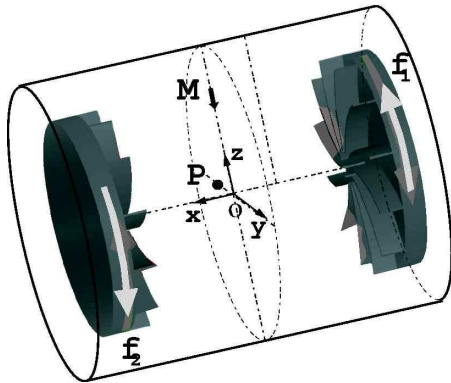


Fig.1. Schéma de la cuve de la plate forme expérimentale VKS2

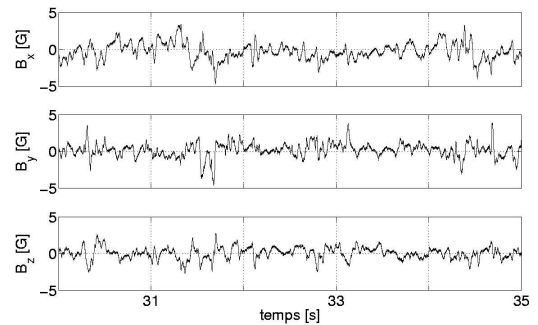


Fig.2. Extrait du signal temporel des composantes du champ magnétique pour une vitesse de rotation des disques $\Omega = 15Hz$ pendant 5 s.

3 Mise en évidence du transport de champ magnétique

Un signal d'amplitude de l'ordre du Gauss sur les capteurs de la sonde de champ magnétique est ainsi observé, lorsque le sodium est en mouvement. Le signal temporel des composantes en une position de la sonde du champ magnétique présentent (Fig. 2) un aspect relativement intermittent, une faible autocorrélation ainsi qu'une faible corrélation entre composantes, sauf peut-être à temps très court.

Lorsqu'on augmente la fréquence Ω de rotation des disques, on observe que l'écart type des fluctuations de chaque composante augmente à peu près linéairement avec Ω , tandis que la valeur moyenne reste à un niveau constant Fig. 3. On peut légitimement penser que l'amplitude du champ magnétique transporté est linéaire avec la vitesse quadratique moyenne de l'écoulement. De plus pour cet écoulement, la part turbulente semble contribuer principalement par rapport à l'écoulement moyen qui induirait une variation de la moyenne du champ magnétique. On remarque de plus que les fluctuations dans la direction O_x , qui est l'axe du cylindre formé par la cuve, sont d'amplitude une fois et demi fois l'amplitude des fluctuations dans les deux autres directions. L'axe de la cuve forme ainsi une direction privilégiée pour le champ magnétique. On peut l'expliquer par l'effet de l'écoulement moyen, qui par le pompage des disques, produit un point de stagnation au centre de la cuve, qui étire le champ magnétique dans la direction O_x et amplifie par conséquent localement la composante correspondante.

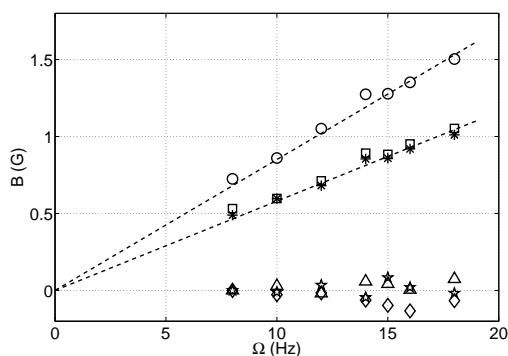


Fig.3. Evolution de l'écart type et de la valeur moyenne des composantes du champ magnétique en fonction de la fréquence de rotation des disques Ω

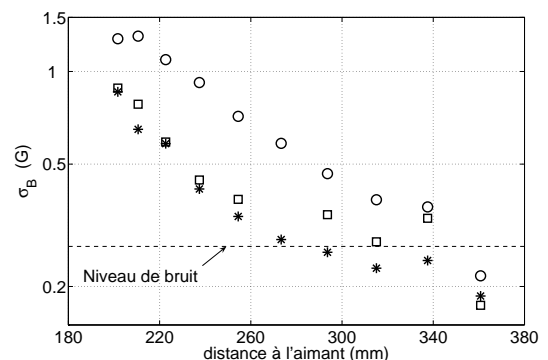


Fig.4. Evolution de l'écart type des composantes du champ magnétique en fonction de la distance à l'aimant pour $\Omega = 15Hz$.

En représentant l'écart type des fluctuations en fonction de la position du capteur sur la sonde de champ magnétique, on observe une décroissance du champ en fonction de la distance à l'aimant (Fig. 4), de type exponentielle, très éloignée de la décroissance en $1/r^3$ du dipôle. On remarque qu'à partir d'une distance de l'ordre de 300 mm, l'amplitude devient insuffisante pour la différencier des effets d'induction sur le champ magnétique terrestre et du bruit expérimental. La longueur caractéristique de décroissance est de l'ordre de 90 mm et ne semble pas dépendre notablement de la fréquence de rotation.

L'étude de la fonction de densité de probabilité des fluctuations pour chaque composante (Fig. 5) confirme les précédentes observations, en particulier l'intermittence du signal par la présence d'ailes de distribution exponentielle. Cet effet se rencontre aussi dans l'étude du scalaire passif, comme la température, pour de grand nombre de Reynolds hydrodynamique [4].

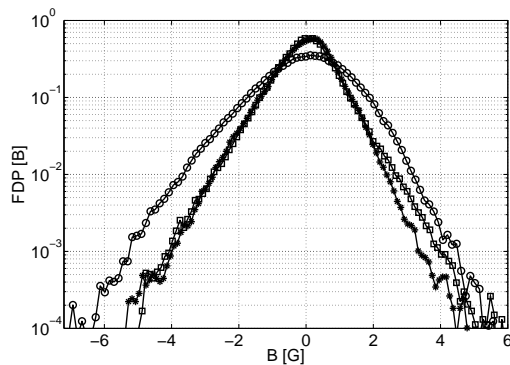


Fig.5. Densité de probabilité des fluctuations des composantes du champ magnétique pour $\Omega = 15\text{Hz}$.

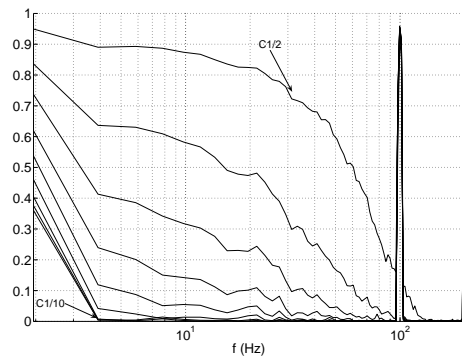


Fig.6. Fonction de cohérence entre le capteur 1 et le capteur i , avec i allant de 2 à 10, pour $\Omega = 15\text{Hz}$

Le spectre temporel de puissance des composantes (Fig. 7) montre approximativement deux zones : en dessous de la fréquence de rotation, une zone de pente faible, où on remarque que la composante x du champ dépasse les deux autres et au dessus de la fréquence de rotation, une zone dite inertielle pour laquelle les trois composantes ont le même comportement où le spectre décroît rapidement avec la fréquence, jusqu'au niveau de bruit électromagnétique de spectre plat.

La fonction de cohérence (Fig. 6) montre la part commune du spectre temporelle de deux signaux. Pour une même composante la cohérence entre capteurs successifs est forte à basse fréquence. Ceci montre qu'une taille caractéristique du champ magnétique est de l'ordre de la distance entre deux capteurs, soit 28 mm.

4 Intermittence

L'évolution temporelle de l'amplitude du champ magnétique, montre de manière plus claire que les composantes, une certaine intermittence du signal, à savoir la mesure de passages aléatoires de "bouffées de champ magnétique de forte amplitude (à savoir par rapport à la déviation standard) . L'allure du signal mesuré est très proche du signal obtenu expérimentalement dans le cas d'un scalaire passif, comme par exemple en mesurant la température, au voisinage d'un sillage thermique turbulent. La fonction densité de probabilité de la norme de B confirme cette interprétation en montrant une queue exponentielle très prononcée.

5 Orientation du vecteur champ magnétique

Il apparaît sur les signaux étudiés une orientation préférentielle du champ, à savoir que le vecteur de norme unité parallèle au champ magnétique, semble pointer la plupart du temps dans une direction

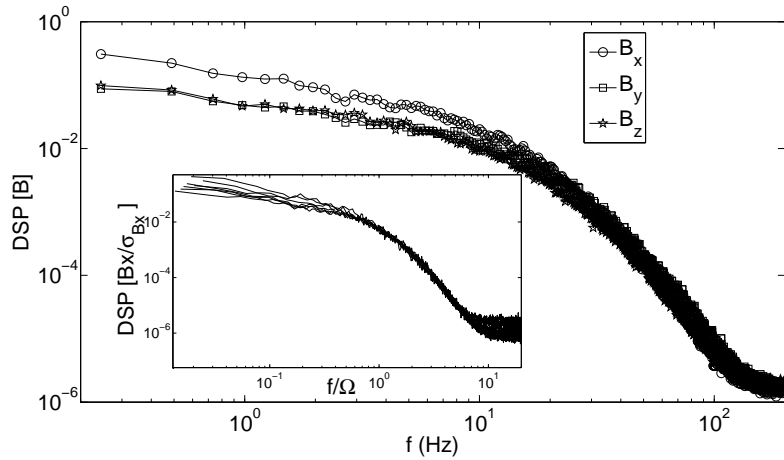


Fig.7. Spectre de puissance des composantes du champ magnétique pour $\Omega = 15Hz$. Dans l'encart spectre de puissance de $\frac{B_x}{\sigma_{B_x}}$ pour différentes valeurs de Ω en fonction de f/Ω

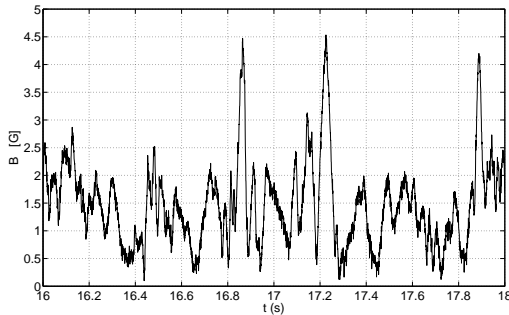


Fig.8. Extrait du signal temporel de la norme du champ magnétique pour $\Omega = 15Hz$

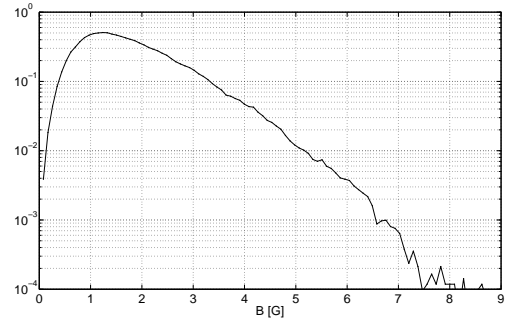


Fig.9. Fonction de densité de probabilité de la norme du champ magnétique pour $\Omega = 15Hz$

particulière. On d'étudie la densité de probabilité bidimensionnelle en fonction des angles sphériques θ et ϕ . On définit l'angle θ comme l'angle entre le vecteur direction et l'axe Oz , et l'angle ϕ comme l'angle autour de l'axe Oz , dans le plan Oxy , avec comme origine Ox , l'aimant ayant alors son vecteur aimantation parallèle à l'axe Oz . On obtient (Fig 10) un maximum de probabilité selon $-\vec{e}_x$, correspondant à l'axe du cylindre de la cuve, ce qui est cohérent avec l'effet d'amplification par l'étirement. De plus on peut constater que cette direction est particulièrement associée aux instants où le champ est de forte amplitude.

6 Conclusion

Les premières mesures d'induction à partir du champ d'un petit aimant permanent effectuées sur l'expérience VKS2 ont ainsi permis de montrer le phénomène de transport de champ magnétique. On observe un signal intermittent, d'amplitude supérieure à plus de deux fois au champ de l'aimant aux distances considérées. Conformément à l'équation de l'induction, l'effet est linéaire avec la vitesse de rotation des disques. La décroissance exponentielle de l'écart type du champ avec la distance à l'aimant n'est par contre pas comprise à l'heure actuelle. De plus on a essayé de caractériser l'intermittence et l'orientation du signal observé. On aurait ainsi le transport aléatoire par la turbulence de bouffées de champ magnétique de taille de l'ordre du centimètre. Orientés préférentiellement dans l'axe de la cuve,

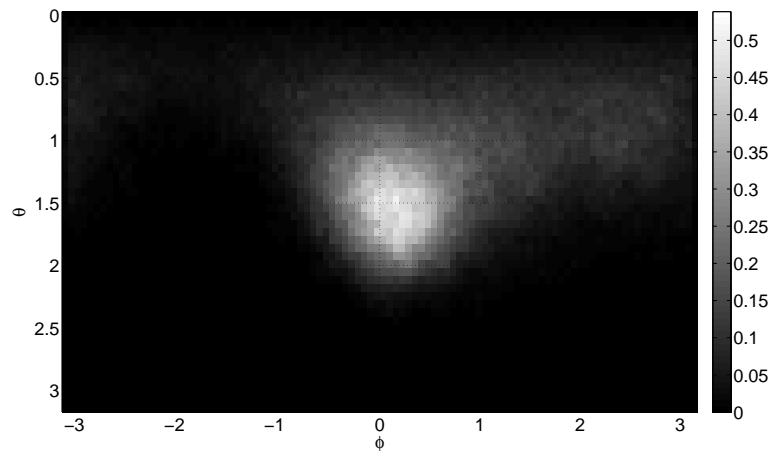


Fig.10. Fonction de densité de probabilité bidimensionnelle de l'orientation du champ magnétique pour $\Omega = 15Hz$ en fonction de θ et de ϕ

elles s'atténueraient progressivement le long de la trajectoire Lagrangienne par diffusion. Par rapport au transport du scalaire passif, le transport magnétique devient notablement plus complexe au delà de la simple dimensionnalité. En effet à grand R_m le champ magnétique peut-être amplifié localement par l'étirement des lignes de courant. On aurait alors un équilibre entre l'amplification de l'amplitude du champ magnétique par les fluctuations du taux de déformation et sa diffusion. La description de l'évolution du champ magnétique est ainsi liée à la connaissance des gradients de vitesse de l'écoulement turbulent et de là à la dynamique de séparation de particules Lagrangiennes. Enfin l'étude de ce problème, en est encore à un stade préliminaire. D'autres mesures analogues sur des écoulements différents et d'autres protocoles sont prévus pour confirmer et approfondir les résultats précédents. La compréhension des processus d'induction au voisinage immédiat de l'aimant paraît de plus nécessaire à l'étude du phénomène de transport.

Références

1. YA. B. ZELDOVICH, A. A. RUZMAIKIN & D. D. SOKOLOFF *Magnetics Fields in Astrophysics*, Gordon and Brach, New York (1983).
2. H. K. MOFFATT, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press (1978).
3. G. FALKOVICH, K. GAWEDZKI & M. VERGASSOLA, Particles and fields in fluid turbulence, *Reviews of Modern Physics*, **73** (2001).
4. B. SHRAIMAN & E. SIGGIA, Scalar turbulence, *Nature*, **405** (2000).
5. M. BOURGOIN, L. MARIE, F. PÉTRÉLIS, J. BURGUETE, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, S. FAUVE, P. ODIER & J.-F. PINTON MHD measurements in the von Karman sodium experiment, *Physics of Fluids*, **14** (9), 3046 (2001).
6. R. VOLK; F. RAVELET, R. MONCHAUX, M. BERHANU, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, PH. ODIER, J.-F. PINTON, S. FAUVE, N. MORDANT & F. PÉTRÉLIS, Transport of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium, *Soumis à PRL*.
7. S. FAUVE, F. PETRELIS The dynamo effect *Peyresq lectures on Nonlinear phenomena*, **II**, J.A. Sepulchra, (2003)

Caractérisation de la performance des microprocesseurs pendant l'exécution de programmes : Régularité, chaos et autres dynamiques

H. Berry, D. Gracia Pérez, & O. Temam

INRIA Futurs, Alchemy, Parc Club Orsay Université, ZAC des vignes 4, rue Jacques Monod, Bat G. 91893 Orsay Cedex
hugues.berry@inria.fr

Résumé. Les microprocesseurs modernes sont composés de centaines de millions de transistors qui interagissent selon des protocoles complexes. L'évolution de leur performance durant l'exécution d'un programme peut donc être très variable et présente souvent des oscillations non périodiques. Nous avons étudié l'évolution temporelle de la performance au cours de l'exécution de programmes sur les microprocesseurs actuels, à l'aide d'une batterie de méthodes pour l'étude des séries temporelles non linéaires. Si l'évolution de la performance pour certains programmes est périodique et régulière, elle est extrêmement riche et variable pour de nombreux autres. De plus, bien que la grande variabilité observée pour certains programmes semble provenir de comportements apparemment stochastiques, la dynamique temporelle pour certains autres programmes montre des indications claires de chaos déterministe, avec une sensibilité aux conditions initiales comparable aux modèles classiques. Les applications de ces résultats dans le domaine de l'architecture des ordinateurs sont brièvement discutées.

Abstract. Modern computer microprocessors are composed of hundreds of millions of transistors that interact through intricate protocols. Their performance during program execution may be highly variable and present aperiodic oscillations. Here, we studied the temporal dynamics of the performance during program execution on current microprocessors, using a collection of methods for nonlinear time series analysis. While performance evolution for several programs is periodic and regular, it displays richer dynamics for many others. Furthermore, although the large variability observed for some programs seems to stem from apparently stochastic processes, temporal dynamics for several programs display clear indications of deterministic chaos, with sensitivity to initial conditions that is comparable to textbook models. Some applications of these results to computer architecture are briefly discussed.

Les architectures d'ordinateur modernes sont le résultat d'une évolution rapide qui a débuté dans les années soixante, quand Moore a observé que le nombre de transistors par circuit intégré croissait de façon exponentielle, et a prédit que cette tendance continuerait [1]. Cette fameuse "Loi de Moore" a en effet été vérifiée durant les 40 dernières années, la densité de transistor doublant environ tous les 18 mois. Une des principales conséquences en est que les microprocesseurs des ordinateurs actuels sont composés d'un nombre impressionnant de transistors : le familier Pentium® 4 d'Intel® contient déjà 42 millions de transistors, mais le plus récent Itanium® 2 en possède 410 millions. De plus, une caractéristique constante de cette évolution est que la vitesse du microprocesseur (et spécialement sa fréquence d'horloge) est toujours de loin plus performante que les opérations d'accès à la mémoire. Les avancées les plus récentes dans le domaine ont donc principalement visé à cacher cette latence mémoire à l'aide de solutions d'ingénierie (exécutions parallèles, pipelining, hierarchies de caches mémoires...). Mais cela s'est forcément accompagné d'une augmentation de la complexité du microprocesseur. En conséquence, il est de plus en plus difficile de prévoir la performance précise des microprocesseurs modernes lors de l'exécution d'un programme (i.e. le nombre d'instructions exécutées chaque seconde). Dans cet article, nous présentons une étude visant à quantifier l'évolution temporelle de la performance (sa dynamique) lors de l'exécution de plusieurs programmes sur des microprocesseurs modernes modèles.

1 Traces d'exécution

Les séries temporelles étudiées dans cet article ont été obtenues à l'aide d'un simulateur de microprocesseurs, appelé SimpleScalar [2], qui correspond à l'architecture d'un microprocesseur superscalaire moderne typique (comme le Pentium 4, par exemple). À l'aide de ce simulateur, nous avons exécuté les 26 programmes tests (benchmarks) de la série "Spec" (plus précisément, la version Spec2000). Un benchmark est un programme qui a été sélectionné comme étant "représentatif" d'un domaine d'application donné. La suite de benchmarks "Spec" est la plus couramment utilisée pour évaluer et comparer la performance de nouveaux ordinateurs et architectures de microprocesseurs. Pendant l'exécution, nous avons collecté trois mesures de la performance : l'IPC, et les taux de défaut des caches L1 et L2. L'IPC est le nombre moyen d'instructions exécutées par cycle (*Instructions Per Cycle*), et est la mesure typique de la performance globale des microprocesseurs superscalaires. L1 et L2 correspondent aux caches mémoires de premier et second niveau, respectivement, qui sont des mémoires rapides et de petite taille, dont le but est de cacher la latence de la mémoire principale. Le taux de défaut pour chaque niveau de mémoire est la fraction de requêtes mémoires issues du microprocesseur qui ne sont pas trouvées dans le cache en question. Les taux de défaut sont donc caractéristiques de l'efficacité d'utilisation des caches mémoires.

Les traces d'exécution étudiées ci-après présentent l'évolution de la moyenne de la mesure concernée sur un certain nombre τ_{av} d'instructions exécutées de façon consécutive. Ainsi, si $\{x(1), x(2), x(3), \dots, x(N)\}$ est la série temporelle en question, chaque valeur $x(n)$ de la série représente la moyenne de x entre l'exécution de l'instruction numéro $n\tau_{av}$ et celle de l'instruction numéro $(n+1)\tau_{av}$. Ces traces d'exécution ont été analysées à l'aide d'une batterie de méthodes d'analyse des séries temporelles non-linéaires. Pour nombre de ces méthodes, nous avons utilisé la package de routines TISEAN [3]. Cet article présente une partie des résultats obtenus. Une analyse plus complète peut être trouvée dans [4].

2 Résultats

La figure 1 présente la dynamique de l'évolution des mesures de la performance pour le programme bzip2 (un programme de compression). Pour des raisons de lisibilité, nous ne présentons sur la fig. 1A que les résultats correspondant aux 54 premiers milliards d'instructions exécutées (i.e. environ la moitié de l'exécution complète du programme). Les trois séries montrent deux phases distinctes : une première phase (jusqu'à environ 43 milliards d'instructions) présente une plus grande amplitude et une fréquence plus faible. La seconde phase (entre 43 et 54 milliards d'instructions) est caractérisée par une amplitude de variation plus faible et une fréquence supérieure. La seconde partie de la série totale (non montrée sur la fig. 1A) consiste essentiellement en la répétition de ces deux mêmes phases consécutives. Dans la suite de cette section, les résultats sont obtenus en traitant la trace entière (longue d'environ 110 milliards d'instructions) comme une seule entité. Néanmoins, nous avons aussi étudié les deux phases séparément (i.e. en restreignant la série temporelle à la première phase, ou à la seconde) et les résultats obtenus sont qualitativement identiques à ceux obtenus avec la trace entière (quoique la sensibilité aux conditions initiales semble plus importante au cours de la seconde phase).

Bien que ces séries temporelles montrent une certaine régularité, les deux phases forment clairement des dynamiques irrégulières ou bruitées. Nous avons tout d'abord recherché des corrélations à long terme dans les séries à l'aide de l'analyse spectrale et de l'analyse des fluctuations redressées. La fig. 1B montre les spectres de puissance en échelle log-log. Tout d'abord, il apparaît que le spectre a un aspect "diffus", typique des signaux chaotiques et stochastiques. De plus, et pour les trois mesures étudiées, le spectre de puissance décroît comme une loi de puissance d'exposant $\beta \approx 1.3$, pour des fréquences $f \geq 2 \times 10^{-9} \text{ instruction}^{-1}$ (i.e. pour des périodes plus petites que la période moyenne de répétition majeure, ≈ 0.6 milliards d'instructions). L'analyse des fluctuations redressées correspondante (Detrended Fluctuation Analysis, ou DFA [5]) est présentée fig. 1C. Là encore, pour des échelles n plus petites que la période moyenne de répétition majeure, on observe pour les trois séries temporelles, une relation en loi de puissance entre les fluctuations redressées $F(n)$ et l'échelle d'observation n , avec un exposant $\alpha \approx 1.13$. Les valeurs de ces deux exposants, obtenues de façon indépendante, satisfont à la relation $\alpha = (1 + \beta)/2$, ce qui est une indication de la cohérence des valeurs obtenues [6]. Ces résultats montrent que la dynamique de la

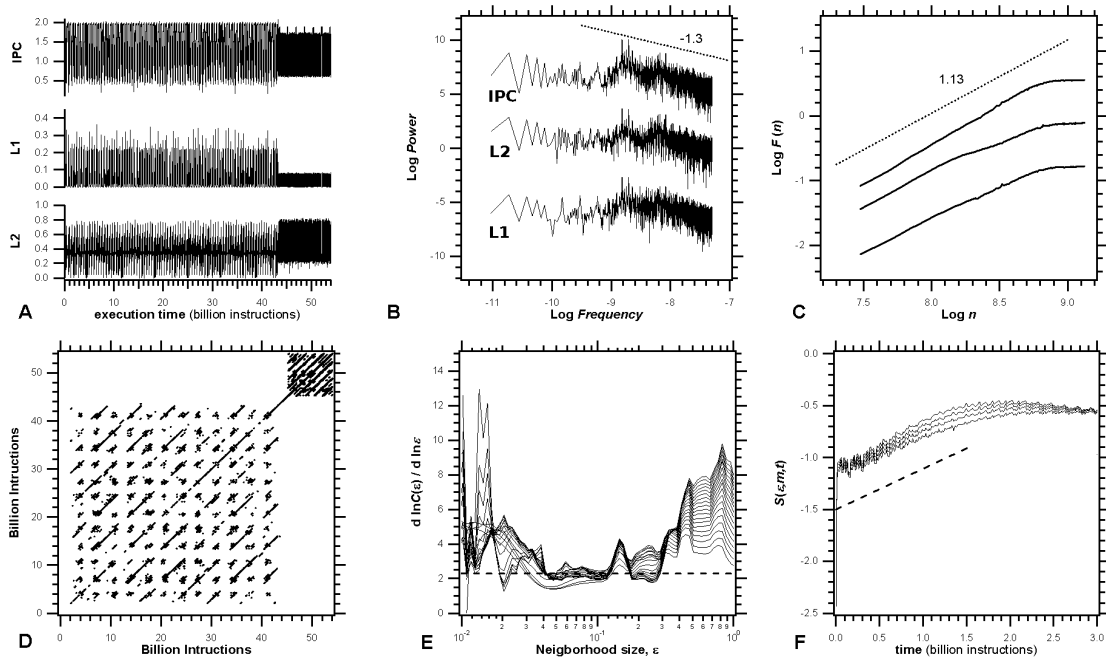


Fig.1. Études de la dynamique de la performance durant l'exécution du programme bzip2. (A) Évolution des trois mesures de performance durant les 54 premiers milliards d'instruction. Les spectres de puissance correspondant sont présentés en (B). La ligne discontinue indique une décroissance en loi de puissance, avec un exposant de 1.3. (D) Analyse des fluctuations redressées (DFA). Le graphe présente en échelle log-log les fluctuations redressées ($F(n)$) en fonction de l'échelle d'observation n . (D) Graphe de récurrence correspondant à (A) (seuillage à 0.136). (E) Pentas locales des sommes de corrélation $d \ln C(m, \epsilon) / d \ln \epsilon$, pour des dimensions de plongement m variant du haut en bas, entre 25 et 7 (par décrétement de 1). (F) Estimation du plus grand exposant de Lyapunov, λ_{max} à l'aide de la méthode de Kantz avec $m = 12$ à 15 (du haut vers le bas). La ligne discontinue indique une croissance linéaire de pente 0.42, correspondant à une estimation de $\lambda_{max} \approx 0.60$ bits/milliard d'instructions. Paramètres de plongement (D-F) : délai $d = 153$ million d'instructions, dimension $m = 14$.

performance lors de l'exécution de bzip2 présente des caractéristiques typiques de signal en $1/f^\beta$. De plus, la valeur obtenue pour α est supérieure à 0.5, ce qui indique la présence de corrélations à longue portée persistantes. En d'autres termes, une grande valeur (par rapport à la moyenne) de l'IPC ou d'un taux de défaut de cache a plus de chance d'être suivie d'une grande valeur de l'IPC ou du taux de défaut en question (et vice-versa).

Pour étudier la dynamique plus avant, nous avons reconstruit l'attracteur par plongement de la série temporelle pour l'IPC. Le plongement par la méthode des délais consiste à partir de la série temporelle scalaire initiale $\{x(t)\}$ et de l'utiliser pour former une nouvelle série temporelle vectorielle $\{\mathbf{X}(t)\}$ dans un espace de plongement de dimension m selon $\mathbf{X}(t) = (x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau))$, où τ est le délai de plongement. Le théorème de plongement de Takens [7] montre que, pour des valeurs suffisantes de m , la géométrie de l'attracteur reconstruit $\{\mathbf{X}(t)\}$ dans l'espace de plongement, a les mêmes propriétés topologiques que l'attracteur original dans l'espace des phases naturel. La fig. 1D présente le graphe de récurrence seuillé [8] correspondant (le seuil est déterminé selon [9]). Il est d'abord visible sur cette figure que les deux phases de la dynamique (fig. 1A) sont reconnaissables sur le graphe de récurrence, ce qui indique que ces deux phases pourraient avoir des taux de récurrence assez différents. De façon plus intéressante, ces graphes montrent un grand nombre de diagonales interrompues, ainsi que des points isolés. Ce type de structure est typique des systèmes chaotiques [8]. De plus, des tests statistiques, à l'aide de données « surrogates » [3] (non montré), ont rejeté l'hypothèse que la dynamique d'évolution de l'IPC pourrait provenir d'un processus aléatoire Gaussien (possiblement redimensionné), ce qui confirme

la nature non-linéaire de cette série temporelle.

Nous avons ensuite caractérisé les propriétés géométriques de l'attracteur reconstruit. La dimension de

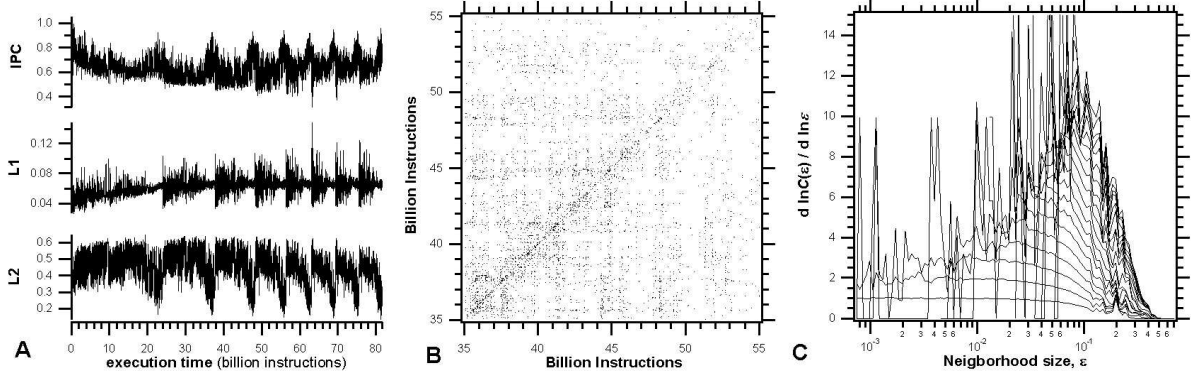


Fig.2. Études de la dynamique de la performance durant l'exécution du programme vpr. (A) Dynamique d'évolution des mesures de la performance au cours d'une exécution complète du programme. (B) Graphe de récurrence correspondant (seuillage à 0.079). (C) pentes locales des sommes de corrélations $d \ln C(m, \epsilon) / d \ln \epsilon$ pour une dimension de plongement m variant, du haut en bas, de 20 à 1 (par décrement de 1). Paramètres de plongement (B-C) : délai $d = 350$ million d'instructions, dimension $m = 5$.

corrélacion de l'attracteur a été déterminée selon la méthode de Grassberg-Procaccia [9]. La figure 1E montre les pentes locales $d \ln C(m, \epsilon) / d \ln \epsilon$ mesurées à partir des représentations en log-log des sommes de corrélation $C(m, \epsilon)$ en fonction de la taille du voisinage considéré, ϵ . Pour $0.03 \leq \epsilon \leq 0.3$ et $m \geq 9$, les pentes locales prennent des valeurs qui sont largement indépendantes de m et d' ϵ . La présence d'un tel régime de scaling est un signe fort de la présence d'un attracteur étrange. La valeur obtenue dans le régime de scaling donne une estimation de la dimension fractale (de corrélation) de cet attracteur : $D_2 = 2.3 \pm 0.3$. La valeur non-entière de cette dimension pourrait être une indication de la nature fractale de cet attracteur chaotique. Néanmoins, comme dans la plupart de systèmes issus du monde réel, l'estimation de la dimension de corrélation n'est pas assez précise pour exclure une valeur entière, si bien que la nature fractale de l'attracteur ne peut pas être assurée par les résultats présents. La faible valeur de D_2 n'en reste pas moins une forte indication que la dynamique de bzip2 résulte de la présence de chaos déterministe de faible dimension. Les sommes de corrélation peuvent aussi être utilisées pour

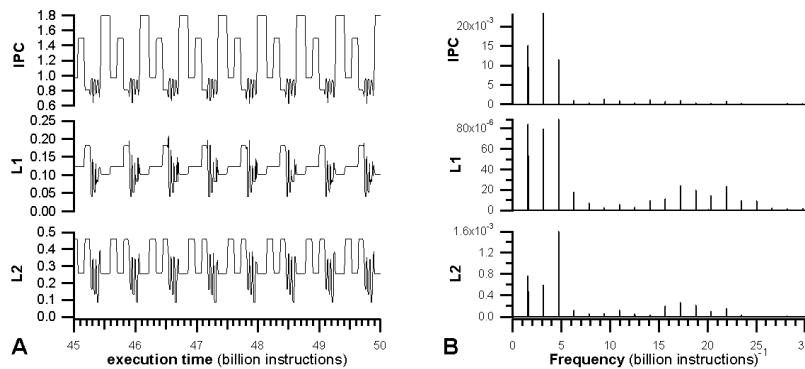


Fig.3. Études de la dynamique de la performance durant l'exécution du programme applu. (A) Dynamique d'évolution des mesures de la performance pendant 15 milliards d'instructions (le programme dans son ensemble consiste en environ 220 milliards d'instructions). Les spectres de puissance correspondants sont présentés en (B).

estimer l'entropie de corrélation correspondante, h_2 . Nos estimations donnent $h_2 \approx 1.2$ bits/milliard d'instructions (non montré).

Pour quantifier la sensibilité aux conditions initiales du système, nous avons ensuite mesuré la valeur du plus grand exposant de Lyapunov, λ_{max} (Figure 1F) à l'aide de la méthode de Kantz [11] (n.b. : la méthode voisine de Rössler, donne des résultats équivalents). Les courbes montrent clairement une croissance initiale linéaire, dont la pente donne une estimation de la valeur de $\lambda_{max} \approx 0.60$ bits/milliards d'instructions. Cette valeur est du même ordre de grandeur que la valeur trouvée à partir de cartes de Poincaré de la dynamique ($\lambda_{max} \approx 1.22$, non montré) et que la valeur de l'entropie de corrélation h_2 (qui est une borne inférieure pour la somme de tous les exposants de Lyapunov positifs du système). Ces données supportent la cohérence de nos mesures et renforcent la démonstration de l'existence de chaos déterministe dans la dynamique de `bzip2`. Etant donnée la durée d'une orbite moyenne autour de l'attracteur (≈ 430 millions d'instructions), la valeur de λ_{max} varie entre 0.26 et 0.52 bits/orbite moyenne. Cette valeur, quoique plus faible que celle obtenue pour le système classique de Lorenz ($\lambda_{max} = 1.36$ bits/orbite), indique une sensibilité aux conditions initiales comparable à celle obtenue pour le système de Rössler ($\lambda_{max} = 0.78$ bits/orbite).

Enfin, les mesures et analyses présentées jusqu'ici on essentiellement été obtenues par une reconstruction de l'attracteur basée sur la série temporelle de l'IPC. Nous avons aussi effectué la plupart de ces mesures avec des attracteurs reconstruits sur la base des deux autres séries temporelles (les taux de défaut de cache L1 et L2). D'autre part, nous avons varié la fenêtre de moyennisation τ_{av} ($\tau_{av} = 10^6, 10^7$ or 10^8 instructions, voir 1). Toutes ces conditions ont donné des valeurs comparables et confirmé la présence de chaos déterministe. Enfin, nous avons étudié la performance lors de l'exécution de `bzip2` sur un fichier d'entrée d'un autre type. Tous les indicateurs testés ont là aussi confirmé la présence de chaos déterministe. Enfin, signalons que ce type de dynamique n'est pas spécifique à `bzip2`. Parmi les benchmarks Spec testés, nous avons retrouvé un comportement clairement chaotique pour d'autres programmes, comme `galgel` et `fma3d`, et obtenu des indications de sa présence (mais de façon non concluante) pour `gzip` et `ampp`.

L'évolution de la dynamique lors de l'exécution du programme `vpr` (un programme d'aide au design de circuits intégrés) est montré Figure 2A. En comparaison de `bzip2`, la dynamique en bien plus variable et ne montre pas vraiment de comportement régulier. La reconstruction de l'attracteur putatif par plongement de la série IPC a été ici aussi effectuée par la méthode des délais. La fig. 2B présente de graphe de récurrence seuilé correspondant. A la différence du graphe obtenu pour `bzip2`, le graphe de récurrence de `vpr` ne montre que des points isolés (pas de lignes diagonales, sauf près de la principale), dont la distribution est bien plus homogène. De plus, après génération de données "surrogates", les tests statistiques n'ont pu décider en faveur de la présence de non linéarité dans la série originale (non montré). La figure 2C montre les pentes locales des sommes de corrélation. Là encore en contraste fort avec les données obtenues pour `bzip2`, aucun régime de scaling n'est observé, quelque soit la gamme considérée pour la taille du voisinage ϵ ou la dimension de plongement m . Dans leur ensemble, ces résultats sont typiques des séries temporelles stochastiques. Ils montrent que, contrairement à `bzip2`, l'irrégularité et la grande variabilité observée lors de l'évolution de la dynamique de la performance pendant l'exécution de `vpr` ne proviennent pas de la présence de chaos déterministe, mais d'un processus pseudo-stochastique, ou en tout cas, de grande dimension. Parmi les benchmarks Spec que nous avons étudiés, un comportement similaire a été aussi clairement observé pour `art`, et suspecté pour d'autres programmes, comme `crafty`.

Notre dernier exemple concerne `applu`, une application de calcul scientifique. La simple inspection visuelle des séries temporelles correspondantes est suffisante pour se convaincre de la régularité et la périodicité des trois mesures de la performance (Figure 3A). Les spectres de puissance (Figure 3B) pour les trois mesures confirment cette régularité, avec une structure typique des signaux périodiques. Une fréquence majeure ($f \approx 1.6 \times 10^{-9}$ instructions correspondant à une période d' ≈ 0.6 milliards d'instructions) et ses harmoniques dominant le spectre et toute fréquence différente est quasiment inexistante. Ces résultats prouvent la présence de programmes dont la dynamique d'exécution est périodique et très régulière. En plus de `applu`, ce type de comportement a été observé pour d'autres benchmarks Spec, comme `apsi`.

3 Conclusion

Une des principales conclusions de cette étude est que la très grande variabilité observée durant la dynamique de performance de nombreux programmes peut être due à la présence de chaos déterministe. Ce résultat semble important parce qu'il révèle la grande complexité des mécanismes qui, dans les microprocesseurs, déterminent la performance. Néanmoins, il doit être manipulé avec soin. En particulier, il ne s'applique qu'à la performance instantanée, et non à d'autres aspects du fonctionnement du microprocesseur (en particulier, il n'indique en aucun cas que le résultat final du programme pourrait être imprévisible). D'autre part, ces résultats impliquent que prédire la performance de façon détaillée, sur la base d'un court échantillon de la dynamique pourrait être impossible. Néanmoins, là encore, ce type d'interprétation est à tempérer par le fait que l'amplitude des exposants de Lyapunov quantifie seulement les vitesses de divergence (ou de convergence) moyennes (sur tout l'attracteur étrange), alors que la prédictabilité peut varier grandement d'une partie à l'autre de l'attracteur. Il est donc possible de perdre la prédictabilité exponentiellement vite à certains endroits de la dynamique, pour la regagner plus tard. En revanche, prédire la dynamique de la performance des programmes au comportement pseudo-stochastique (comme vpr) semble plus facilement accessible. En particulier, la méthode dite des "surrogates" (utilisée pour tester la non-linéarité des séries temporelles) permet de générer des séries temporelles synthétiques (généralement générées par des procédés de type moyenne mouvante auto-régressive [3]) dont les caractéristiques sont très proches de la série temporelle réelle. Il semble donc possible, pour ces programmes, d'obtenir une bonne estimation de la valeur moyenne de l'IPC ou du taux de défauts de cache L1, par exemple, durant l'exécution réelle du programme, en se basant sur une trace synthétique, générée à un coût computationnel faible. D'une façon générale, ces résultats montrent que la performance des microprocesseurs modernes lors de l'exécution de certains programmes forme un système suffisamment compliqué (voire complexe) pour que l'utilisation des méthodes récentes des sciences du non-linéaire et de la complexité, puisse nous en fournir de nouvelles perspectives de compréhension.

Références

1. G. E. MOORE, Cramming more components onto integrated circuits, *Electronics* **38**, 114-117 (1965).
2. D. BURGER, T. M. AUSTIN, S. BENNETT, The SimpleScalar Tool Set, Version 2.0, *Computer Architecture News*, **25** (3), 13-25 (1997).
3. R. HEGGER, H. KANTZ, T. SCHREIBER, Practical implementation of nonlinear time series methods : The TISEAN package, *CHAOS*, **9** (18), 413-434 (1999)
4. H. BERRY, D. GRACIA-PÉREZ, O. TEMAM, Chaos in computer performance, *CHAOS*, **16** (1), 013110 (2006)
5. C.-K. PENG, S. HAVLIN, H.E. STANLEY, A.L. GOLDBERGER, Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series, *CHAOS*, **5**, 82-87 (1995)
6. G. RANGARAJAN, M. DING, Integrated approach to the assessment of long range correlation in time series data, *Phys. Rev. E*, **61**, 4991-5001 (2000)
7. F. TAKENS, *Detecting strange attractors in turbulence*, in *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Math., pp. 366-381, Springer-Verlag (1981)
8. J.-P. ECKMANN, S. O. KAMPHORST, D. RUELLE, Recurrence Plots of Dynamical Systems, *Europhysics Lett.*, **5**, 973-977 (1987)
9. J.P. ZBILUT, N. THOMASSON, C.L. WEBBER, Recurrence quantification analysis as a tool for nonlinear exploration of nonstationary cardiac signals, *Med. Eng. Phys.*, **24**, 53-60 (2002)
10. P. GRASSBERGER, I. PROCACCIA, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, **9**, 189-208 (1983)
11. H. KANTZ, A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, *Phys. Lett. A*, **185**, 177-187 (1994)

Confinement isotrope d'un cylindre élastique

Laurent Boué, Mokhtar Adda-Bedia & Arezki Boudaoud

Laboratoire de Physique Statistique
École Normale Supérieure
24 rue Lhomond 75231 Paris cedex 05
lboue@lps.ens.fr

Résumé. On obtient un exemple simplifié de compaction d'objets élastiques en se plaçant en géométrie cylindrique. Dans ce cas, la forme des plis peut être décrite de façon exacte par l'équation de l'*Elastica* d'Euler. La résolution du problème à frontières libres qui découle de cette représentation donne lieu à un diagramme de phase étonnamment riche que nous présentons en détail.

Abstract. We consider a two-dimensional analog of crumpled paper by studying the buckling of an elastic cylinder. While the exact shape of folds is given by the *Elastica* equation of Euler, we find an unexpectedly rich phase diagram, even for moderate confinements, by solving a free boundary problem.

1 Contexte général

Bien que les déformations à grandes échelles de corps élastiques bidimensionnels soient omniprésentes dans la vie courante (plis des vêtements, rides sur la peau, papier froissé...), le degré de complexité qui se cache derrière ces réseaux de plis passe souvent inaperçu. Ces phénomènes de pliage et de froissage sont pourtant loin d'être anecdotiques puisqu'ils trouvent des parallèles dans un grand nombre de domaines inattendus et a priori très différents. Par exemple les plis des feuilles des plantes peuvent être vus comme simple conséquence de la croissance des feuilles à l'intérieur des bourgeons. Le froissage des tôles lors d'un accident de voiture fait aussi partie de cette classe de problèmes qui considère la compaction mécanique d'objets de basse dimension (filaments 1D ou corps minces 2D). De manière générale, la compréhension du comportement de plaques élastiques soumises à des forces extérieures, même faibles, est un problème compliqué qui soulève des questions théoriques très stimulantes. Une première difficulté vient du fait que les déformations ne sont presque jamais distribuées de manière uniforme [1]. Il suffit en effet de froisser une feuille de papier pour constater que les déformations se concentrent le long de plis reliés entre eux par des points coniques. Alors que le voisinage de ces singularités subit des déformations plastiques irréversibles, de larges portions de la feuille restent intactes. De plus, des régions initialement lointaines l'une de l'autre sont susceptibles d'entrer en contact lors du confinement. Ceci implique l'introduction de contraintes non-locales rendant délicate la prescription des conditions aux bords. En combinant les deux effets de flexion et d'extension, les équations différentielles non-linéaires de Föppl-von Kármán [2] constituent traditionnellement le point de départ pour étudier les déformations de plaques élastiques. Elles se révèlent cependant être d'une complexité rédhitoire et ne sont que peu exploitables aussi bien analytiquement que numériquement [3]. Dans ce contexte, seules les déformations les plus élémentaires apparaissant lors du froissage de plaques élastiques, les cônes développables [4] et les plis (ou « ridges ») [5] ont pu être récemment identifiés et étudiés en détail.

Dans cet article, nous abordons l'étude de la compaction d'une plaque élastique d'une manière différente. En nous plaçant dans le cas du confinement isotrope d'un cylindre élastique, nous montrons qu'il est possible de déterminer les propriétés mécaniques ainsi que les déformations subies par le cylindre en se ramenant formellement à la résolution d'un problème à multi-frontières libres non-linéaire [6] et nous étudions le diagramme de phase qui en résulte.

2 Mise en place théorique

2.1 Description géométrique

Imaginons une feuille élastique naturellement plate que l'on enroule sur elle-même, en collant les deux extrémités, de manière à lui donner la forme d'un cylindre de rayon R . Cette opération (semblable à rouler en cigarette une feuille de papier) ne demande aucun effort particulier bien que l'amplitude finale de la déformation effectuée soit assez grande (plusieurs fois l'épaisseur du papier). Ceci s'explique par le fait que les cylindres (comme les cônes) ont une courbure de Gauss nulle les autorisant à être développables sur un plan sans avoir à s'étirer, ou même à se déchirer, ce qui n'est jamais le cas pour une surface quelconque. Cette propriété d'isométrie avec le plan offre de grandes simplifications puisqu'elle permet d'éviter les déformations d'étirement, sources de singularités. Nous pouvons alors concentrer notre attention exclusivement sur des déformations de flexion pure ainsi que sur le rôle joué par les auto-contacts. On se place facilement en géométrie cylindrique en introduisant, par la pensée, la feuille à l'intérieur d'un récipient cylindrique indéformable de rayon $b < R$ (cf figure 1). Le nombre sans dimension

$$\epsilon = \frac{(R - b)}{b} > 0 \quad (1)$$

sert de paramètre de contrôle permettant de quantifier l'intensité du confinement. L'invariance des déformations dans la direction transverse permet de se ramener à un problème bidimensionnel : la compaction d'une tige élastique de rayon R dans un cercle de rayon b . L'excès de longueur de la tige l'oblige à former un premier pli symétrique le long duquel elle n'est plus en contact avec son récipient. Le paramètre naturel définissant la forme de la tige est son abscisse curviligne s ayant pour origine le centre du pli. On note s_c l'abscisse curviligne du point où la tige reprend contact avec le récipient et θ_c l'angle entre la verticale au centre du pli et ce point de raccord. La base locale de Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{e}_3, \mathbf{n}\}$, où $\mathbf{t} = \partial_s \mathbf{r}$ et $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{e}_3$ sert de repère orthonormé, le vecteur position de la tige étant donné par :

$$\mathbf{r}(s') = \int_0^{s'} ds (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) \quad (2)$$

où ϕ est l'angle entre la tangente \mathbf{t} et l'axe horizontal \mathbf{e}_1 . Par convention, on définit la courbure de la tige comme $\kappa = \partial_s \phi$. Cette configuration initiale, dite de type I, est représentée sur la figure 1.

2.2 Équilibre mécanique

Après avoir décrit les aspects géométriques, nous nous posons la question de l'équilibre mécanique d'une telle tige élastique. L'hypothèse simplificatrice majeure ici est que l'on néglige les éventuelles forces de frottement entre le récipient et la tige. Dans ce cas, le récipient exerce une pression normale, $\mathbf{K} = -k\mathbf{n}$ ($k > 0$), sur la tige partout où celle-ci est en contact avec le récipient. Si l'on considère une section de la tige, on note \mathbf{F} et \mathbf{M} la force et le moment exercés par un côté de la section sur l'autre côté. Dans le cas des objets minces, la relation constitutive entre le moment résultant et la courbure de l'objet est linéaire : $\mathbf{M} = B\kappa\mathbf{e}_3$ où B est la rigidité du matériau qui compose l'objet. Si \mathbf{F} et \mathbf{M} sont comptés par unité de longueur dans la direction d'invariance, les équations locales d'équilibre des forces et des moments s'écrivent alors [7] :

$$\left. \begin{aligned} \partial_s \mathbf{F} + \mathbf{K} &= 0, \\ \partial_s \mathbf{M} + \mathbf{t} \times \mathbf{F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

En décomposant $\mathbf{F} = N\mathbf{t} + Q\mathbf{n}$, la projection globale des équations d'équilibre (3) donne les relations :

$$N = -B(a^2 + \kappa^2/2), \quad (4)$$

$$Q = B\kappa, \quad (5)$$

pour les composantes de la tension de la tige et, en notant $(\dot{\cdot}) = \partial_s(\cdot)$:

$$B \left[\dot{\kappa} + \left(a^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 \right) \kappa \right] = k(s), \quad (6)$$

où a^2 est une constante d'intégration. Comme la région formant le pli n'est plus en contact avec le récipient (i.e. $k \equiv 0$), on voit que sa forme, donnée par (6), se réduit à l'équation de l'*Elastica* d'Euler. Bien que cette équation soit intégrable analytiquement en termes de fonctions elliptiques, les conditions aux bords rendent cette option difficile. On obtient en effet un ensemble d'équations implicites et il est plus avantageux de chercher à résoudre l'équation numériquement. La taille du pli étant susceptible de changer suivant l'intensité du confinement, la longueur de l'intervalle $[0, s_c]$ n'est pas fixée à l'avance et doit être déterminée par les conditions aux bords. En dehors du pli, la tige reste collée au récipient. Dans ces régions, le rayon de courbure de la tige est égal au rayon du cercle ce qui signifie que $\kappa = 1/b$ et $\dot{\kappa} = 0$. Les propriétés mécaniques de la tige sont alors facilement calculées : Elle subit une compression pure puisque $\mathbf{F} = -bk_c \mathbf{t}$. On remarque aussi que la valeur de la pression extérieure est égale à une constante que l'on note k_c .

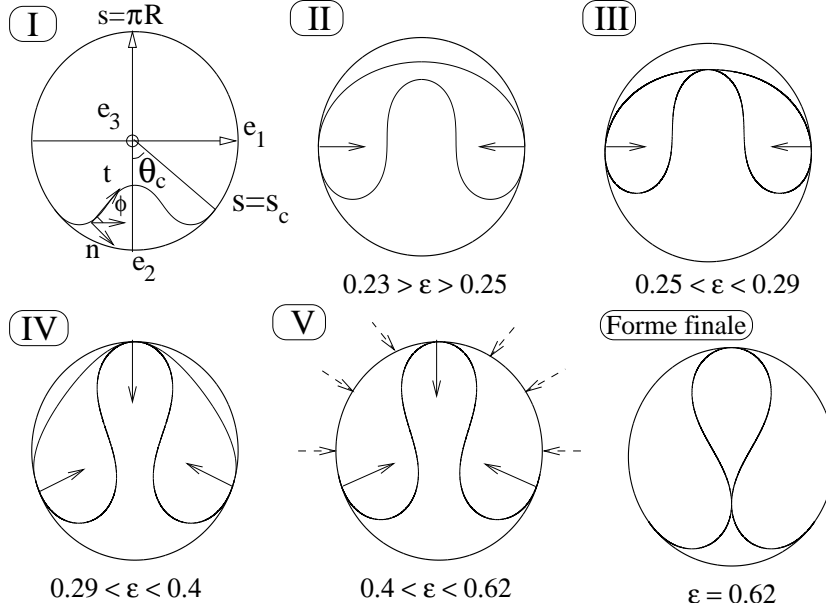


Fig.1. Évolution de la forme de la feuille, vue de dessus, en fonction de l'intensité du confinement ϵ . Les flèches en pointillé signalent la force extérieure d'intensité constante due au récipient tandis que les flèches pleines représentent les forces ponctuelles. Pour améliorer la visibilité, l'amplitude des plis pour les configurations de type III et IV est exagérée. Les conditions aux bords relatives à chaque phase sont détaillées dans le corps du texte.

2.3 Forces ponctuelles

Une pression extérieure $\mathbf{K} = -k_c \mathbf{n}$ d'intensité constante le long des régions de contact est en contradiction avec l'équilibre mécanique global de la tige. En effet, pour maintenir la tige stable, il faudrait que cette pression s'exerce sur tous les points diamétralement opposés de la tige. L'absence de contact le long du pli empêche cette condition d'être réalisée et conduit à un déséquilibre immédiat de la tige. En fait, l'équilibre mécanique impose l'existence de forces ponctuelles, localisées exactement aux points de raccords entre parties libres et parties collées. L'intensité de ces forces ponctuelles doit être ajustée,

a posteriori, pour annuler le déséquilibre dû au pli. Dans le cas général d'un point de décollement situé à l'abscisse s_c , la pression extérieure en ce point s'écrit alors :

$$\mathbf{K}_l = -b\chi\delta(s - s_c)\mathbf{n} \quad (7)$$

où χ est l'intensité correctement ajustée. Ces forces supplémentaires ont des conséquences importantes sur les propriétés mécaniques du système. La courbure κ étant toujours continue le long de la tige, on obtient :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} [\dot{\kappa}(s_c + \eta) - \dot{\kappa}(s_c - \eta)] = \frac{b\chi}{B} \quad (8)$$

en intégrant l'équation (6) autour d'un point de décollement. La composante normale Q de la tension étant proportionnelle à $\dot{\kappa}$, elle subit une discontinuité quand on passe d'une région collée à une région libre. D'autre part, on voit par l'équation (4) que la composante tangentielle N reste quant à elle continue lors de cette transition.

3 Diagramme de phase

Dans la suite, nous déterminons méthodiquement les différentes configurations symétriques autorisées en fonction du paramètre de contrôle ϵ . Il faut assurer l'équilibre mécanique global de la tige, pour chaque configuration, en adaptant de manière appropriée les intensités et placements des forces ponctuelles. La forme de la tige est obtenue en intégrant l'équation de l'*Elastica*. Les conditions aux bords nécessaires pour mener à bien cette intégration, doivent être, elles-aussi, adaptées à chaque configuration. La résolution se fait numériquement par la méthode du tir. Nous décrivons maintenant les caractéristiques des 5 différentes phases trouvées dont les formes typiques sont représentées sur la figure (1). L'énergie élastique V de la tige ainsi que la pression totale W exercée par le cylindre sont reportées sur la figure 2 avec,

$$V = \frac{1}{2}EJ \int_{\text{tige}} \kappa^2 ds \quad \text{et} \quad W = \int_{\text{contact}} (\mathbf{K} + \mathbf{K}_l) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (9)$$

où E est le module de Young de la tige et J son moment d'inertie.

3.1 Configuration initiale - Type I

Il est naturel de supposer que la configuration de départ (type I) présente un pli symétrique comme représenté sur la figure 1. Les quantités inconnues sont κ , $\dot{\kappa}$, ϕ ainsi que les deux paramètres a^2 et la frontière libre s_c . On peut les déterminer en imposant les conditions aux bords suivantes :

1. Inextensibilité de la tige : $s_c - b\theta_c = \pi b\epsilon$,
2. Continuité de la courbure : $\kappa(s_c) = 1/b$,
3. Force nulle au centre du pli : $B\dot{\kappa}(0) = 0$,
4. Origine des angles : $\phi(0) = 0$,
5. Symétrie droite-gauche de la tige : $\int_0^{s_c} ds \cos \phi = b \sin \theta_c$.

Le pli central grandit rapidement mais ce type de configurations devient instable pour $\theta_c = \pi/2$ soit $\epsilon \approx 0.23$. En effet, quand θ_c dépasse $\pi/2$ les forces ponctuelles commencent à être dirigées dans le même sens que la force extérieure globale due au récipient : Elles ne servent plus à stabiliser la tige mais sont, au contraire, le moteur d'une instabilité. En appliquant la méthode énoncée en 2.3 pour les forces ponctuelles, on obtient d'ailleurs :

$$k_c = -\frac{B\dot{\kappa}(s_c)}{b \tan \theta_c}. \quad (10)$$

On voit que la pression extérieure sur toute la partie supérieure de la tige tend vers 0 quand θ_c tend vers $\pi/2$.

3.2 Décollement par le haut - Type II

Comme la pression extérieure s'annule de manière uniforme, l'ensemble de la moitié supérieure de la tige se décolle du récipient. La tige n'est alors maintenue en équilibre que par deux contacts ponctuels diamétralement opposés. On note les quantités relatives à la partie supérieure de la tige avec un tilde (courbure $\tilde{\kappa}$ et angle $\tilde{\phi}$) pour les distinguer de celles concernant le pli. Il faut alors déterminer la forme de deux parties libres reliées entre elles par un contact ponctuel situé à un angle $\theta_c = \pi/2$. Les conditions aux bords, pour chaque partie libre, sont similaires à celles utilisées pour les configurations de type I en rajoutant $\phi(s_c) = \tilde{\phi}(s_c) = \pi/2$. Si l'équilibre de la tige est bien assuré, on voit par l'équation (4) que la continuité de la courbure est équivalente à imposer la même constante d'intégration a^2 pour les différentes parties libres. Ce point important restera vrai pour toutes les configurations présentant plusieurs régions libres. Alors que la partie supérieure plonge vers l'intérieur, le pli continue à grandir. Pour $\epsilon \approx 0.25$, il finit par rejoindre le morceau de la tige en train de s'effondrer et cette configuration ne peut plus exister sans auto-intersection. En fait, il est possible de trouver des configurations de type II pour de petits confinements mais leur grande énergie élastique ne leur permet pas d'entrer en compétition avec les configurations de type I (cf figure 2).

3.3 Premier auto-contact - Type III

Afin de prévenir l'apparition d'une auto-intersection il est nécessaire de modifier, à nouveau, les conditions aux bords. Nous devons maintenant imposer la présence d'un auto-contact ponctuel. À cause de ce contact, la tension normale au centre de la tige ne peut plus être nulle. Par action-réaction, la contribution à cette tension due au pli doit annuler celle due à la moitié supérieure. Ces deux modifications se traduisent comme ceci :

- Présence d'un auto-contact ponctuel : $\int_0^{s_c} ds \sin \phi + \int_{s_c}^{\pi R} ds \sin \tilde{\phi} = 0$,
- Force au point de contact : $B\dot{\kappa}(0) = -B\dot{\tilde{\kappa}}(\pi R)$.

Les autres conditions aux bords (angles, symétrie droite-gauche et inextensibilité) restent, pour chaque partie libre, semblables à celles des configurations de type II. On observe que la position du contact central se dirige vers le haut du cercle quand le confinement augmente. Finalement ce point entre en contact avec le cercle pour $\epsilon \approx 0.29$. Cette branche de solution cesse alors, à son tour, d'exister puisque la tige ne peut pas traverser le récipient et doit développer un nouveau contact.

3.4 Trois contacts ponctuels - Type IV

Ce contact avec le récipient apporte une nouvelle force ponctuelle extérieure agissant sur la tige. Il est important à ce stade de rétablir l'équilibre des forces pour tenir compte de ce troisième contact ponctuel. On doit aussi maintenir fixe la position de ce nouveau contact pour interdire un croisement entre la tige et le récipient. Les conditions aux bords sont donc les suivantes :

1. Inextensibilité de la tige,
2. Définition des angles : $\phi(0) = 0$ et $\tilde{\phi}(\pi R) = \pi$,
3. Symétrie droite-gauche : $\int_0^{s_c} ds \cos \phi = - \int_{s_c}^{\pi R} ds \cos \tilde{\phi} = b \sin \theta_c$,
4. Nouveau point de contact récipient-tige : $\int_0^{s_c} ds \sin \phi = - \int_{s_c}^{\pi R} ds \sin \tilde{\phi} = -b(1 + \cos \theta_c)$,
5. Continuité de l'angle : $\phi(s_c) = \tilde{\phi}(s_c)$,
6. Équilibre des forces : $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} [\dot{\kappa}(s_c + \eta) - \dot{\kappa}(s_c - \eta)] = - \frac{\dot{\tilde{\kappa}}(\pi R) + \dot{\kappa}(0)}{\cos \theta_c}$.

On trouve que la partie supérieure se rapproche de plus en plus du récipient au fur et à mesure que la tige grandit. Pour $\epsilon \approx 0.4$, elle finit par entrer partout, au même instant, en contact avec le récipient. On retrouve alors un contact linéique entre la tige et le récipient.

3.5 Contact linéique - Type V

Ce type de configurations ne présente maintenant plus qu'une seule partie libre. Logiquement, on retrouve les mêmes conditions aux bords que pour les configurations de type I plus le troisième contact sur l'axe de symétrie. La condition 3 de la partie 3.1 est simplement remplacée par une condition comme la 4 de la partie 3.4 pour tenir compte de ce contact ponctuel. De même, la pression extérieure sur une région de contact est donnée localement par :

$$k_c = \frac{B}{b \sin \theta_c} [\dot{\kappa}(\pi R) - \cos \theta_c \dot{\kappa}(s_c)] \quad (11)$$

On continue à faire grandir la tige jusqu'à ce qu'elle présente un deuxième point de contact avec elle-même. C'est la forme finale proposée sur la figure 1.

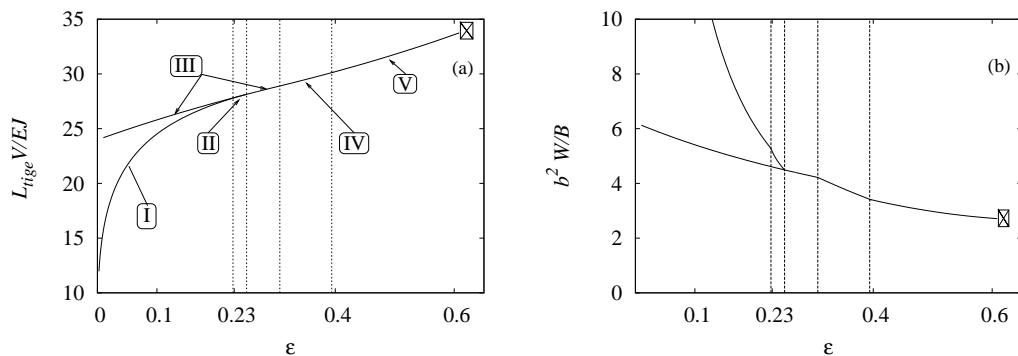


Fig.2. (a) Énergie élastique V de la tige adimensionnée par la longueur totale. (b) Force extérieure globale W adimensionnée par le rayon b du cylindre. Les barres verticales pointillées servent à délimiter les domaines d'existence des différentes phases. La croix signale la fin de la branche quand la tige présente deux auto-contacts.

4 Perspectives

Ce travail permet de comprendre et de caractériser en détail la formation des premiers plis dans un cas particulier de papier froissé cylindrique à deux dimensions. En restant attentifs à la gestion des conditions aux bords, déjà non-triviales, nous avons pu déterminer la forme des plis à partir d'équations exactes. Nous nous dirigeons maintenant vers l'étude de régimes non-symétriques à grands confinements où cette approche n'est plus possible. L'étude de tels régimes reste envisageable en combinant simulations numériques et concepts issus de la physique statistique.

Références

1. D. L. BLAIR, A. KUDROLLI, The geometry of crumpled paper, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 166107 (2005).
2. L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, Theory of elasticity 3rd ed. (Butterworth-Heinemann, London 1997)
3. P. PATRÍCIO, W. KRAUTH, Numerical solutions of the von-Kármán equations for a thin plate, *International Journal of Modern Physics C*, **8**, 427-434 (1997).
4. M. BEN AMAR, Y. POMEAU, Crumpled paper, *Proc. R. Soc. A*, **453**, 729-55 (1997).
5. A. LOBKOVSKY, S. GENTGES, H. LI, D. MORSE, T. WITTEN, Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet, *Science*, **270**, 1482-84 (1995).
6. E. CERDA, L. MAHADEVAN, Confined developable elastic surfaces : cylinders, cones and the *Elastica*, *Proc. R. Soc. A*, **461**, 671-700 (2005).
7. A. E. LOVE, A treatise on the mathematical theory of elasticity (Dover, New-York 1944).

Transmission par bistabilité nonlinéaire

D. Chevriaux

Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules CNRS-UMR5207,
Université Montpellier 2, 34095 Montpellier (France)
dchevria@lpta.univ-montp2.fr

Résumé. La nonlinéarité, induite par la dépendance de l'indice de réfraction à l'intensité, peut être un moyen de concevoir des détecteurs de lumière sensibles à une très faible excitation. Cela provient des propriétés de bistabilité de l'équation de Schrödinger nonlinéaire soumise à des conditions aux bords sur l'intervalle fini. Le détecteur est obtenu en couplant deux guides d'ondes 1D à une tranche de guide d'ondes 2D, avec un choix judicieux des indices. Ce dispositif présente d'inhabituelles propriétés de propagation de la lumière, et en particulier, la possibilité de bifurquer d'un mode évanescent vers un mode intense de sortie, sous l'effet d'un très faible signal. Une description analytique dans le cas conservatif, et des illustrations à l'aide de simulations numériques du modèle avec atténuation, ont permis de comprendre le phénomène de bistabilité.

Abstract. Nonlinearity induced by intensity-dependent refractive indices (Kerr media) can be used as a means to conceive light detectors sensitive to very weak excitation. This property results from the bistability properties of the nonlinear Schrödinger equation submitted to boundary value data on the finite interval. The detector is obtained by coupling two single 1D waveguide to a 2D slab waveguide with adjusted indices. The resulting device then presents unusual light propagation properties and in particular may switch from almost vanishing to intense output under excitation by a weak signal. This is understood by analytical description in the conservative case and illustrated by numerical simulations of the model with attenuation.

1 Introduction

L'effet Kerr optique résulte de la dépendance de l'indice de réfraction à l'intensité. Une des conséquences est la possibilité de former des solitons spatiaux dans des milieux diffractifs. Cet effet d'autofocalisation de la lumière fut proposé en 1964 [1] et mis en évidence dans l'équation de Schrödinger nonlinéaire (NLS) en 1965 [2]. L'autofocalisation fut expérimentalement réalisée dans un milieu diélectrique de guide d'ondes optique plan (liquide CS₂) en 1985 [3] et dans un guide d'ondes en verre en 1990 [4].

Lorsque le champ se propage dans la direction à la variation de l'indice (en référence aux milieux de Bragg), on peut observer des solitons de gap qui ont suscité de nombreuses études depuis leur prédiction en 1979 [5] et leur découverte expérimentale en 1992 [6].

Lorsque le champ se propage dans la direction transverse de variation de l'indice, le milieu périodique devient un coupleur directionnel, et de nouveaux résultats intéressants ont été obtenus. En particulier dans les guides d'ondes optiques diélectriques adjacents qui se couplent par échange de puissance entre modes guidés [7], et qui, déjà dans un contexte linéaire, révèlent des anomalies stupéfiantes de diffraction et de réfraction [8]. Dans un contexte nonlinéaire, les réseaux de guides d'ondes couplés deviennent des générateurs de solitons [7], mis en évidence dans de nombreuses situations physiques intéressantes [9]. Lorsque le réseau fonctionne comme un coupleur directionnel, en régime Kerr, le modèle est le système discret NLS [10], et c'est le couplage entre guides d'ondes adjacents qui joue le rôle de diffraction.

Il a été démontré récemment que des solitons de gap peuvent être générés dans un réseau de guides d'ondes à variation de d'indice optique, en pilotant les conditions aux bords. Le principe est l'utilisation d'un guide d'ondes pilote d'indice n_0 , nourri par un mode guidé et couplé à un réseau d'indice $n_1 < n_0$ par échange de puissance. Résultant de la théorie de supratransmission nonlinéaire, si l'on atteint l'intensité de bifurcation dans le guide d'ondes, des solitons sont émis dans le réseau. Pour des réseaux relativement courts (dans la direction transverse y) et en injectant des deux côtés, comme représenté Fig. 1gauche, il est possible de concevoir *un réseau de guides d'ondes nonlinéaires bistables, détecteur de lumière* [11].

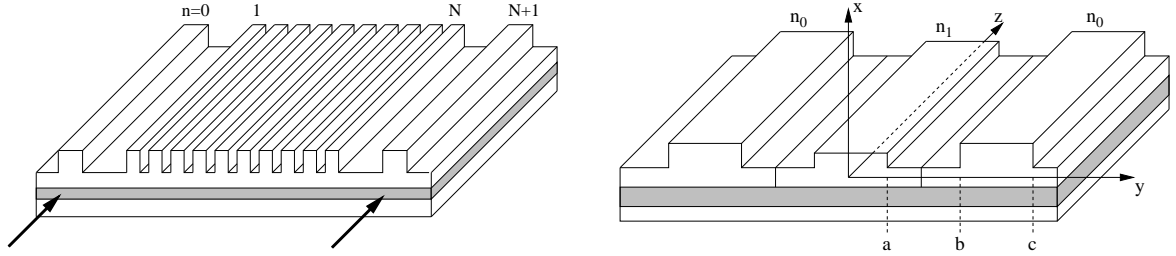


Fig.1. La figure de gauche présente un réseau de guides d'ondes nonlinéaires bistables, détecteur de lumière d'indice n_1 piloté par deux guides d'ondes latéraux d'indice $n_0 \geq n_1$. Les flèches symbolisent l'injection de radiation. La figure de droite montre le coupleur de trois guides d'ondes planaires. La direction de propagation est z , la modulation transverse travaille dans la direction y .

Une question intéressante est de savoir ce qui se passe dans la limite $N \rightarrow 1$ quand le réseau se réduit à un seul guide d'ondes, afin de se rapprocher des *composants optiques*. Avec un seul guide, on doit considérer les effets de la direction transverse y . Nous étudions par conséquent ici la version continue du réseau de guides d'ondes, dessiné en Fig. 1 droite et qui se compose de trois guides d'ondes plans couplés d'indices différents.

2 Le modèle

L'autofocalisation par effet optique est expérimentalement observée par irradiation d'une fibre plane bidimensionnelle avec un faisceau laser, et est observée le long de la propagation (en z). La modulation nonlinéaire contrebalance la dispersion due à la diffraction. Avant de définir le contexte physique et son rôle dans la nature du problème mathématique, on reconsidère ici la dérivation de l'équation de Schrödinger pour l'enveloppe du champ électrique.

2.1 Cadre général

On considère notre système où la variation de l'indice linéaire ne s'opère que dans la direction y . On suppose que le champ électrique est monochromatique de fréquence ω , polarisé et homogène dans la direction x , à savoir le champ transverse électrique (T.E) suivant

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_x (E(y, z)e^{-i\omega t} + c.c.), \quad (1)$$

où $\hat{\mathbf{e}}_x$ est le vecteur unitaire de la coordonnée x . On a $n = n(y)$, et donc le mode T.E. implique $(\nabla n) \cdot \mathbf{E} = 0$. Les équations de Maxwell dans un milieu non magnétique, sans charges libres, peuvent s'écrire, pour le champ électrique, en assumant une réponse instantanée du milieu Kerr (susceptibilité nonlinéaire χ), comme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot E + \frac{\omega^2}{c^2} (n^2(y) + 3\chi |E|^2) E = 0, \quad (2)$$

qui est l'équation d'Helmoltz nonlinéaire. Les termes d'oscillations nonlinéaires rapides ont été écartés car on suppose qu'il n'y pas de phase égale aux troisièmes harmoniques. On donne une solution de l'équation d'Helmoltz linéaire dans la base des modes linéaires guidés $\mathcal{E}_k(y, z)$ définis par

$$\mathcal{E}_k(y, z) = A(y) e^{ikz}, \quad A_{yy} = [k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(y)] A \quad (3)$$

où k est le nombre d'ondes gouverné par la propagation le long de z . L'amplitude $A(y)$ est le mode guidé dans la direction transverse y . C'est le mode propre de la solution du problème spectral, dans le potentiel généré par la variation de l'indice. Dans le cas d'une *gravure peu profonde*, c'est à dire pour de petites variations d'amplitude de l'indice $n(y)$ autour d'une valeur de référence n_0 , on définit un petit paramètre

d'échelle (appelé ϵ^2) par $\frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - n^2(y)] = \epsilon^2 V'(y)$. Ainsi l'équation différentielle (3) pour $A(y)$ indique que la variable y devient une *variable lente* échelonnée par ϵ . De même, la variation en z , en référence au nombre d'ondes $k_0 = \omega n_0 / c$ se produira naturellement pour de bas modes en énergie, comme ϵ^2 en échelle de z , en accord avec la phase $kz = [k_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2)]z$.

2.2 Modulation nonlinéaire

Regardons maintenant la méthode de développement en série asymptotique [12]. Le petit paramètre ϵ , introduit précédemment, sert à définir une représentation multi-échelle du champ par les variables lentes $y = \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots$, $z = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots$ et par son développement

$$E(y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j E_j(y_1, \dots, z_0, z_1, \dots), \quad E_j = \sum_{n=1}^{\infty} U_{jn}(y_1, \dots, z_1, \dots) e^{in k_0 z_0}. \quad (4)$$

Cela signifie que l'on restreint notre recherche à un champ lentement variable dans la direction transverse (pas de variable y_0). En considérant que les termes nonlinéaires E^3 provenant de E_1 , agissent uniquement sur la première et troisième harmonique, nous pouvons simplifier en annulant les puissances paires, on a alors $E_{2l} = 0$. L'équation 2 donne

$$(\epsilon) : L_0 E_1 = 0, \quad L_0 = \partial_{z_0}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2, \quad (5)$$

$$(\epsilon^2) : L_1 E_1 = 0, \quad L_1 = 2\partial_{z_0} \partial_{z_1}, \quad (6)$$

$$(\epsilon^3) : L_0 E_3 = -L_2 E_1 - N_3 E_1, \quad L_2 = \partial_{y_1}^2 + \partial_{z_1}^2 + 2\partial_{z_0} \partial_{z_2} - V', \quad N_3 = 3\frac{\omega^2}{c^2} \chi |E_1|^2, \quad (7)$$

Avec la définition (4), l'équation (8) est valable pour $U_{1p} = 0$ pour tout $p > 1$, et l'équation (9) donne alors $\partial U_{11} / \partial z_1 = 0$. On requiert, par la suite, qu'il n'y ait pas de termes séculaires produits dans l'équation (10), ce qui donne

$$2ik_0 \frac{\partial U_{11}}{\partial z_2} + \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial y_1^2} - V' U_{11} + 3\chi \frac{\omega^2}{c^2} |U_{11}|^2 U_{11} = 0. \quad (8)$$

Cette équation est invariante par la transformation inverse vers les dimensions physiques, à savoir $\epsilon y_1 \rightarrow y$, $\epsilon^2 z_2 \rightarrow z$, $\epsilon^2 V' \rightarrow V(y)$, $\epsilon U_{11}(y_1, z_2) \rightarrow \Psi(y, z)$, et donc, (8) devient

$$2ik_0 \Psi_z + \Psi_{yy} + \Gamma |\Psi|^2 \Psi = V(y) \Psi, \quad (9)$$

avec les définitions suivantes $V(y) = \frac{\omega^2}{c^2} [n_0^2 - n(y)^2]$, $\Gamma = 3\chi \frac{\omega^2}{c^2}$, $k_0 = \omega \frac{n_0}{c}$. On rappelle que le champ électrique est obtenu à partir de la solution Ψ par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}_x \Psi(y, z) e^{i(k_0 z - \omega t)} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (10)$$

ou ϵ échelonne la variation de l'indice par rapport à la valeur n_0 .

3 Solutions fondamentales

Nous considérons le dispositif dessiné Fig. 1(b) et étudions ses propriétés intrinsèques de bistabilité. Pour un choix judicieux des paramètres (variations d'indice, longueurs de séparations, dimensions), le pilotage par les guides d'ondes latéraux résulte approximativement en conditions aux bords en $y = -a$ et $y = a$ pour l'enveloppe Ψ du champ à l'intérieur de la fibre centrale.

3.1 Problèmes aux valeurs propres

Le nombre d'onde k_0 définit les modes propres du guide d'ondes plan d'indice n_0 avec une dimension transverse y infinie. Dans le cas où la dimension suivant y est finie, les variations d'indices vont générer une variation δk_0 du nombre d'ondes k_0 . On peut alors considérer une modulation de l'enveloppe $\Psi(y, z)$ de la forme

$$\Psi(y, z) = \Phi(y) e^{-i(\delta k_0)z}, \quad \delta k_0 \sim \epsilon^2. \quad (11)$$

L'amplitude stationnaire $\Phi(y)$ résout alors le problème aux valeurs propres nonlinéaires suivant

$$\Phi_{yy} + [\beta^2 - V(y)] \Phi = -\Gamma |\Phi|^2 \Phi, \quad (12)$$

avec le paramètre spectral $\beta^2 = 2k_0 \cdot \delta k_0 \equiv \delta k_0^2$ qui mesure la variation d'énergie. Dans le cas linéaire $\Gamma = 0$, on retrouve les modes guidés (3) avec $\Phi(y) = A(y)$ et $k^2 = k_0^2 - \beta^2 \sim (k_0 - \delta k_0)^2$.

Il est commode pour la suite de normaliser l'équation (13) en définissant $\psi = \sqrt{\Gamma} \Psi$ et $z = 2k_0 z'$ et l'on obtient (en oubliant les primes)

$$i\psi_z + \psi_{yy} + |\psi|^2 \psi = V\psi. \quad (13)$$

En posant $\psi(y, z) = \phi(y) e^{-i\beta^2 z}$, les solutions stationnaires obéissent à

$$\phi_{yy} + \phi^3 = [V(y) - \beta^2]\phi, \quad (14)$$

où l'on a considéré des solutions $\phi(y)$ à valeurs réelles et où $V(y)$ est un découpage de fonctions constantes (le potentiel $V(y)$ correspondant à la Fig. 1 droite est dessiné en Fig. 2 avec son profil d'indices).

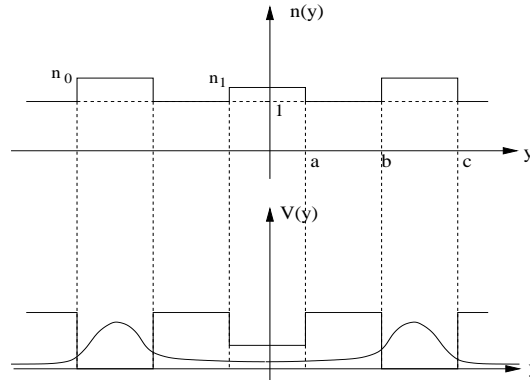


Fig.2. Profil d'indice $n(y)$ et potentiel relatif $V(y)$. Un exemple de mode propre est schématisé sur la figure inférieure, c'est l'amplitude initiale $\Phi(y, 0)$ utilisée pour les simulations numériques.

Les régions $y \in [a, b]$ et $y \in [c, \infty]$, correspondent au vide (ou à de l'air), et donc à une propagation linéaire. D'après les propriétés de symétrie, nous pouvons restreindre notre étude à $y > 0$. En résumé, le système basique, pour la valeur propre β , est

$$y[0, a] \quad \phi_{yy} + \phi^3 = \lambda_1 \phi, \quad \lambda_1 = V_1 - \beta^2, \quad (15)$$

$$y[a, b] \quad \phi_{yy} = \lambda_0 \phi, \quad \lambda_0 = V_0 - \beta^2, \quad (16)$$

$$y[b, c] \quad \phi_{yy} + \phi^3 = \lambda_2 \phi, \quad \lambda_2 = -\beta^2, \quad (17)$$

$$y[c, \infty] \quad \phi_{yy} = \lambda_0 \phi, \quad \lambda_0 = V_0 - \beta^2. \quad (18)$$

3.2 Etats propres nonlinéaires

On détermine maintenant, à partir du problème spectral, les conditions initiales pour l'équation de NLS (13) qui sont des états propres nonlinéaires spécifiques. Ceux-ci sont donnés en termes de fonctions elliptiques de Jacobi comme développé en [13] et appliqué en [14], pour obtenir un effet tunnel nonlinéaire dans un réseau de guides d'ondes couplées.

Il est clair que le signe de chaque constante λ_j est déterminant pour la nature de ces solutions. On s'intéresse au cas particulier où le guide d'ondes central ($y \in [-a, a]$) ne peut propager les modes guidés, provenant des guides d'ondes latéraux pilotes ($V_1 > \beta^2$). Par conséquent, nous avons les conditions $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. On peut montrer que les équations (15,17) possèdent les trois solutions fondamentales suivantes

$$\phi^{(1)}(y) = Bcn[\kappa(y - y_0), \mu], \quad \kappa^2 = \frac{\lambda}{2\mu^2 - 1}, \quad B^2 = 2\kappa^2\mu^2 \quad (19)$$

$$\phi^{(2)}(y) = Bdn[\kappa(y - y_0), \mu], \quad \kappa^2 = \frac{\lambda}{2 - \mu^2}, \quad B^2 = 2\kappa^2 \quad (20)$$

$$\phi^{(3)}(y) = \frac{B}{dn[\kappa(y - y_0), \mu]}, \quad \kappa^2 = \frac{\lambda}{2 - \mu^2}, \quad B^2 = 2\kappa^2(1 - \mu^2) \quad (21)$$

exprimées en termes de fonctions elliptiques de Jacobi d'argument $\mu < 1$. Ci-dessus, λ désigne à la fois λ_1 dans la région centrale et λ_2 dans les régions latérales pilotes. Les quantités B , κ et μ sont des paramètres déterminés de ces solutions (analogues à une relation de dispersion), qui assurent aux fonctions $\phi^{(j)}$ d'être solution de NLS. La phase y_0 est un paramètre libre qui peut être déterminé par les conditions de continuité et les conditions aux bords. Ces solutions fondamentales constituent alors, pour chaque λ donné (ou l'équivalent β^2), un jeu de 2 familles de paramètres, les paramètres étant pour l'exemple B (l'amplitude) et y_0 .

L'existence du comportement de bistabilité dans le cas nonlinéaire provient des remarques suivantes. La solution $\phi^{(1)}$ a actuellement deux réalisations différentes qui dépendent du signe de λ . En fait (19) fournit $\lambda < 0 \iff \mu^2 < \frac{1}{2}$, $\lambda > 0 \iff \frac{1}{2} < \mu^2 \leq 1$. La solution $\phi^{(1)}$ est permise dans les régions latérales $y \in [b, c]$ où $\lambda = \lambda_2 < 0$, et dans la région central $y \in [-a, a]$ où $\lambda = \lambda_1 > 0$. En ce qui concerne la solution $\phi^{(3)}$, la condition $\mu \leq 1$ provenant de (21), impose que la solution n'est possible que dans le cas $\lambda > 0$. La solution $\phi^{(3)}$ est l'analogue d'une onde évanescence linéaire. Par conséquent, le guide d'ondes central où $\lambda = \lambda_1 > 0$ peut contenir les deux types de solutions $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(3)}$. Ce qui constitue précisément les propriétés de bistabilité. On remarque que la solution $\phi^{(2)}$ est généralement instable et elle ne peut donc contribuer à la description des résultats des simulations numériques.

4 Simulations numériques

Eclairer localement la tranche avec un faisceau signifie pour le modèle, de le compléter avec la condition initiale $\Psi(y, 0)$. L'extension transverse du faisceau est une fonction locale lisse et on considère les conditions de bords de Neuman, $\Psi_y \rightarrow 0$, pour tout z aux deux extrémités $y \rightarrow \pm\infty$.

La solution $\phi(y)$ du système nonlinéaire (15,...,18) est soumise aux conditions de continuité en chaque point de discontinuité du potentiel ($y = a, b, c$). La première de ces conditions est la continuité du champ T.E (libre de charges de surfaces), et la seconde, est la continuité de la composante \mathbf{H}_{\parallel} du champ magnétique (surface non conductrice).

On a alors un jeu complet de solutions avec les ondes évanescences, qui connectent les régions latérales au guide d'ondes central, ainsi qu'au milieu extérieur. Ce sont les solutions des équations linéaires (16) et (18), à savoir $\phi^{(0)}(y) = \alpha_1 e^{-\lambda_0 y} + \alpha_2 e^{\lambda_0 y}$. L'utilisation des conditions de continuité aux points $y = a, b, c$, produit pour les 4 solutions $\phi^{(3)}$ dans $[0, a]$, $\phi^{(0)}$ dans $[a, b]$, $\phi^{(1)}$ dans $[b, c]$ et $\phi^{(0)}$ dans $[c, \infty]$, un jeu de 6 relations algébriques. Les conditions de symétrie apportent 2 relations supplémentaires $\phi^{(3)}(-a) = \phi^{(3)}(a)$ et $\phi^{(0)}(\infty) = 0$ et l'on peut ainsi déterminer les 8 paramètres libres. Ces 8 paramètres, incluant l'amplitude B , sont complètement déterminés par le choix de la valeur propre β , qui impose le mode guidé dans

les guides d'ondes latéraux pilotes. Dans la pratique, il est plus commode d'utiliser, à la place de β , l'amplitude $B = B_{in}$, qui représente l'amplitude de l'enveloppe $\phi^{(1)}$ dans la région $[b, c]$. Les conditions de continuité donneront alors une détermination de β . Cette amplitude B_{in} donne le flux d'énergie injecté dans les guides d'ondes pilotes latéraux. La suite de notre approche est donc d'augmenter petit à petit l'amplitude B_{in} , et d'observer la nature du flux lumineux qui émerge du guide d'onde central (amplitude B_{out}).

On présente en Fig. 3 les simulations numériques de notre système, observées dans la direction de propagation z , pour deux valeurs de B_{in} différentes.

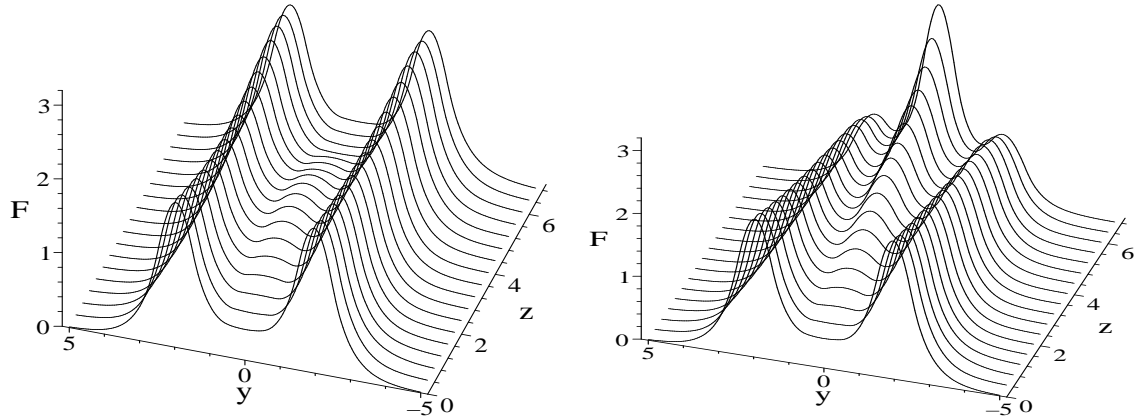


Fig.3. A gauche, $B_{in} = 1.4$ et $B_{out}^2 \approx 0.46$. A droite $B_{in} = 1.48$ et $B_{out}^2 \approx 3.25$. Les paramètres du système sont $a = 0.5$, $b = 1.5$, $c = 2.5$, $V_0 = 2.5$, $V_1 = 2$ et F désigne sur la légende $|\Psi(y, z)|^2$.

On peut montrer, que les solutions numériques tronquées en $[-a, a]$ coïncident avec leur expression analytique $\phi^{(j)}$. Il est aussi intéressant de constater que la bifurcation d'un mode évanescents vers un mode intense, peut être généré par l'injection d'une faible radiation ($\approx B_{in}/100$) dans le milieu central. Ce dispositif se comporterait alors, comme un détecteurs ultra sensibles, et pourrait permettre la conception d'amplificateurs, de commutateurs, de portes logiques ou bien de transistors optiques.

Références

1. R.Y CHIAO, E. GARMIRE, C.H. TOWNES, *Phys Rev Lett*, **13**, 479 (1964).
2. P.L. KELLEY, *Phys Rev Lett*, **15**, 1005 (1965).
3. A. BARTHELEMY, S. MANEUF, C. FROEHLI, *Opt Comm*, **55**, 201 (1985).
4. J.S. AITCHISON, A.M. WEINER, Y. SILBERBERG, M.K. OLOVER, J.L. JACKEL, D.E. LEAIRD, E.M. VOGEL, P.W.E. SMITH, *Opt Lett*, **471**, 15 (1990).
5. H.G. WINFUL, J.H. MARBURGER, E. GARMIRE, *Appl Phys Lett*, **35**, 379 (1979).
6. N.D. SANKEY, D.F. PRELEWITZ, T.G. BROWN, *Appl Phys Lett*, **60**, 1427 (1992).
7. D.N. CHRISTODOULIDES, R.I. JOSEPH, *Optics Lett*, **13**, 794 (1988).
8. T. PERTSCH, T. ZENTGRAF, U. PESCHEL, A. BRAUER, F. LEDERER, *Phys Rev Lett*, **88**, 093901 (2002).
9. A.A. SUKHORUKOV, D. NESHEV, W. KROLIKOWSKI, Y.S. KIVSHAR, *Phys Rev Lett*, **92**, 093901 (2004).
10. M.J. ABLowitz AND Z.H. MUSSLIMANI, *Physica D*, **184**, 276 (2003).
11. R. KHOMERIKI, J. LEON, *Phys Rev Lett*, **94**, 243902 (2005).
12. A. JEFFREY, T. KAWAHARA, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory*, Pitman (London 1982).
13. L.D. CARR, K.W. MAHMUD, W.P. REINHARDT, *Phys Rev A*, **64**, 033603 (2001).
14. J. LEON, *Phys Rev E*, **70**, 056604 (2004).

La diffraction non linéaire des ondes de choc acoustiques

F. Coulouvrat¹, R. Marchiano¹, B. Sambandam¹, & J.-L. Thomas²

¹ Laboratoire de Modélisation en Mécanique (UMR CNRS 7607), Université Pierre et Marie Curie, PARIS

² Institut des NanoSciences de Paris (UMR CNRS 7588), Université Pierre et Marie Curie, PARIS

coulouvr@ccr.jussieu.fr

Résumé. Les ondes acoustiques dans les fluides classiques (air, eau) étant non dispersives et faiblement dissipatives, les non-linéarités conduisent à la formation d'ondes de choc (d'amplitude faible). Les exemples sont nombreux, aussi bien en acoustique aérienne (tonnerre, bang sonique, bruit des moteurs d'avion...) que pour les ultrasons dans l'eau (notamment en imagerie et thérapie médicales). Si les ondes planes sont bien connues, les phénomènes de diffraction non linéaire restent à appréhender systématiquement. L'objectif est ici d'étudier quatre cas de diffraction non linéaire, et de d'observer des comportements spécifiques aux ondes de choc qui viennent modifier les lois bien connues de la diffraction linéaire. Ce sont respectivement : 1) la diffraction de Fresnel par un écran, 2) la réflexion d'une onde plane sur une paroi rigide (lois de Snell-Descartes), et la focalisation sur des caustiques, respectivement de type 3) pli (caustique d'Airy) ou 4) cuspidée (caustique de Pearcey).

Abstract. Acoustical waves in classical fluids (air, water) being non dispersive and weakly dissipative, nonlinearities lead to the formation of shock waves (of small amplitude). Examples are numerous, for audible acoustics (thunder, sonic boom, aircraft noise...) as well as for ultrasounds in water (especially for medical imaging and therapy). If nonlinear plane waves are well-known, nonlinear diffraction phenomena remain to be investigated systematically. The objective here is to study four cases of nonlinear diffraction, where behaviours specific for weak shock waves are observed which modify well-known laws of linear diffraction. These four cases are respectively : 1) Fresnel diffraction by a screen, 2) Snell-Descartes laws of reflexion on a rigid boundary, and focusing on caustics of type respectively 3) fold (Airy caustics) or 4) cusp (Pearcey caustics).

1 Introduction

Tous ces cas, à l'exception de la caustique pli, sont modélisés par une approximation de type paraxial dite équation KZ (équation de type hyperbolique du point de vue mathématique) ([17] [8]) :

$$\frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p_a}{\partial \tau \partial x} - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (p_a^2) = \frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Ici, x est la variable d'espace dans la direction principale de propagation, $\tau = t - x/c_0$ le temps retardé de propagation d'une onde plane dans cette direction, y la direction transverse, p_a la pression acoustique, c_0 la vitesse du son linéaire, ρ_0 la densité du milieu, et β le coefficient thermodynamique (d'ordre 1) mesurant la non-linéarité du milieu. Le premier terme au membre de gauche décrit l'évolution de l'onde à mesure qu'elle s'éloigne de la source, et le second les non-linéarités quadratiques. Celles-ci sont dues au fait que, pour une onde plane, la vitesse de phase de l'onde c dépend de l'amplitude *instantanée* $p_a(x, y, t)$ sous la forme $c = c_0 + \frac{\beta p_a}{\rho_0 c_0}$. Enfin, le second membre de Eq.1 décrit la diffraction dans la direction transverse. Dans le cas linéaire, Eq.1 est l'approximation paraxiale ou parabolique usuelle de l'équation des ondes, valable lorsque la propagation a lieu principalement dans la direction x . Cette approximation est bien vérifiée dans les cas étudiés, la direction principale étant fixée par celle de l'onde plane incidente sur l'écran pour la diffraction de Fresnel, par la direction tangente à la surface pour la réflexion rasante et par le rayon tangent à la pointe de la caustique cuspidée.

2 Dispositif expérimental

En régime linéaire, les différents problèmes abordés sont des problèmes de diffraction classique et ne sont pas spécifiques à l'acoustique. Ils peuvent être observés naturellement dans différents domaines des ondes : acoustique, optique, ondes de gravité, etc ... L'acoustique ultras-sonore dispose néanmoins, pour les étudier, de technologies avancées comme la technique de synthèse de champ par filtre inverse [14] permettant de synthétiser précisément des champs complexes par un contrôle précis de l'amplitude et de la phase du champ sur un domaine spatial donné, la phase étant un paramètre critique. Cette technique repose sur la connaissance de l'opérateur de propagation reliant les sources acoustiques et les points (appelés points de contrôle) constituant le domaine spatial où on veut synthétiser un champ donné. Une fois l'opérateur de propagation mesuré, il est numériquement inversé ce qui permet de déterminer les signaux à émettre par les sources acoustiques pour réaliser au mieux (au sens des moindres carrés) le champ à synthétiser sur les points de contrôle. Celui-ci dépend bien évidemment du problème physique étudié, soit ici la fonction d'Airy (solution linéaire de la caustique pli), la fonction de Pearcey (solution linéaire du problème de la caustique cuspidée), ou simplement un front d'onde plan à incidence donnée (pour la réflexion de Mach). Pour étudier le régime non linéaire, il suffit alors d'émettre sur chaque transducteur les signaux calculés en régime linéaire en multipliant d'un facteur 20 l'amplitude d'émission. On assiste alors à l'apparition de phénomènes non-linéaires (génération d'harmoniques, formation de chocs) couplés à la diffraction inhérente à chacun de ses problèmes physiques.

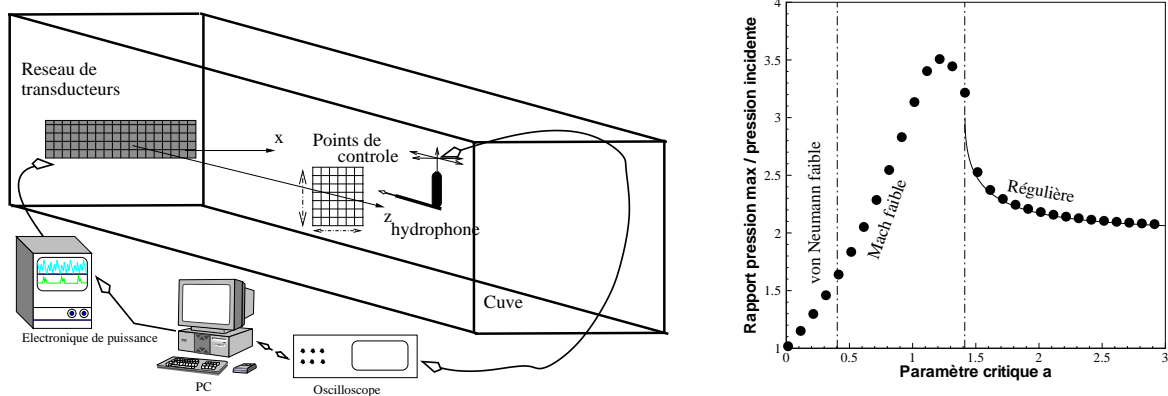


Fig.1. A gauche : schéma du dispositif expérimental - A droite : réflexion d'une onde rasante, amplitude maximale à la paroi normalisée par l'amplitude incidente en fonction du paramètre critique (courbe continue : théorie des chocs faibles, cercles noirs : simulation numérique)

Le dispositif expérimental (figure 1) utilisé a été développé dans cette double optique : synthèse de champ et puissance acoustique suffisante l'observation des ondes de choc. Il se compose d'un réseau de 128 transducteurs piézoélectriques dont la fréquence centrale est 1MHz (soit une longueur d'onde de 1.5 mm dans l'eau). Chaque transducteur est piloté individuellement par une électronique de puissance permettant de contrôler la forme, l'amplitude et la phase des signaux émis. Le réseau de transducteurs associé à l'électronique de puissance permet de générer un front d'onde plan d'une amplitude maximale de 5 bars. Ce niveau d'émission correspond à une distance de formation d'onde de choc de 30 cm environ (la distance de choc d'une onde plane est égale à $1/k\beta M$ [8], où k est le nombre d'onde et M est le nombre de Mach acoustique). Le champ acoustique est mesuré avec un hydrophone large bande (1-50 MHz) monté sur une système de 3 axes motorisés permettant un balayage 3D du champ de pression.

3 Diffraction de Fresnel non linéaire

Nous présentons une étude théorique et numérique [5] de la diffraction d'une onde de choc acoustique par un écran au voisinage de la ligne séparant la zone éclairée de la zone d'ombre, qui est une ligne de

singularité (discontinuité du champ) en acoustique géométrique. Cette singularité peut être levée par une description asymptotique de type couche limite, le champ y étant décrit par l'équation KZ. En régime linéaire, des solutions semblables existent, décrivant une couche limite dont l'épaisseur croît comme la racine carrée de la distance. La solution de base est donnée par les fonctions de Fresnel. En non linéaire, il est possible de montrer que des solutions auto-semblables existent également, mais cette fois l'épaisseur de la couche limite croît en fonction de la distance suivant une loi qui dépend de la forme temporelle du signal : puissance $1/2$ pour une dent-de-scie périodique mais $3/4$ pour une onde en "N" et loi linéaire pour un signal marche. Ces lois de puissance spécifiques s'expliquent théoriquement par le contenu spectral de chaque signal et son évolution non linéaire. Elles montrent que des chocs transitoires pénètrent plus profondément dans la zone d'ombre que des ondes périodiques ou linéaires. Ces résultats théoriques ont été confirmés par des simulations numériques réalisées à l'aide d'un code de résolution de l'équation KZ. Ils constituent un premier exemple intéressant de loi de diffraction classique (ici, de Fresnel) fortement modifiée en régime non linéaire.

4 Réflexion rasante non linéaire

Nous étudions [13] dans un second temps la réflexion rasante (angle d'incidence proche de 90°) des ondes de choc acoustiques sur une surface parfaitement plane et rigide. Pour les ondes de choc fortes, il existe deux types de réflexion, la réflexion régulière (à deux chocs) et la réflexion de Mach (à trois chocs) [1]. Toutefois, ce schéma est bien connu pour n'être plus valable pour les chocs faibles, tels qu'observés en acoustique, ce qui est connu comme le paradoxe de von Neumann [12]. Dans le cas linéaire, von Neumann a souligné un second paradoxe, suivant lequel les lois de Snell-Descartes linéaires sont singulières car valables à tout angle sauf l'incidence parfaitement rasante. Dans notre étude, trois types de signaux acoustiques sont étudiés : le cas idéal d'un choc pur, pour lequel il existe une solution auto-semblable, et les cas d'une onde en N ou d'une dent-de-scie périodique, correspondant à des signaux réalistes du point de vue acoustique. L'adimensionnement de Eq.1 fait apparaître le paramètre de contrôle clé $a = \sin\theta/\sqrt{\beta M}$ où $\pi/2 - \theta$ est l'angle d'incidence [3]. Le phénomène de réflexion non linéaire se produit pour des paramètres critiques de l'ordre de l'unité, soit, pour les valeurs usuelles de 10^{-3} du nombre Mach, des angles θ de l'ordre de quelques degrés. Pour une onde de choc pure, il est possible de vérifier que la solution du problème est auto-semblable (propriété également satisfaite par la solution numérique), et ne dépend donc que de la valeur de ce paramètre de contrôle. Ceci permet d'identifier quatre régimes différents de réflexion. Les lois de Snell-Descartes (régime n°1) ne sont retrouvées que pour les valeurs très grandes du paramètre critique (en pratique $a > 5$). Pour $a > \sqrt{2}$ a lieu la réflexion dite régulière (régime n°2), pour laquelle les ondes de choc incidente et réfléchie sont en contact sur la paroi, mais l'angle de réflexion est plus petit que l'angle d'incidence, et l'amplitude de l'onde réfléchie plus grande. En deçà se produit la réflexion dite irrégulière, ou de Mach généralisée (régime n°3), selon laquelle les ondes de choc incidente et réfléchie sont en contact (au point triple) à une distance finie de la paroi et connectées à celle-ci par une troisième onde de choc dite choc de Mach (Mach stem). Il est à noter toutefois que pour les chocs faibles, au contraire des chocs forts, le choc de Mach et le choc réfléchi sont de courbure non nulle et la pression en aval du choc réfléchi n'est pas constante (c'est pourquoi l'on parle de réflexion de Mach faible). Pour des valeurs plus faibles encore du paramètre critique ($a < 0.4$ environ), l'onde choc réfléchie disparaît complètement, on n'observe plus alors que la courbure du front d'onde incident et une compression localisée en amont de celle-ci. C'est un nouveau régime de réflexion (régime n°4), jamais décrit à notre connaissance dans la littérature, et que nous avons dénommé "réflexion de von Neumann faible". La succession de ces différents régimes est illustrée par la Fig.1, qui montre l'amplitude maximale du champ de pression sur la paroi, normalisée par l'amplitude de l'onde incidente, en fonction du paramètre critique. Aux grands angles on retrouve la loi de Snell-Descartes, avec un coefficient de réflexion 1 et donc un doublement de la pression à la paroi. En diminuant la valeur du paramètre critique (par exemple en s'approchant de l'incidence rasante), on s'écarte progressivement des lois linéaires et l'amplitude augmente. La simulation numérique est en parfait accord avec la valeur théorique donnée par la théorie des chocs faibles. En-deçà de la valeur critique $\sqrt{2}$, la réflexion régulière n'est plus valable, la réflexion de Mach faible se produit et l'amplitude de la surpression à la paroi augmente encore jusqu'à un maximum, avant de décroître. Cette

décroissance continue avec le régime de la réflexion de von Neumann, jusqu'à la valeur 1 en incidence totalement rasante : il n'y a plus d'onde réfléchie, l'onde incidente se propageant de façon parfaitement parallèle à la paroi sans interagir avec celle-ci. Cette courbe de transition continue suivant les valeurs du paramètre critique permet ainsi de résoudre le paradoxe acoustique de von Neumann et d'assurer une transition continue entre les lois de Descartes et l'incidence parfaitement rasante. Cette transition est toutefois non linéaire et non monotone, le rôle des non-linéarités étant maximal pour la réflexion de Mach faible. Pour des ondes de choc réalistes (chocs périodiques résultant d'un train d'onde, onde en "N" comme le bang sonique), les mêmes quatre régimes de réflexion existent. Toutefois, une onde de choc étant dissipative, l'énergie finie de l'onde diminue et par conséquent l'amplitude du choc et la valeur locale du paramètre critique au fur et à mesure que l'on se déplace le long de la plaque. Aussi ne peut-il exister de solutions auto-semblables, et les différents régimes décrits ci-dessus sont-ils transitoires. Quelque soit le régime initial observé à l'extrémité de la plaque, suffisamment loin l'amplitude de l'onde incidente aura diminué pour tendre vers la réflexion linéaire de Snell-Descartes. Toutefois cette évolution est lente (de l'ordre de la dizaine de distance de choc) et les différents régimes peuvent être observés sans difficulté, numériquement et également du point de vue expérimental, en utilisant le dispositif décrit ci-dessus. Afin d'éliminer l'influence des propriétés matérielles d'un réflecteur matériel (impédance finie, élasticité) et de l'état de surface (rugosité), la condition de paroi parfaitement rigide a été remplacée par une condition (mathématiquement équivalente) de symétrie à la paroi $\partial p_a / \partial z = 0$. Une onde avec un front d'onde composé de deux demi-plans en dièdre a été synthétisée sur une ligne transverse donnée (correspondant à l'extrémité de la paroi rigide $x = 0$). Le champ est ensuite émis en régime non linéaire et mesuré expérimentalement à différentes positions $x > 0$. Suivant la valeur de l'angle du dièdre, on observe clairement les différents régimes de réflexion attendus théoriquement (figure 2) : la réflexion de von Neumann faible pour l'angle le plus petit, la réflexion de Mach faible pour un angle "moyen" et la réflexion régulière pour l'angle le plus élevé. Ceci démontre que les lois de réflexion de Snell-Descartes sont violées pour des ondes de choc acoustiques d'amplitude très faible en incidence rasante, et que la réflexion de telles ondes est alors intrinsèquement gouvernée par des lois non linéaires.

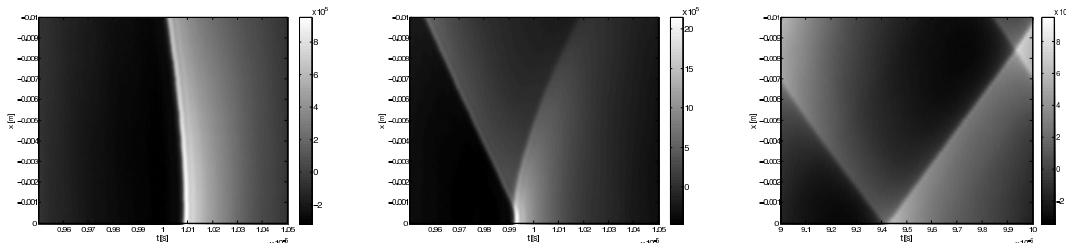


Fig.2. Mesure expérimentale de la réflexion non linéaire d'une onde de choc : champs spatio temporels — à gauche réflexion de von Neumann ($\theta = 1^\circ$), au centre réflexion de Mach ($\theta = 3^\circ$), à droite réflexion régulière ($\theta = 5^\circ$). Les pressions sont en niveau de gris.

5 Focalisation d'ondes de choc sur des caustiques

Les caustiques sont des surfaces d'amplification du champ acoustique. Selon la théorie des catastrophes [15],[2] elles peuvent être classifiées selon leur géométrie, les deux plus simples étant respectivement la caustique "pli" et la caustique "cuspidée". Dans l'approximation de l'acoustique géométrique (théorie des rayons), qui néglige la diffraction, ces surfaces sont des singularités d'amplitude. Pour lever cette singularité en régime linéaire, il est nécessaire d'introduire la diffraction. La caustique "pli" correspond à la focalisation d'un front d'onde sur une surface régulière de l'espace. Cette surface divise l'espace en deux zones distinctes, une zone insonnée où les rayons sont tangents à la caustique et une zone de silence où il n'y a pas de signal. La caustique pli est ainsi dénommée en raison de la pliure du front d'ondes que la focalisation engendre. La figure de diffraction associée en régime linéaire à une telle caustique est

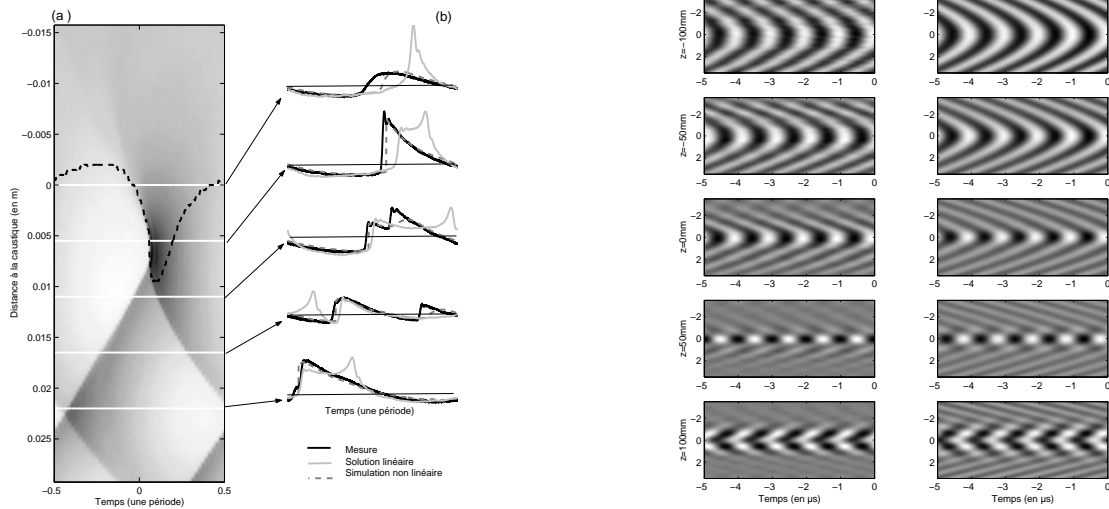


Fig.3. Focalisation d'ondes de choc sur des caustiques 'pli' et 'cuspidée' - Mesure expérimentale du champ de pression spatio-temporel focalisé sur une caustique pli (1ère colonne, en pointillé la ligne sonique séparant les domaines elliptique et hyperbolique) et comparaison avec des simulations numériques linéaire et non linéaire (2ème colonne) - Simulations numériques du champ de pression spatio-temporel focalisé sur une caustique cuspidée (3ème colonne) et comparaison avec les mesures (4ème colonne). Les pressions sont en niveau de gris.

la fonction d'Airy. La caustique cuspidée quant à elle est caractérisée par un point de rebroussement et un front d'onde en forme de queue d'aronde. La figure de diffraction associée est la fonction de Pearcey. Lorsque les ondes qui focalisent sur une caustique sont des ondes de choc, la modélisation précédente tombe à nouveau en défaut car une nouvelle singularité d'amplitude apparaît. Il est alors nécessaire d'introduire un mécanisme physique limitateur sous la forme de non-linéarités locales. En prenant en compte celles-ci, le problème de la focalisation d'ondes de choc sur une caustique 'pli' peut être modélisé par l'équation de Tricomi non linéaire [7]. Elle permet notamment d'établir une loi de similitude non linéaire selon laquelle l'amplitude du choc focalisé varie comme la puissance $4/5$ de celle du choc loin de la caustique. La nature de cette équation non linéaire, de type mixte hyperbolique / elliptique à long terme a été un obstacle à la mise en oeuvre d'une simulation numérique du phénomène. Le développement récent d'un code de simulation numérique [9] a permis d'avoir un outil performant de résolution afin de vérifier la théorie de Guiraud. Pour cela les résultats numériques ont été comparés à une expérience de focalisation d'ondes de choc sur une caustique pli [10]. Le dimensionnement de l'expérience a été choisi pour simuler à l'échelle (1/100 000e) la focalisation du bang sonique d'un avion supersonique en accélération. A nouveau, la technique du filtre inverse a été utilisée pour imposer la fonction d'Airy dans une région de l'espace. Les signaux émis par les transducteurs ont ensuite été amplifiés pour provoquer l'apparition des effets non linéaires lors de la propagation. La figure 3 fait apparaître (1ère colonne) le champ de pression spatio-temporel (abscisses : temps, ordonnées : espace) sur une période du signal acoustique au voisinage de la caustique. Les zones de transitions rapides blanc/noir sont caractéristiques de la présence d'ondes de choc. Ces ondes de choc permettent de visualiser très nettement le front d'onde dont la forme est bien celle attendue d'un front d'onde plié. La ligne noire pointillée est appelée ligne sonique. Elle sépare la zone elliptique (au dessus) où l'on constate que le champ décroît rapidement (pas de choc dans cette zone) et la zone hyperbolique (en dessous) dans laquelle il y a propagation des chocs. La 2ème colonne présente 5 signaux temporels à différentes distances de la caustique. Sur les signaux expérimentaux (trait noir plein) ont été superposés les signaux simulés numériquement dans le cadre de la théorie linéaire (trait gris clair plein) et de la théorie non linéaire (trait gris foncé pointillé). Il n'y a pas d'accord entre l'expérience et la simulation linéaire mais accord très satisfaisant (forme temporelle, amplitude et phase des chocs) avec la

simulation non linéaire. Ceci démontre le rôle essentiel joué localement par les non-linéarités, même sur des distances très petites comparées à la distance de choc.

La focalisation d'ondes de choc sur une caustique cuspidée peut être modélisée par l'équation KZ [6] et [4]. Une loi de similitude à la Guiraud peut également être établie, mais avec une puissance $2/3$ cette fois. Afin de valider le modèle théorique et le code numérique, une confrontation avec des résultats expérimentaux a été entreprise [11]. Le protocole expérimental est similaire à celui décrit précédemment. En régime linéaire, la technique de synthèse par filtre inverse a été utilisée pour synthétiser la fonction de Pearcey. Puis, les signaux émis par les transducteurs ont été amplifiés afin de faire apparaître les effets non linéaires lors de la propagation. La figure 3 montre le champ de pression spatio-temporel simulé (3ème colonne) et mesuré expérimentalement (4ème colonne) à différentes distances de la pointe de la caustique (de haut en bas $z = -100mm$, $z = -50mm$, $z = 0mm$, $z = 50mm$, $z = 100mm$). L'accord entre les deux séries de figures est très bon. Les formes spatiales ainsi que temporelles du champ de pression sont bien retrouvées pour chacune des différentes distances. La focalisation a lieu entre $z = 0mm$ et $z = 50mm$. Avant cette distance le front d'ondes est convergent mais ne présente pas de singularité. Après la focalisation, la forme du front d'ondes est plus complexe. Cependant la structure en queue d'aronde n'est pas clairement identifiable. Les comparaisons quantitatives montrent également un bon accord sur la forme et l'amplitude des signaux temporels. On observe notamment un coefficient d'amplification de l'ordre de 9 pour un choc focalisant sur une caustique cuspidée, contre 3 pour une caustique simple, valeurs en accord avec les mesures de "superbang" sonique réalisées en vol [16].

Références

1. G. BEN-DOR, *Shock Wave Reflection Phenomena*, Springer, New York (1992).
2. M. V. BERRY, Waves and Thom's theorem, *Adv. Phys.*, **25**, 1-26 (1976).
3. M. BRIO, J. K. HUNTER, Mach reflection for the two-dimensional Burgers' equation, *Physica D*, **60**, 194-207 (1992).
4. F. COULOUVRAT, Focusing of weak acoustic shock waves at a caustic cusp, *Wave Motion*, **32**, 233-245 (2000).
5. F. COULOUVRAT, R. MARCHIANO, Nonlinear Fresnel diffraction of weak shock waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, **114**, 1749-1757 (2003).
6. M. S. CRAMER, A. R. SEEBASS, Focusing of weak shock waves at an arête, *J. Fluid Mech.*, **88**, 209-222 (1978).
7. J.-P. GUIRAUD, Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation, *J. Mécanique*, **4**, 215-267 (1965).
8. M. F. HAMILTON, D. T. BLACKSTOCK, *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, San Diego (1998).
9. R. MARCHIANO, F. COULOUVRAT, R. GRENON, Numerical simulation of shock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom, *J. Acoust. Soc. Am.*, **114**, 1758-1771 (2003).
10. R. MARCHIANO, J.-L. THOMAS, F. COULOUVRAT, Experimental simulation of supersonic superboom in a water tank : nonlinear focusing of weak shock waves at a fold caustic, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 184301 (2005).
11. R. MARCHIANO, F. COULOUVRAT, J.-L. THOMAS, Nonlinear focusing of acoustic shock waves at a caustic cusp, *J. Acoust. Soc. Am.*, **117**, 566-577 (2005).
12. J. VON NEUMANN, *Oblique reflection of shocks (in John von Neumann collected work, vol. 6)*, Pergamon, New York, 238-299 (1963).
13. B. SAMBANDAM, F. COULOUVRAT, R. MARCHIANO, Nonlinear reflection of grazing acoustical shock waves : unsteady transition from von Neumann to Mach to Snell-Descartes, *J. Fluid Mech.*, submitted (2005).
14. M. TANTER, J.-L. THOMAS, M. FINK, Time reversal and inverse filter, *J. Acoust. Soc. Am.*, **108**, 223-234 (1998).
15. R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse* Benjamin, Reading (1972).
16. J.-C. WANNER, J. VALLÉE, C. VIVIER, R. THÉRY, Theoretical and experimental studies of the focus of sonic booms, *J. Acoust. Soc. Am.*, **52**, 13-22 (1972).
17. E. A. ZABOLOTSKAYA, R. V. KHOKHLOV, Quasi-plane waves in the non-linear acoustics of confined beams, *Sov. Phys. Acoust.*, **15**, 35-40 (1969).

Mode d'instabilité à propagation radiale observé dans un écoulement de Couette-Taylor viscoélastique

O. Crumeyrolle, N. Abcha, N. Latrache, & I. Mutabazi

25 rue Philippe Lebon, BP540, 76058, Le Havre cedex
olivier.crumeyrolle@univ-lehavre.fr

Résumé. L'écoulement d'une solution de polymère de grande masse molaire est étudié expérimentalement dans le système de Couette-Taylor avec cylindre extérieur fixe. Le mode critique d'instabilité est formé d'ondes contre-propagatives axialement. Une propagation radiale en direction du cylindre extérieur est aussi observée. Nous rapportons les principales caractéristiques de ce mode (nombre d'onde et fréquences) et déterminons la répartition dans la direction radiale des harmoniques par rapport au mode fondamental. Nous comparons nos résultats aux régimes inertio-élastiques déjà connus en écoulement de Couette-Taylor viscoélastique.

Abstract. We investigated experimentally the flow of a high-molecular-mass polymer solution in the Couette-Taylor system with fixed outer cylinder. The critical instability mode is observed in form of counterpropagating waves in the axial direction, and also exhibit radial propagation towards the outer cylinder. The main features (wavenumber, frequencies) are reported, together with the distribution in the radial direction of harmonics vs. fundamental mode. These results are compared to already known inertio-elastic flow patterns in the field of viscoelastic Couette-Taylor flow.

1 Introduction

Les écoulements de liquides viscoélastiques peuvent se comporter de manières très différentes des écoulements observés pour les fluides newtoniens. Parmi les effets les plus connus, on peut citer l'effet Weissenberg : le liquide grimpe le long d'une tige verticale tournante que l'on avait partiellement plongée dans le fluide viscoélastique. Un autre effet remarquable est la réduction de traînée. Ainsi à débit et viscosité identiques, l'écoulement turbulent dans une conduite nécessite un gradient de pression plus faible pour le fluide viscoélastique. Une classe importante de liquides viscoélastiques est formée par les solutions de polymères de grande masse molaire. Ces liquides sont représentatifs d'applications (ex : augmentation de la portée des lances à incendies) mais servent aussi de liquides de test. En effet en modifiant les caractéristiques du couple polymère/solvant, il est possible de contrôler les propriétés viscoélastiques.

L'absence pour les liquides viscoélastiques d'équations aussi universelles que les équations de Navier-Stokes combiné aux intérêt applicatifs (ex : écoulement de polymères fondus en plasturgie) et des inconvénients que les instabilités peuvent entraîner dans les process (ex : produit fini défectueux) a motivé un large nombre de travaux expérimentaux. L'étude de la stabilité des écoulements viscoélastiques a dès la fin des années 60 [1] employé un système hydrodynamique modèle, le système de Couette-Taylor, pour étudier le comportement de liquides viscoélastiques de test. Le système de Couette-Taylor est formé d'une couche de fluide emprisonnée dans l'entrefer formé par deux cylindres coaxiaux en rotation, et de nombreux résultats ont été obtenus dans le cas de fluides newtoniens [2].

L'étude de l'écoulement de Couette-Taylor pour des liquides fortement viscoélastiques (fluides de Boger) a permis la découverte [3] des instabilités purement élastiques, qui peuvent déstabiliser un écoulement à des vitesses arbitrairement faibles. Ces instabilités peuvent conduire au régime de turbulence élastique [4], où un écoulement viscoélastique présente un comportement turbulent dans des conditions pour lesquelles un fluide newtonien de viscosité comparable s'écoulerait de manière laminaire.

A mi-chemin entre les instabilités inertielles observées pour les fluides newtoniens et les instabilités purement élastiques se situent les régimes dits inertio-élastiques, pour lesquels les modes d'instabilités observés présentent une nature différente de celle observée avec des fluides newtoniens tout en étant

pour l'essentiel régi par les forces d'inertie. Parmi les résultats expérimentaux antérieurs sur la stabilité de l'écoulement de Couette en régime inertio-élastique figurent l'observation par Groisman et Steinberg [5] d'un mode d'instabilité se propageant à la fois axialement et radialement, dénommé Radial Waves (RW). Les observations, conduites à cylindre extérieur fixe, ont montré une période axiale 4 à 5 fois plus courte que la taille de l'entrefer, une alternance de sources et de puits au fil de la direction axiale, et une propagation dans la direction radiale, en direction du cylindre intérieur. Si la courte périodicité axiale était attendue, le sens de propagation est à l'opposé des prédictions. Par ailleurs un mode formé d'onde stationnaire dans la direction axiale a été observé par divers auteurs [6,7,8], toujours à cylindre extérieur fixe. Ce mode présente une période axiale comparable à deux fois la taille de l'entrefer, et résulte de la superposition de deux ondes contrapropagatives dans la direction axiale qui présentent une amplitude comparable. L'interférence de ces deux ondes conduit à un motif stationnaire dans la direction axiale. Il a été rapporté dans le cas de solutions de polyoxyéthylène (POE) [8] qu'un fort couplage pouvait être observé entre les ondes contrapropagatives. Chaque onde est habituellement interprétée comme une spirale, i.e. une (ou plusieurs) paire(s) de tourbillons contrarotatifs s'enroulant en hélice autour du cylindre intérieur, et occupant tout l'entrefer. Pour l'écoulement de Couette-Taylor d'un fluide newtonien, les spirales ne sont observées que dans le cas où les deux cylindres sont en rotation.

2 Dispositif expérimental

Nous employons des solutions de POE de masse molaire $8 \cdot 10^6$ g/mol (indication du fabricant), avec une concentration massique de 0,09% dans un solvant eau/alcool isopropylique. Les proportions du solvant sont, en volume, de 95% d'eau et 5% d'alcool. L'eau employée est de l'eau de Volvic. Ces solutions sont rhéofluidifiantes : la viscosité est constante pour les faibles taux de cisaillement puis diminue en loi de puissance quand le taux de cisaillement de l'écoulement croît. Les mesures de viscosité dynamique sous taux de cisaillement imposé ont été réalisées avec un rhéomètre AR-2000 (TA Instruments) et sont rapportées Fig. 1. Les mesures sont bien décrites par un ajustement avec la loi de Carreau $\eta = \eta_0 (1 + (\lambda\dot{\gamma})^2)^{-n}$.

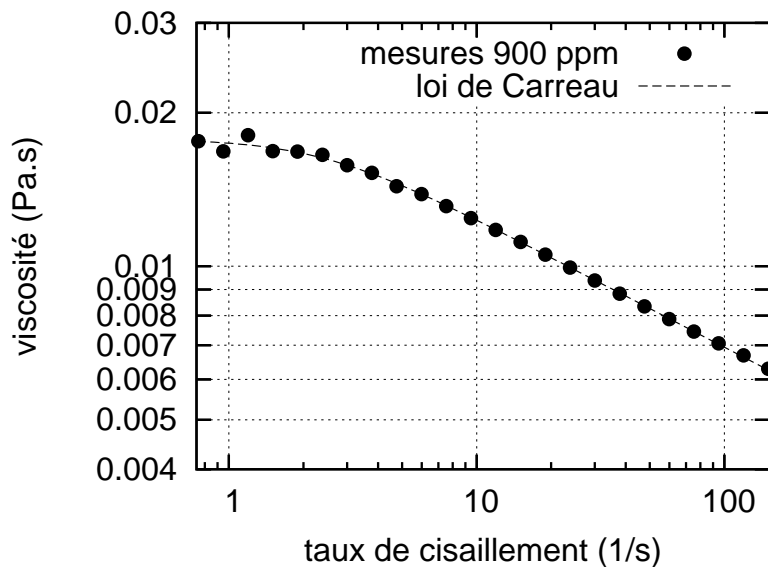


Fig.1. Viscosité dynamique en fonction du taux de cisaillement imposé.

Les paramètres obtenus sont $\eta_0 = 17,8$ mPa.s, $\lambda = 0,42$ s et $n = 0,126$. Les caractéristiques détaillées de ces solutions ont été déterminées dans [9].

Le système de Couette-Taylor employé est vertical. Il est constitué d'un cylindre intérieur en aluminium anodisé de rayon $a = 4\text{cm}$ et d'un cylindre extérieur en verre de rayon $b = 5\text{cm}$, et de hauteur $L = 45,9\text{cm}$. Le rapport des rayons est donc $a/b = 0,8$ et le rapport d'aspect $L/d = 45,9$, avec $d = b - a$. Le cylindre extérieur est isolé thermiquement de l'extérieur par un bain rectangulaire en plexiglass rempli d'eau. La géométrie rectangulaire du bain favorise les observations optiques. La rotation du cylindre intérieur est contrôlée par un servomoteur, tandis que le cylindre extérieur est maintenu fixe. La vitesses de rotation Ω du cylindre conduit à un taux de cisaillement imposé dans l'entrefer de $\dot{\gamma} = \Omega a/d$. On définit le nombre de Reynolds associés, $Re = \Omega a d/\nu = \dot{\gamma} d^2/\nu$ et le nombre de Taylor $Ta = (d/a)^{(1/2)} Re$, où ν est la viscosité cinématique de la solution. En notant ρ la masse volumique du fluide, on distingue les nombres adimensionnés effectifs, calculés avec $\nu = \eta(\dot{\gamma})/\rho$ la viscosité cinématique apparente (car rhéofluidifiée) et les nombres Re_0 et Ta_0 calculés avec $\nu = \eta_0/\rho$ la viscosité cinématique aux faibles taux de cisaillements. L'écoulement est additionné de 2% de Kalliroscope. Une caméra CCD de 720x576 pixels enregistre la visualisation de l'écoulement obtenue par une coupe laser verticale de l'entrefer (dénommée section droite), et ceci sur une hauteur de 12 cm et à raison de 25 images par seconde.

3 Résultats

Pour les fréquences de rotation $\Omega/2\pi$ inférieures à 410 mHz on observe un écoulement de Couette circulaire. Le mode critique d'instabilité est observé pour une fréquence de rotation du cylindre $\Omega/2\pi$ de 410 mHz, soit un nombre de Taylor $Ta_0 = 28,9$ et $Ta = 42,1$ si ν est la viscosité cinématique apparente. Il est formé d'ondes axialement contrapropagatives. Nous rapportons Fig. 2 les sections droites associées, obtenues sur la partie centrale de 12 cm de haut du système. Le comportement dans l'ensemble de l'expérience est semblable à celui visualisé par les sections droites sauf près des bords : l'onde se propageant vers le bas est absente dans les 2 à 3 cm près du bord supérieur et inversement.

Les sections droites étant enregistrées tous les $1/25^e$ de seconde, on peut noter $I(z, r, t)$ le signal correspondant. Les diagrammes spatio-temporel $I(r, t)$, présentés Fig. 3, sont extraits de $I(z, r, t)$ aux positions z_1 et z_2 mentionnées Fig. 2e.

Ces diagrammes mettent en évidence la propagation radiale des tourbillons dans la direction du cylindre extérieur. Par traitement du signal, on identifie la fréquence $f_2 = 0,2685\text{Hz}$ associée aux « rayures » du motif Fig. 3a. En comparant à l'évolution des section droite, il apparaît que cette fréquence est associée à une demi-période (Fig. 1a à c). La fréquence fondamentale est donc bien $f_1 = f_2/2 = 0,134\text{Hz} = (7,45\text{s})^{-1}$. Les diagrammes spatio-temporels $I(z, t)$ ont aussi été extraits et sont rapportés Fig. 4.

Le nombre d'onde axial associé à la période spatiale de ces motifs est identique et vaut $q_1 = 0,035\text{mm}^{-1}$, soit une période spatiale de 28,6 mm, presque trois fois plus grande que la taille de l'entrefer. On remarque la nette différence entre le motif de la Fig. 4a et les deux autres diagrammes (Fig. 4b et c). Le premier motif est proche du motif associé aux ondes contrapropagatives fortement couplées [8] tandis que les deux autres correspondent à des motifs avec un couplage plus faible [*ibid.*]. Ceci est confirmé en relevant dans le spectre de Fourier 2D $F(q, f)$ des signaux les puissances associées aux différents modes. La puissance des harmoniques de couplages, présentes à $(q = 0, f = f_2)$ et $(q = 2q_1, f = 0)$, est 3,1 fois plus grande que celle du mode fondamental à (q_1, f_1) pour le motif de la Fig. 4a. A l'opposé les puissances des harmoniques et du mode fondamental sont proches pour les diagrammes obtenus au milieu de l'entrefer ou près du cylindre intérieur.

4 Discussion et conclusion

Nous avons observé que l'écoulement de Couette circulaire d'une solution de polyoxyéthylène de grande masse molaire à 0,09% dans un solvant eau/alcool isopropylique est instable pour un nombre de Taylor critique effectif $Ta = 42,1$.

Les résultats observés dans nos expérience, avec un périodicité spatiale presque trois fois plus large que l'entrefer, se distinguent nettement des résultats précédemment observés par Groisman et Steinberg [5]. En effet le motif d'onde radiale observé par ces auteurs présentait une périodicité spatiale 4 à 5 fois

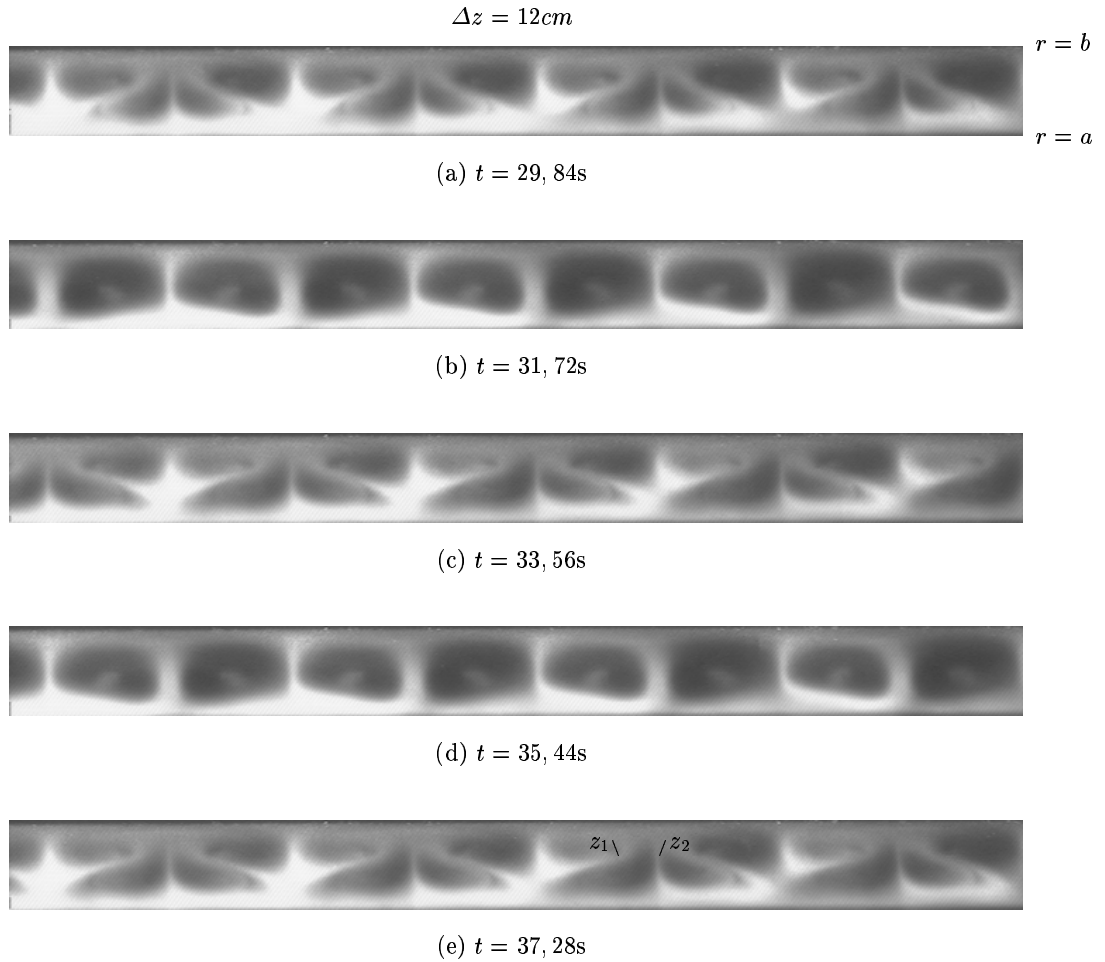


Fig.2. Sections droites $I(z, r, t)$ obtenues au cours de 7,45 secondes. Les positions z_1 et z_2 sont utilisées à la figure suivante.

plus courte que l'entrefer. Par ailleurs nous n'avons pas observé d'alternance de puits et de sources, et la propagation dans la direction radiale est à l'opposée de celle observée par Groisman et Steinberg.

On remarque que le nombre de Taylor critique $Ta = 42,1$ est un peu plus de 10% inférieur à la valeur de 47,3, qui correspond à la valeur critique pour une fluide newtonien dans notre expérience. Ceci est comparable au résultat obtenu pour la plus forte concentration (700 ppm) étudiée dans [8]. La fréquence fondamentale observée dans nos résultats vaut $f_1 = 1,08 d^2/\nu$ avec ν la viscosité apparente. Bien que le régime observé soit distinct des régimes obtenus avec des fluides newtoniens, on reste dans le domaine inertio-élastique. La transition vers des régimes d'ondes contrapropagatives avec des fréquences distinctes, rattachées à un temps élastique du liquide plutôt qu'au temps de diffusion visqueuse, est étudiée dans [9].

L'étude des diagrammes spatio-temporel $I(z, t)$ pour différentes position radiales n'avait pas été réalisée précédemment. Les motifs rapportés dans [8] ont été obtenus par visualisation avec un éclairage externe diffus. Les diagrammes spatio-temporels associés sont donc très influencés par le comportement près du cylindre extérieur. Le caractère dominant du couplage près du cylindre extérieur observé dans ce travail est donc cohérent avec les résultats précédents.

L'origine de cette propagation radiale reste à élucider. On peut noter que les résultats théoriques prédisant une propagation radiale vers le cylindre extérieur ont été obtenu en supposant l'écoulement axisymétrique et le fluide viscoélastique comme non-rhéofluidifiant. Ce n'est pas le cas du régime rapporté

ici, qui est non-axisymétrique et a été obtenu avec un fluide viscoélastique rhéofluidifiant. De nouvelles études théoriques et numériques sont donc requises. D'un point de vue expérimental, l'étude de l'écoulement par imagerie de particules (*PIV*) est envisagée afin de caractériser plus avant la dynamique radiale des tourbillons. L'étude de fluides viscoélastiques non-rhéofluidifiants mais présentant des caractéristiques élastiques proche des fluides employés ici est aussi envisagée.

Références

1. H. RUBIN & C. ELATA, Stability of Couette flow of dilute polymer solutions, *Phys. Fluids*, **7**, 1929-1933 (1966).
2. R. TAGG, The Couette–Taylor problem, *Nonlinear Sci. Today*, **4** (3b) (1994).
3. R.G. LARSON, E. S. G. SHAQFEH, & S.J. MULLER, A purely elastic instability in Taylor–Couette system, *J. Fluid Mech.*, **218**, 573-600 (1990).
4. A. GROISMAN & V. STEINBERG, Elastic turbulence in a polymer solution flow, *Nature*, **405**, 53-55 (2000).
5. A. GROISMAN & V. STEINBERG, Mechanism of elastic instability in Couette flow of polymer solutions : experiment, *Phys. Fluids*, **10** (10), 2451-2463 (1998).
6. A. GROISMAN & V. STEINBERG, Couette-Taylor flow in a dilute polymer solution, *Phys. Rev. Lett.*, **77** (8), 1480-1483 (1996).
7. B. M. BAUMERT & S. J. MULLER, Axisymmetric and non-axisymmetric elastic and inertio-elastic instabilities in Taylor-Couette flow, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **83**, 33-69 (1999).
8. O. CRUMEYROLLE, I. MUTABAZI & M. GRISEL, Experimental study of inertioelastic Couette-Taylor instability modes in dilute and semidilute polymer solutions, *Phys. Fluids*, **14**(5), 1681-1688 (2002).
9. N. LATRACHE, *Etude des instabilités de liquides newtoniens ou viscoélastiques dans le système de Couette–Taylor*, Thèse de l'Université du Havre, Le Havre (2005).

Application pratique de la propagation d'une flamme sur un combustible liquide

Eugène Degroote

Grupo de Computación Natural, Laboratorio de Sistemas Complejos, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, Campus de Montegancedo, 28660-Boadilla del Monte, Madrid, Spain
eugenio.degroote@upm.es

Résumé. L'étude de la propagation d'une flamme sur un combustible liquide a permis de découvrir cinq régimes de propagation différents, séparés par quatre températures critiques T_1, T_2, T_3, T_4 . L'étude des mécanismes de propagation nous a permis de découvrir que la température superficielle initiale du combustible constitue le principal paramètre qui nous permet de contrôler la vitesse de propagation de la flamme (v_f) [1,2]. L'étude expérimentale nous a aussi permis de préciser le rôle de la convection que nous observons dans la phase liquide devant la flamme. Ces deux facteurs (convection devant la flamme et température superficielle initiale) nous permettent de contrôler de façon effective la vitesse de propagation d'une flamme et donc d'améliorer les conditions de sécurité dans un dépôt de combustible liquide [3]. Les premiers résultats expérimentaux, obtenus dans un petit dépôt de combustible, seront présentés ici.

Abstract. Flame spreading over liquid fuels has five different spreading regimes, separated by four critical temperatures T_1, T_2, T_3, T_4 . The understanding of the mechanisms lead us to find that the initial fuel surface temperature is a controlling parameter of flame spreading velocity (v_f) [1,2]. Recent experiments emphasize the role of the preheated region observed in front of the flame. These two factors (the convection zone ahead of the flame and the initial fuel surface temperature) can be used to control flame propagation velocity and, therefore, fire safety conditions on fuel containers can be increased [3]. The very first experimental results, obtained in a small fuel container, will be shown here.

1 Propagation d'une flamme sur un combustible liquide : Résultats expérimentaux

La propagation d'une flamme sur un combustible liquide présente un comportement différent du combustible liquide. Si nous prenons la température superficielle de combustible liquide (T_∞) comme paramètre, nous trouvons expérimentalement que la vitesse de propagation présente cinq régimes de propagation différents, soit :

- Si $T_\infty > T_1$, la vitesse de propagation (v_f) est uniforme et presque constante $v_f \approx 100\text{cm/s}$ (régime uniforme I).
- Si $T_2 \leq T_\infty \leq T_1$, la vitesse de propagation est uniforme, avec $\frac{dv_f}{dT_\infty} \approx 10.0(\text{cm/s} \cdot K)$ (régime uniforme II).
- Si $T_3 \leq T_\infty \leq T_2$, la vitesse de propagation est encore uniforme, mais dans ce nous trouvons $\frac{dv_f}{dT_\infty} \approx 1.0(\text{cm/s} \cdot K)$ (régime uniforme III).
- Si $T_4 \leq T_\infty \leq T_3$, la vitesse de propagation n'est plus uniforme (régime oscillatoire).
- Si $T_\infty \leq T_4$, la propagation est uniforme mais très lente, avec $v_f \approx 1\text{cm/s}$ (régime pseudouniforme).

Les températures critiques T_1, T_2, T_3, T_4 correspondent, respectivement à une bifurcation stationnaire (T_1), une bifurcation transcritique (T_2), une bifurcation de Hopf sous critique (T_3) et à une connection homoclinique (T_4). Elles ont été observées pour divers combustibles liquides. Voilà une différence par rapport aux combustibles solides, où la seule température observée est T_1 .

2 Analogie Solide-Liquide

Si nous réalisons une analyse théorique du transfert thermique et de quantité de mouvement entre la phase gazeuse et le combustible (considéré comme un solide) à la proximité de front de flamme, nous trouvons la relation suivante entre la vitesse de propagation du front de flamme (v_f) et la température superficielle initiale (T_∞) :

$$v_f \propto \frac{(T_f) - T_\infty}{T^{1/3}(T_b) - T_\infty)^2} \approx \frac{1}{T^{1/3}(T_b) - T_\infty)^2}$$

Cette relation théorique correspond très bien avec les résultats expérimentaux obtenus pour les régimes uniformes I-II, pour tous les combustibles utilisés. C'est à dire, la propagation d'une flamme sur un combustible liquide est exactement la même que dans le cas d'un solide avec les mêmes propriétés physiques.

3 Convection devant la flamme

Quoique les combustibles liquides présentent une progression similaire au cas solide pour les régimes uniforme I-II, ce modèle ne correspond pas à nos résultats expérimentaux pour les autres régions. Ceci est du au fait de l'apparition, devant le front de flamme, d'une zone de convection thermocapillaire qui modifie les conditions de transfert thermique et contribue à augmenter la vitesse de la flamme, ce qui produit les autres régimes de propagation observés.

4 Contrôle de la propagation d'une flamme

A partir des résultats décrits, nous avons trouvé que, pour contrôler la vitesse de propagation d'une flamme sur un combustible liquide, il suffit de contrôler deux facteurs :

- La température superficielle initiale du liquide (T_∞).
- La zone convection qui se forme devant la flamme par thermocapillarité.

Le seul contrôle de ces deux paramètres permet de réduire de façon significative la vitesse de propagation de la flamme, voire de produire son extinction. L'application de ces résultats permettra d'améliorer les systèmes de sécurité dans les différents dépôts de combustibles que l'industrie du pétrole peut nous fournir. Il est évident que les bénéfices que ce résultat peut nous fournir aura des conséquences bénéfiques sur notre écosystème. Dans le même sens, les pertes que les incendies dans les dépôts de combustible produisent peuvent, de cette façon, être minimisées.

Références

1. K. AKITA, *Fourteenth International Symposium on Combustion*, 1075-1083 (1973).
2. E. DEGROOTE & P. L. GARCIA-YBARRA, *European Physical Journal B*, **13**, 381-386 (2000).
3. E. DEGROOTE & P. L. GARCIA-YBARRA, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, **80**, 541-558 (2005).

Modes globaux non linéaires et instabilité absolue des écoulements ouverts en milieu poreux chauffé par le bas.

A. Delache¹, N. Ouarzazi¹, G. Labrosse² & M. Combarrous³

¹ Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, Université de Lille 1, Boulevard Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq

² Laboratoire d'Informatique et de Mécanique pour les Sciences de l'Ingénieur, UPR CNRS 3251, Bât. 508, Université Paris-Sud, 91405 Orsay-Cedex

³ Laboratoire TREFLE (TRansferts Ecoulements FLuides Energétique), UMR CNRS 8508, ENSAM, Esplanade, des Arts et Métiers F-33405 Talence Cedex, France

a.delache@ed.univ-lille1.fr

Résumé. Cette communication concerne l'étude analytique et numérique des structures thermo-convectives en milieu poreux chauffé par le bas, refroidi par le haut et soumis à un écoulement horizontal. C'est un système ouvert où la croissance spatiale et temporelle des instabilités doit être prise en compte. On distingue les instabilités convectives (le système amplifie les composantes spectrales du bruit ambiant) et les instabilités absolues (le système oscille avec une fréquence propre indépendante du bruit) en fonction des deux paramètres adimensionnels du problème, le nombre de Rayleigh de filtration Ra et le nombre de Péclet Pe . Les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilité sont comparées à des données expérimentales. Il en ressort que les seuils d'instabilité absolue de l'état conductif correspondent parfaitement aux seuils de la transition observée expérimentalement par l'un des auteurs [2] entre des rouleaux transversaux oscillatoires et des rouleaux longitudinaux stationnaires.

Ensuite des simulations numériques directes de ce problème ont été réalisées par une méthode de collocation pseudo-spectrale (polynômes de Tchebychev). Les objectifs recherchés des essais numériques sont : 1°) identifier les solutions non linéaires du problème en fonction des paramètres Ra et Pe . 2°) comparer l'amplitude saturée des structures thermo-convectives aux mesures expérimentales. 3°) comparer les fréquences d'oscillations et les vitesses de propagation du mode global avec la théorie linéaire d'instabilité absolue.

Le résultat le plus marquant qui se dégage de ces essais numériques est que les oscillations du mode global dans le domaine pleinement non linéaire, s'avèrent identiques aux oscillations déterminées par le critère linéaire d'instabilité absolue.

Abstract. This communication deals with analytical and numerical studies of thermo-convective instabilities in porous media heated from below and subjected to a horizontal through flow. Since it's a open system, we distinguish convective instability (the system amplify the spectral component of ambient noise) from the absolute instability (the system oscillate with a noisy independent frequency) according to two parameters of the problem, namely the filtration Rayleigh number Ra and the Péclet number Pe . We compared the linear characteristics of two kind of instabilities with the experimental data obtained by one of us [2]. It is shown that the threshold of the absolute instability of the conduction state corresponds to a set of parameters for which an experimentally observed transition occurs between moving transversal rolls and stationary longitudinal rolls.

In a second time, we performed direct numerical simulations of this problem with pseudo-spectral collocation method (Tchebychev polynomial). The aim of this numerical work is to : i) identify the nonlinear solutions of the problem in terms of Pe and Ra . ii) compare the finite amplitude of thermo-convective instabilities with the experimental data. iii) compare the frequency of oscillations, and phase velocity of the global mode with the linear theory of absolute instability. The most important result stemming from numerical runs is that oscillations of global mode in nonlinear domain, coincide with oscillations determined by the linear criterion of absolute instability.

1 Introduction

Nous nous intéressons aux écoulements filtrants, dits de convection mixte, induits dans une couche poreuse horizontale par un gradient vertical de température interagissant avec un écoulement moyen. La convection mixte en milieu poreux est documentée par des données expérimentales ([2], [3]). Ces données

ont montré qu'en régime laminaire et pour des faibles vitesses, les cellules de convection se présentent sous la forme de rouleaux transversaux (R.T) dont l'axe est perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Les périodes des oscillations de ces R.T ont été déterminées en fonction de la vitesse intersticielle. Pour des vitesses plus élevées, les cellules se présentent sous la forme de rouleaux longitudinaux fixes (R.L), d'axe orienté dans le sens de l'écoulement.

Le présent travail a pour objectifs d'une part de déterminer les caractéristiques des instabilités absolues de cet écoulement et d'autre part de présenter les résultats de simulations numériques. L'ensemble des prédictions théoriques et numériques est comparé aux données expérimentales.

2 Formulation, stabilité linéaire et expérience

Soit une couche poreuse horizontale infinie, de section droite rectangulaire (de hauteur H , de largeur aH), isotrope et saturée. Le bord inférieur est porté à la température T_0 , supérieure à celle du bord supérieur T_1 . Le milieu poreux est soumis à un écoulement horizontal de vitesse de filtration V^* . Les équations régissant ce problème sont adimensionnées avec les grandeurs de références suivantes : H pour la longueur, $H^2(\rho c)^*/\lambda^*$ pour le temps, $T_0 - T_1$ pour la température, $\lambda^*/(H(\rho c)_f)$ pour la vitesse et $\lambda^*\mu/(K(\rho c)_f)$ pour la pression. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy corrigée par un terme non linéaire de Forchheimer, ce système physique est gouverné par les équations non dimensionnées :

$$\vec{V} + \mathcal{F}\|\vec{V}\|\vec{V} = -\vec{\nabla}P + RaT\vec{e}_z \quad (1)$$

$$\partial T/\partial t = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}T + \vec{\nabla}^2T \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

Le nombre de Rayleigh de filtration est $Ra = Kg\alpha H(T_0 - T_1)(\rho c)_f/(\lambda^*\nu)$ où K , λ^* , g , α , $(\rho c)_f$, $(\rho c)^*$ et ν désignent respectivement la perméabilité et la conductivité thermique du milieu, l'accélération de la pesanteur, le coefficient d'expansion thermique, la chaleur volumique du fluide, la chaleur volumique du milieu et la viscosité cinématique du fluide. Le coefficient \mathcal{F} des termes d'inertie dans (1) est $\mathcal{F} = c[K^{1/2}\lambda^*/(H\nu(\rho c)_f)]$ où c est une constante qui dépend de la géométrie du milieu.

Les parois verticales latérales étant supposées adiabatiques, les conditions aux limites sont :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_z = 0 \text{ en } z = 0, 1 ; \vec{V} \cdot \vec{e}_y = 0 \text{ en } y = 0, a \text{ et } \int_0^a \int_0^1 \vec{V} \cdot \vec{e}_x dy dz = a Pe \quad (3)$$

$$T = 1 \text{ en } z = 0 ; T = 0 \text{ en } z = 1 \text{ et } \partial T/\partial y = 0 \text{ en } y = 0, a \quad (4)$$

où Pe est le nombre de Péclet défini par : $Pe = V^*H(\rho c)_f/\lambda^*$.

Le système (1)-(4) admet une solution stationnaire, que nous appelons état de conduction, pour toutes les valeurs de Ra , de Pe et de Re_K :

$$\vec{V}_0 = Pe \cdot \vec{e}_x ; T_0 = 1 - z \text{ et } P_0 = Ra(z - z^2/2) - Pe(1 + Re_K)x \quad (5)$$

avec $Re_K = \mathcal{F}Pe = c(V^*K^{1/2}/\nu)$.

Le système (1)-(4) linéarisé autour de la solution de conduction (5) conduit à un système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fluctuations de température, de pression et du champ de vitesse. Une analyse en mode normaux vérifiant les conditions aux limites du problème conduit à l'équation de dispersion :

$$D_\Phi(\omega, k) = -i\omega + ikPe + k^2 + \pi^2(1 + m^2/a^2) - \frac{Ra}{1 + Re_K} \left(\frac{k^2(1 + Re_K) + (m^2/a^2)\pi^2(1 + 2Re_K)}{\pi^2(1 + m^2/a^2)(1 + 2Re_K) + k^2(1 + Re_K)} \right)$$

où ω est la fréquence, k est le nombre d'onde dans la direction de l'écoulement moyen ; $\Phi = [m/a, Ra, Re_K, Pe]$ représente les paramètres du problèmes où $(m/a)\pi$ représente le nombre d'onde dans la direction transverse y avec m entier et a le rapport de forme du milieu. L'étude temporelle de stabilité linéaire a été largement développée dans [4]. De même l'étude détaillée de stabilité spatio-temporelle de ce problème

a fait l'objet d'un article soumis pour publication [5]. Ici, nous nous restreignons à énoncer quelques résultats concernant la transition du système d'une instabilité convective à une instabilité absolue et à discuter la pertinence de cette transition au regard des résultats expérimentaux.

Le concept d'instabilité absolue et convective est décrit dans [7]. Brièvement, on montre que la réponse linéaire du système à une perturbation localisée se présente sous la forme d'un paquet d'ondes s'amplifiant dans le temps et l'espace, et limité par un front arrière et un front avant. On dit alors que l'instabilité est convective (I.C) lorsque les deux fronts se propagent dans le sens de l'écoulement principal. Par contre, on parle d'instabilité absolue (I.A) lorsque le front arrière se propage dans le sens contraire à l'écoulement principal : le paquet est amplifié, une partie est convectée vers l'aval alors que l'autre partie remonte vers l'amont, le paquet d'onde envahit alors tout le domaine. La condition mathématique nécessaire pour que l'instabilité soit absolue est qu'il existe un point col k^* dans le plan complexe relié à une fréquence ω telle que :

$$D_{\mathcal{F}}(k^*, \omega(k^*)) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega(k^*)}{\partial k} = 0 \quad (7)$$

$$\text{avec } \omega_i(k^*) \geq 0 \quad (8)$$

De plus, une condition suffisante impose que les branches spatiales dans le plan complexe k suivent un processus de pincement.

Le seuil absolu Ra_A qui représente alors la frontière entre I.A et I.C est obtenu en imposant $\omega_i(k^*) = 0$. Ce seuil a été déterminé pour tous les modes instables. Il en résulte que le seuil de transition à une I.A des rouleaux propagatifs purement transversaux ($m = 0$ et noté R.T) est inférieur à celui des autres structures instables, et ce indépendamment de Pe . Cela signifie que dans le régime d'I.A le système sélectionne plutôt des R.T, les autres structures tridimensionnelles ainsi que les R.L quittent le domaine d'observation expérimentale à des temps asymptotiquement grands.

Sur la figure 1, nous avons indiqué, dans le plan (Pe, Ra) , les différents motifs thermo-convectifs observés dans [2,3]. Sur cette même figure, nous avons également tracé la courbe de transition entre I.C et I.A pour les R.T. A travers cette figure, nous constatons que la frontière entre I.A et I.C de l'état de conduction vis à vis des R.T, correspond parfaitement à la transition observée expérimentalement entre les R.L et les R.T.

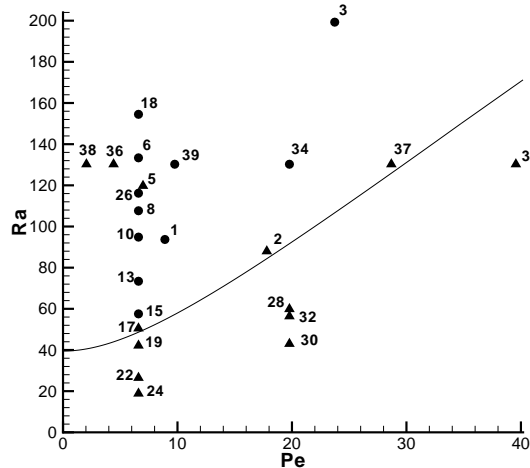


Fig.1. Carte représentant les différents régimes d'écoulement dans le plan (Pe, Ra) pour les structures observées pour la série 6 : les R.T (disque noir) et les R.L (triangle noir). Les essais successifs sont indiqués par leurs numéros. Les nombres manquants indiquent la région turbulente. La courbe représente la frontière entre régime convectif et absolu prédite par la théorie.

3 Analyse des résultats de la simulation numérique

3.1 Description

Nous avons entrepris une simulation numérique directe bidimensionnelle du problème, en utilisant une méthode spectrale de collocation par des polynômes de Tchebycheff dans les deux directions x et z . Les conditions aux limites imposées, par exemple dans un carré $[-1, 1].[-1, 1]$ sont :

$$u(x = \pm 1, z) = Pe, v(x, z = \pm 1) = 0 \quad (9)$$

$$T(x = -1, z) = \frac{(1-z)}{2}, \frac{\partial T}{\partial x}(x = 1, z) = 0, T(x, z = -1) = 1, T(x, z = 1) = 0 \quad (10)$$

Afin de limiter l'influence des conditions aux limites de sortie sur l'écoulement nous avons utilisé une zone tampon proche de la sortie qui permet d'atténuer progressivement tout retour d'onde possible [8].

Chaque essai est obtenu en fixant la valeur de Pe et Ra . Les simulations numériques indiquent que tant que le système est convectivement instable, toute perturbation initiale est amortie et le système, bien qu'instable, retrouve asymptotiquement l'état de conduction. En revanche, lorsque le système devient absolument instable, un mode global apparaît sous forme de R.T d'amplitude finie, reliés à l'état de conduction à l'entrée par un front représenté sur la figure 2. Il est alors possible de déterminer la distribution spatiale de la température à un instant donné (en particulier suivant x pour $z = 0$). On peut également déterminer l'évolution temporelle de la température en différents points de la couche poreuse. Ces suivis temporels montrent aussi des oscillations régulières saturées.

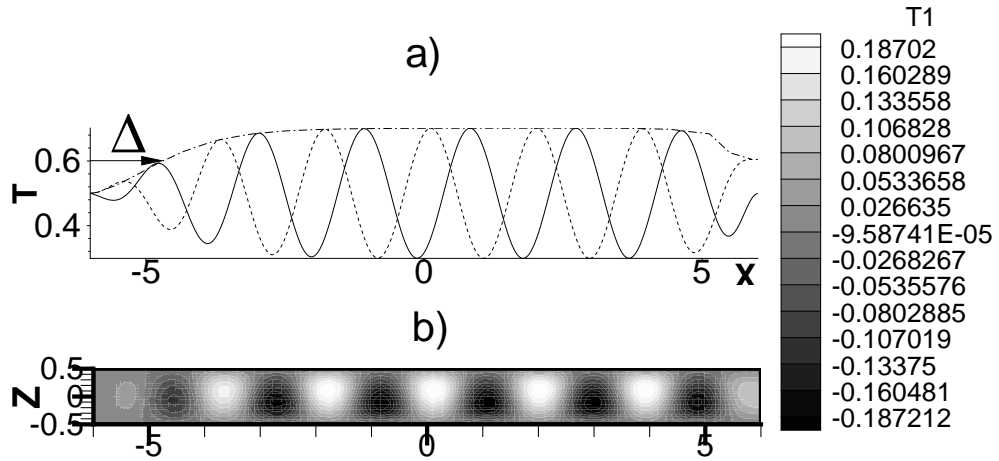


Fig.2. b) : distribution de la perturbation de la température $T_1 = T - T_0$ dans le plan (x, z) . a) : distribution spatiale de la température T suivant x pour $z = 0$ à 2 temps différents (—, ---) où - · - représente l'enveloppe stationnaire des oscillations et Δ représente la distance d'établissement du front. a) et b) sont obtenus avec $Pe = 2$ et $Ra = 45$ ($Ra_A = 40.45$).

3.2 Comparaison avec l'expérience

Nous avons effectué des simulations numériques avec des paramètres adimensionnés équivalents à ceux utilisés dans les expériences [2]. Sur la figure 3, on a représenté les minimas et les maximas de la température obtenus pour différentes hauteurs z avec $Pe = 12.25$ et $Ra = 102$ aussi bien à partir de l'expérience (o) qu'à partir de la simulation équivalente (partie noire). On observe que les maximas obtenus numériquement sont relativement proches de ceux obtenus expérimentalement. Or les minimas obtenus numériquement s'éloignent progressivement des minimas expérimentaux lorsque l'altitude z augmente. Cette tendance est confirmée pour d'autres combinaisons du couple (Pe, Ra)

L'explication possible que nous proposons est liée à la difficulté matérielle de maintenir la plaque inférieure à une température uniforme. Des variations faibles de cette température induiraient inexorablement une dépendance en x de la température de conduction.

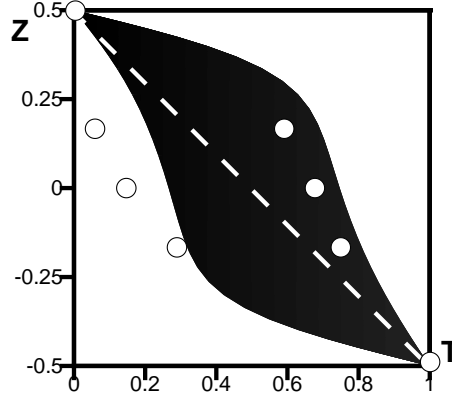


Fig.3. Mesure de la distribution spatiale de la température suivant l'axe z obtenue numériquement pour $Ra = 102$ et $Pe = 12.25$ où la distribution spatiale instantanée de la température adimensionnée est projetée suivant l'axe x sur z (en noire). Les \circ représentent les mesures expérimentales équivalentes à $Ra = 102$ et $Pe = 12.25$ et -- représente la température de conduction.

3.3 Fréquence du mode global et instabilité absolue

Certaines caractéristiques des rouleaux transversaux, comme la fréquence des oscillations obtenue à partir du suivi temporel de la température et la vitesse de phase sont comparées avec celles prédites par la théorie linéaire de l'instabilité absolue (T.L.I.A).

Sur la figure 4, nous avons tracé la pulsation adimensionnée ω_{th} (T.L.I.A) et ω_{num} (à partir des simulations numériques (FFT)) en fonction de Ra pour différents Pe . On en conclut que lorsque Ra augmente à Pe fixé $\omega_{th,num}$ augmente la même tendance est observée lorsque Pe augmente à Ra fixé. Par ailleurs, on constate que pour des nombres de Péclet pas trop élevé, ω_{th} coïncide avec ω_{num} . Ce résultat est similaire à celui trouvé dans un problème tout à fait différent du nôtre. Récemment, J.M. Chomaz [1] a analysé les caractéristiques du mode global qui apparaît dans les écoulements parallèles dans le sillage d'un obstacle. Par le biais d'une simulation numérique directe, il a déterminé la fréquence globale d'oscillations dans la région pleinement non linéaire. Cette fréquence globale s'est avérée exactement identique à celle prédite en régime linéaire absolument instable.

Sur la figure 5, sont représentées la vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$ à partir des données numériques (V_φ^{num}) et à partir de la T.L.I.A (V_φ^{th}). Le nombre d'onde k^{num} est calculé à partir de la distribution spatiale (FFT). On observe que l'on a pratiquement $V_\varphi^{num} \simeq Pe$ et ce quelque soient les valeurs de Pe et Ra . On retrouve ces résultats numériques dans [6], les calculs étant faits pour de faibles valeurs de Pe . Pour la T.L.I.A, on retrouve bien $V_\varphi^{th} \simeq Pe$ quelque soit la valeur de Ra lorsque le débit reste modéré : $Pe \leq 8$. Mais $V_\varphi^{th} \geq Pe \simeq V_\varphi^{num}$ lorsque Pe est plus important. On en conclut que les prédictions de la T.L.I.A sont excellentes lorsque Pe reste modéré et ce indépendamment de la valeur de Ra .

4 Conclusion

Ce travail porte sur une étude théorique et numérique des instabilités spatio-temporelles pouvant se développer dans un fluide confiné en milieu poreux chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal. Une analyse spatio-temporelle de stabilité linéaire a permis de distinguer, dans le plan (Pe, Ra) , la nature

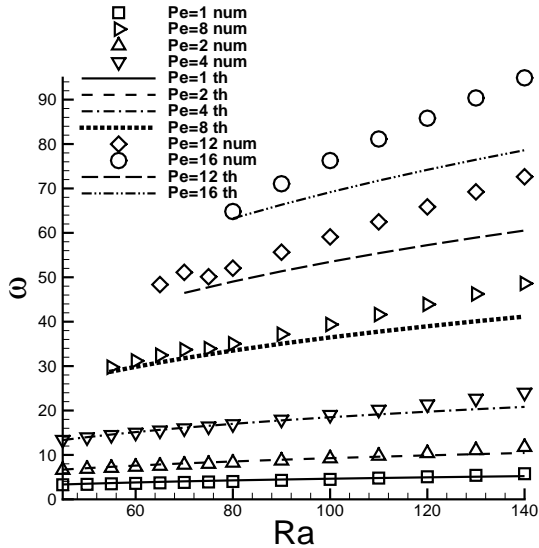


Fig.4. pulsation ω en fonction de Ra pour Pe fixé à différentes valeurs. « num » désigne les résultats numériques et « th » désigne les résultats issus de la T.L.I.A

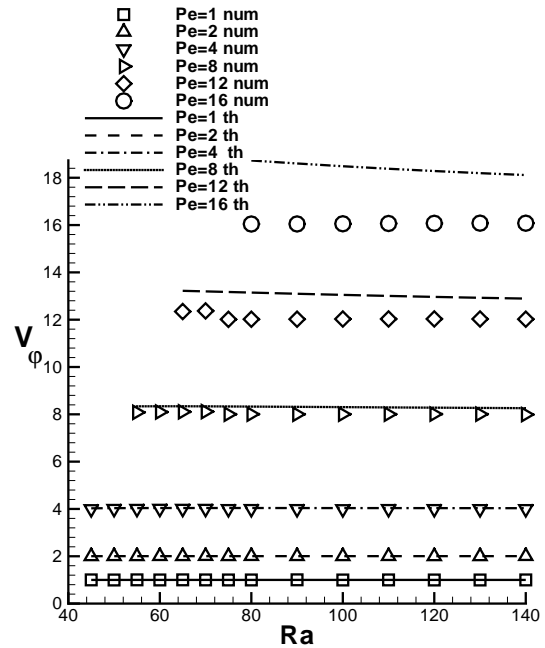


Fig.5. vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$ en fonction de Ra pour différents Pe à partir des données numériques (« num ») et à partir de la T.L.I.A (« th »)

convective ou absolue des instabilités. Une comparaison avec des données expérimentales montre que les seuils d'instabilité absolue correspondent aux seuils de la transition observée expérimentalement entre les R.T propagatifs et les R.L fixes. Les simulations numériques directes du problème pour différentes combinaisons de Ra et Pe , mettent en évidence l'émergence d'un mode global non linéaire, composé d'un front reliant l'état de conduction à l'entrée aux R.T propagatifs. Tant que Pe n'est pas trop élevé, les oscillations et les vitesses de propagation des R.T, évaluées numériquement, s'avèrent identiques à celles prédites par le concept linéaire d'instabilité absolue.

Références

1. J.-M. CHOMAZ, Fully non linear dynamics of parallel wakes, *J. Fluid Mech.*, **495**, 57-75 (2003).
2. M. COMBARNOUS, *Convection naturelle et convection mixte en milieu poreux*, Thèse d'état de la Faculté des sciences de l'Université de Paris 6 (1970).
3. M. COMBARNOUS & S. A. BORIES, Hydrothermal convection in saturated porous media, *Advances in Hydroscience*, **10**, 231-307 (1975).
4. A. DELACHE, N. OUARAZI & M. C. NÉEL, Structuration de la convection mixte en milieu poreux confiné latéralement et chauffé par le bas : effets d'inertie, *C. R. Mécanique*, **330**, 885-891 (2002).
5. A. DELACHE, N. OUARAZI, M. COMBARNOUS, *Spatio-temporal instabilities of mixed convection flows in porous media heated from below : Comparison with experiments*, article soumis à *Int. J. of Heat and Mass Transfer*.
6. F. DUFOUR, M.C. NÉEL, Numerical study of instability in a horizontal porous channel with bottom heating and forced horizontal flow, *Phys. Fluids*, **10**, (9), 2198-2207 (1998).
7. HUERRE, P. & P. A. MONKEWITZ, Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, **22**, 473-537 (1990).
8. C.L. STREET & M.G. MACARAEG, Spectral multi-domain for large-scale dynamic simulation, *Applied Numerical Mathematics*, **6**, 123-139 (1989).

Identification de la composante déterministe d'une dynamique du monde réel

D. J. De Oliveira^{1,2}, M. E. D. Gomes¹, L. A. Aguirre¹ & C. Letellier¹

¹ Lab. de Modelagem Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares (MACSIN), Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, 31270-901, Brazil

² CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex
deoliveira@coria.fr

Résumé. Les systèmes dynamiques du monde réel résultent le plus souvent d'une combinaison entre une composante déterministe — qui peut être de basse dimension — et une composante aléatoire. Lorsque la part de la composante aléatoire est très importante devant celle de la composante déterministe, l'étude de ces systèmes se révèle le plus souvent assez ardue. Il est alors particulièrement important de pouvoir séparer les deux composantes. Pour cela, nous avons développé une procédure reposant sur un modèle NARMAX entrée-sortie; elle sera testée sur des modèles numériques simples et sur un électrocardiogramme de 24 heures.

Abstract. Dynamical systems from the real world are most often a combination of a deterministic component — which may be low dimensional — and a stochastic component. When the “weight” of the stochastic component is important comparing to those of the deterministic component, the investigation of such a system is rather difficult. It is thus relevant to distinguish both components. In order to do that, we developed a procedure based on an input-output NARMAX model; this procedure will be tested using simple numerical models and a 24 hours electrocardiogram.

Notre motivation réside dans la compréhension de la dynamique sous-jacente à l'activité cardiaque. Plus particulièrement, nous souhaitons déterminer s'il existe une composante de nature déterministe au sein de la variabilité cardiaque, notamment à l'échelle de la journée. Tout d'abord, un électrocardiogramme sur 24 heures s'étudie le plus souvent sous la forme d'un tachogramme, soit la succession des intervalles de temps entre les ondes R des pulsations cardiaques (Fig. 1). Ces tachogrammes résultent des interactions cardiovasculaires et des transitions entre différents états physiologiques liés à l'activité humaine (sommeil, digestion, activité physique ou intellectuelle, etc.) [1]. Le problème majeur qui se présente est que la variabilité du rythme cardiaque se développe sur des échelles de temps très différentes. Si la variabilité à l'échelle du battement est très réduite chez le sujet sain (il a peu d'arythmies), il existe des fluctuations qui peuvent être importantes à échelles de temps beaucoup plus longues et pouvant aller jusqu'à celles des rythmes circadiens. Malheureusement, une étude sérieuse de ces fréquences nécessiterait des enregistrements sur plusieurs jours consécutifs, voire plusieurs semaines. En effet, une certaine régularité des tachogrammes se retrouve chez un sujet sain qui prend soin de répéter à l'identique son activité sur 24 heures.

La variabilité à très basse fréquence étant liée à l'activité humaine, elle ne peut être, par essence, déterministe : elle ne peut donc pas être modélisée par un modèle déterministe. Pour cela, nous cherchons à appliquer une variation de l'un des paramètres du modèle par une modulation basse fréquence directement extraite de la dynamique originale. Par ailleurs, il y a des fluctuations sur de courtes échelles de temps qui résultent au mieux d'une dynamique déterministe de haute dimension. Tout le problème se résume alors à l'identification d'une composante déterministe qui sera excitée par une composante aléatoire.

1 Technique de modélisation

L'origine complexe de l'activité cardiaque nécessite d'utiliser une procédure de modélisation reposant sur plusieurs blocs. Dans ce qui suit, nous considérons que la composante très basse fréquence — à l'échelle

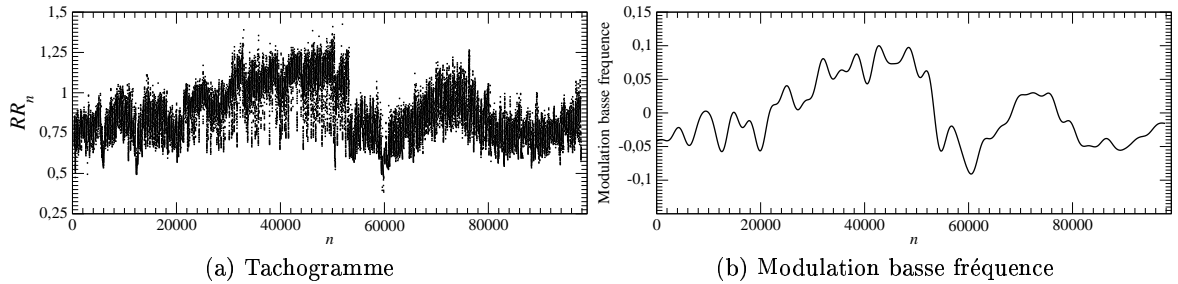


Fig.1. Tachogrammes sur 24 heures (plus de 90000 battements) d'un sujet sain. Les fluctuations à très basse fréquence — que nous appelons *modulation basse fréquence* — sont la signature de l'impact de l'activité humaine sur la variabilité cardiaque.

de la journée — ne peut que résulter d'une composante aléatoire liée à l'activité humaine. Nous utiliserons donc une modulation basse fréquence comme entrée du modèle, non pas comme une excitation en entrée du modèle mais plutôt comme une variation de l'un de ses paramètres. En effet, pour son identification, nous n'avons recours qu'à un jeu de données assez limité sur lequel la modulation basse fréquence est presque constante : le modèle ne peut donc y être sensible. Ensuite, il y a clairement une composante haute fréquence dont l'origine est un système complexe de haute dimension qui, à l'heure actuelle, ne peut être prise en compte que par un modèle stochastique. Pour cette composante, nous utiliserons la procédure introduite par McSharry et ses collègues [2]. Elle consiste à identifier deux fréquences caractéristiques — lorsqu'elles existent — dans le signal original et à construire un signal aléatoire dont le spectre de Fourier est la somme de deux distributions Gaussiennes $S(f) = S_1(f) + S_2(f)$ telles que

$$S_i(f) = \frac{\sigma_i^2}{\sqrt{2\pi c_i^2}} e^{-\frac{(f - f_i)^2}{2c_i^2}}$$

où f_i désignent les fréquences choisies et c_i leur déviation standard. Les puissances associées à chacune des fréquences sont données par les quantités σ_i^2 . Les phases peuvent être distribuées aléatoirement ou corrélées à la phase du signal original. Enfin, la composante déterministe est obtenue à l'aide d'une technique de modélisation globale discrète. Le modèle est du type NARMAX (Non-linear Auto-Regressive Moving Average eXogeneous inputs) [3]. La procédure de modélisation peut se résumer selon le schéma représenté Fig. 2. Comme nous le verrons, lors de l'identification du modèle NARMAX, le signal de sortie est le signal original (ECG ou une dynamique déterministe à laquelle on appliquera une modulation basse fréquence à l'un de ses paramètres). Ensuite, lorsque le modèle est intégré, nous obtenons un signal synthétique en sortie. Dans tous les cas, le signal d'entrée est un signal aléatoire construit selon la procédure de McSharry et ses collègues [2].

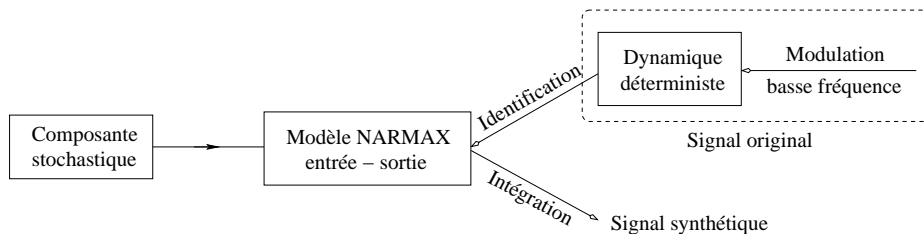


Fig.2. Le modèle NARMAX est estimé à l'aide d'une entrée du type composante stochastique. Le signal de sortie est le signal original (ECG ou dynamique déterministe lentement modulée par variation d'un paramètre) lors de l'identification du modèle et le signal synthétique lors de l'itération du modèle.

2 Identification de composante déterministe simple

Notre procédure est testée en utilisant la fonction logistique

$$x_n = \mu x_{n-1}(1 - x_{n-1}) \quad (1)$$

comme système dynamique déterministe. Un bruit additif est ajouté à la dynamique de manière à simuler la contamination par du bruit de la dynamique sous-jacente. Le bruit est construit selon la procédure de McSharry [2]. Aucune fréquence caractéristique ne se dégageant du spectre de Fourier d'une fonction logistique, les deux fréquences sont posées arbitrairement. Ceci résulte du fait que la dynamique symbolique est presque complète, c'est-à-dire que la presque totalité des séquences possibles sont réalisées par une trajectoire. Pour un paramètre $\mu = 3,89$, le comportement asymptotique est chaotique (Fig. 3).

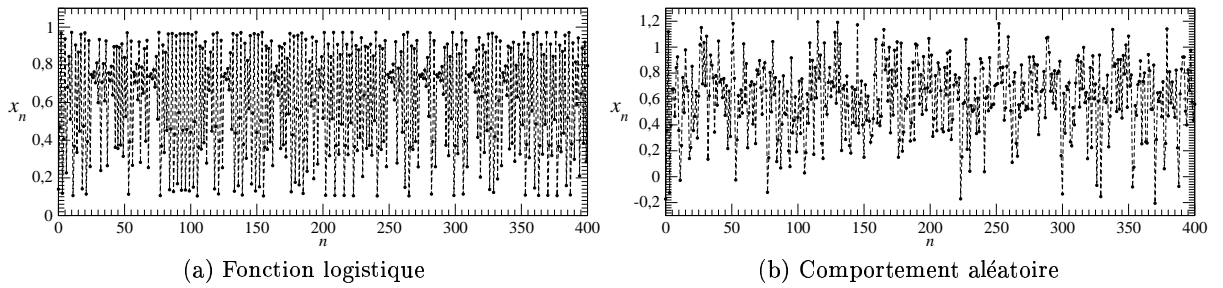


Fig.3. Comportement chaotique solution de la fonction logistique pour $\mu = 3,89$ et comportement aléatoire obtenu par la procédure de McSharry *et al.*

Nous commençons par estimer un modèle à partir de l'évolution de la fonction logistique bruitée à 5%. Par rapport au schéma (Fig. 2), il n'y a pas de modulation basse fréquence. Le modèle NARMAX ainsi obtenu est de la forme :

$$\begin{aligned} y_k = & 0,0232 - 3,8008y_{k-1}^2 + 3,7869y_{k-1} - 0,0238y_{k-20}y_{k-11} + 0,0171y_{k-24}y_{k-17} \\ & - 0,0771y_{k-5}y_{k-1} + 0,0484y_{k-5}y_{k-3} + 0,0736y_{k-2}y_{k-1} - 0,0394y_{k-3}y_{k-2} \\ & - 0,02y_{k-14}y_{k-4} + 0,019u_{k-1}y_{k-22} - 0,0157u_{k-2}y_{k-19} \end{aligned} \quad (2)$$

où les termes en y_{k-n} désignent la composante déterministe et les termes en u_{k-n} la composante aléatoire. On notera la présence de seulement deux termes de poids relativement faible pour la composante aléatoire. Le modèle a, par conséquent, majoritairement retenu une composante déterministe. Nous pouvons remarquer que le modèle contient un sous-système de la forme

$$y_k = 3,7869y_{k-1} - 3,8008y_{k-1}^2 = 3,7869y_{k-1}(1 - 1,00367y_{k-1})$$

soit une forme particulièrement proche de la fonction logistique (1). Le reste des termes, y compris les termes déterministes, sont introduits pour tenir compte de la composante aléatoire.

Une intégration du modèle (2) permet de retrouver la forme caractéristique d'une parabole lorsqu'une application de premier retour est tracée (Fig. 4c). Elle est favorablement comparée à la fonction logistique bruitée (Fig. 4b) : toutes deux diffèrent clairement de la composante aléatoire (Fig. 4a). Une validation fine du modèle peut se faire à l'aide d'une dynamique symbolique. Puisque nous avons une dynamique unimodale — la fonction logistique, une dynamique à deux symboles suffit : « 0 » pour la branche croissante et « 1 » pour la branche décroissante de la parabole. Dans un premier temps, nous utilisons une partition telle que le point critique soit en $x_c = 0,5$, ce qui correspond à la partition théorique de la fonction logistique. La série temporelle $\{y_k\}$ est donc transformée en une suite de symboles (des 0 et des 1). Deux choses sont recherchées : la population d'orbites périodiques et les probabilités de réalisation de ces orbites périodiques.

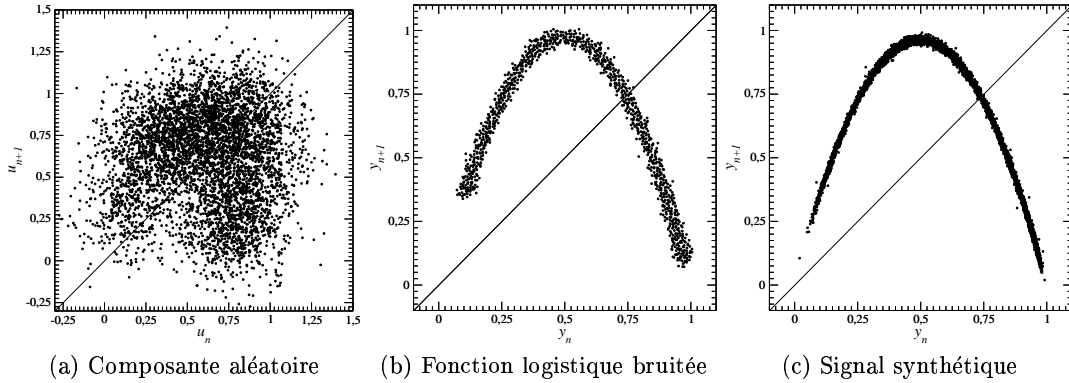


Fig.4. Comportement (c) obtenu par itération du modèle (2) excité par le signal aléatoire (a). Le paramètre μ est fixé à 3,89 et 5% de bruit additionnel est injecté (b).

Pour $\mu = 3,89$, la population d'orbites périodiques est caractérisée par la séquence principale (10011). Comme cela peut être facilement vérifié à l'aide d'un diagramme de bifurcations, le couple d'orbites de période 3 — respectivement codées par (101) et (100) — fait partie de la population d'orbites. En effet, la fenêtre de période 3 est observée pour $\mu \in [3,825 ; 3,86]$, soit une valeur de μ inférieure à celle imposée à la fonction logistique (3,89). La composante aléatoire — dont la phase est corrélée à l'évolution de la fonction logistique bruitée — se caractérise par une dynamique symbolique complète, c'est-à-dire que la séquence principale est (100000) ; en d'autres termes, toutes les séquences symboliques sont réalisées (Tab. 1). Toutefois, il existe une différence importante avec une dynamique déterministe caractérisée par une dynamique symbolique complète : les différentes séquences symboliques ne sont pas équiprobables comme c'est le cas pour les dynamiques déterministes [4]. Un bruit blanc serait également caractérisé par des séquences symboliques équiprobables. Notons que les probabilités de réalisation de la composante aléatoire (Fig. 5a) et de la fonction logistique bruitée diffèrent (Fig. 5b). Le modèle obtenu a une dynamique caractérisée par une séquence principale (1001), soit une population d'orbites légèrement plus développée que celle de la dynamique originale. La composante aléatoire tend donc à développer la dynamique comme cela est habituellement observé. Une entropie de Shannon [5] est calculée : alors qu'une valeur de 2,73 est trouvée pour le bruit, l'entropie du signal synthétique (2,00) est très proche de celle du signal original (2,06). Nous pouvons considérer le modèle comme validé.

Tab.1. Population d'orbites périodiques instables extraites de la fonction logistique ($\mu = 3,89$), des différents modèles et de la composante aléatoire. Un point est reporté lorsque l'orbite est identifiée. Seules les orbites de période inférieure à 7 sont reportées.

Orbites extraites	Composante aléatoire	Fonction logistique	Modèle (2)	Modèle (3)	Orbites extraites	Composante aléatoire	Fonction logistique	Modèle (2)	Modèle (3)
1	•	•	•	•	10011	•	•	•	•
10	•	•	•	•	100111	•		•	
1011	•	•	•	•	100110	•		•	
101110	•	•	•	•	1001	•		•	
101111	•	•	•	•	1000	•			
10111	•	•	•	•	100010	•			
10110	•	•	•	•	100011	•			
101	•	•	•	•	10001	•			
100	•	•	•	•	10000	•			
100101	•	•	•	•	100001	•			
10010	•	•	•	•	100000	•			

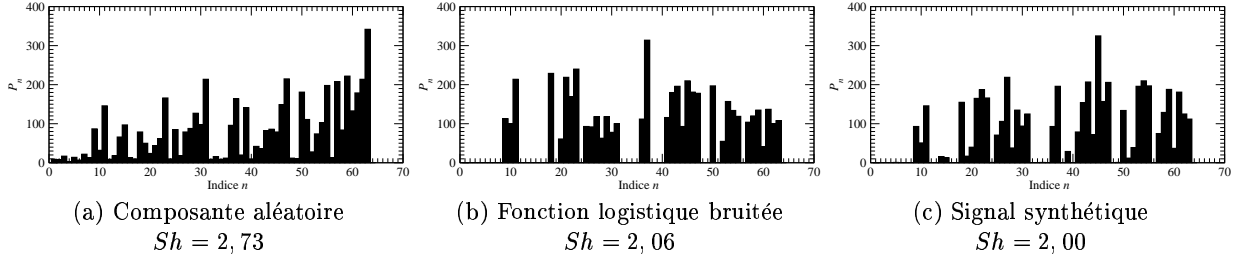


Fig.5. Probabilités de réalisation des différentes séquences symboliques des différentes composantes et du signal synthétique obtenu par intégration du modèle NARMAX (2).

Nous appliquons maintenant notre procédure d'identification lorsqu'une dérive sur le paramètre μ de la fonction logistique est introduite. La modulation (Fig. 1b) est extraite par filtre passe-bas de l'électrocardiogramme enregistré sur 24 heures (Fig. 1a). Nous retrouvons des fenêtres périodiques (période 3) typiquement observée pour $\mu \in [3,825 ; 3,86]$. Le modèle obtenu à partir de cette dynamique a la forme

$$\begin{aligned}
 y_k = & 0.0643 + 3.6376y_{k-1} - 3.7268y_{k-1}^2 - 0.0143y_{k-19}y_{k-16} + 0.0775y_{k-13}y_{k-12} \\
 & + 0.0142y_{k-14}y_{k-11} - 0.0493y_{k-12}y_{k-8} - 0.0358y_{k-13}y_{k-7} - 0.0183y_{k-9}y_{k-4} \\
 & - 0.0471u_{k-7} + 0.0843u_{k-7}y_{k-1} + 0.0245u_{k-4}u_{k-1}
 \end{aligned} \quad (3)$$

Comme précédemment, nous retrouvons un sous-système du type

$$y_k = 3.6376y_{k-1} - 3.7268y_{k-1}^2 = 3.6376y_{k-1} (1 - 1,0245y_{k-1}) . \quad (4)$$

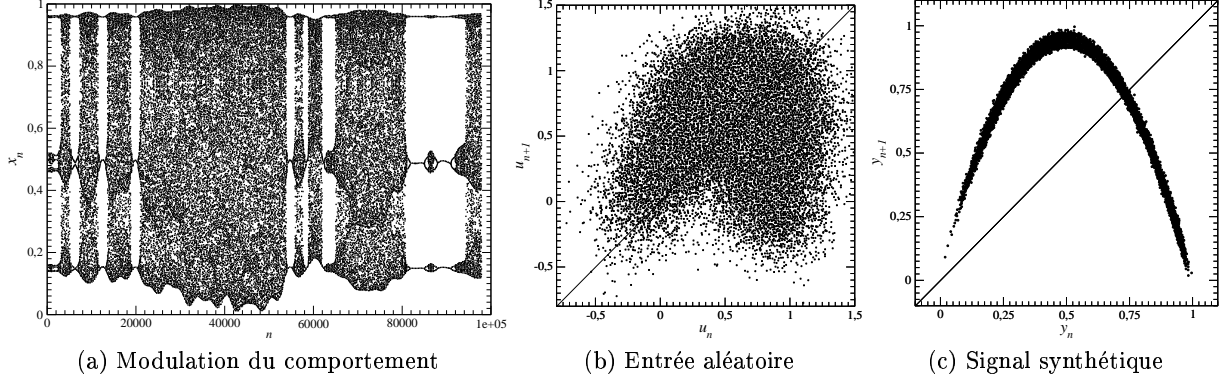


Fig.6. Modulation du comportement de la fonction logistique par une dérive appliquée sur le paramètre μ . La dérive est celle extraite de l'électrocardiogramme avec un coefficient de normalisation pour maintenir μ sur l'intervalle $[3.79 ; 3.99]$. L'entropie de Shannon estimée à partir des données synthétiques est de 1.92.

Si la structure algébrique de la fonction logistique est encore une fois clairement identifiée, bien que la valeur du paramètre soit moins bien estimée qu'en l'absence de modulation basse fréquence (3,6376 contre 3,7879 pour 3,89). Ceci provient du fait que le modèle est estimé sur une courte fenêtre (500 points) qui est ici choisie autour de $n = 60000$ (Fig.6a), soit une valeur pour laquelle la dynamique est moins développée ($\mu < 3,89$). Toutefois, lorsque les deux termes prépondérants sont regroupés sous la forme (4), il est possible de faire varier le paramètre en facteur et de retrouver le diagramme de bifurcations de la fonction logistique. En injectant la modulation basse fréquence, nous retrouvons alors une évolution très semblable à celle obtenue Fig. 6a).

3 Application à un tachogramme sur 24 heures

Nous appliquons enfin notre procédure de modélisation au tachogramme de la Fig. 1a et dont l'application de premier retour est représentée Fig. 7b. Etant donné que la dynamique est maintenant non stationnaire, il est nécessaire de calculer l'entropie de Shannon à l'aide de la dynamique symbolique, qui permet l'utilisation de la totalité des 90000 points [5]. Une entropie assez faible (0,045) est obtenue. La composante aléatoire construite selon la procédure de McSharry et ses collègues présente une variabilité plus lente (Fig. 7a) mais plus développée comme le révèle l'entropie assez élevée (0,920). Le modèle NARMAX entrée-sortie présente une variabilité plus proche de celle du tachogramme, comme le montre l'entropie relativement voisine de celle du tachogramme (0,137 contre 0,045).

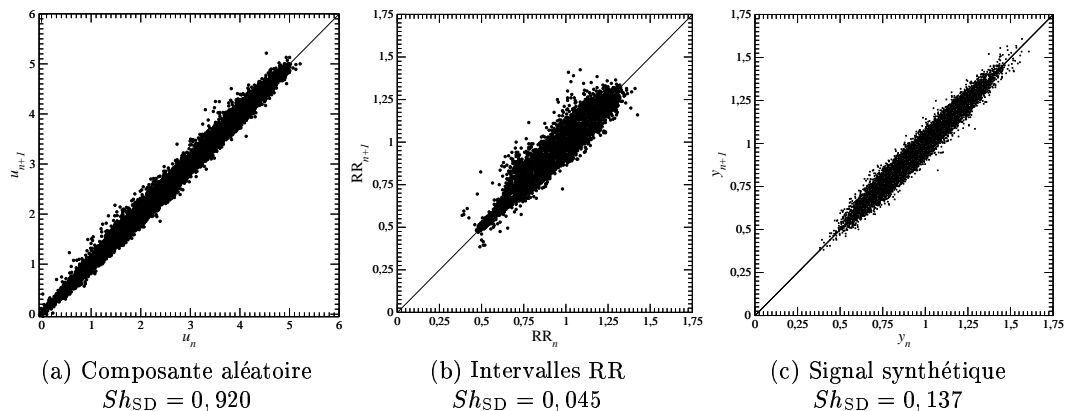


Fig.7. Application de premier retour calculée sur les intervalles RR du tachogramme de la Fig. 1.

La procédure de modélisation par bloc, en combinant des composantes déterministes et des composantes aléatoires permet d'aborder sous un nouvel angle la modélisation de l'activité cardiaque. Toutefois, cela reste difficile en raison des multiples échelles de temps en jeu. Nos premiers résultats montrent qu'un composante déterministe agit sur la variabilité cardiaque. Un travail plus affiné sur la validation devrait permettre de mieux identifier le rôle et l'importance de cette composante.

Remerciements : Le séjour de Dair est financé par le CAPES. La collaboration est partiellement financée par le CNRS et le CNPq.

Références

1. R. W. DE BØER, J. M. KAREMAKER & J. STRACKEE, Hemodynamic fluctuations and baroreflex sensitivity in human : a beat-to-beat model, *American Journal of Physiology*, **253**, 680-689 (1987).
2. P. E. MCSHARRY, G. CLIFFORD, L. TARASSENKO, L. A. SMITH, Method for Generating an Artificial RR Tachogram of a Typical Healthy Human over 24-Hours, *Computers in Cardiology IEEE*, **29**, 225-228 (2002).
3. L. A. AGUIRRE & S. A. BILLINGS, Identification of models for chaotic systems from noisy data : implications for performance and nonlinear filtering, *Physica D*, **85**, 239-258 (1995).
4. J. GODELE & C. LETELLIER, Symbolic sequence statistical analysis for free liquid jets, *Physical Review E*, **62** (6), 7973-7981, 2000.
5. H. RABARIMANANTSOA, C. LETELLIER, L. ACHOUR, A. CUVELIER & J.-F. MUIR, Diagrammes de récurrence et entropie de Shannon pour l'étude des asynchronismes en ventilation non invasive, 9^{ème} Rencontres du Non Linéaire, 8-10 Mars 2006, ce volume.

Caractérisation expérimentale des instabilités induites par évaporation de solvant dans une solution polymère

F. Doumenc¹, C. Iorio², G. Toussaint¹, B. Scheid², B. Guerrier¹, & C. Allain¹

¹ Laboratoire FAST, UMR 7608 (Univ. Paris 6 et Paris 11, CNRS), Bât. 502, Campus Universitaire, 91405 Orsay, France

² Chimie-physique E.P.- Microgravity Research Center, Campus du Solbosch, Bât. U, CP165/62, avenue F.D. Roosevelt 50, 1050 Bruxelles, Belgique

doumenc@fast.u-psud.fr

Résumé. Lors du séchage d'une solution polymère/solvant, l'évaporation du solvant à l'interface solution/air induit un enrichissement en polymère et une diminution de la température en surface. Selon les caractéristiques physicochimiques de la solution, cette configuration peut être hydrodynamiquement instable. Nous nous sommes intéressés dans cette étude à un système modèle constitué d'un seul polymère et d'un seul solvant : Polyisobutylène/Toluène. Le système choisi présente des variations de masse volumique et de tension de surface, avec la température comme avec la concentration, qui conduisent à une configuration instable lors de l'évaporation. Nous présentons une étude expérimentale des structures convectives observées dans la première phase du séchage, lorsque le flux d'évaporation est important. Les visualisations ont été réalisées en vue de dessus, soit par caméra infrarouge, soit par caméra vidéo après ensemencement de la solution par des particules d'iriodine. Des expériences ont été effectuées pour une épaisseur initiale de la solution variant entre 1 et 13 mm. Les résultats obtenus montrent une évolution entre des cellules de type hexagonale pour les faibles épaisseurs et des structures plus complexes (mélange rouleaux-cellules) à plus grande épaisseur. Nous avons observé que la taille caractéristique des cellules varie linéairement avec l'épaisseur initiale pour les petites épaisseurs initiales alors qu'une saturation est observée à plus grandes épaisseurs.

Abstract. When drying a polymer/solvent solution, solvent evaporation induces an increase of polymer concentration and a decrease of the temperature at the interface. Depending of the physicochemical properties of the solution, this configuration may be hydrodynamically unstable. In this study a model system with one polymer and one solvent is considered : Polyisobutylene/Toluene. This system shows density and surface tension variations, with the temperature as well as with the concentration, that leads to an unstable configuration during evaporation. Experimental results of convective patterns at the beginning of the drying, when evaporation flux is important, are presented. Visualizations correspond to top views of the solution surface, with an infrared camera or a video camera using iriodine particles as a tracer. Initial solution thickness was varied from 1 to 13mm. Results show a change from hexagonal cells for small thicknesses to more complex patterns (mixture of rolls and cells) for greater thicknesses. Cells characteristic size grows linearly with the initial thickness for small thicknesses, while a saturation is observed for greater thicknesses.

1 Introduction

Les instabilités induites par l'évaporation d'un liquide interviennent dans de nombreuses applications, en particulier pour les dépôts et revêtements obtenus par séchage d'une solution. L'analyse des phénomènes hydrodynamiques en jeu est complexe. L'une des caractéristiques de ce problème est la nature de la condition à la limite à l'interface liquide/gaz : contrairement à la configuration classique des expériences en convection naturelle, la condition limite n'est pas imposée mais résulte du phénomène d'évaporation et est donc couplée avec le milieu extérieur. C'est en effet l'évaporation elle-même qui induit une baisse de température en surface (et une baisse de la concentration du solvant s'il s'agit d'une solution). Dans le cas le plus général, l'instabilité se produira sur un état de base transitoire, en ce sens que l'épaisseur du milieu, le gradient de température dans le liquide (et le gradient de concentration dans le cas d'une solution) évoluent au cours de l'expérience. Cette configuration expérimentale présente donc une

grande richesse du point de vue des instabilités hydrodynamiques et des travaux tant expérimentaux que théoriques sont développés à l'heure actuelle sur cette thématique, dans le cas de liquides purs ou de solutions [1,2,3,4,5,6,7]. Notons que selon les propriétés du milieu, les instabilités peuvent être induites par la gravité et/ou la tension superficielle. De même, dans le cas des solutions, convection thermique et/ou solutale sont en jeu. Nous nous sommes intéressés dans cette étude à l'évaporation d'une solution polymère/solvant à température ambiante. La convection naturelle qui se développe au démarrage du séchage, lorsque la viscosité de la solution est suffisamment faible, a été mise en évidence par des observations par caméra vidéo et caméra IR. Des résultats sur l'influence de l'épaisseur initiale de la solution sont présentés.

2 Système modèle : PIB/Toluène

Le système modèle utilisé est une solution mono-polymère/mono-solvant de Polyisobutylène/toluène. Le Polyisobutylène (PIB) provient de Sigma-Aldrich, avec $M_w = 5 \times 10^5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et un indice de polydispersité de 2.5. Le Toluène provient de Prolabo (qualité Chromatographique, pureté 99.9 %). Notons que la température de transition vitreuse du PIB est très inférieure à la température ambiante : $T_g = -76^\circ\text{C}$. Le film reste donc à l'état fondu tout au long du séchage et les phénomènes de fractures caractéristiques du passage de la transition vitreuse lors du séchage ne sont pas attendus ici.

Les variations avec la teneur en solvant de l'activité, du coefficient de diffusion mutuelle et de la viscosité sont caractéristiques des solutions polymères. Activité et coefficient de diffusion mutuelle ont été obtenus par expériences de gravimétrie en atmosphère contrôlée [8,9]. Pour les concentrations volumiques en solvant supérieures à 0.4, l'activité reste supérieure à 0.9. Pour la période de début du séchage, qui sera celle concernée par les instabilités hydrodynamiques, le flux de solvant reste donc proche de celui obtenu en évaporant du solvant pur. Le coefficient de diffusion mutuelle varie également peu pour les fractions volumiques en solvant supérieures à 0.3 et est de l'ordre de $10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$. Il décroît ensuite très fortement lorsque la concentration en solvant diminue pour atteindre des valeurs de l'ordre de $10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}$ pour les très faibles teneurs en solvant.

Des mesures de viscosité ont été réalisées en utilisant un rhéomètre à cylindres coaxiaux à déformation imposée (Low Shear 30). La concentration initiale utilisée dans les expériences (fraction massique initiale en polymère = 5%) correspond au régime semi-dilué. Dans ce régime la viscosité augmente avec la concentration en polymère selon une loi de puissance dont l'exposant est de l'ordre de 3.5. Pour une fraction massique de polymère de 5% la viscosité est de 20.8 mPa.s et atteint 339 mPa.s pour une fraction massique de polymère de 10% [10]. Par comparaison, la viscosité du toluène pur est de 0.55 mPa.s. La diffusivité thermique de la solution initiale, proche de celle du toluène, est de l'ordre de $10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, ce qui conduit pour les expériences réalisées à des nombres de Prandtl élevés : $Pr_{initial} \simeq 250$. Le nombre de Schmidt est 1000 fois plus grand, du fait de la faible valeur du coefficient de diffusion mutuelle, même à teneur en solvant élevée.

3 Configuration expérimentale

Les solutions sont versées dans une coupelle en verre de 110mm de diamètre. La coupelle est posée sur une balance de précision (10^{-4} g) dans une hotte aspirante et à température ambiante. Un écran cylindrique est placée autour de la coupelle de façon à limiter la vitesse d'écoulement de l'air sur celle-ci. L'épaisseur initiale de la solution varie entre 1 et 13mm selon les expériences. La masse est relevée tout au long de l'expérience et le flux d'évaporation du solvant est obtenue par dérivation. Des expériences préliminaires d'évaporation de solvant pur dans la même configuration ont permis de déterminer les coefficients d'échange thermique et massique qui caractérisent le transfert dans l'air au dessus de la surface libre. Le coefficient d'échange massique h_m est de l'ordre de $3 \text{ mm}/\text{s}$ et le coefficient d'échange thermique h_{th} de l'ordre de $25 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, ce qui conduit à un nombre de Biot thermique de l'ordre de $Bi_{th} = 180 \times l$ où $l(m)$ est l'épaisseur. D'autre part notons que les échelles de temps impliquées en thermique et solutal sont très différentes, avec un nombre de Lewis de l'ordre de 10^{-3} . Ces caractéristiques thermophysiques

impliquent un comportement dissemblable des champs de température et de concentration : les temps de transitoire thermique seront bien inférieurs au temps total de l'expérience, contrairement au gradient de concentration qui évolue tout au long du séchage.

L'observation des structures convectives est obtenue en utilisant deux types de caméra placées à la verticale à environ 1m au dessus de la coupelle. Pour les visualisations par video, la solution est initialementensemencée de particules d'iriodine pour visualiser la structure de l'écoulement à la surface. La visualisation du champ de température en surface a été réalisée par une caméra IR refroidie dont la résolution est de 70mK et la précision de 0,1K.

4 Résultats

4.1 Cinétiques

Compte tenu de la configuration expérimentale et des propriétés physicochimiques de la solution, la cinétique de séchage est caractérisée par la succession de plusieurs phases que l'on peut qualitativement décrire en utilisant un modèle diffusif des transferts dans la solution [11]. Un exemple de cinétiques expérimentales est donné en Fig. 1 pour deux épaisseurs initiales différentes.

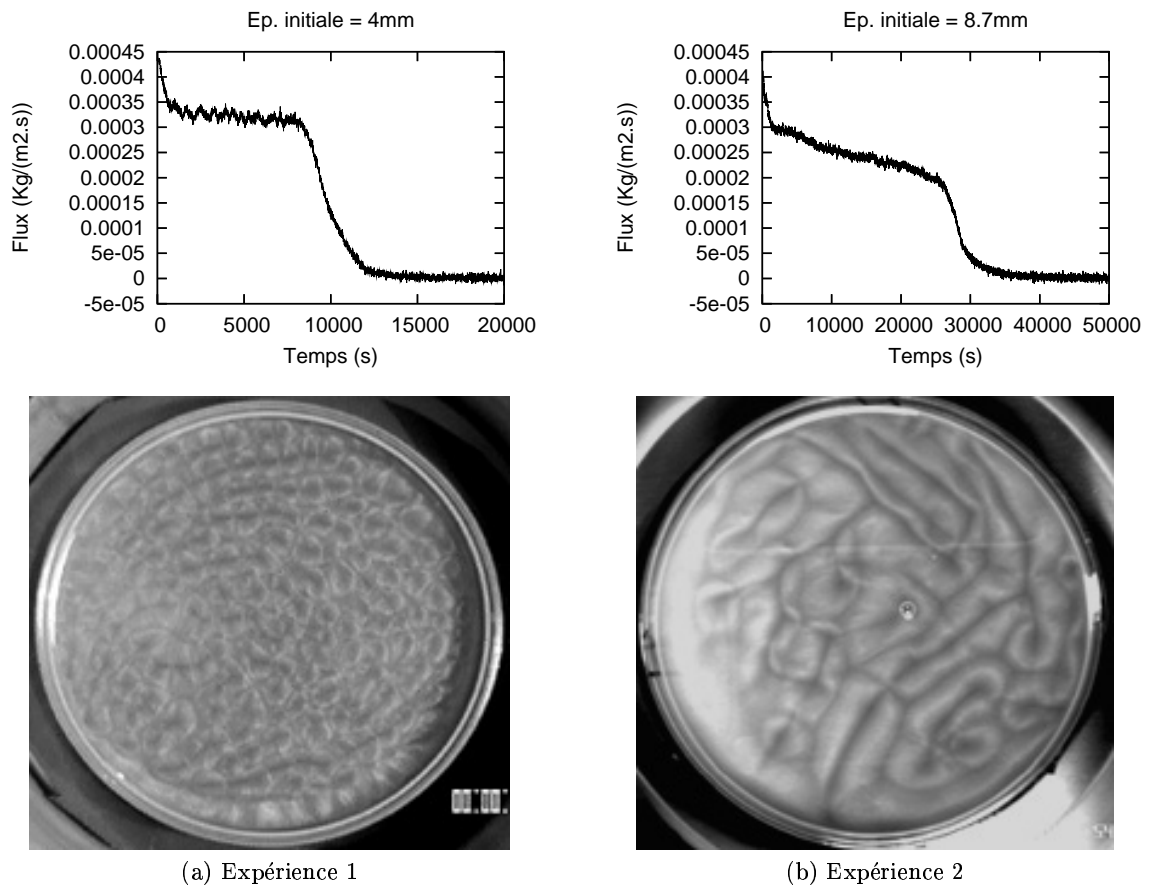


Fig.1. Cinétiques de séchage et cellules convectives pour deux expériences d'épaisseurs initiales 4 mm (expérience 1) et 8,7 mm (expérience 2). Les photos ont été prises respectivement 37 s (expérience 1) et 174 s (expérience 2) après le versement de la solution

Dans le cas de l'expérience 1 (épaisseur initiale=4mm), la cinétique est similaire à celle de l'évaporation de solvant pur jusqu'à $t \simeq 8000s$. En effet, comme nous l'avons indiqué précédemment, l'activité est proche de 1 tant que la fraction volumique en surface reste supérieure à environ 0.4. On observe tout d'abord une baisse de flux correspondant au régime transitoire thermique et dont la durée est caractérisé par la constante de temps thermique du système "coupelle + solution" (environ 1000s). Ce transitoire est ensuite suivi d'une période où le flux d'évaporation est important et varie peu (température et flux seraient constants dans une expérience de solvant pur). Dans un deuxième temps, on observe une diminution importante du flux ($8000 < t < 13000s$), correspondant à la période où la teneur en solvant devient faible dans toute l'épaisseur et passe en dessous de 0.4 en surface. La température réaugmente jusqu'à atteindre une valeur très proche de la température ambiante. Suit enfin un dernier régime lent ($t > 13000s$) contrôlé par le coefficient de diffusion massique qui est très faible pour ce domaine de concentration (cf. caractérisation du système).

Dans le cas de l'expérience 2 (épaisseur initiale=8,7mm), la cinétique est plus complexe : en effet, la concentration en surface atteint des valeurs faibles correspondant à une baisse d'activité alors que la concentration au coeur reste importante. On observe alors une décroissance lente du flux jusqu'à $t=25000s$, suivie ensuite comme dans l'expérience 1 d'une décroissance importante du flux liée à une baisse générale de teneur en solvant dans tout le film. La chute se produit ici pour $25000 < t < 35000s$.

Nous nous intéressons dans la suite à la première phase du séchage pendant laquelle sont observées les cellules convectives. Notons que d'autres types d'instabilités du type plissement (ou fractures dans les systèmes vitreux) ont été observées lors de la chute du flux [12], mais elles ne seront pas abordées ici.

4.2 Instabilités hydrodynamiques

Plusieurs séries d'expériences ont été réalisées en faisant varier l'épaisseur initiale de la solution. Un exemple des instabilités observées est donné en Fig. 1 pour les expériences 1 et 2. Les résultats obtenus montrent un changement de comportement selon l'épaisseur initiale : pour des épaisseurs initiales faibles (inférieures à 4mm), les structures observées sont de type cellules hexagonales. A plus fortes épaisseurs un comportement de type rouleaux ou mélange de type cellules/rouleaux est observé. La taille caractéristique moyenne de ces structures a été évaluée en déterminant la distance entre centres de cellules voisines ou la distance entre axes de deux rouleaux adjacents. Les résultats obtenus sont reportés en Fig. 2. Ce graphique a été construit en utilisant les observations correspondant aux premières minutes du séchage, lorsque la surface entière est envahie par les structures convectives régulières. La taille des cellules augmente proportionnellement à l'épaisseur initiale dans le premier régime de cellules hexagonales, comme cela a déjà été observé sur des expériences d'évaporation de solvant pur. La taille caractéristique sature ensuite pour les épaisseurs plus grandes lorsque des mélanges cellules/rouleaux sont observés. Notons que cette saturation est peut-être due à un effet de taille finie, le rapport de forme épaisseur/diamètre devenant de l'ordre de 0,1. Les observations par caméra infrarouge montrent la même topologie de structures. Le gradient de température à la surface entre points chauds (au centre) et points froids (en périphérie) d'une même cellule, évalué par les observations en caméra IR, est de l'ordre de $2^{\circ}C$.

La réalisation d'expériences complémentaires pour déterminer l'origine de ces mécanismes d'instabilités hydrodynamiques est en cours. En effet le système choisi présente des variations de masse volumique et de tension de surface, avec la température comme avec la concentration, qui peuvent conduire à une configuration instable lors de l'évaporation : la masse volumique et la tension de surface du polymère sont plus importantes que celles du solvant. De même masse volumique et tension de surface augmentent quand la température diminue. En contrepartie la variation fortement non linéaire de la viscosité lorsque la concentration en polymère augmente inhibe la convection dans les zones concentrées en polymères. Une majoration des nombres de Rayleigh et Marangoni en début d'expérience, en considérant l'épaisseur totale et une variation de température entre la surface et le fond de quelques degrés, conduit aux ordres de grandeur suivant : $Ra_{th} \simeq 10^{10} \times l^3$ et $Ma_{th} = 10^5 \times l$ (l en m). Le domaine des épaisseurs explorées conduit donc à des valeurs de Rayleigh et Marangoni proches des seuils d'instabilité obtenus dans des expériences de convection naturelle. Les nombres de Rayleigh et Marangoni solutaux sont plus importants. Ceci n'est cependant à prendre qu'à titre indicatif, la détermination de seuils nécessitant des études

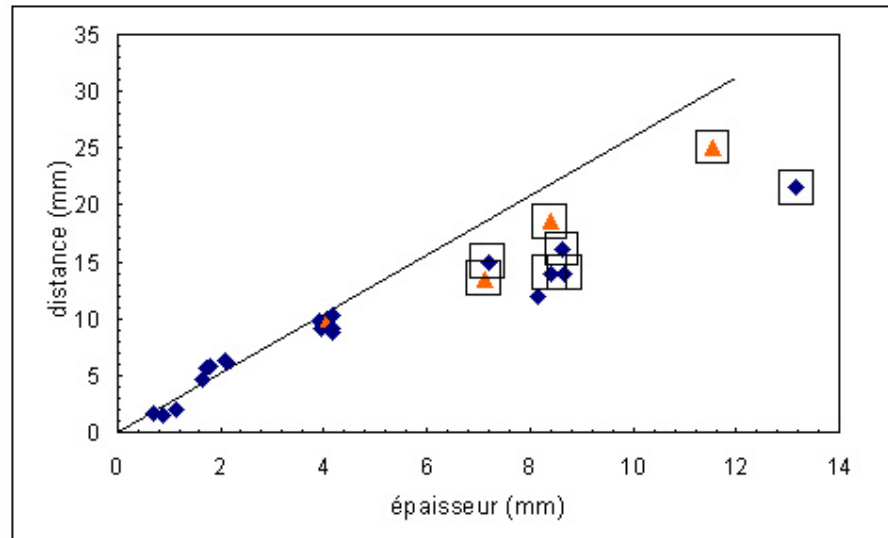


Fig.2. Taille caractéristique des structures observées en début de séchage en fonction de l'épaisseur initiale. Les points entourés d'un carré correspondent à l'observation de cellules et rouleaux. Les losanges noirs correspondent à des visualisations par caméra vidéo et les triangles gris à des visualisations simultanées par caméra vidéo et caméra IR

théoriques et numériques plus poussées pour tenir compte des spécificités de la configuration étudiée (en particulier de la condition aux limites à la surface).

5 Conclusion

Les visualisations de l'écoulement et de la température de surface d'une solution de PIB/Toluène en cours d'évaporation ont permis de mettre en évidence le développement de structures convectives en début de séchage. Des simulations numériques sont en cours, en considérant dans un premier temps uniquement le problème thermique (collaboration avec S.Xin, LIMSI). Ceci est la première étape d'une analyse plus complète de l'ensemble des phénomènes mis en jeu lors du séchage, où l'évolution des propriétés physicochimiques de la solution peut faire apparaître des phénomènes dominés successivement par l'hydrodynamique et la viscoélasticité.

Références

1. D. MERKT AND M. BESTEHORN, Bénard-Marangoni convection in a strongly evaporating fluid, *Physica D*, **185**, 196-208 (2003).
2. P. COLINET, J.C. LEGROS AND M.G. VELARDE, *Nonlinear Dynamics of Surface-Tension-Driven Instabilities*, Wiley-VCH, Berlin (2001).
3. C. MOUSSY, G. LEBON AND J. MARGERIT, Influence of evaporation on Bénard-Marangoni instability in a liquid-gas bilayer with a deformable interface, *Eur. Phys. J. B*, **40**, 327-335 (2004).
4. H. MANCINI AND D. MAZA, Pattern formation without heating in an evaporative convection experiment, *Europhysics Letters*, **66** (6), 812-818 (2004).
5. P.G. DE GENNES, Instabilities during the evaporation of a film : Non-glassy polymer + volatile solvent, *Eur. Phys. J. E*, **6**, 421-424 (2001).
6. S. SAKURAI, K. TANAKA AND S. NOMURA, Two-dimensional undulation pattern on free surface of polymer film cast from solution, *Polymer Communications*, **34**, 1089-1092 (1993).

7. S. SAKURAI, C. FURUKAWA, A. OKUTSU, A. MIYOSHI AND S. NOMURA, Control of mesh pattern of surface corrugation via rate of solvent evaporation in solution casting of polymer film in the presence of convection, *Polymer*, **43**, 3359-3364 (2002).
8. F. DOUMENC, B. GUERRIER AND C. ALLAIN, Coupling between mass diffusion and film temperature evolution in gravimetric experiments, *Polymer*, **46**, 3708-3719 (2005).
9. F. DOUMENC, B. GUERRIER AND C. ALLAIN, Mutual diffusion coefficient and vapor-liquid equilibrium data for the system PIB/Toluene, *Journal of Chemical and Engineering Data*, **50**, 983-988 (2005).
10. Y. GORAND, F. DOUMENC, B. GUERRIER AND C. ALLAIN, Instabilités de plissement lors du séchage de films polymères plans, *Rhéologie*, **3**, 22-29 (2003).
11. B. GUERRIER, C. BOUCHARD, C. ALLAIN AND C. BÉNARD, Drying Kinetics of Polymer Films, *AIChE Journal*, **44**, 791-798 (1998).
12. F. DOUMENC, B. GUERRIER AND C. ALLAIN, Surface Undulations Formed during Polymer Solution Drying, *Proc. 40th IUPAC International Symposium on Macromolecules, Paris*, IUPAC, (2004).

Propagation autosimilaire et similariton optique

J. M. Dudley¹, C. Billet¹, P.-A. Lacourt¹, R. Ferrière¹ & C. Finot² & G. Millot²

¹ Département d'Optique P. M. Duffieux, FEMTO-ST CNRS UMR 6174, Université de Franche-Comté, Besançon, France

² Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne (LPUB), CNRS UMR 5027, Dijon, France
john.dudley@univ-fcomte.fr

Résumé. Nous passons en revue les progrès effectués dans les études théoriques et expérimentales sur l'évolution autosimilaire et les dynamiques en optique non-linéaire ultrarapide. En particulier, nous décrivons les expériences ayant mis en lumière des aspects fondamentaux de propriétés d'échelles des similaritons optiques, impulsions à profil parabolique générés asymptotiquement dans des amplificateurs fibrés à dispersion de vitesse de groupe normale. L'utilisation des similaritons dans le développement des sources optiques à un régime de 20 fs sera aussi mis en avant.

Abstract. We review progress in theoretical and experimental studies of self-similar scaling and dynamics in ultrafast nonlinear optics. In particular, we describe experiments that have revealed a number of fundamental aspects of the scaling properties of the optical similariton, a pulse with a parabolic intensity profile that is generated asymptotically in optical fiber amplifiers with normal group velocity dispersion. The application of similariton pulses to the development of few-cycle optical sources in the 20 fs regime will also be considered.

1 Introduction

Un grand nombre de phénomènes physiques présentent des propriétés remarquables d'autosimilarité spatiale et (ou) temporelle. L'étude formelle de ces processus date du début du vingtième siècle avec la publication dans *Nature* par Lord Rayleigh et E. Buckingham de deux articles sur le "principe de similitude", connu aujourd'hui sous la désignation d'analyse dimensionnelle [1, 2]. Cette technique est extrêmement simple au regard de la puissance de son pouvoir prédictif et a été employée de manière intensive pour déterminer quantitativement les lois de divers phénomènes physiques tels que l'expansion de l'onde de choc lors d'explosions nucléaires ou l'écoulement des eaux souterraines [3].

L'autosimilarité est un concept clé de différentes disciplines scientifiques et occupe une place centrale dans les sciences non-linéaires, si bien qu'aujourd'hui l'évolution autosimilaire est le sujet d'intenses recherches dans le domaine de la photonique. En effet, celles-ci ont mis en évidence un nouveau régime de fonctionnement des amplificateurs optiques avec la génération de similaritons, classe d'impulsions optiques ultracourtes présentant un profil asymptotique parabolique et se propageant de manière autosimilaire dans une fibre amplificatrice [4].

Une récente série d'expériences sur les amplificateurs à similaritons nous ont permis d'observer directement un certain nombre de propriétés fondamentales de leur évolution autosimilaire. Parmi celles-ci un résultat particulièrement significatif a donné lieu à la démonstration des caractéristiques de similitude et a mis en évidence le régime asymptotique intermédiaire pour lequel les conditions aux limites ont disparues mais où la solution asymptotique n'a pas encore été atteinte par l'impulsion [5].

L'étude de ces différents comportements a été obtenue par le développement d'amplificateurs à similaritons spécifiques, utilisant les technologies d'amplification Raman et erbium, ainsi que par de récents progrès dans la métrologie des impulsions ultracourtes. Dans une expérience utilisant un amplificateur Raman fibré, la nature asymptotique des similaritons a été explicitement vérifiée, en introduisant dans le dispositif une large gamme d'impulsions et en montrant que les caractéristiques du similariton demeurent invariantes avec la durée et le profil de celles-ci. Il a alors pu être montré que conformément à la théorie seuls les paramètres de l'amplificateur et l'énergie de l'impulsion initiale déterminent l'évolution de l'impulsion parabolique [6].

Dans une autre expérience reposant sur un amplificateur à fibre dopée erbium, la restructuration de l'impulsion initiale et son passage par un régime asymptotique intermédiaire a été étudiée. La caractérisation sur une grande dynamique du profil impulsionnel a alors permis de mettre en évidence la présence d'ailes asymptotiques intermédiaires. Au-delà de leur intérêt fondamental, les similaritons ont d'importantes applications pratiques liées à la possibilité de les comprimer de manière efficace. Les récents développements dans la technologie des fibres à bandes interdites et des fibres fortement non-linéaires, nous ont permis d'utiliser les potentialités de ces amplificateurs pour générer de manière totalement fibrée des impulsions de 20 fs.

2 Expérience et simulation

Le dispositif expérimental pour cette étude a été développé et optimisé à partir d'un modèle numérique de l'équation non-linéaire de Schrödinger à gain variable spectralement limité par une fonction Lorentzienne centrée à 1554 nm et de temps de relaxation $T_2 = 80$ fs [7].

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial z} = -i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} + i\gamma|E(z,t)|^2E(z,t) + \frac{g(z)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[G(\omega) + iF(\omega)]\tilde{E}(z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega \quad (1)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega T_2)^2}, \quad F(\omega) = \frac{2\omega T_2}{1 + (\omega T_2)^2}, \quad g(z) = g_0 e^{z/z_g} \quad (2)$$

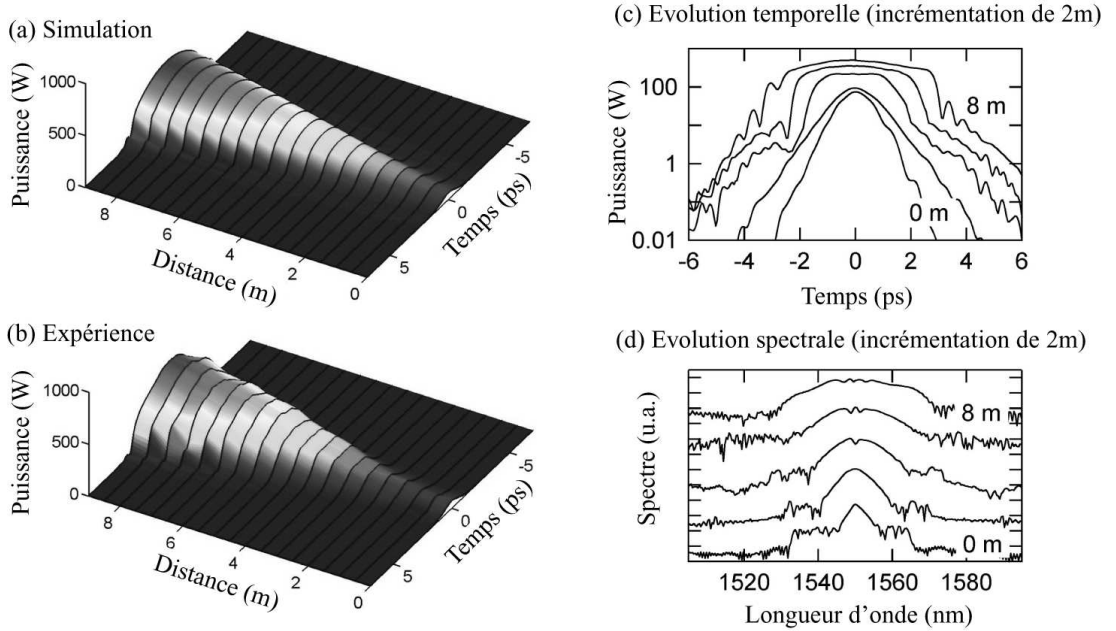


Fig.1. Simulation numérique de l'évolution de l'impulsion parabolique dans l'amplificateur à dispersion normale suivant les indications décrites dans le texte. (b) : Résultats expérimentaux obtenus à partir des mesures FROG (frequency-resolved optical gating). (c) : Résultats expérimentaux en échelle logarithmique mettant en évidence l'élargissement temporel et la croissance des ailes du régime asymptotique intermédiaire. (d) : Résultats expérimentaux en échelle logarithmique illustrant l'évolution spectrale associée.

La fibre dopée erbium utilisée lors de nos expériences offre à 1550 nm une dispersion normale $\beta_2 = +40 \times 10^{-3} \text{ps}^2 \text{m}^{-1}$ pour un coefficient de non-linéarité estimé à $6 \text{W}^{-1} \text{km}^{-1}$. L'amplificateur est pompé

de manière copropagative à 1480 nm et les impulsions utilisées sont issues d'un laser solitonique FFL Pritel et présentes à l'entrée de la fibre amplificatrice une largeur à mi-hauteur de 1.7 ps pour une énergie de 109 pJ.

Dans une première expérience nous nous sommes attaché à reconstruire l'évolution du profil impulsional dans un amplificateur copropagatif de 9 m. Celle-ci a été réalisée à partir d'un processus de "cut-back", consistant à réduire par morceaux de 50 cm la longueur de fibre dopée tout en effectuant la caractérisation de l'impulsion amplifiée à l'aide d'un dispositif FROG (frequency-resolved optical gating) à grande dynamique. Pour une puissance de pompe de 140 mW, le gain d'amplification est de 13.6 dB ; les paramètres de la distribution longitudinale du gain pour notre modélisation ont alors été définis à une valeur g_0 de 0.70 m^{-1} pour une distance z_g de 7 m. Celle-ci prédit alors l'évolution de l'impulsion en un similariton optique comme le montre la figure 1(a). La reconstruction expérimentale représentée sur la figure 1(b) confirme cette évolution asymptotique.

Les dynamiques d'évolution de l'impulsion expérimentale sont décrites en détail dans les figures 1(c) et (d) où les profils temporels et spectraux sont représentés tous les 2 m de propagation. Ceux-ci mettent en évidence que l'évolution du profil impulsional est associée à un élargissement dans les deux domaines, la dynamique de restructuration de l'impulsion étant particulièrement apparente dans la figure 1(c). Sur cette figure nous pouvons en effet observer que durant les quatre premiers mètres de propagation l'impulsion évolue vers un profil parabolique qui est préservé par la suite au cours de son amplification, confirmant la nature autosimilaire de l'évolution impulsional dans la seconde moitié de l'amplificateur. La figure 1(c) met aussi en évidence la présence d'ailes de faible amplitude de part et d'autre du profil impulsional parabolique. Celles-ci se développent après 4 mètres de propagation et sont associées au régime *asymptotique intermédiaire* de la propagation autosimilaire [8]. Ces ailes sont aussi observées lors de nos simulations, comme nous pouvons l'observer sur la figure 2(a) qui compare le profil expérimental avec les résultats numériques après 7 m de propagation. Nous pouvons aussi visualiser les chirps correspondant aux profils d'intensité présentés et nous avons grisé les parties latérales de l'impulsion afin de distinguer le cœur du similariton de ses ailes. Nous notons que le modèle numérique présente un accord parfait pour le cœur parabolique de l'impulsion, et un bon accord qualitatif dans la région des ailes. En outre, bien que la figure 1(c) montre que l'amplitude absolue des ailes du similariton croisse avec la distance propagée, il est attendu que la contribution relative des ailes dans l'énergie globale de l'impulsion diminue à partir de l'entrée de celle-ci dans le régime asymptotique. Notre capacité à distinguer lors nos expériences le cœur parabolique de l'impulsion de ses ailes décroissant exponentiellement nous a permis de confirmer cette prévision théorique, résultats qui ont été corroborés par les simulations. La figure 2(c) décrit l'évolution de la fraction de l'énergie du similariton contenue dans les ailes après 3 m de propagation dans l'amplificateur.

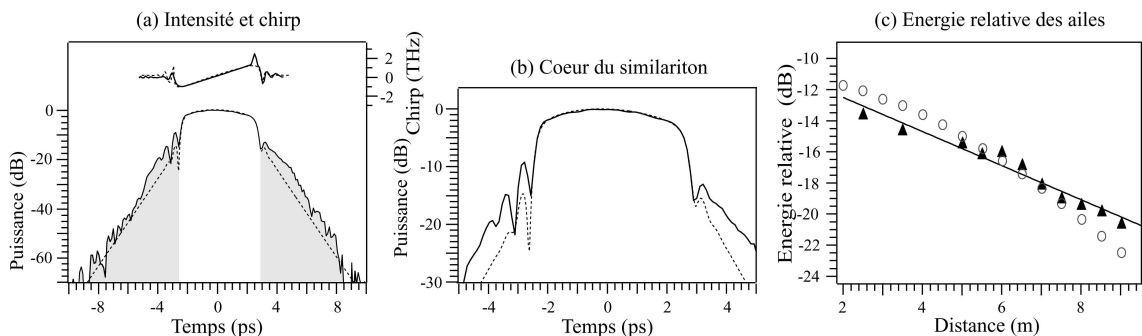


Fig2. (a) : Profil d'intensité et chirp obtenus expérimentalement (trait continu) et par simulation (pointillés) après 7 m de propagation. La partie grisée représente les ailes du similariton. (b) : Représentation agrandie du cœur du similariton. (c) : Résultats de expérimentaux (triangle), de simulation (cercles) et courbe d'ajustement expérimentale (trait continu) mettant en évidence la décroissance exponentielle, de l'énergie relative dans les ailes asymptotiques du similariton au cours de la propagation de l'impulsion dans l'amplificateur.

3 Compression de similaritons

Compte tenu de la fibre dopée erbium utilisée lors de nos expériences, l'étendue du spectre des similaritons présentant un chirp strictement linéaire est limitée à la bande spectrale [1525 - 1570] nm, limitant la durée des impulsions comprimées susceptibles d'être obtenues à environ 250 fs. Afin d'augmenter la largeur spectrale des impulsions tout en maintenant la linéarité de leur chirp, nous procédons à une propagation autosimilaire additionnelle dans une fibre fortement non-linéaire à dispersion normale (HNLF) [9]. Dans une première étape nous construisons un nouvel amplificateur reposant sur la configuration précédemment décrite mais utilisant 10 m de fibre dopée erbium et permettant d'obtenir, dans le cas d'une puissance de pompe de 170 mW, un gain d'amplification de 13.8 dB. La figure 3(a) décrit les profils de spectre, d'intensité et de chirp relevés à la sortie de l'amplificateur. Dans le cas du dispositif présenté les largeurs temporelle et spectrale sont respectivement de 5.4 ps et de 17 nm. La sortie de la fibre dopée est ensuite fusionnée (avec une efficacité de couplage de 88%) à 10 m de fibre OFS fortement non-linéaire présentant une dispersion normale plate $\beta_2 = 3.1 \times 10^{-3} \text{ps}^2 \text{m}^{-1}$ sur la bande spectrale [1510 - 1680] nm. La figure 3(b) met en avant le fait que la propagation dans la fibre HNLF a abouti à un élargissement temporel et spectral de l'impulsion, dont les valeurs sont alors respectivement de 6.1 ps et 34 nm, et que l'impulsion a conservé son profil d'intensité parabolique ainsi que son chirp linéaire. Cette propagation autosimilaire dans la fibre HNLF a ainsi permis de doubler la largeur spectrale du similariton tout en maintenant les propriétés asymptotiques de l'impulsion.

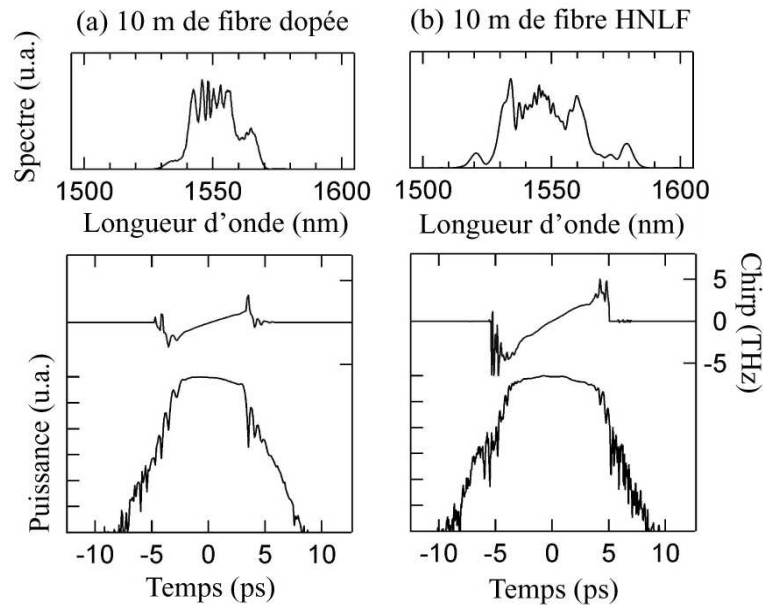


Fig.3. Caractéristiques impulsionnelles relevées à la sortie des 10 m de fibre dopée erbium (a) et après 10 m de fibre HNLF (b).

Les similaritons sont ensuite introduits dans une fibre à bande interdite photonique pour être comprimés linéairement [10]. Lors de nos expériences, nous avons utilisé une fibre HC-1550-02 de la société Blaze Photonics présentant une dispersion uniforme anormale $\beta_2 = -0.1 \text{ps}^2 \text{m}^{-1}$ sur la bande spectrale [1500 - 1600] nm et les impulsions à la sortie de celle-ci ont été caractérisées à l'aide du dispositif FROG. A la sortie de ce dispositif de compression, les impulsions, dont le profil d'intensité est représenté sur la figure 4(a), ont alors une largeur temporelle de 240 fs.

La compression solitonique est un processus bien connu qui résulte d'un élargissement spectral et d'une phase de compression temporelle durant l'évolution d'un soliton d'ordre supérieur dans une fibre

optique en régime de dispersion anormale [11]. Cependant la présence de bruit dans l'impulsion initiale ou d'une dispersion d'ordre supérieure importante peut induire un processus de fission solitonique. Les études récentes sur ce phénomène, dans le contexte de la génération de supercontinuum [12-14], ont déterminé que trois conditions expérimentales sont cruciales pour minimiser ce processus. Premièrement, le bruit de l'impulsion introduite dans le dispositif optique doit être très bas afin de réduire les effets d'instabilité de modulation. Deuxièmement, les perturbations dues à la dispersion doivent être limitées par un choix approprié de la fibre optique, et comme le degré de la compression non-linéaire est proportionnel à l'ordre N du soliton introduit ($N = (\gamma P_0 T_0^2 / |\beta_2|)^{\frac{1}{2}}$), une vitesse de groupe faible et des ordres supérieures de dispersion négligeables sont des critères essentiels dans ce choix. Enfin la longueur de la fibre effectuant la compression solitonique doit être définie de manière optimale afin que l'impulsion introduite atteigne sa largeur spectrale maximale. Nous retrouvons l'ensemble de ces conditions dans notre dispositif expérimental par le fait que nous utilisons les avantages (i) des propriétés intrinsèques de faible bruit des similaritons optiques, (ii) des dernières technologies de fibres fortement non-linéaires et que (iii) des mesures précises ont été effectuées par FROG à chaque étape du montage optique.

L'impulsion de 240 fs obtenue par compression linéaire du similariton dans la fibre à bande interdite photonique excite dans cette fibre fortement non-linéaire à dispersion anormale un soliton d'ordre $N \approx 6$. La longueur de fibre a été optimisée par l'utilisation d'un modèle numérique basé sur l'équation non-linéaire de Schrödinger incluant les effets de bruit et considérant le profil impulsionnel relevé expérimentalement. Dans le cas d'une longueur optimale de 0.5 m des impulsions de 20 fs ont pu être obtenues ; la largeur temporelle des impulsions correspond alors à 4 cycles optiques.

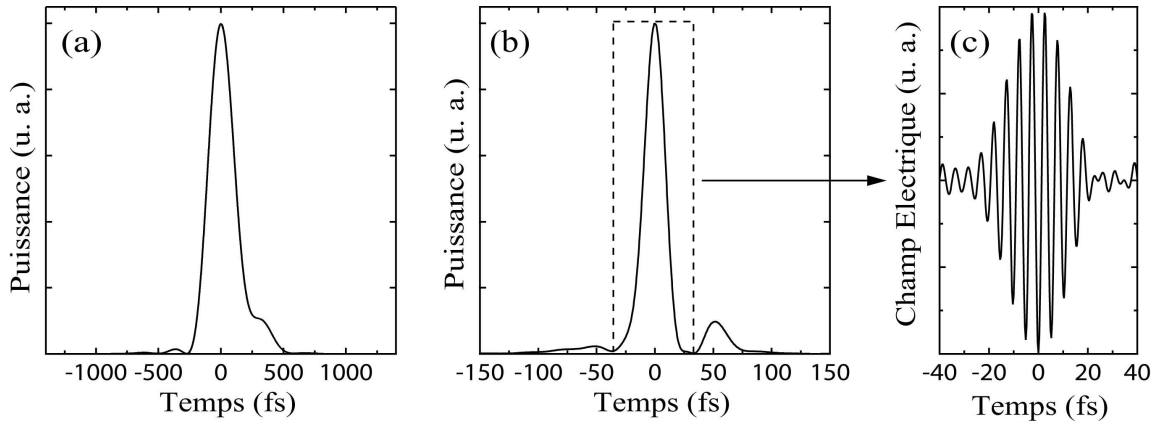


Fig.4. (a) : Profil d'intensité de l'impulsion de 240 fs caractérisée à la sortie de la fibre à bande interdite photonique. (b) : Impulsion de 20 fs obtenue par compression non-linéaire. (c) : Représentation du champ électrique du lobe principale de l'impulsion comprimée.

4 Conclusion

Ce travail a permis de confirmer des propriétés des amplificateurs à similaritons qui n'avaient pas été explicitement étudiées lors de précédentes expériences. Pour notre part, ces résultats représentent une nouvelle étape dans le développement des technologies et des applications reposant sur les impulsions paraboliques, et nous espérons que des études plus poussées permettront d'améliorer les performances du système présenté dans sa résistance aux perturbations lors de la compression solitonique.

Références

1. LORD RAYLEIGH, *Nature*, **95**, 66-68 (1915).

2. E. BUCKINGHAM, *Nature*, **96**, 396-397 (1915).
3. G. I. BARENBLATT, *Scaling*, *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, (2003).
4. M. E. FERMAN, V. I. KRUGLOV, B. C. THOMSEN, J. M. DUDLEY & J. D. HARVEY, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 6010-6013 (2000).
5. C. BILLET, J. M. DUDLEY, N. JOLY & J. C. KNIGHT, *Opt. Express*, **13**, 3236-3241 (2005).
6. C. FINOT, G. MILLOT & J. M. DUDLEY, *Opt. Lett.*, **29**, 2533-2535 (2004).
7. S. CHI & C.W. CHANG, *Opt. Comm.*, **106**, 193-196 (1994).
8. V. I. KRUGLOV, A. C. PEACOCK, J. D. HARVEY & J. M. DUDLEY, *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**, 461-469 (2002).
9. D. ANDERSON, M. DESAIX, M. KARLSON, M. LISAK & M.L. QUIROGA-TEIXEIRO, *J. Opt. Soc. Am. B*, **10**, 1185-1190 (1993).
10. C. J. S. DE MATOS, S. V. POPOV, A. B. RULKOV, J. R. TAYLOR, J. BROENG, T. P. HANSEN & V. P. GAPONTSEV, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 103901 (2004).
11. G.P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, 3rd Ed, Academic Press, New York (2001).
12. J.M. DUDLEY & S. COEN, *Opt. Lett.*, **27**, 1180-1182 (2002).
13. J.N. KUTZ, C. LUNGA & B.J. EGGLETON, *Opt. Express*, **13**, 3989-3998 (2005).
14. M.A. FOSTER, A.L. GAETA, Q.CAO & R.TREBINO, *Opt. Express*, **13**, 6848-6855 (2005).

Les solitons optiques spatiaux vectoriels dans les milieux à non linéarité Kerr

Gil Fanjoux, Michaël Delqué, Jérémy Michaud, Hervé Maillotte & Thibaut Sylvestre

Institut FEMTO-ST / Laboratoire d'Optique PM Duffieux
UMR CNRS — Université de Franche-Comté n°6174 / route de Gray 25030 Besancon Cedex
gil.fanjoux@univ-fcomte.fr

Résumé. Nous présentons des résultats expérimentaux et numériques sur la propagation de solitons vectoriels dans un guide plan à non linéarité Kerr. La dynamique de ces solitons est basée sur le piégeage mutuel des différentes composantes (fréquentielles ou de polarisation) qui constituent ces nouvelles espèces de solitons.

Abstract. We present experimental and numerical results of multicomponent vector solitons in a planar waveguide with Kerr nonlinearity. We show that the dynamics of these composite solitons is based on the mutual trapping of their different components (frequencies or of polarization).

1 Introduction

Lorsqu'on prend en considération la nature vectorielle des phénomènes physiques non linéaires, leur dynamique amène à une diversité de nouveaux comportements riches et variés. A titre d'exemple, dans le contexte de l'optique, de nombreux effets non linéaires vectoriels ont été ainsi prédits puis observés tels que l'existence de nouvelles solutions stationnaires (e.g., soliton vectoriel, vortex), de nouvelles instabilités de modulation ou de polarisation, ou encore de brisure de symétrie [1]. D'une manière générale, les solitons vectoriels diffèrent des solitons scalaires par leur nature multi-composantes (couleurs ou polarisations) qui interagissent entre elles et se guident mutuellement dans le milieu non linéaire pour former une solution stationnaire [1]. La dynamique de ces solitons composites est généralement décrite par un système d'équations non linéaires de Schrödinger, couplées soit de façon incohérente (modulation de phase croisée XPM), soit cohérente (mélange à quatre ondes FWM).

Nous présentons ici des résultats expérimentaux et théoriques concernant deux nouveaux exemples de la famille des solitons spatiaux vectoriels dans les milieux Kerr en configuration guidée planaire (1+1D).

2 Solitons multicolores

Jusqu'à présent, ces solitons ont été étudiés pour une grande part dans les milieux quadratiques [2], le cas le plus simple étant la génération de second harmonique (SHG) avec des faisceaux intrinsèquement bicolores. Plus proche de notre travail, différentes études théoriques ont montré l'existence de solutions stationnaires pour la co-propagation de faisceaux de fréquences différentes en milieu Kerr dû au couplage entre les différentes composantes [3,4,5]. Par ailleurs, une étude expérimentale a montré l'existence de solitons spatiaux multicolores dans différents milieux de Kerr [6]. L'originalité de notre travail est d'observer la génération d'un faisceau à plusieurs composantes spectrales lors de la propagation d'un faisceau monochromatique dans un guide plan à non linéarité Kerr en présence de diffusion Raman stimulée (DRS), et d'obtenir en sortie de guide un soliton vectoriel auto-confiné avec piégeage mutuel de ces différentes composantes spectrales [7].

2.1 Montage expérimental

Le montage expérimental est composé d'un guide d'onde plan de 3 cm de long formé par un espace confiné entre deux blocs de verre SK5 (indice de réfraction linéaire $n_0 = 1.59$ @ $\lambda = 0.532 \mu\text{m}$) et rempli

de liquide CS₂ à fort coefficient non linéaire ($n_0 = 1.63$; indice non linéaire $n_2 = 3.5 \times 10^{-18}$ m²/W). L'épaisseur $d \cong 10$ μm du guide correspondant à une structure multimodale a été choisie de façon à obtenir un guide isotrope (biréfringence linéaire négligeable). La source est un laser Nd :YAG déclenché et doublé en fréquence, délivrant des impulsions subnanosecondes à une cadence de 7 kHz. La bonne stabilité en puissance du laser (rms < 1%) permet de suivre précisément l'évolution de l'intensité des différentes composantes spectrales en fonction de l'énergie injectée dans le guide.

La DRS génère dans le CS₂ une composante Stokes (resp. anti-Stokes) avec un décalage fréquentiel de 20 THz (resp. - 20 THz) par rapport à la pompe, et avec une largeur spectrale de 15 GHz. Ainsi, une répartition complexe de l'énergie dans différentes composantes spectrales peut s'observer après propagation dans le guide non linéaire et dépend fortement de l'intensité injectée (possibilité d'avoir une cascade Raman). Le but de cette étude expérimentale est d'analyser en sortie de guide l'évolution des différentes composantes spectrales (profils, intensités, largeurs) en fonction de l'énergie injectée. Pour cela, un montage à double réseaux de diffraction (réseaux blazés, 2400 tr/mm) filtre les composantes spectrales à 532 et 551 nm et les image indépendamment sur une caméra CCD monocoup.

2.2 Simulations numériques

Nous avons développé un modèle théorique basé sur trois équations de Schrödinger non linéaires couplées tenant compte de l'onde pompe, des premiers ordres Raman Stokes et anti-Stokes. Ces trois équations sont données par les relations suivantes :

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = \frac{i}{2\beta_p} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} + i\gamma_p \left[|E_p|^2 + 2|E_s|^2 + 2|E_{as}|^2 \right] E_p - g_{Rsat} |E_s|^2 E_p + g_{Rsat} |E_{as}|^2 E_p \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial z} = \frac{i}{2\beta_s} \frac{\partial^2 E_s}{\partial x^2} + i\gamma_s \left[|E_s|^2 + 2|E_p|^2 + 2|E_{as}|^2 \right] E_s + i\gamma_s E_{as}^* E_p^2 e^{i\Delta\beta z} + g_{Rsat} |E_p|^2 E_s \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_{as}}{\partial z} = \frac{i}{2\beta_{as}} \frac{\partial^2 E_{as}}{\partial x^2} + i\gamma_{as} \left[|E_{as}|^2 + 2|E_p|^2 + 2|E_s|^2 \right] E_{as} + i\gamma_{as} E_s^* E_p^2 e^{i\Delta\beta z} - g_{Rsat} |E_p|^2 E_{as} \quad (3)$$

où $E_j(x,z)$ est l'amplitude du champ j (avec l'indice $j = p, s, as$ pour pompe, Stokes et anti-Stokes), β_j la vitesse de groupe de chaque champ, γ_j le paramètre non linéaire, $\Delta\beta$ le désaccord de phase dû à la dispersion chromatique. Le paramètre z correspond à la direction de propagation, tandis que x est la dimension transverse spatiale (dimension de propagation libre du guide). Le processus Raman est inclus dans ces équations spatiales sous la forme d'un gain pour les champs Stokes et anti-Stokes. Afin de prendre en compte la saturation du gain due à la cascade Raman, nous avons utilisé le paramètre g_{Rsat} sous la forme :

$$g_{Rsat} = \frac{g_R}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \quad (4)$$

où g_R correspond au gain Raman sans saturation, I l'énergie de la composante Stokes, et I_{sat} un paramètre ajustable. L'amplitude du champ pompe à l'entrée du guide correspond à une sécante hyperbolique, tandis que les champs Stokes et anti-Stokes correspondent à du bruit spatial avec un photon par mode (bruit quantique).

2.3 Résultats expérimentaux et numériques

Les Fig. 1a et 1b présentent respectivement l'évolution des énergies et des largeurs totales à mi-hauteur (FWHM) pour les composantes à 532 et 551 nm en fonction de l'énergie injectée.

On peut observer sur la Fig. 1a que, dès lors que l'intensité du pic Raman Stokes devient significative, le régime de déplétion de la pompe apparaît. La croissance en intensité du pic Raman dans ce domaine de déplétion est quasiment linéaire, et non plus exponentielle, comme observée numériquement en régime de non déplétion. Concernant l'évolution des largeurs, la Fig. 2b montre clairement que la largeur de la pompe se stabilise lorsqu'on arrive en régime de déplétion de la pompe. La largeur de la composante

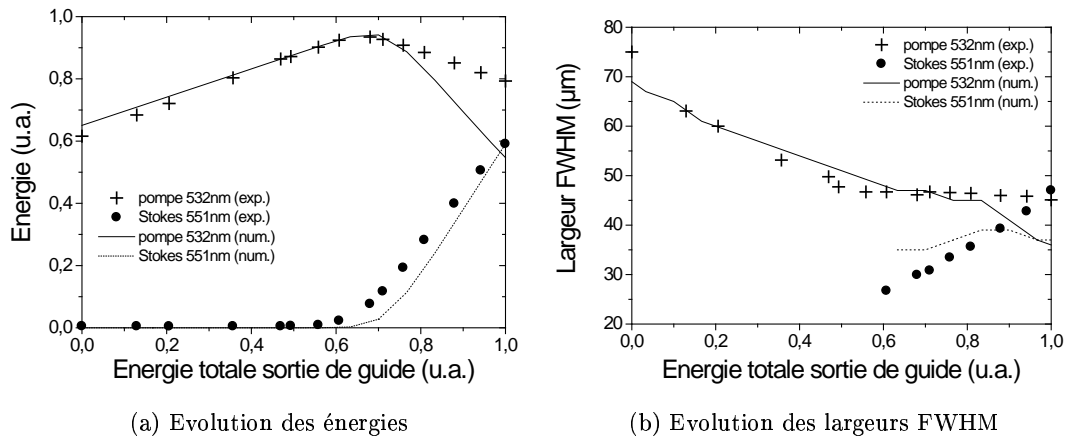


Fig.1. Résultats expérimentaux et numériques : évolution en fonction de l'énergie totale de sortie du guide (a) des énergies pour les composantes spectrales à 532 nm et 551 nm, et (b) des largeurs pour les composantes à 532 nm et 551 nm.

Stokes (influencée par XPM) augmente jusqu'à atteindre une largeur proche de celle de la pompe, dès lors que les intensités pompe et Raman Stokes sont proches.

Les résultats des simulations dans le domaine de validité du modèle sont en accord qualitatif avec les données expérimentales et permettent de comprendre la dynamique de génération du soliton multicolore *lors de la propagation*. Cette dynamique comporte deux phases distinctes. Lors de la première phase, l'énergie de la composante Stokes croît de manière exponentielle, restant toutefois très faible par rapport à celle de la pompe (régime de guidage du faisceau Raman par le soliton Kerr [8]). Puis, dès lors que l'intensité de la composante Raman Stokes devient significative par rapport à celle de la pompe, les largeurs et les intensités des composantes pompe et Raman Stokes deviennent similaires (régime de guidage mutuel via le processus XPM). On a alors stabilisation de l'intensité et de la largeur du soliton Kerr, due aux échanges d'énergie par DRS et FWM entre les différentes composantes qui évitent la formation d'un soliton d'ordre supérieur. Les deux composantes pompe et Raman Stokes ont alors, en sortie de guide, approximativement même largeur, même intensité, et même profil en sécante hyperbolique carrée : elles forment alors un **soliton spatial bicolore**.

Concernant la composante anti-Stokes, son intensité reste faible, mais non négligeable (observable expérimentalement mais très faible par rapport à la pompe et à la composante Stokes) contrairement à ce qui est attendu. En fait, alors que l'onde Stokes est amplifiée principalement par DRS, l'onde anti-Stokes suit l'évolution en énergie de la composante Stokes grâce à l'amplification paramétrique. Malgré un désaccord de phase naturel entre les composantes Stokes et anti-Stokes engendré par la dispersion, le processus FWM intervient dès lors que l'accord de phase est auto-induit grâce au déséquilibre des puissances généré par DRS entre ces deux composantes [9].

En conclusion, nous avons démontré qu'un soliton spatial multicolore est généré lors de la propagation d'un faisceau pompe monochromatique dans un milieu de Kerr en présence de DRS. Nous avons observé que la composante Raman Stokes de forte intensité stabilise le faisceau pompe et que, pour une énergie d'entrée définie, le faisceau de sortie du guide d'onde contient deux composantes spectrales d'intensités comparables, avec des profils spatiaux en sécante hyperbolique carrée et des largeurs similaires.

3 Brisure de symétrie induite des états-liés de solitons vectoriels de polarisation en milieu de Kerr isotrope

Les états-liés de solitons vectoriels reposent sur le guidage mutuel incohérent de 2 composantes de polarisation circulaires opposées. Ce sont des solutions stationnaires d'un système de 2 équations de Schrödinger nonlinéaires couplées. Chacune des équations régit l'évolution d'une composante de polarisation, ces composantes étant couplées de manière incohérente. Nous avons déjà démontré expérimentalement l'existence de ces solutions et nous avons également pu observer leur caractère instable [10,11]. En effet dans des conditions normales de propagation, l'état lié de soliton se propage sur une certaine longueur dépendant des perturbations présentes sur les profils, et fini par briser. Il résulte alors de cette brisure un soliton elliptique fondamental [12,13] qui est le seul membre stable des solitons vectoriels de polarisation en milieu de Kerr isotrope. Une grande majorité de l'énergie de l'état lié de départ bascule subitement dans ce soliton. Sa position et sa direction de propagation sont aléatoires car il est impossible expérimentalement de contrôler la totalité du bruit sur les profils. En effet même un bruit de niveau quantique suffit à provoquer la dynamique de brisure.

A l'aide de deux expériences inédites, nous démontrons deux méthodes de perturbation qui permettent de choisir sans ambiguïté le côté où la brisure se fera préférentiellement.

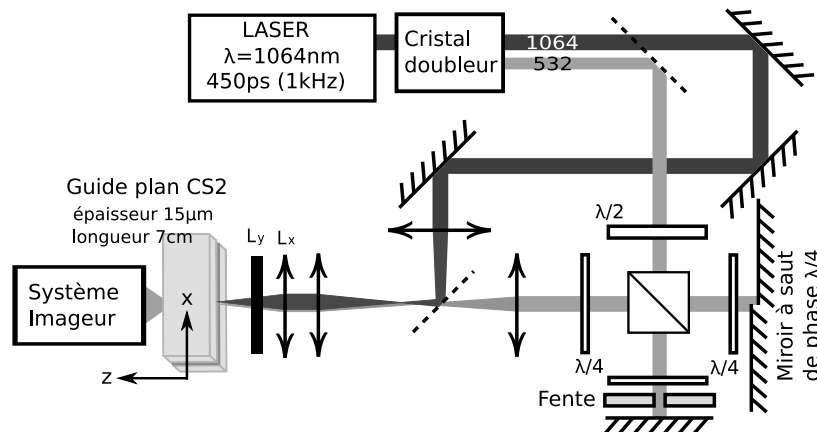


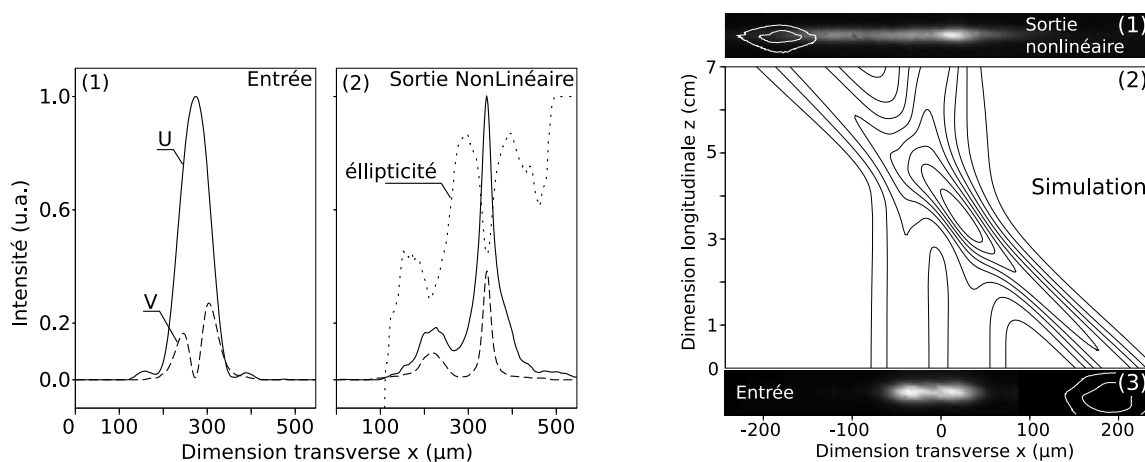
Fig.2. Shéma du montage expérimental. Le circuit secondaire à 1064 nm n'est utilisé que dans la seconde expérience.

3.1 Brisure induite par asymétrie des profils initiaux

La première possibilité pour forcer la brisure de l'état lié d'un côté ou de l'autre est d'ajouter aux profils initiaux une perturbation parfaitement connue et plus grande que le bruit que l'on ne contrôle pas. Cependant il faut prendre garde à ce que cette perturbation ne soit pas trop grande, ce qui empêcherait la formation de l'état lié.

Le montage expérimental utilisé est décrit dans la figure 2. Le faisceau infrarouge d'un laser impulsif est doublé en fréquence. Le résidu infrarouge est filtré par un miroir dichroïque. Le circuit à 1064nm du schéma n'est pas utilisé dans cette première expérience. Le faisceau visible à 532nm est ensuite divisé par un cube séparateur de polarisation au centre d'un montage type interféromètre de Michelson. Dans chacun des bras les 2 composantes de polarisation sont mise en forme indépendamment afin de leur donner un profil le plus proche possible du profil calculé numériquement [14].

La figure 3(a) montre les résultats expérimentaux. On peut remarquer sur les profils d'entrée de la figure 3(a.1) le déséquilibre des deux lobes de la composante V. C'est cette asymétrie qui va provoquer la



(a) Brisure de symétrie induite par asymétrie : profils d'entrée (1) et de sortie en régime non linéaire (2) de la composante de polarisation circulaire droite U (trait plein), gauche V (trait discontinu) et le profil d'ellipticité de sortie (pointillés).

(b) Brisure de symétrie induite par collision avec un soliton infrarouge : images expérimentales d'entrée (3) et de sortie de guide (1) (l'infrarouge est en courbe de niveau blanches) en régime non linéaire et simulation équivalente (2) en courbes de niveau.

Fig.3. Résultats expérimentaux.

brisure de l'état lié d'un seul côté. Il est important de préciser que les simulations montrent qu'avec un tel déséquilibre, le début de la propagation permet tout de même la formation d'un état lié de soliton et qu'une structure à deux coeurs est bel et bien formée. La figure 3(a.2) montre les profils correspondants en régime non linéaire. On observe une brisure de l'état lié d'un seul côté. L'étude du profil d'ellipticité montre une courbure au niveau du soliton résultant qui permet de l'identifier à un soliton elliptique fondamental [13].

3.2 Brisure induite par collision avec un soliton infrarouge

Nous utilisons toujours le montage décrit dans la figure 2 mais cette fois-ci sans asymétrie et nous utilisons le résidu infrarouge pour former un soliton scalaire dont la trajectoire va croiser celle de l'état lié de soliton formé dans le visible.

Les résultats expérimentaux sont illustrés sur la figure 3(b). 3(b.3) est l'image de l'entrée du guide où l'on distingue parfaitement l'état lié situé au centre dont les deux lobes sont symétriques et le faisceau infrarouge (en courbes de niveaux blanches), à environ $200\mu\text{m}$. 3(b.1) montre ce que l'on obtient en sortie de guide. Le faisceau infrarouge est désormais situé de l'autre côté du faisceau visible, attestant de leur trajectoires croisées. Quand au faisceau non linéaire visible, il n'est plus symétrique du tout et montre un transfert de l'énergie vers la droite. Il faut cependant noter que cette image de sortie est une image moyenne de plusieurs tirs. L'instabilité est toujours là, mais il est certain que statistiquement, le basculement de l'énergie se fait avec une forte préférence sur un côté seulement. En effet, en l'absence de faisceau infrarouge, l'image moyenne de sortie est parfaitement symétrique (équiprobabilité de brisure à gauche ou à droite.)

La simulation correspondante décrite en courbes de niveau sur la figure 3(b.2) permet de mieux comprendre ce qui se passe. Le soliton infrarouge, d'une puissance supérieure à celle du soliton dipolaire, se retrouve peu perturbé après la collision. L'état lié de soliton, lui, voit une forte modification de ses conditions de propagation. Si la brisure n'a pas encore eu lieu, cette forte perturbation va la provoquer,

et la dynamique sera fortement dépendante des caractéristiques (puissance, polarisation) du soliton qu'il rencontre.

4 Conclusion

Ces travaux concernent l'étude des solitons vectoriels en milieu Kerr. Nous avons montré que des solitons multi-fréquentiels sont générés grâce au processus de Diffusion Raman Stimulée au cours de la propagation d'un faisceau pompe monochromatique, les échanges d'énergie entre les différentes composantes stabilisant l'ensemble du faisceau. Concernant le soliton vectoriel de polarisation, nous avons d'une part montré que l'on peut maîtriser la brisure de symétrie du soliton vectoriel multimode, instable en milieu Kerr isotrope, et d'autre part vérifié que l'on obtient après brisure un soliton elliptique fondamental, seule solution stable du système.

En conclusion, ces deux résultats importants confirment l'existence de solitons vectoriels en milieu Kerr isotrope et non-saturable, et ouvrent des perspectives vers des applications de routage et de commutation spatial tout-optique contrôlée de l'information.

Références

1. Y.S. KIVSHAR, AND G.P. AGRAWAL, *Optical Solitons* (Academic Press, San Diego) 2003.
2. L. TORNER AND A.P. SUKHORUKOV, Quadratic solitons, *Opt. Phot. News*, **13**, 42 (2002).
3. H.T. TRAN, R.A. SAMMUT AND W.SAMIR, Multi-frequency spatial solitons in Kerr media, *Optics Com.*, **113**, 292-304 (1994).
4. Y. CHEN AND J. ATAI, Parametric spatial solitary waves, *Opt. Letters*, **19** (17), 1287-1289 (1994).
5. P.B. LUNDQUIST, D.R. ANDERSEN AND Y.S. KIVSHAR, Multicolor solitons due to four-wave mixing, *Phys. Rev. E*, **57** (3), 3551-3555 (1998).
6. V. BOUCHER AND X. NGUYEN-PHU, Generation of multicolor spatial solitons by stimulated Raman scattering, *Appl. Optics*, **41** (21), 4390-4393 (2002).
7. G. FANJOUX, J. MICHAUD, M. DELQUÉ, H. MAILLOTTE ET T. SYLVESTRE, Observation expérimentale d'un soliton spatial bicolore dans un milieu Kerr résonant, *J. Phys. IV*, à paraître (2006).
8. R. DE LA FUENTE AND A. BARTHÉLÉMY, Spatial Soliton-Induced Guiding by Cross-Phase Modulation, *IEEE J. Quantum Electr.*, **28** (2), 547-554 (1992).
9. S. COEN, D.A. WARDLE AND J.D. HARVEY, Observation of Non-Phase-Matched Parametric Amplification in Resonant Nonlinear Optics, *Phys. Rev. Lett.*, **89** (27), 273901 (2002).
10. C. CAMBOURNAC *et al.*, Symmetry-breaking instability of multimode vector solitons, *Phys. Rev. Lett.* **89**(8) 2002.
11. M. DELQUÉ AND M. CHAUVET AND H. MAILLOTTE AND T. SYLVESTRE, Numerical and experimental investigations of vector soliton bound-states in a kerr planar waveguide, *Opt. Comm.* **249** 2005.
12. M. HAELTERMAN AND A.P. SHEPPARD, Bifurcation phenomena and multiple soliton-bound states in isotropic kerr media, *Phys. Rev. E* **49**(4) 1994.
13. M. DELQUÉ *et al.*, Experimental Observation of the Elliptically Polarized Fundamental Vector Soliton of Isotropic Kerr Media, *Opt. Lett.* **30**(24) 2005.
14. M. HAELTERMAN AND A.P. SHEPPARD AND A.W. SNYDER, Bound-vector solitary waves in isotropic nonlinear dispersive media, *Opt. Lett.* **18**(17) 1993.

Evolution d'impulsions paraboliques dans un amplificateur à fibre optique hors régime asymptotique

Christophe Finot, Francesca Parmigiani, Periklis Petropoulos & Dave J. Richardson

Optoelectronics Research Centre, University of Southampton, Southampton SO 17 1BJ, United-Kingdom
cff@orc.soton.ac.uk

Résumé. Nous montrons que les impulsions paraboliques ne sont pas systématiquement synonymes de similaritons : un régime d'amplification dominé par l'auto-modulation de phase peut ainsi précéder le régime auto-similaire. Les caractéristiques des impulsions obtenues après recompression sont étudiées. Nous démontrons également qu'une impulsion parabolique de chirp initial négatif subit une recompression spectrale, conduisant à une impulsion parabolique de haute-énergie et en limite de Fourier.

Abstract. We show analytically and numerically that parabolic pulses and similaritons are not always synonyms and that a self-phase modulation amplification regime can precede the self-similar evolution. Properties of the recompressed pulses after SPM amplification are investigated. We also demonstrate that negatively chirped parabolic pulses can exhibit a spectral recompression leading to high-power chirp-free parabolic pulses.

1 Introduction

Les similaritons optiques, impulsions se propageant de manière auto-similaire dans les amplificateurs fibrés à haute-puissance, ont généré un intérêt considérable depuis leur première mise en évidence théorique et expérimentale en 2000 [1]. En effet, en raison de la combinaison de la dispersion normale, de la non-linéarité et du gain, toute forme initiale évolue asymptotiquement vers un similariton, une onde non-linéaire caractérisée par un profil d'intensité parabolique associé à une dérive de fréquence (*chirp*) linéaire et de pente positive. La dynamique auto-similaire est alors marquée par une augmentation exponentielle de la puissance crête et des largeurs temporelle et spectrale.

La génération de similaritons a été démontrée à travers différentes techniques d'amplification comme l'amplification par fibres dopées terres-rares (*Ytterbium [1,2] ou Erbium[3]*) ou bien encore l'amplification Raman [4]. Des propriétés théoriques fondamentales de la propagation asymptotique, telle que l'indépendance de l'impulsion générée vis-à-vis de la forme de l'impulsion initiale [1], ont alors pu être confirmées expérimentalement [5].

A ce jour, aucune distinction précise n'est effectuée entre l'évolution asymptotique auto-similaire d'une impulsion parabolique et l'amplification d'une impulsion ayant seulement une forme initiale parabolique d'expression générale $\psi_p(t)$ avec une énergie $U_p = 4 P_p T_p / 3$:

$$\psi_p(t) = \sqrt{P_p} \sqrt{1 - \frac{t^2}{T_p^2}} \exp(-i \frac{C_p}{2} t^2) \text{ si } |t| < T_p \quad ; \quad \psi_p(t) = 0 \text{ sinon,} \quad (1)$$

où P_p , T_p et C_p sont respectivement la puissance crête, la demi-largeur temporelle totale et le coefficient de chirp linéaire de l'impulsion parabolique. Or, avec le développement rapide des lasers à impulsions paraboliques [6] ou encore avec le perfectionnement des techniques de mise en forme linéaire d'impulsions (*par utilisation de réseaux de Bragg superstructurés par exemple [7]*), il est désormais devenu possible d'injecter des impulsions paraboliques directement en entrée de l'amplificateur. Nous proposons ici de clarifier analytiquement les propriétés des similaritons par rapport aux propriétés d'une impulsion parabolique de haute-puissance.

L'évolution du champ électrique complexe ψ durant l'amplification peut être modélisée par l'équation de Schrödinger non-linéaire (*ESNL*) avec un terme de gain constant [1] :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \gamma |\psi|^2 \psi + i \frac{g}{2} \psi. \quad (2)$$

avec β_2 le coefficient de dispersion du second ordre, γ le coefficient non-linéaire Kerr et g le coefficient de gain constant longitudinalement et spectralement. Nous montrons alors que la dynamique associée à l'amplification d'une impulsion parabolique n'est pas forcément auto-similaire (*SS : self-similar*). Ainsi, l'évolution d'une impulsion parabolique peut être initialement dictée par l'auto-modulation de phase [8] (*SPM : self-phase modulation*). Ce ne sera qu'après une certaine distance de propagation que l'impulsion parabolique suivra une évolution auto-similaire.

Comme l'impulsion parabolique acquiert rapidement un chirp linéaire, il est aisé de la recomprimer. Nous détaillerons les caractéristiques de l'impulsion amplifiée en régime SPM après recompression, montrant notamment que la forme parabolique conduit, comparé à des impulsions initiales de forme gaussienne ou sech, à une nette amélioration en termes de qualité, de durée temporelle et de puissance crête. L'influence d'un chirp initial linéaire négatif sera également discutée : il est alors possible d'assister à une compression spectrale de l'impulsion conduisant à une impulsion parabolique de haute-énergie en limite de Fourier.

2 Auto-modulation de phase et auto-similarité durant l'amplification

Etudions tout d'abord l'amplification d'une impulsion gaussienne sans chirp avec une largeur initiale à mi-hauteur T_0 et une énergie initiale U_0 . Pour illustrer notre analyse, nous avons considéré dans cet article l'amplification d'impulsions ayant toutes une énergie $U_0 = 50$ pJ mais avec des largeurs temporelles T_0 pouvant varier entre 0.8 et 16 ps, dans un amplificateur basé sur une fibre erbium avec les paramètres suivant : $\beta_2 = 40.10^{-3} \text{ ps}^2.m^{-1}$, $\gamma = 6.10^{-3} \text{ W}^{-1}.m^{-1}$ et $g = 3 \text{ dB}.m^{-1}$ aux longueurs d'ondes des télécommunications optiques (1550 nm).

Nous avons représenté Fig. 1a l'évolution longitudinale de la largeur temporelle à mi-hauteur $T_{1/2}$ des impulsions durant l'amplification. Pour caractériser le changement de forme durant l'amplification, nous avons également représenté Fig. 1b l'évolution du paramètre M défini comme l'écart entre l'impulsion ψ et un ajustement parabolique ψ_{ffit}

$$M^2 = \int (|\psi|^2 - |\psi_{\text{ffit}}|^2)^2 dt / \int |\psi|^4 dt \quad (3)$$

Nous constatons que les impulsions gaussiennes les plus brèves convergent rapidement ($T_{1/2} \rightarrow \sqrt{2} T_{pss}$ et $M \rightarrow 0$) vers la solution SS qui correspond à une impulsion parabolique avec comme paramètres caractéristiques P_{pss} , T_{pss} and C_{pss} donnés, indépendamment de la forme initiale par [1] :

$$\sqrt{P_{pss}} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_0 g}{\sqrt{\beta_2} \gamma/2} \right)^{1/3} \exp\left(\frac{g z}{3}\right), \quad T_{pss} = 3 \left(\frac{U_0 \beta_2 \gamma/2}{g^2} \right)^{1/3} \exp\left(\frac{g z}{3}\right) \quad \text{et} \quad C_{pss} = \frac{g}{3 \beta_2} \quad (4)$$

Plus les impulsions initiales sont longues, plus la distance nécessaire pour converger vers le comportement asymptotique SS est importante. En effet, il existe une vaste région où les impulsions ne montrent aucun changement dans leur largeur temporelle ou bien dans leur forme (M constant). L'effet affectant principalement l'amplification est ainsi uniquement la non-linéarité alors que les impulsions les plus courtes sont également soumises aux effets de la dispersion. La dynamique initiale de pulses plus longs (*picosecondes dans notre cas*) peut donc être décrite en première approximation par une amplification combinée aux effets de l'auto-modulation de phase.

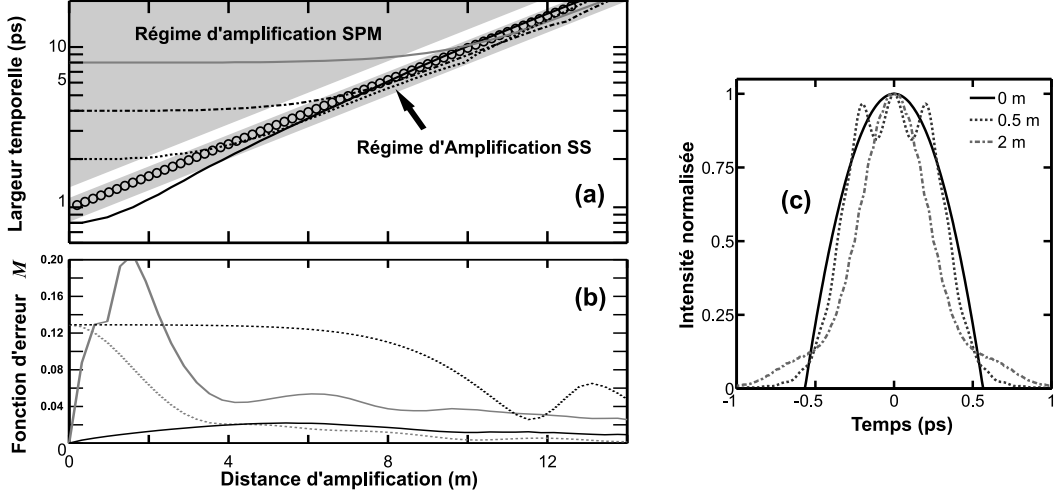


Fig.1. Evolution longitudinale de différentes impulsions Gaussiennes en limite de Fourier de largeur temporelle à mi-hauteur $T_0 = 0.8, 2, 4$ et 8 ps (respectivement lignes continue, pointillée, mixte et continue grise). (a) Evolution de la largeur temporelle à mi-hauteur comparée à l'évolution SS (cercles, Eq. 4). (b) Evolution du facteur d'erreur M pour des impulsions de forme Gaussienne (ligne pointillée) ou parabolique (linge continue) de différentes largeurs temporelles (0.8 et 8 ps, respectivement lignes grise et noire). (c) Evolution du profil d'intensité normalisé d'une impulsion parabolique de 800 fs évoluant dans un milieu purement dispersif pour différentes distances de propagation ($0, 0.5$ et 2 m, respectivement ligne continue, pointillée et mixte)

Nous comparons également Fig. 1b l'évolution d'impulsions en limite de Fourier de même énergie U_0 et de même durée temporelle T_0 mais avec des formes différentes (*Gaussienne ou parabolique*). Pour les impulsions les plus courtes (0.8 ps), nous constatons que la forme d'impulsion qui converge le plus rapidement est la forme gaussienne, en accord avec les conclusions d'Ozeki *et al.* [9]. L'impulsion parabolique ne conserve pas sa forme (M varie de manière conséquente). Un tel comportement s'explique par l'action des effets dispersifs (Fig. 1c). Rappelons qu'une impulsion parabolique ne conserve sa forme que dans la limite des hautes intensités.

Considérons maintenant l'évolution des impulsions de 8 ps. Les effets non-linéaires sont alors prédominants et nous vérifions que l'impulsion parabolique demeure globalement parabolique, avec seulement une légère augmentation du facteur M . Pour l'impulsion gaussienne, cette forme n'est pas encore complètement entrée dans le régime de propagation parabolique après 14 mètres de propagation.

3 Amplification d'une impulsion parabolique en régime SPM

Nous nous concentrons maintenant sur l'évolution d'une impulsion parabolique ($U_{p_0}, T_{p_0}, P_{p_0}$ et C_{p_0} ses propriétés initiales) dans le régime d'amplification SPM. Nous négligeons ici complètement les effets de la dispersion chromatique. Dans ces conditions, le profil d'intensité ne subira pas de changement dans la forme, l'amplification se traduisant donc par une modification du coefficient de chirp linéaire C_p :

$$C_{p_{spm}} = \frac{3}{2} \gamma \frac{U_{p_0}}{T_{p_0}^3} \frac{\exp(g z)}{g} + C_{p_0} \quad , \quad (5)$$

les autres paramètres évoluant suivant :

$$T_{p_{spm}} = T_{p_0} \quad \text{et} \quad P_{p_{spm}} = \frac{3}{4} \frac{U_{p_0}}{T_{p_0}} \exp(g z) \quad (6)$$

Si nous comparons les équations 5 et 6 avec les expressions obtenues en régime SS (équations 4), plusieurs différences physiques majeures apparaissent : les expressions SPM sont dépendantes de la largeur

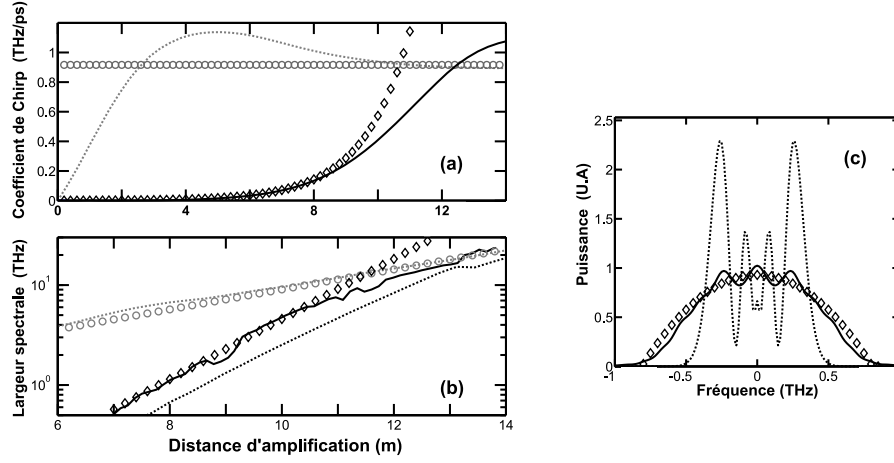


Fig.2. Evolution longitudinale d'impulsions initialement en limite de Fourier avec une énergie $U_0 = 50$ pJ. Différentes formes (parabolique et gaussienne, respectivement ligne continue et pointillée) et différentes durées initiales (800 fs et 8 ps, ligne grise et noire respectivement) sont considérées. Les résultats analytiques dans le régime auto-similaire (cercles, Eq. 4) et dans le régime d'auto-modulation de phase (Eqs. 5 et 6) sont comparés avec l'intégration numériques de l'équation 2. (a) Evolution du paramètre de chirp linéaire C . (b) Evolution longitudinale de la largeur spectrale (c) Spectre après 8 m d'amplification.

temporelle initiale T_0 , au contraire de la solution SS. Par rapport au régime SS où $C_{p_{ss}}$ est simplement déterminé par β_2 et g , le coefficient de chirp linéaire $C_{p_{spm}}$ est dépendant de γ et évolue suivant z .

La différence entre les deux régimes peut également être constatée Fig. 2a qui présente l'évolution longitudinale de C_p . L'amplification d'impulsions paraboliques longues est avant tout dominée par la SPM au début de la propagation (Eq. 5) et se rapproche seulement ensuite de l'évolution SS. Nous avons également représenté l'évolution d'une impulsion gaussienne de largeur 800 fs qui converge plus rapidement vers l'évolution asymptotique. Fig. 2b, nous avons considéré l'évolution des propriétés spectrales des impulsions paraboliques. Le spectre d'une impulsion parabolique, dans la limite d'une impulsion hautement chirpée est exprimée par un profil d'intensité spectral parabolique associé à une dérive de fréquence spectrale linéaire. La largeur spectrale à mi-hauteur f_p peut alors être évaluée par $f_p = \sqrt{2} |C_p| T_p / 2\pi$. Par rapport à des impulsions gaussiennes équivalentes, nous pouvons également constater Fig. 2c que les impulsions paraboliques conduisent à un spectre dénué des fortes oscillations caractéristiques de l'auto-modulation de phase d'impulsions gaussiennes [8].

4 Compression temporelle

Etudions maintenant la qualité de la compression qui peut être réalisée dans le domaine SPM. Les impulsions initiales paraboliques en limite de Fourier conduisent aux impulsions de la meilleure qualité. En effet, la forme ψ_{cp} d'une impulsion parabolique après recompression linéaire du chirp est donnée par :

$$\psi_{cp}(t) \propto J_1(\sqrt{2}\pi f_p t) / (\sqrt{2}\pi f_p t) \quad (7)$$

avec J_1 la fonction de Bessel de la première espèce. Le profil d'intensité est ainsi proportionnel à la fonction $(J_1(x)/x)^2$, fonction également impliquée dans la figure bien connue de diffraction d'une ouverture circulaire. La largeur temporelle à mi-hauteur $T_{cp_{spm}}$ et la puissance crête $P_{cp_{spm}}$ de l'impulsion recomprimée sont alors exprimées par :

$$T_{cp_{spm}} = \frac{1}{1.33 f_{p_{spm}}} \quad \text{et} \quad P_{cp_{spm}} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} U_{P_0} \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right) f_{p_{spm}} \exp(gz) \quad (8)$$

avec Γ la fonction gamma. Nous pouvons constater Fig 3a que l'utilisation d'une impulsion parabolique permet de réduire la part d'énergie contenue dans les ailes, ainsi que la largeur temporelle de l'impulsion recomprimée. Au final, la puissance-crête des impulsions après recompression est donc significativement augmentée.

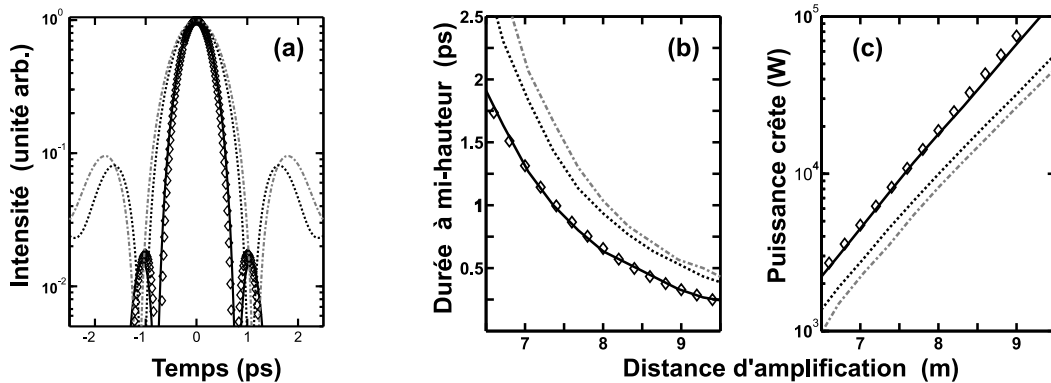


Fig.3. Propriétés des impulsions recomprimées après amplification pour des impulsions initiales de formes différentes (impulsions de 8 ps, parabolique, Gaussienne et sécante hyperbolique, respectivement lignes continues, pointillées et mixtes). Les prédictions analytiques obtenues dans le régime SPM sont comparées avec les simulations numériques. (a) Profil d'intensité de l'impulsion recomprimée après 8 mètres de propagation dans l'amplificateur (intensité crête normalisée à 1). (b) Evolution de la largeur à mi-hauteur des impulsions recomprimées. (c) Evolution de la puissance crête P_c des impulsions recomprimées.

5 Recompression spectrale

Nous examinons dans cette dernière partie l'évolution d'une impulsion parabolique avec un coefficient de chirp initial C_{p_0} négatif. Dans ce cas, vue l'équation 5, $C_{p_{spm}}$ passe alors par une valeur nulle, ce qui s'accompagne d'une compression spectrale.

Nous pouvons ici dresser un parallèle avec l'action de la dispersion anormale qui compense un chirp spectral positif linéaire en introduisant un chirp linéaire opposé : l'action de la SPM se manifeste par l'introduction d'un chirp temporel linéaire et positif compensant le chirp temporel initial négatif. On aboutit alors à une impulsion en limite de Fourier. Nous retrouvons donc sans surprise dans le domaine fréquentiel la même forme que celle obtenue dans la partie 4 dans le domaine temporel.

Une telle analogie est néanmoins limitée au cas des impulsions paraboliques : pour les autres impulsions, le chirp introduit n'est linéaire que dans la partie centrale de l'impulsion et présente de larges variations sur les flancs de l'impulsion. Il en résulte une compression spectrale beaucoup moins efficace comme on peut le constater figure 4 où nous avons comparé les résultats de la recompression des impulsions à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine spectral. Si toutes les différentes formes conduisent à une impulsion avec une phase plate au centre, seule l'impulsion parabolique permet une phase plate sur la totalité de l'impulsion. Cela présente un intérêt particulièrement élevé pour la génération d'impulsions en limite de Fourier de puissance élevée.

6 Conclusion

Nous avons étudié l'amplification d'impulsions parabolique en mettant en évidence que pour des impulsions picosecondes, un régime dominé par l'auto-modulation de phase précédait une évolution auto-similaire. Les résultats analytiques et numériques montrent que l'évolution et les propriétés des impulsions

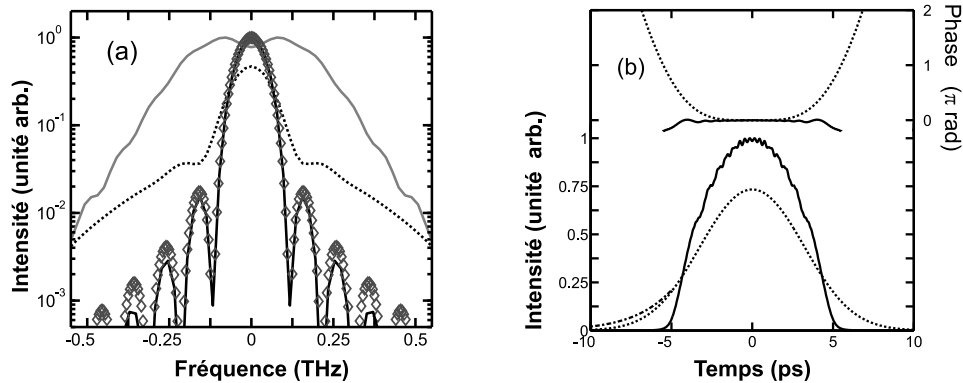


Fig.4. Recompression spectrale d'impulsion avec un coefficient de chirp linéaire C_{p0} initialement négatif. Les impulsions ont la même énergie initiale, la même durée temporelle et le même coefficient de chirp, mais différentes formes (parabolique ou Gaussienne, lignes continues et pointillées respectivement) (a) Le spectre après l'amplification dans 6.6 m de fibre (ligne noire) est comparé au spectre parabolique initial (ligne grise) et au spectre d'une impulsion parabolique en limite de fourier (losanges). (b) Profils d'intensité et de phase après recompression spectrale.

paraboliques dans ce régime sont bien distinctes de celles des similaritons. Par rapport aux impulsions gaussiennes ou sécantes hyperboliques, les impulsions paraboliques amplifiées dans le régime de SPM conduisent à une amélioration significative dans le processus de recompression. Le comportement d'impulsions initialement chirpées a également été étudié, en particulier le cas d'une impulsion de chirp initial négatif qui conduit à une recompression spectrale, générant ainsi à partir de l'auto-modulation de phase, des impulsions en limite de Fourier. Nous pensons que cette description attentive des impulsions paraboliques dans un régime non-parabolique aura des implications majeures dans le développement des chaînes d'amplificateurs de haute puissance.

Références

1. M.E. FERMAN, V.I. KRUGLOV, B.C. THOMSEN, J.M. DUDLEY, AND J.D. HARVEY, Self-similar propagation and amplification of parabolic pulses in optical fibers, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (26), 6010-6013 (2000).
2. A. MALINOWSKI *et al.*, Ultrashort-pulse Yb3+ fiber based laser and amplifier system producing > 25 W average power, *Opt. Lett.*, **29** (17), 2073-2075 (2004).
3. C. BILLET, J.M. DUDLEY, N. JOLY, AND J.C. KNIGHT, Intermediate asymptotic evolution and photonic bandgap fiber compression of optical similaritons around 1550 nm, *Opt. Express*, **13** (9), 3236-3241 (2005).
4. C. FINOT, G. MILLOT, C. BILLET, AND J.M. DUDLEY, Experimental generation of parabolic pulses via Raman amplification in optical fiber, *Opt. Express*, **11**, 1547-1552 (2003).
5. C. FINOT, G. MILLOT, AND J.M. DUDLEY, Asymptotic characteristics of parabolic similariton pulses in optical fiber amplifiers, *Opt. Lett.*, **29** (21), 2533-2535 (2004).
6. F.Ö. ILDAY, J.R. BUCKLEY, W.G. CLARK, AND F.W. WISE, Self-similar evolution of parabolic pulses in a laser, *Phys. Rev. Lett.*, **92** (21), p. 213902 (2004).
7. F. PARMIGIANI *et al.*, A novel XPM based pulse retiming system incorporating a fibre grating based parabolic pulse shaper, *ECOC 2005*, Glasgow (2005).
8. G.P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Third Edition. 2001 : San Fransisco, CA : Academic Press (2001).
9. Y. OZEKI, Y. TAKUSHIMA, K. TAIRA, AND K. KIKUCHI, Clean similariton generation from an initial pulse optimized by the backward propagation method, *Conference on Lasers and Electro-Optics US* (2004).
10. A.C. PEACOCK, Self-similar amplification and propagation of parabolic pulses in optical fibers, Master thesis at Auckland University, New-Zealand (2001).
11. J.P. LIMPURT *et al.*, High-power picosecond fiber amplifier based on nonlinear spectral compression, *Opt. Lett.*, **30** (7), p. 714-716 (2005).

Modulation de phase croisée lors de la collision de similaritons optiques

Christophe Finot & Guy Millot

Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne, 9 av. A. Savary, BP 47 870, 21 078 Dijon Cedex
christophe.finot@u-bourgogne.fr

Résumé. Nous étudions théoriquement et expérimentalement les effets intervenant lors de la collision de similaritons optiques dans un amplificateur Raman à dispersion normale. L'évolution temporelle du profil d'intensité montre l'apparition dans la zone de recouvrement d'une modulation sinusoïdale dont la fréquence diminue linéairement lors de la collision. L'analyse du spectre des impulsions met en évidence les effets de modulation de phase croisée qui interviennent lors de la collision. Néanmoins, après la collision, les similaritons retrouvent globalement leur forme parabolique caractéristique.

Abstract. We investigate the effects of a collision between two optical similaritons. We theoretically demonstrate that similaritons are stable against collisions in a Raman amplifier : similaritons evolve separately in the amplifier without modification of the scaling of their temporal width and chirp and by conserving their velocities, only interact during their overlap and regain their parabolic form after collision. We show both theoretically and experimentally that the collision of two similaritons induces a sinusoidal modulation inside the overlap region, whose frequency decreases during the interaction. Theoretical and experimental studies of the pulse spectrum evidence that similaritons interact with each other through cross phase modulation.

1 Introduction

La dynamique asymptotique d'une impulsion dans un amplificateur optique fibré à dispersion normale a généré un intérêt considérable depuis la mise en évidence de similaritons optiques [1]. Sous l'influence combinée de la dispersion, du gain et de la non-linéarité, toute impulsion évolue ainsi progressivement vers un profil d'intensité parabolique associé à une dérive de fréquence (*chirp*) linéaire. La dynamique auto-similaire est alors marquée par une augmentation exponentielle de la puissance-crête et des largeurs temporelle et spectrale. Un tel comportement a pu être vérifié dans différents types d'amplificateurs : amplificateurs à base de fibres dopées terres-rares (*Ytterbium* [1] ou bien *Erbium* [2]) mais aussi amplificateurs exploitant l'effet Raman [3].

Si l'évolution d'une impulsion parabolique isolée dans un amplificateur est désormais bien cernée [1,2,3,4], il n'en est pas de même pour l'évolution d'une paire d'impulsions [5]. Deux situations peuvent alors se présenter. La première est celle où les deux impulsions initiales se propagent à la même vitesse de groupe. Nous avons alors montré que l'élargissement temporel progressif des similaritons conduit à un recouvrement linéaire des deux impulsions et à l'apparition d'un battement sinusoïdal. Ce battement évolue, en raison du gain adiabatique et de la non-linéarité, vers un train de solitons noirs [6].

Nous nous concentrons maintenant sur la seconde situation où deux impulsions initiales de même forme et même amplitude ont des vitesses différentes. Cette situation est rencontrée lorsque les deux impulsions ont des fréquences centrales différentes ou bien lorsque deux impulsions de même fréquence centrale se propagent selon chacun des axes d'une fibre optique biréfringente.

Dans ces conditions, nous pouvons assister à une collision des deux impulsions [7]. Nous présentons ici une étude des différents effets se manifestant lors d'une telle collision. Les résultats théoriques basés sur l'analyse d'un système d'équations de Schrödinger couplées [8] avec un gain constant sont comparés qualitativement et quantitativement avec des résultats expérimentaux obtenus dans un amplificateur Raman à dispersion normale.

2 Similaritons Raman

Considérons tout d'abord la propagation d'une impulsion initiale isolée de forme gaussienne ψ_g , de largeur temporelle 6 ps et d'énergie $U_0 = 2.9$ pJ. L'impulsion se propage dans un amplificateur Raman avec un gain supposé constant $g = 9.72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ basé sur une fibre de longueur $L = 5.3$ km à zéro de dispersion décalé (*fibre NZ-DSF*) avec un paramètre de dispersion $\beta_2 = 4.7 \cdot 10^{-3} \text{ ps}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ et une non-linéarité $\gamma = 2 \cdot 10^{-3} \text{ W}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Le dispositif (*Fig. 1a*), réalisé aux longueurs d'ondes des télécommunications optiques (1550 nm), n'utilise que des éléments standards disponibles commercialement et permet un gain intégré de 20 dB. En sortie de l'amplificateur, les impulsions amplifiées sont caractérisées en intensité et en phase à l'aide d'un dispositif FROG (*Frequency Resolved Optical Gating* [9]).

Nous constatons *Fig 1b* le bon accord entre les résultats expérimentaux (*cercles*) et des ajustements paraboliques et linéaires (*lignes pointillées*) du profil d'intensité et de chirp respectivement. L'impulsion initialement gaussienne a donc évolué vers une impulsion parabolique ψ_p d'expression générale :

$$\psi_p(t) = \sqrt{P_p} \sqrt{1 - \frac{t^2}{T_p^2}} \exp\left(-i \frac{C_p}{2} t^2\right) \text{ si } |t| < T_p \quad ; \quad \psi_p(t) = 0 \text{ sinon ,} \quad (1)$$

où P_p , T_p et C_p sont respectivement la puissance crête, la demi-largeur temporelle totale et le coefficient de chirp linéaire de l'impulsion parabolique.

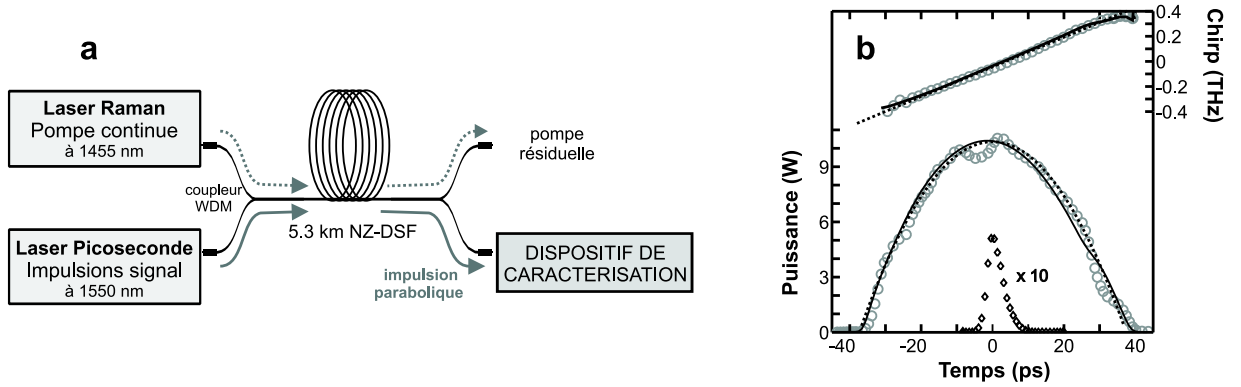


Fig.1. (a) Schéma du montage expérimental de génération d'impulsions paraboliques par amplification Raman. (b) Profils expérimentaux d'intensité et de chirp des impulsions initiales (losange, $\times 10$) et en sortie de l'amplificateur (cercles) obtenus par caractérisation FROG. Les résultats sont en bon accord avec des ajustements paraboliques et linéaires des profils d'intensité et de chirp respectivement (lignes pointillées). Les résultats de l'intégration de l'équation 2 sont représentés par des lignes continues.

Nous pouvons également comparer ces résultats expérimentaux à ceux obtenus par résolution numérique de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec un terme de gain constant qui décrit l'évolution du champ électrique $\psi(z, t)$ d'une impulsion durant son amplification [1] :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \gamma |\psi|^2 \psi + i \frac{g}{2} \psi. \quad (2)$$

Rappelons que le similariton représente une solution asymptotique de cette équation ($z \rightarrow \infty$) avec les paramètres P_p , T_p et C_p évoluant suivant :

$$\sqrt{P_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_0 g}{\sqrt{\beta_2} \gamma/2} \right)^{1/3} \exp\left(\frac{g z}{3}\right), \quad T_p = 3 \left(\frac{U_0 \beta_2 \gamma/2}{g^2} \right)^{1/3} \exp\left(\frac{g z}{3}\right) \quad \text{et} \quad C_p = \frac{g}{3 \beta_2}. \quad (3)$$

3 Collision

Considérons maintenant l'amplification de deux impulsions initialement gaussiennes séparées temporellement d'une quantité ΔT_0 et décalées fréquentiellement d'une quantité $\Omega = 1.25$ THz. Le champ total initial $\psi(t, 0)$ est alors la superposition de deux gaussiennes ψ_g :

$$\psi(t, 0) = \psi_g \left(t - \frac{\Delta T_0}{2} \right) \exp \left(i \frac{\Omega t}{2} \right) + \psi_g \left(t + \frac{\Delta T_0}{2} \right) \exp \left(-i \frac{\Omega t}{2} \right). \quad (4)$$

Durant sa propagation dans l'amplificateur, chaque pulse va évoluer vers un similariton. Mais les deux impulsions se propagent, en raison de la dispersion chromatique, à des vitesses différentes. Ainsi, en régime de dispersion normale, l'impulsion ayant la plus basse fréquence se propage plus vite que l'impulsion de fréquence plus élevée, introduisant ainsi un retard ΔT_G proportionnel à la distance de propagation z : $\Delta T_G(z) = \beta_2 \Omega z$.

En se basant sur la résolution numérique de l'équation 2, nous avons représenté Fig. 2 l'évolution longitudinale des profils temporels et spectraux des impulsions dans le cas d'une collision se produisant à $z_c = 3$ km (pour une telle distance, les impulsions gaussiennes initiales ont déjà acquis les caractéristiques asymptotiques d'un similariton). Avec les paramètres utilisés, la différence de vitesse de groupe est suffisante pour permettre une séparation complète des deux impulsions après collision (cela n'aurait pas été le cas si l'élargissement temporel des similaritons avait été supérieur au retard introduit par la dispersion des vitesses de groupe).

Durant la collision, le profil temporel d'intensité est affecté par l'apparition d'une modulation sinusoïdale dans la zone de recouvrement. Nous pouvons constater Fig. 2a2 que la fréquence de ce battement diminue progressivement avec la distance d'amplification. Concernant le profil d'intensité spectral (Fig. 2b), chaque impulsion subit un élargissement spectral continu, avec une modification nette lors de la collision.

En sortie de la collision, chaque impulsion regagne sa forme parabolique et poursuit son évolution auto-similaire indépendamment de sa voisine. La nature bornée des similaritons est telle que l'interaction entre les deux impulsions est limitée à la zone de recouvrement.

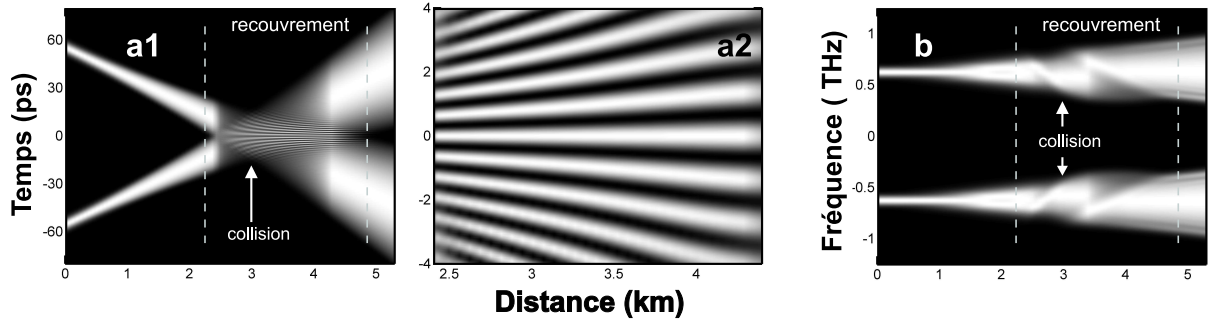


Fig.2. Évolution longitudinale du profil d'intensité temporel (a1- a2) et spectral (b) de deux impulsions décalées temporellement de 110 ps et fréquentiellement de 1.25 THz. La figure a2 représente une vue agrandie de a1. L'intensité maximale a été normalisée pour chaque distance de propagation à 1 et est représentée en blanc. Les teintes sombres correspondent aux intensités faibles

Pour étudier expérimentalement les différents effets de la collision, nous nous intéressons au champ $\psi(t, L)$ en sortie de l'amplificateur. En variant l'écart ΔT_0 entre les impulsions initiales, nous pouvons contrôler l'écart ΔT_L entre les deux impulsions en sortie de l'amplificateur ($\Delta T_L = \Delta T_G(L) - \Delta T_0$) et également contrôler la position z_c de la collision. Ainsi, pour $\Delta T_L = 0$, la collision se produit en sortie

de l'amplificateur ($z_c = L$). Les valeurs négatives et positives de ΔT_L nous permettront de décrire respectivement les effets précédant et suivant la collision.

Nous pouvons également formuler l'hypothèse qu'aucun harmonique nouveau ne se développe significativement durant l'amplification et la collision. Dans ces conditions, que nous avons pu vérifier expérimentalement, l'équation 2 peut être réécrite sous la forme d'un système de deux équations couplées [8] décrivant les évolutions séparées des deux impulsions $\psi_1(t, z)$ et $\psi_2(t, z)$ (*respectivement impulsions décalées vers les basses et hautes fréquences*) :

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\delta}{2} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \gamma \psi_1 (|\psi_1|^2 + C_x |\psi_2|^2) + i \frac{g}{2} \psi_1, \quad (5)$$

$$i \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = -\frac{\delta}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \gamma \psi_2 (|\psi_2|^2 + C_x |\psi_1|^2) + i \frac{g}{2} \psi_2. \quad (6)$$

avec $\delta = \beta_2 - \Omega$ la différence des vitesses de groupe et C_x le coefficient de modulation de phase croisée. Dans notre cas, C_x est égal à 2, mais le système précédent peut également modéliser la situation physique où des impulsions de même fréquence centrale se propagerait suivant chacun des axes d'une fibre biréfringente. Dans ce contexte, δ ne serait plus lié à la dispersion, mais à la biréfringence de la fibre, et le coefficient C_x de modulation de phase croisée prendrait pour valeur 2/3 (*dans l'hypothèse d'une fibre hautement biréfringente*).

4 Effets dans le domaine temporel

Etudions maintenant plus en détail l'évolution du profil temporel d'intensité des impulsions lors de la collision. Nous négligeons ici les effets non-linéaires croisés intervenant lors de la collision. Dans ces conditions, les équations 5 et 6 deviennent indépendantes et chaque impulsion poursuit son évolution temporelle indépendamment de sa voisine. Le champ total $\psi(t, L)$ en sortie d'amplificateur est donc la superposition de deux similaritons ψ_p décalés temporellement de ΔT_L et fréquentiellement de Ω :

$$\psi(t, L) = \psi_p(t - \Delta T_L/2, L) \exp(i \Omega t / 2) + \psi_p(t + \Delta T_L/2, L) \exp(-i \Omega t / 2), \quad (7)$$

ce qui conduit au profil d'intensité suivant dans la zone de recouvrement :

$$|\psi_T(t, L)|^2 = 2 P_p \left\{ 1 - \frac{1}{T_p^2} \left(t^2 + \frac{\Delta T_L^2}{4} \right) + \cos(2\pi f_s \Delta T_L) \sqrt{1 - \left(\frac{t + \Delta T_L/2}{T_p} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{t - \Delta T_L/2}{T_p} \right)^2} \right\} \quad (8)$$

La superposition des deux similaritons linéairement chirpés se traduit donc par un battement sinusoïdal de fréquence $f_s = (\Omega + C_P \Delta T_L) / 2\pi$.

Expérimentalement, nous avons enregistré le signal d'autocorrélation des impulsions en sortie de l'amplificateur (*Fig. 3a*) sur lequel apparait une modulation importante caractéristique d'une variation sinusoïdale. Le résultat expérimental est en très bon accord avec l'hypothèse retenue ou encore avec la résolution numérique de l'équation 2. Nous avons également étudié l'évolution de f_s en fonction de ΔT_L . L'évolution expérimentale observée valide a posteriori l'hypothèse d'un recouvrement quasi-linéaire des deux similaritons. Pour un meilleur accord quantitatif, nous pouvons recourir à l'intégration numérique de l'équation 2.

Nous avons également comparé *Fig. 3c* le profil d'intensité temporel d'une impulsion ayant subi une collision ($\Delta T_L = 90$ ps) avec celui d'une impulsion n'ayant pas subi de collision ($\Delta T_L = -90$ ps). Nous constatons alors que la collision n'a quasiment pas affecté le profil parabolique caractéristique de l'impulsion.

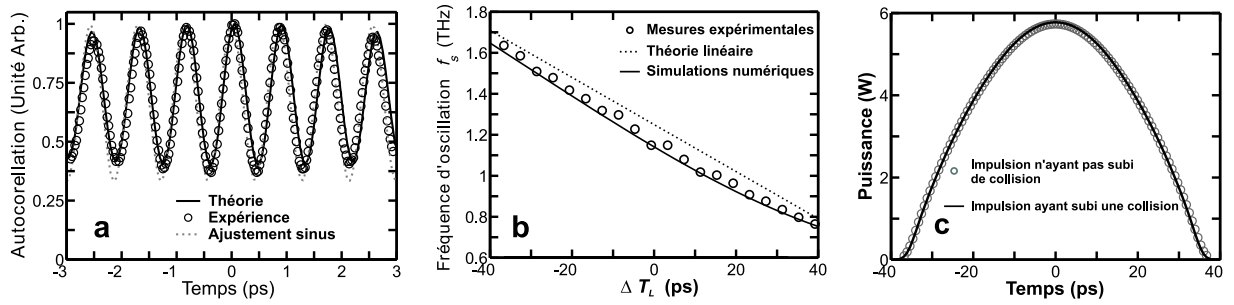


Fig.3. Comparaison des résultats expérimentaux, numériques et des résultats basés sur l'hypothèse d'un battement sinusoidal lié à la superposition linéaire des deux similaritons (a) Signal d'autocorrélation pour $\Delta T_L = 0$ ps (b) Évolution de la fréquence du battement f_s en fonction de ΔT_L . (c) Simulations numériques du profil d'intensité en sortie de l'amplificateur d'un similariton ayant subi une collision et d'un similariton n'ayant pas été affecté par une collision.

5 Effets dans le domaine fréquentiel

Nous nous intéressons dans cette dernière partie aux changements affectant le spectre des impulsions. Pour mieux mettre en évidence les changements, nous avons soustrait pour chaque distance de propagation le spectre de l'impulsion qui aurait évolué en l'absence de sa voisine (*c'est à dire, avec un coefficient $C_x = 0$*). Les déformations visibles seront donc imputables aux effets de modulation de phase croisée : le profil d'intensité de chaque impulsion va ainsi modifier la phase de l'impulsion voisine. La phase supplémentaire φ_{x1} introduite par l'impulsion ψ_{p2} sur l'impulsion ψ_{p1} peut ainsi être exprimée par [8] :

$$\varphi_{x1}(t, L) = \gamma C_x \int_0^L |\psi_{p2}(t, z)|^2 dz \quad (9)$$

Considérons tout d'abord une impulsion parabolique ne subissant ni élargissement temporel, ni modification de la puissance-crête (*Fig 4a1*). La collision se manifeste alors par une déformation du spectre clairement visible *Fig. 4a1*. Notons qu'après la collision (*c'est à dire pour T_L supérieur à 60 ps*), le spectre redevient identique à celui précédent la collision : la collision dans ce cas est totalement élastique, ne se traduisant que par un déphasage constant égal à $4 T_p / 3 d$.

Dans la situation qui nous intéresse, l'impulsion parabolique évolue durant la collision, avec une augmentation à la fois de sa largeur temporelle et de sa puissance crête. Il apparaît donc *Fig. 4a2* que la collision n'est plus élastique : en effet, il subsiste une légère modification du spectre après collision.

L'approche qualitative précédente (*qui ne prend pas rigoureusement en compte les effets dispersifs durant la collision*) est confirmée par la résolution numérique de l'équation 2 (*Fig. 4a3*) et par les résultats expérimentaux présentés *Fig. 4a4*.

Nous pouvons également comparer *Fig. 4b* les profils spectraux d'intensité avant et après collision : si les impulsions retrouvent bien leur profil spectral globalement parabolique, une légère déformation est néanmoins visible, avec l'apparition d'une asymétrie dans le spectre de chaque impulsion.

6 Conclusion

Nous avons analysé la dynamique de l'amplification auto-similaire d'une paire d'impulsions décalées temporellement et fréquentiellement. En raison de leur différence de vitesse de groupe, les deux impulsions entrent en collision et passent l'une à travers l'autre. La distance de collision a été contrôlée expérimentalement en modifiant le retard initial entre les deux impulsions, de telle façon que la collision se déroule entre des impulsions ayant déjà développé les caractéristiques asymptotiques. Nous avons montré que les similaritons préservent globalement leurs caractéristiques après collision. En raison de leur nature

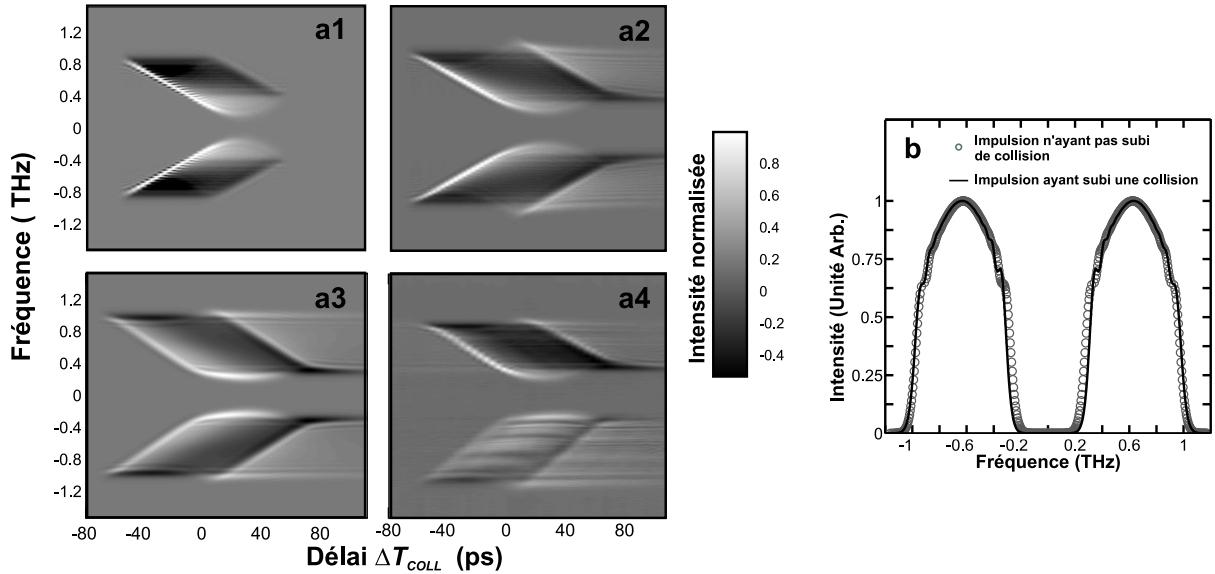


Fig.4. Différence entre le spectre d'impulsions subissant une collision et le spectre d'impulsion n'ayant pas subi de collision : utilisation de l'expression de la modulation de phase croisée (équation 9) dans le cas d'une impulsion parabolique ne subissant pas d'évolution de sa largeur temporelle ou de son amplitude crête (a1) ou bien subissant une évolution autosimilaire (a2). Ces résultats sont comparés à ceux obtenus par résolution de l'équation 2 (a3) et aux résultats expérimentaux (a4) (c) Spectre en sortie de l'amplificateur d'un similariton ayant subi une collision (ligne) et d'un similariton n'ayant pas été affecté par une collision (cercles).

compacte, ils évoluent indépendamment dans l'amplificateur, interagissant uniquement durant leur superposition et retrouvant leur forme parabolique au terme de la collision. La collision n'a pas d'effet notable sur l'évolution asymptotique ultérieure des impulsions, ni sur leur vitesse de propagation.

L'évolution du profil d'intensité temporel durant la collision est qualitativement explicable en formulant l'hypothèse d'une superposition linéaire des impulsions. Par contre, pour interpréter l'évolution des spectres durant la phase de recouvrement, il est indispensable de tenir compte des effets de modulation de phase croisée. Nos résultats théoriques et numériques ont été confirmés expérimentalement.

Références

1. M.E. FERMAN, V.I. KRUGLOV, B.C. THOMSEN, J.M. DUDLEY, AND J.D. HARVEY, Self-similar propagation and amplification of parabolic pulses in optical fibers, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (26), 6010-6013 (2000).
2. C. BILLET, J.M. DUDLEY, N. JOLY, AND J.C. KNIGHT, Intermediate asymptotic evolution and photonic bandgap fiber compression of optical similaritons around 1550 nm, *Opt. Express*, **13** (9), 3236-3241 (2005).
3. C. FINOT, G. MILLOT, C. BILLET, AND J.M. DUDLEY, Experimental generation of parabolic pulses via Raman amplification in optical fiber, *Opt. Express*, **11**, 1547-1552 (2003).
4. C. FINOT, G. MILLOT, AND J.M. DUDLEY, Asymptotic characteristics of parabolic similariton pulses in optical fiber amplifiers, *Opt. Lett.*, **29** (21), 2533-2535 (2004).
5. A.C. PEACOCK, *Self-similar amplification and propagation of parabolic pulses in optical fibers*, Master thesis at Auckland University, New-Zealand (2001).
6. C. FINOT AND G. MILLOT, Interactions of optical pulses by use of similaritons, *Opt. Express*, **13** (15), 5825-5830 (2005).
7. C. FINOT AND G. MILLOT, Collisions of optical similaritons, *Opt. Express*, **13** (19), 7653-7665 (2005).
8. G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Third Edition. San Francisco, CA : Academic Press (2001).
9. R. TREBINO, *Frequency-Resolved Optical Gating : the measurement of ultrashort laser pulses*, Norwell, MA : Kluwer Academic Publishers (2000).

Ligne de transmission main gauche en régime non linéaire : Application à la multiplication de fréquences

M.-F. Foulon¹, J.-M. Duchamp², P. Ferrari², & D. Lippens¹

¹ Institut d'Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologies,
Avenue Poincaré, BP 60069 59652 Villeneuve d'Ascq Cedex

² Institut de Microélectronique, Electromagnétisme et Photonique,
ENSERG, BP 257 - 38016 Grenoble Cedex

michel.foulon@iemm.univ-lille1.fr

Résumé. Des structures de propagation *main gauche* à indice effectif négatif peuvent être envisagées sous la forme de lignes de transmission chargées périodiquement par une capacité en série et une inductance en parallèle. L'introduction d'éléments discrets non linéaires sous forme de varactors permet de conserver le caractère main gauche du circuit en apportant des propriétés spécifiques comme la génération d'harmoniques ou l'amplification paramétrique en régime grand signal et une correction de phase positive en régime petit signal. Nous nous proposons ici d'illustrer ces propriétés spécifiques en régime grand signal à l'aide de simulations effectuées sur un modèle simplifié de ligne de transmission main gauche non linéaire en mettant en valeur la spécificité du dispositif gaucher.

Abstract. *Left handed* propagation medias can be envisaged as conventional transmission lines periodically loaded with series capacitances and parallel inductances. Introduction of non linear elements by means of varactors allows left handed behaviour with specific properties such as harmonic generation or parametric amplification under large signal conditions and positive phase delays under small signal conditions. We propose here to illustrate these specific properties by means of simulations under large signal conditions of a simplified model of left handed non linear transmission line by pointing out the interests of left handed properties.

1 Introduction

Le concept de *métabatériaux* a été introduit théoriquement par Veselago en 1968 [1] : Il s'agissait alors de considérer des matériaux artificiels qui présentent la particularité d'une permittivité et d'une perméabilité simultanément négatives. L'indice effectif négatif n qui en résulte correspond à un trièdre \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{k} indirect, pour lequel vecteur d'onde et vecteur de Poynting sont anti-parallèles justifiant ainsi l'appellation "main gauche". Il en résulte des propriétés physiques comme la réfraction négative [2] ou l'inversion de l'effet Cerencov [3]. La synthèse de ce type de matériaux a été rendue expérimentalement possible pour des lignes de transmission grâce à deux types de dispositifs : Le premier fait appel à l'imbriation d'un réseau de fils et de boucles de courant [4], à l'origine respectivement du ϵ_r et du μ_r négatifs ; le second consiste à charger périodiquement une ligne de transmission par son réseau dual [5]. Ces deux types de structures ont fait l'objet de nombreuses études théoriques et démonstrations expérimentales en régime linéaire. Nous montrerons dans cette communication que propriétés main gauche et non linéarité peuvent être combinées en introduisant un élément non linéaire sous forme de varactor dans le second type de solution. Nous prouverons par des simulations de type circuit dans les domaines fréquentiel et temporel à l'aide du logiciel commercial HP-ADS que des propriétés de multiplication de fréquences par génération d'harmoniques ou de génération paramétrique sont rendues possibles. Dans chacun des cas, nous dégagerons l'intérêt possible du dispositif gaucher pour des fonctions non linéaires depuis longtemps développées sur des circuits droitiers. Il convient de préciser que le même type de structures est utilisée comme déphaseurs avec correction de phase positive. Dans ce cas, le varactor est utilisé comme élément accordable avec une tension de polarisation ; la non-linéarité n'étant pas excursionnée en régime petit signal, nous n'aborderons pas ce type d'application.

2 Multiplieur de fréquence Main Gauche

2.1 Modèle discret C-L

Une ligne de propagation est usuellement modélisée sous la forme d'une inductance en série et d'une capacité en parallèle. Elle possède alors une relation de dispersion linéaire rappelée dans le tableau de la figure 1. Si l'on considère le réseau dual de ce modèle, la relation de dispersion devient non linéaire et vitesse de phase et vitesse de groupe, notées respectivement v_ϕ et v_g , sont de signes opposés : Les vecteurs de Poynting et vecteurs d'onde sont donc anti-parallèles dans ce type de structure. L'introduction d'un varactor dans le schéma main gauche de la figure 1 correspond alors à considérer le modèle dual d'une ligne de transmission non linéaire utilisée pour de la génération d'harmoniques [6]. La cellule élémentaire ainsi considérée est alors chaînée périodiquement à une échelle petite devant la longueur d'onde guidée pour former une structure de propagation. Celle-ci peut alors être envisagée expérimentalement sous la forme d'éléments discrets ($C_{LH}(V)$, L_{LH}) chargeant périodiquement une structure de propagation, qui est par défaut main droite et modélisable par des éléments linéiques ($C_{RH} = c_{RH} \cdot L_{cell}$, $L_{RH} = l_{RH} \cdot L_{cell}$), où L_{cell} correspond au pas de la cellule élémentaire [7]. Notre modèle ne prend pas en compte la contribution des éléments de lignes droitières, correspondant aux éléments d'interconnexion qui relieraient les éléments discrets d'un prototype. Celle-ci est en effet ici négligée afin de conserver un caractère large bande en s'astreignant de contraintes sur la bande de fréquences main gauche, discutées par la suite.

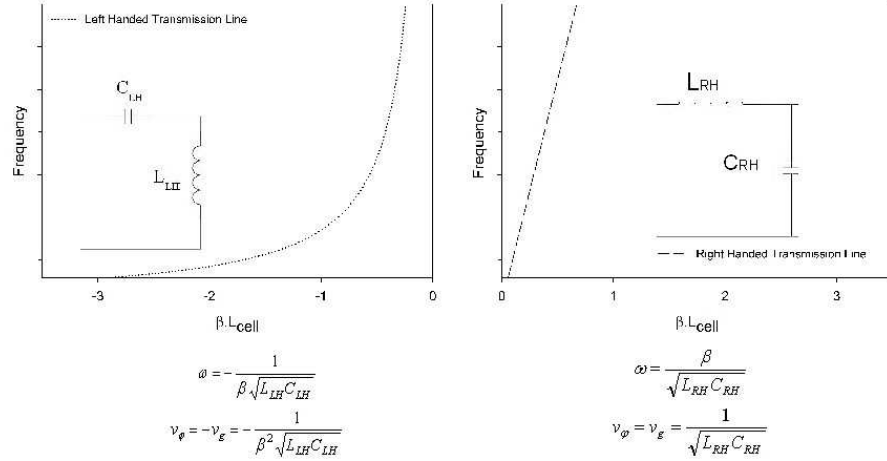


Fig.1. Lignes de transmission main droite et main gauche représentées par éléments discrets et leur relation de dispersion

Le modèle de varactor utilisé, présenté dans l'équation 1, permet de simuler des capacités variables à fort contraste $\frac{C_{max}}{C_{min}}$ avec une caractéristique C-V symétrique, tracée dans la figure 2, afin de ne pouvoir considérer que des harmoniques impaires sous excitation sinusoïdale. Cinq cellules élémentaires sont chaînées et l'on considère une source monochromatique avec des impédances de source et de charge de 50 Ohms. Les paramètres considérés pour le varactor sont de $m=1.039$, $C_{j0} = 1pF$ et $V_0 = 0.7V$ et la résistance série du composant est estimée à 4 Ohms.

$$C(V) = \frac{C_{j0}}{\left(1 + \left|\frac{V}{V_0}\right|\right)^m} \quad (1)$$

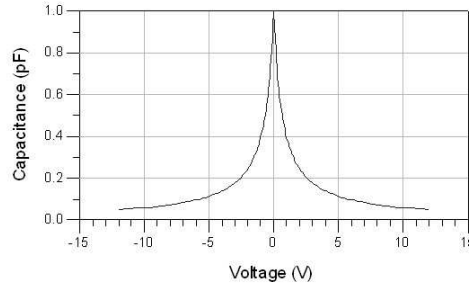


Fig.2. Caractéristique C-V du varactor utilisé comme élément non linéaire de la ligne de transmission main gauche

Les rendements obtenus par simulations en équilibrage harmonique pour les troisième et cinquième harmoniques de structures gauchères et droitières sont comparés dans la figure 3 : la nature passe-haut du filtre constitué par la cellule élémentaire main gauche permet une utilisation plus large bande que dans le cas droitier avec des niveaux de rendements comparables. La propagation d'un signal de pompe et des harmoniques générées ne peut en effet avoir lieu que dans la bande passante des filtres, soit en dessous de la fréquence de Bragg $f_B^{RH} = \frac{1}{\pi\sqrt{L_{RH}\cdot C_{RH}}}$ pour un circuit droitier et au dessus de $f_B^{LH} = \frac{1}{4\cdot\pi\sqrt{L_{LH}\cdot C_{LH}}}$ pour son équivalent gaucher. La nature résonante du rendement obtenu pour le dispositif gaucher, discutée dans [8], rend cependant difficilement envisageable l'optimisation d'un haut niveau de rendement sur une large bande. Les différences de phase pour l'harmonique 3, $\Delta\Phi = (\beta_3 - 3\cdot\beta_1)$, tracées en inset des courbes de rendement, montrent en effet que le celui-ci est théoriquement proportionnel à $\sin(\Delta\Phi)$, appelée fonction de cohérence, avec des maxima locaux de rendement correspondant à $\Delta\Phi = (2k + 1) \cdot \pi$ et les minima locaux à $\Delta\Phi = 2k \cdot \pi$. La forme du rendement dépend alors de cet accord de phase entre signal de pompe et signal triplé, qui dépendra lui même de la périodicité de la ligne et de ses éléments constitutifs.

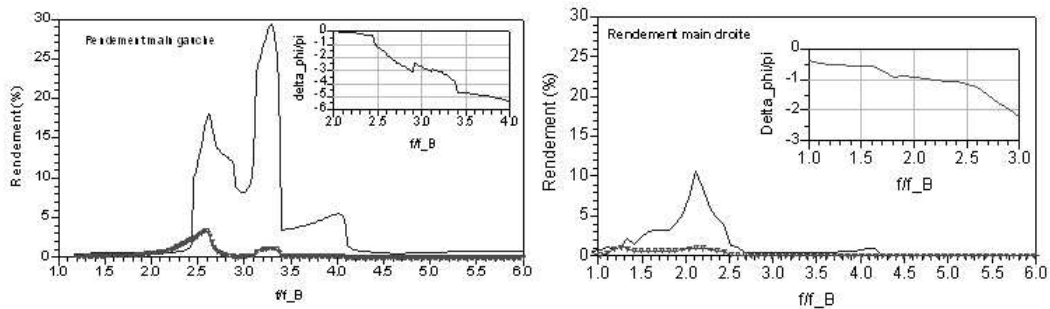


Fig.3. Rendements de conversion pour les troisième (ligne continue) et cinquième harmoniques (triangles) des lignes gauchères et droitières (Les fréquences sont normalisées par la fréquence de Bragg $f_B^{LH} = 1.271GHz$)

2.2 Modèle hybride RH-LH

Dans le cas où des éléments d'interconnexion droitiers sont considérés, le modèle de la ligne devient hybride, comme l'illustre l'inset du diagramme de dispersion de la figure 4, et il peut y avoir formation d'une bande interdite qui sépare la bande main gauche de la bande main droite vers lesquelles la ligne

tend asymptotiquement à respectivement basses et hautes fréquences. Comme l'indique le diagramme de dispersion tracé dans la figure 4, le caractère passe-haut de la ligne main gauche devient alors passe-bande et du type de celui obtenu pour le prototype de ligne de transmission linéaire réalisé et caractérisé dans [5] et illustré dans la figure 4-b. Le design d'une telle ligne de transmission non linéaire se doit donc prendre en compte les contributions des éléments main droite comme parasites afin de garantir le fonctionnement de celui-ci en régime main gauche sur la bande utile.

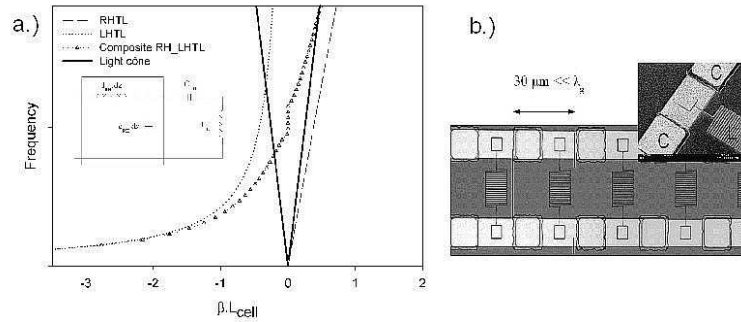


Fig.4. Diagramme de dispersion d'une ligne de transmission main gauche avec modèle hybride (a.) et photo par microscope électronique à balayage d'un prototype de ligne main gauche (b)

Si les contributions droitières limitent l'utilisation large bande du dispositif, le diagramme de dispersion de la structure non linéaire ainsi considérée permet cependant d'envisager une autre application en positionnant la bande main gauche de telle sorte que la fréquence de pompe se situe en dessous du cône de lumière et la fréquence triplée se situe au dessus : le signal triplé est alors rayonné "backward" par inversion de l'effet Cerencov, tandis que le signal de pompe reste guidé le long de la structure. Une polarisation des diodes utilisées comme varactors permet aussi de modifier le diagramme de rayonnement de l'antenne ainsi constituée [3].

3 Génération et Amplification paramétrique

3.1 Génération paramétrique

Un second mode de fonctionnement de la ligne non linéaire main gauche est possible sous la forme de génération paramétrique d'ondes le long de la ligne. La génération paramétrique consiste à générer deux signaux de fréquences f_1 et f_2 à partir d'un même signal de pompe f_p tels que :

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = f_p \\ \beta_1 - \beta_2 = \beta_p \end{cases} \quad (2)$$

Les fréquences f_1 et f_2 sont situées symétriquement de part et d'autres de $\frac{f_p}{2}$ et le signal à la fréquence f_1 se déplace dans le même sens que le signal de pompe, tandis que le signal à la fréquence f_2 se déplace dans le sens opposé pour $f_1 < f_2$. Dans le cas de lignes de transmission non dispersives, Landauer a montré que cette génération paramétrique n'est pas possible du fait d'un phénomène de création d'ondes de chocs plus rapide que celui de génération paramétrique [9]. Pour des structures de propagation main gauche le comportement de la ligne est à contrariori fortement dispersif et la génération paramétrique devient possible.

Le modèle de ligne non linéaire main gauche utilisé précédemment est simulé dans le domaine temporel avec le même modèle de varactors polarisés avec une tension inverse de 4V et une fréquence de Bragg fixée à $f_B^{LH} = 1.59GHz$. La ligne constituée de 7 cellules est excitée à $7 \cdot f_B^{LH}$. Pour des valeurs d'amplitude

de signal de pompe supérieures à $3V$, de très faibles composantes apparaissent respectivement à $f_1 = 5.29GHz = 3.33 \cdot f_B^{LH}$ et $f_2 = 5.84GHz = 3.67 \cdot f_B^{LH}$ comme le montrent les spectres des tensions en entrée et en sortie de la ligne dans la figure 5-a. Le fait que les amplitudes des composantes à f_1 et f_2 soient plus importantes respectivement en sortie et en entrée est cohérent avec le sens de déplacement de celles-ci détaillé précédemment.

A plus basse fréquence d'excitation, le régime de multiplication de fréquences est d'avantage sollicité et l'on se ramène au régime de fonctionnement étudié précédemment : La simulation dans le domaine temporel permet cependant de montrer que le phénomène de génération paramétrique s'applique aussi aux harmoniques générées et des composantes parasites sont observées autour de chaque harmonique (des harmoniques paires étant rendues possibles du fait de la polarisation des varactors). Ces composantes parasites ont été ignorées lors de la simulation en équilibrage harmonique, mais l'énergie du signal de pompe se disperse sur les différentes fréquences paramétriques parasites comme l'illustre la figure 5-b.

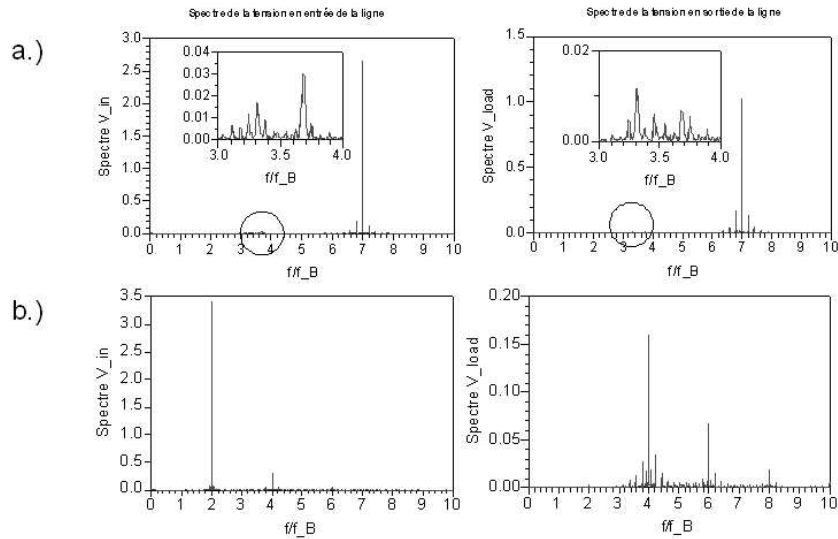


Fig.5. Spectres des formes d'onde en entrée et en sortie de la ligne de transmission main gauche non linéaire pour une fréquence de pompe $f_B^{LH} = 7 \cdot f_p$ (a) et $f_B^{LH} = 2 \cdot f_p$ (b)

3.2 Amplification paramétrique

La génération paramétrique possible sur des lignes non linéaires main gauche permet alors un second type d'application appelée amplification paramétrique : Un petit signal injecté à l'une des extrémités de la ligne (la fréquence de ce signal dépendant de son sens de propagation) peut être amplifié par superposition d'un signal de pompe. La figure 6 montre que le signal de fréquence f_1 injecté à l'entrée de la ligne avec une amplitude d'entrée entre $10mV$ et $100mV$ est presque 5 fois moins atténué en présence d'un signal de pompe injecté aussi à l'entrée du dispositif. Une compensation des pertes de la ligne est possible et un gain pourrait être envisagé si le dispositif venait à être optimisé. Le même type d'amplification est possible en sens inverse pour le signal de fréquence f_2 avec une source de signal placée à l'autre extrémité de la ligne.

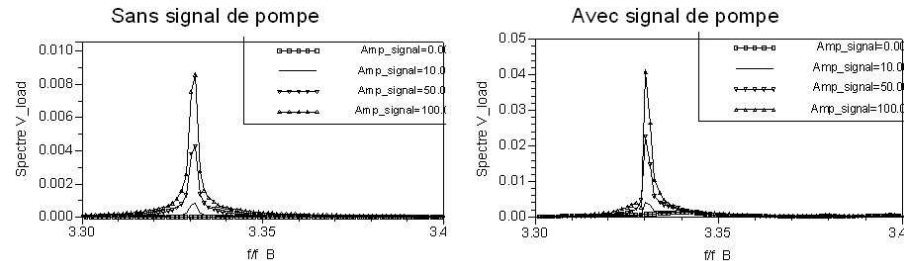


Fig.6. Spectres des formes d'onde en sortie de la ligne de transmission main gauche non linéaire injectés avec ou sans signal de pompe

4 Conclusion

Des structures de propagation main gauche constituées d'un réseau L-C(V) répété périodiquement pour former une ligne de transmission non linéaire ont été simulées dans les domaines temporel et fréquentiel. Des effets de multiplication de fréquences et d'amplification paramétrique ont été mis en évidence par la simulation. La non-linéarité et le caractère main gauche du dispositif permettent des propriétés physiques inenvisageables pour des lignes main droite. Cette spécificité du régime main gauche non linéaire présente certaines limites, mais pourrait aussi être envisagée pour des applications de focalisation, du fait de l'indice de réfraction négatif, et de structure rayonnante "backward", du fait de la structure de bande de la ligne ainsi constituée.

Références

1. V.G. VESELAGO, Electrodynamics of materials with simultaneously negative values of ϵ and μ , *Sov. Phys. Usp* (1968).
2. G.V. ELEFThERIADES, A.K. IYER & P.C. KREMER, Planar negative refractive index media using periodically l-c loaded transmission lines, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **50** (12), 2702–2712 (2002).
3. D.F. SIEVENPIPER, Forward and backward leaky wave radiation with large effective aperture from an electronically tunable textured surface, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **53** (1), 236–247 (2005).
4. T. DECOOPMAN, A. MARTEAU, E. LHEURETTE, O. VANBÉSIEEN & D. LIPPENS, Left handed properties of split ring resonator and wire loaded transmission line in a finline technology, *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*, To be published in April 2006.
5. T. CREPIN, J. F. LAMPIN, T. DECOOPMAN, X. MELIQUE, L. DESPLANQUE & D. LIPPENS, Experimental evidence of backward waves on terahertz left-handed transmission lines, *Applied Physics Letters*, **87** (10), 104105 (2005).
6. M. FERNANDEZ, E. DELOS, X. MELIQUE, S. ARSCOTT & D. LIPPENS, Monolithic coplanar transmission lines loaded by heterostructurebarrier varactors for a 60 ghz tripler. *IEEE on Microwave and Wireless Components Letters*, **11** (12), 498–500 (2001).
7. ALEXANDER B. KOZYREV, HONGJOON KIM, ABDOLREZA KARBASSI & DANIEL W. VAN DER WEIDE, Wave propagation in nonlinear left-handed transmission line media, *Applied Physics Letters*, **87** (12), 121109 (2005).
8. A.B. KOZYREV & D.W. VAN DER WEIDE, Nonlinear wave propagation phenomena in left-handed transmission-line media, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **53** (1), 238–245 (2005).
9. R. LANDAUER, Shock waves in nonlinear transmission lines and their effect on parametric amplification, *IBM Journal*, 391–401 (1960).

Grandes déviations et erreurs de transmission par solitons dans les fibres optiques

E. Gautier^{1,2} & A. Debussche¹

¹ IRMAR — ENS Cachan, antenne de Bretagne, Avenue Robert Schumann, 35170 Bruz

² CREST - INSEE, 3 avenue Pierre Larousse, 92240 Malakoff

eric.gautier@bretagne.ens-cachan.fr

Résumé. Nous considérons des perturbations aléatoires de l'équation de Schrödinger non linéaire en dimension 1 avec une non linéarité cubique focalisante. Cette équation intervient comme modèle de propagation d'enveloppes de paquets d'ondes dans les fibres optiques. Les bruits additifs ou multiplicatifs sont induits par une amplification qui compenserait exactement la perte dans la fibre. Nous les supposons blancs en espace et colorés en temps. Dans le cas du bruit additif nous considérerons la limite où les corrélations temporelles du bruit tendent vers 0. Du fait du bruit, de petite amplitude, des erreurs de transmission par solitons peuvent se produire. Nous déduisons de résultats de grandes déviations pour les trajectoires des solutions, l'asymptotique de petit bruit des queues de l'énergie et du temps d'arrivée du signal. La fluctuation de ces deux grandeurs est supposée être la source principale d'erreur de transmission. Nous étudions plus particulièrement les ordres de grandeur en la longueur de la fibre et en l'amplitude de la donnée initiale profil de soliton.

Abstract. We consider random perturbations of the focusing cubic one dimensional nonlinear Schrödinger equation. This equation is a model for the propagation of wave packets in optical fibers. The noises, either additive or multiplicative, are induced by certain amplification procedures which would compensate exactly for loss in the fiber. We consider noises which are white in space and colored in time. In the additive case, we consider the limit where the correlations in time tend to zero. Due to the small amplitude noise, error in soliton based transmission may occur. We deduce from large deviations results at the level of the paths of the solutions, the small noise asymptotic of the tails of the energy and arrival time of the pulse. The fluctuation of these quantities is assumed to be the main source of error in transmission. We study in more details the qualitative behavior of these tails with respect to the length of the fiber and the amplitude of the initial datum when it is a soliton profile.

L'équation de Schrödinger non linéaire faiblement amortie, en dimension 1, avec non linéarité cubique et défocalisante, est un modèle de propagation d'enveloppes de paquets d'ondes dans les fibres optiques. Elle s'écrit,

$$i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u, \quad \alpha > 0, \quad u \in H^1(t \in \mathbb{R}, \mathbb{C}) := H^1, \quad u(t, 0) = u_0, \quad x \in [0, L]. \quad (1)$$

Lorsque $\alpha = 0$, des ondes solitaires sont solutions de l'équation. Elles s'écrivent sous la forme

$$\sqrt{2}A \operatorname{sech}(A(t - t_0)) \exp(-iA^2x + i\theta_0), \quad (2)$$

où $A > 0$ est l'amplitude, t_0 et θ_0 sont respectivement le temps et la phase initiale. Il a été suggéré d'utiliser ces solutions, localisées en temps, pour transmettre des bits à très haut débit sur de longues distances. Une donnée initiale profil de soliton $u_0 = \Psi_A^0(t) = \sqrt{2}A \operatorname{sech}(At)$ permettrait de coder un 1, une donnée initiale nulle un 0. Afin de compenser la perte dans la fibre, qui empêche la propagation sur de longues distances, typiquement L de l'ordre de 1000 km, plusieurs amplifications sont envisageables. Nous supposons que les amplifications compensent exactement l'amortissement et qu'alors $\alpha = 0$.

D'après le principe d'incertitude d'Heisenberg, l'amplification est accompagnée d'une incertitude sur le signal représentée par un terme de bruit Gaussien. Pour des amplificateurs dopés à l'Erbium, régulièrement espacés le long de la fibre, ou des amplificateurs distribués, une bonne approximation du bruit est un bruit additif. Le bruit est représenté par un terme supplémentaire $+\sqrt{\varepsilon}\eta$ dans (1). La fonction η est fonction

du temps et de l'espace, à valeurs complexes. Dans le cas d'une amplification de Raman ou par mélange paramétrique de 4 ondes, le bruit est multiplicatif réel. Il est représenté par un terme $+\sqrt{\epsilon}\eta \circ u$ dans (1), η est cette fois à valeurs réelles et \circ le produit Stratonovich. Dans ce cas, la norme L^2 en temps est constante le long de la fibre. Dans le cas du bruit additif complexe, cette norme fluctue aléatoirement. Le coefficient $\sqrt{\epsilon}$ est l'amplitude du bruit, elle est supposée petite.

Le bruit η s'exprime sous la forme $\frac{\partial W}{\partial x}$ où $(W_x)_{x>0}$ est un processus de Wiener dans un espace de Sobolev basé sur L^2 , pour la variable de temps, de type H^s . L'EDP stochastique a un sens sous forme intégrale. Dans le cas du bruit additif, nous considérons l'espace H^1 , dans le cas du bruit multiplicatif nous considérons l'espace $H^s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ où $s > 3/2$. Pour des raisons de sommabilité, le processus de Wiener doit avoir des corrélations en temps. Néanmoins, lorsque le semi-groupe associé à l'opérateur linéaire possède des propriétés de régularisation globale, ce qui n'est pas le cas du groupe de Schrödinger, et lorsque l'on s'intéresse à des solutions faibles, il est parfois possible de traiter le cas du bruit blanc. Sous les hypothèses précédentes le problème de Cauchy est globalement bien posé (si nous faisons comme si la variable x indiquait le temps) dans H^1 , *c.f.* [2].

À l'extrémité de la fibre, un récepteur mesure l'énergie du signal sur une fenêtre en temps qui s'exprime en fonction de la période inter émission des bits

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u^{\epsilon, u_0}(t, L)|^2 dt, \quad u_0 = 0 \text{ ou } u_0 = \Psi_A^0.$$

où u^{ϵ, u_0} est la solution des équations avec petit bruit additif ou multiplicatif. Lorsque la quantité mesurée excède un seuil I_d , il est décidé que le signal émis était un 1, sinon qu'il s'agissait d'un 0. Du fait du bruit, des erreurs de transmission peuvent se produire.

Deux grandeurs sont particulièrement pertinentes lorsque l'on s'intéresse aux erreurs de transmission : l'énergie

$$\mathbf{N}(u^{\epsilon, u_0}(L)) = \int_{\mathbb{R}} |u^{\epsilon, u_0}(t, L)|^2 dt, \quad u_0 = 0 \text{ ou } u_0 = \Psi_A^0$$

et le temps d'arrivée

$$\mathbf{Y}(u^{\epsilon, \Psi_A^0}(L)) = \int_{\mathbb{R}} t |u^{\epsilon, \Psi_A^0}(t, L)|^2 dt$$

défini pour des solutions dans l'espace de Hilbert

$$\Sigma^{1/2} = \left\{ f \in H^1 : t \mapsto \sqrt{|t|}f(t) \in L^2 \right\}, \text{ muni de } \|f\|_{\Sigma^{1/2}}^2 = \|f\|_{H^1}^2 + \left\| t \mapsto \sqrt{|t|}f(t) \right\|_{L^2}^2.$$

Dans le cas d'un bruit additif, le taux d'erreur sur les bits s'exprime alors sous la forme $\mathbb{P}(1|0)p(0) + \mathbb{P}(0|1)p(1)$ où $\mathbb{P}(1|0)$ est la probabilité que le circuit décide de manière erronée qu'un 1 a été émis alors qu'un 0 était émis (on définit de manière analogue $\mathbb{P}(0|1)$); $p(0)$ et $p(1)$ sont les probabilités de transmettre 0 et 1. Lorsque le nombre de bits du message est élevé on suppose que $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$. L'obtention de cette grandeur nécessite de connaître les probabilités conditionnelles et donc les queues de la loi de la quantité mesurée en l'extrémité de la fibre pour une donnée initiale nulle ou profil de soliton. L'approximation Gaussienne est souvent utilisée en pratique et cette pratique est critiquable. En pratique, lorsque la donnée initiale est nulle, le bruit peut créer un signal d'énergie importante. On peut alors décider par erreur qu'un 1 a été émis. Lorsque qu'un 1 a été émis, il est communément admis que la fluctuation de l'énergie et du temps d'arrivée sont les causes principales de la perte du signal. Nous considérons donc les queues de l'énergie pour des données initiales nulles et profils de solitons ainsi que les queues du temps d'arrivée pour des données initiales profils de solitons. Nous intéressons à l'influence de la longueur de la fibre et de l'amplitude (cas du temps d'arrivée seulement) sur ces grandeurs.

Si le bruit est multiplicatif, l'énergie est conservée et une erreur correspond à la perte d'un 1. Cette erreur est due à une fluctuation du temps d'arrivée.

Dans l'essentiel des articles les solutions sont approchées par solutions particulières de type ansatz où un nombre fini de paramètres fluctuent aléatoirement selon un système de diffusions couplées. Des articles étudient la variance de la loi du temps d'arrivée ([1,6,10,11]), d'autres la distribution de l'énergie

ou de la loi jointe de l'énergie et de la position ([5,7,12]), enfin des méthodes numériques ont aussi été étudiées ([3,13]).

Dans cet article, nous utilisons des techniques de grandes déviations au niveau des trajectoires des solutions afin d'encadrer les limites de petits bruits du logarithme des queues de l'énergie et du temps d'arrivée. Nous ne ferons pas l'approximation par une solution ansatz.

1 Des résultats de grandes déviations

Lorsque le bruit tend vers 0, les lois des trajectoires des solutions se concentrent vers un dirac en la solution déterministe, un résultat de grandes déviations nous renseigne sur, l'échelle, la vitesse et le taux auxquels la probabilité d'un évènement des queues (qui ne contient pas la solution déterministe) tend vers zéro. Dans [8,9] nous avons prouvé des principes de grandes déviations (PGDs) pour des bruits additifs ou multiplicatifs. Ces résultats se transportent par image directe par des applications continues. Nous souhaitons donc que l'énergie et le temps d'arrivée en l'extrémité de la fibre soient continues en la solution en l'extrémité de la fibre. Si nous définissons $W = \Phi W^c$ où W^c est le processus de Wiener cylindrique idéal (sans corrélations temporelles),

$$\Sigma = \{f \in H^1 : t \mapsto tf(t) \in L^2\} \text{ muni de la norme } \|f\|_{\Sigma}^2 = \|f\|_{H^1}^2 + \|t \mapsto tf(t)\|_{L^2}^2,$$

$\mathbf{S}^{a,u_0}(h)$ l'unique solution faible du problème de contrôle

$$\begin{cases} i \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + \Phi h, \\ u(0) = u_0 \in \Sigma \text{ and } h \in L^2(0, L; L^2), \end{cases} \quad (3)$$

et $\mathbf{S}^{m,u_0}(h)$ l'unique solution faible du problème de contrôle où l'équation contrôlée est

$$i \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + u \Phi h, \quad (4)$$

nous avons le le résultat qui suit, *c.f.* [4], qui permet de traiter le temps d'arrivée.

Théorème 1. *Supposons que Φ soit Hilbert-Schmidt de L^2 dans Σ dans le cas additif et de L^2 dans $H^s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $s > 3/2$ dans le cas multiplicatif. Supposons que u_0 appartienne à Σ . Alors, les solutions de l'équation (1) perturbées par le petit bruit sont presque sûrement dans $C([0, L]; \Sigma^{1/2})$. Elles définissent des variable aléatoires à valeurs dans $C([0, L]; \Sigma^{1/2})$ et leurs lois $(\mu^{u^\epsilon, u_0})_{\epsilon > 0}$ satisfont un PGD de vitesse ϵ et de fonction de taux*

$$I^{u_0}(w) = \frac{1}{2} \inf_{h \in L^2(0, L; L^2): w = \mathbf{S}(u_0, h)} \|h\|_{L^2(0, L; L^2)}^2,$$

où $\mathbf{S}(u_0, \cdot) = \mathbf{S}^{a,u_0}(\cdot)$ dans le cas additif et $\mathbf{S}(u_0, \cdot) = \mathbf{S}^{m,u_0}(\cdot)$ dans le cas multiplicatif, avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Cela signifie que, pour chaque Borélien B de $C([0, L]; \Sigma^{1/2})$, nous avons la borne inférieure

$$- \inf_{w \in \text{Int}(B)} I^{u_0}(w) \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(u^{\epsilon, u_0} \in B)$$

$\text{Int}(B)$ désigne l'intérieur, et la borne supérieure

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(u^{\epsilon, u_0} \in B) \leq - \inf_{w \in \overline{B}} I^{u_0}(w).$$

De plus les ensembles $\{w : I^{u_0}(w) \leq r\}$ pour r positif sont compacts (*).

Nous pouvons en déduire que les lois de l'énergie et du temps d'arrivée du signal en l'extrémité L satisfont des PGDs de vitesse ϵ et de bonnes (la propriété (*) est satisfaite) fonctions de taux respectivement

$$\begin{aligned} I_N^{u_0}(n) &= \frac{1}{2} \inf_{h \in L^2(0, L; L^2): \mathbf{N}(\mathbf{S}^{a,u_0}(h)(L))=n} \left\{ \|h\|_{L^2(0, L; L^2)}^2 \right\}, \\ I_Y^{u_0}(y) &= \frac{1}{2} \inf_{h \in L^2(0, L; L^2): \mathbf{Y}(\mathbf{S}(u_0, h)(L))=y} \left\{ \|h\|_{L^2(0, L; L^2)}^2 \right\}, \quad \mathbf{S}(u_0, \cdot) = \mathbf{S}^{m,u_0}(\cdot) \text{ ou } \mathbf{S}(u_0, \cdot) = \mathbf{S}^{a,u_0}(\cdot). \end{aligned}$$

La stratégie utilisée pour minorer et majorer l'asymptotique de petits bruits du logarithme d'un événement des queues est la suivante. Considérons par exemple l'événement $D_\epsilon = \left\{ \mathbf{Y} \left(u^\epsilon, \Psi_A^0(L) \right) \in [a, b] \right\}$ où $[a, b]$ est un intervalle qui ne contient pas 0. Le PGD donne

$$- \inf_{y \in (a, b)} I_Y^0(y) \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(D_\epsilon) \leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(D_\epsilon) \leq - \inf_{y \in [a, b]} I_Y^0(y).$$

Afin d'obtenir une borne inférieure nous cherchons un contrôle h tel que $\mathbf{Y}(S(u_0, h)(L)) \in (a, b)$ et $c = \frac{1}{2} \|h\|_{L^2(0, L; L^2)}^2$ est aussi petit que possible. Alors nous avons

$$-c \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(D_\epsilon).$$

La seconde étape consiste à utiliser des identités d'énergie pour l'équation contrôlée. Elles donnent une minoration de la norme L^2 minimum du contrôle h pour que le temps d'arrivée de la solution contrôlée soit dans l'intervalle $[a, b]$ en T au lieu d'être en 0. Nous obtenons donc une constante \tilde{c} telle que

$$\text{si } \mathbf{Y}(S(u_0, h)(L)) \in [a, b] \text{ alors } \frac{1}{2} \|h\|_{L^2(0, L; L^2)}^2 \geq \tilde{c},$$

ce qui implique que

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(D_\epsilon) \leq -\tilde{c}.$$

La difficulté est d'obtenir des encadrements suffisamment précis pour que c et \tilde{c} soient suffisamment proches et aient le même comportement en la longueur de la fibre et l'amplitude du signal initial.

2 Le cas d'un bruit additif

Afin d'obtenir des bornes inférieures, nous effectuons la minimisation sur l'ensemble des amplitudes paramétrant les solutions ansatz

$$\Psi_A(t, x) = \sqrt{2}A(x) \exp \left(-i \int_0^x A^2(u) du \right) \operatorname{sech}(A(x)t).$$

Pour $D \subset \mathbb{R}_+^*$ nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_D^1 &= \left\{ A : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \exists \tilde{R} \in D : A(x) = \tilde{R} \left(\frac{x}{2L} \right)^2 \right\} \\ \mathcal{A}_D^2 &= \left\{ A : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \exists \tilde{R} \in D : A(x) = \left(8 - \tilde{R} - 4\sqrt{4 - \tilde{R}} \right) \left(\frac{x}{2L} \right)^2 + \left(-4 + 2\sqrt{4 - \tilde{R}} \right) \frac{x}{2L} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2$,

$$\mathcal{C}_D^i = \left\{ h \in L^2(0, L; L^2), \exists A \in \mathcal{A}_D^i : h(t, x) = i \frac{A'(x)}{A(x)} \Psi_A(t, x) - i\sqrt{2}A'(x) \exp \left(-i \int_0^x A^2(u) du \right) A(x)t \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} (A(x)t) \right\}.$$

Nous obtenons le résultat suivant, *c.f.* [4,8].

Proposition 1. *Pour tout L et R positifs ($R \in (0, 4)$ pour (γ)), D dense dans $[R, R+1]$ et $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'opérateurs Hilbert-Schmidt à valeurs dans L^2 tels que pour tout h dans \mathcal{C}_D^1 , $\Phi_n h \rightarrow h$ dans $L^1(0, L; L^2)$ et uniformément bornés comme opérateurs sur L^2 par une constante $C > 1$ indépendante de L , nous avons*

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(\mathbf{N}(u^{\epsilon, 0, n}(L)) \geq R) \geq -\frac{R(12 + \pi^2)}{18L} \quad (5)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P}(\mathbf{N}(u^{\epsilon, 0}(L)) \geq R) \leq -\frac{R}{8LC^2}; \quad (6)$$

et en remplaçant \mathcal{C}_D^1 par \mathcal{C}_D^2

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P} \left(\mathbf{N} \left(u^{\epsilon, \Psi_1^0, n}(L) \right) - 4 < -R \right) \geq -\frac{(2 - \sqrt{4 - R})^2 (12 + \pi^2)}{9L}. \quad (7)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P} \left(\mathbf{N} \left(u^{\epsilon, \Psi_1^0}(L) \right) - 4 < -R \right) \leq -\frac{R^2}{8LC^2(4 + R)}. \quad (8)$$

L'exposant n rappelle que Φ est remplacé par Φ_n . Une telle suite existe, il suffit de prendre des troncatures spectrales.

Nous ne considérons ici que le cas d'une donnée initiale profil de soliton. Afin d'obtenir des bornes inférieures, nous effectuons la minimisation sur les fonctions $x \mapsto \lambda(x)$ intervenant dans la solution ansatz suivante

$$\Psi_{A,\lambda}(t, x) = \sqrt{2}A \operatorname{sech} \left(A \left(t - 2 \int_0^x \int_0^y \lambda(u) du dy \right) \right) \exp \left(2i \int_0^x \lambda(y) \int_0^y \int_0^u \lambda(v) dv du dy \right) \\ \exp \left[-iA^2 x + i \int_0^x \left(\int_0^y \lambda(u) du \right)^2 dy - it \int_0^x \lambda(y) dy + 2i \left(\int_0^x \lambda(y) dy \right) \left(\int_0^x \int_0^y \lambda(u) du dy \right) \right].$$

Pour $D \subset \mathbb{R}_+^*$ nous posons

$$\mathcal{H}_{A,L}^D = \{h \in L^2(0, L; L^2), h(t, x) = \lambda(x) \left(t - 2 \int_0^x \int_0^y \lambda(u) du dy \right) \Psi_{A,\lambda}(t, x), \text{ avec } \lambda(x) = \frac{3\tilde{R}(L-x)}{8AL^3}, \tilde{R} \in D\},$$

Nous obtenons le résultat qui suit, *c.f.* [4].

Proposition 2. *Pour tout L et R positifs ($R \in (0, 4)$ pour (7), D dense dans $[R, R + 1]$ et $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'opérateurs Hilbert-Schmidt à valeurs dans Σ tels que pour tout h dans $\mathcal{H}_{T,A}^D$, $\Phi_n h \rightarrow h$ dans $L^1(0, L; \Sigma)$ et uniformément bornés par une constante $C(A)$ telle que pour A et L grands, il existe α tel que $C(A) \geq \alpha A$ (**), nous avons*

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P} \left(\mathbf{Y} \left(u^{\epsilon, \Psi_A^0, n}(L) \right) \geq R \right) \geq -\frac{\pi^2 R^2}{128L^3 A^3}, \quad (9)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P} \left(\mathbf{Y} \left(u^{\epsilon, \Psi_A^0}(L) \right) \geq R \right) \leq -\frac{R^2}{128L^3 \left(1 + \frac{2}{L}\right)^2 \left(A + \frac{R}{8L+4}\right) C(A)^2}. \quad (10)$$

Nous constatons que pour R de l'ordre de l'unité et L grand, la borne supérieure est de l'ordre de $-\frac{R^2}{128T^3 AC(A)^2}$. D'après (**), il n'y a pas de contradiction entre (9) et (10) sur l'ordre en A .

Nous avons finalement prouvé que les queues de la masse pour une donnée initiale nulle ne sont pas Gaussiennes. Elles sont par contre indistingables de queues exponentielles sur une échelle logarithmique. Les queues du temps d'arrivée sont elles indistingables, sur cette échelle, de queues Gaussiennes. Afin d'obtenir les facteurs pré-exponentiels des queues nous pourrions utiliser des grandes déviations précises. En ce qui concerne l'ordre en la longueur de la fibre, nous avons obtenu des bornes inférieures et supérieures du même ordre de grandeur en L . De plus, sur une échelle logarithmique, les queues de la masse sont en $\exp\left(-\frac{c}{\epsilon T}\right)$, celles du temps d'arrivée sont en $\exp\left(-\frac{c}{\epsilon T^3}\right)$, ainsi les queues du temps d'arrivée sont beaucoup plus épaisses que celles de la masse. Par conséquent, la fluctuation du temps d'arrivée est beaucoup plus pénalisante que celle de la masse.

L'effet Gordon-Hauss, *c.f.* [10], stipule que la variance du temps d'arrivée est de l'ordre de T^3 . Sous l'hypothèse que la loi est effectivement Gaussienne nous obtenons le même résultat.

Dans certains papiers, par exemple [6], l'influence de l'amplitude de la donnée initiale sur le temps d'arrivée est étudiée et de l'ordre de $A^3 T^3$. Nous obtenons que l'ordre est au moins en A^3 .

Introduire des éléments de contrôle en ligne peut rendre exponentiellement moins importantes les queues du temps d'arrivée prohibitives, *c.f.* [7]. Il est aussi possible d'optimiser sur ces contrôles à coût limité comme suggéré dans [14].

3 Le cas d'un bruit multiplicatif

Nous considérons ici un bruit de la forme $u^{\epsilon, u_0} \circ \sqrt{\epsilon} \frac{\partial W}{\partial x}(x) + \sqrt{\epsilon t} u^{\epsilon, u_0} \circ \frac{d\beta}{dx}(x)$. Dans ce cas, les solutions contrôlées donnent des contrôles dans l'image de Φ dans $H^s(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus tL^1(0, L; \mathbb{R})$ et possèdent les propriétés d'intégrabilité que l'on souhaite. Nous obtenons des queues de l'ordre de $\exp\left(-\frac{c}{\epsilon A^2 L^3}\right)$.

Proposition 3. *Pour tout L, A et R positifs, Φ Hilbert-Schmidt à valeurs dans $H^s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ où $s > \frac{3}{2}$,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P} \left(\mathbf{Y} \left(u^{\epsilon, \Psi_A^0}(L) \right) \geq R \right) \geq -\frac{3R^2}{128A^2L^3},$$

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log \mathbb{P} \left(\mathbf{Y} \left(u^{\epsilon, \Psi_A^0}(L) \right) \geq R \right) \leq -\left(\frac{3}{16}\right)^2 \frac{R^2}{A^2L^3 \max \left(\|\Phi\|_{\mathcal{L}_c(L^2, W^{1, \infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))}^2, 1 \right)}.$$

Dans le cas du bruit blanc, problème qui semble mal posé mathématiquement, nous nous attendons, au vu du calcul sur la variance du temps d'arrivée dans [6], à des queues de l'ordre de $\exp\left(-\frac{c}{\epsilon A^4 L^3}\right)$.

Références

1. C. BRUNHUBER, F.G. MERTENS & Y.B. GAIDIDEI, Thermal diffusion of envelope solitons on anharmonic atomic chains, *Eur. Phys. J. B.*, **42**, 103-112 (2004).
2. A. DE BOUARD & A. DEBUSSCHE, The Stochastic Nonlinear Schrödinger Equation in H^1 , *Stochastic Anal. Appl.*, **21** (1), 97-126 (2003).
3. P. DEL MORAL & J. GARNIER, Genealogical particle analysis of rare events, *Ann. Appl. Probab.*, **15**, 2496-2534 (2005).
4. A. DEBUSSCHE & E. GAUTIER, Small noise asymptotic of the timing jitter in soliton optical transmission, *Document de travail du CREST*, **2005-20** (2005).
5. S.A. DEREVIYANKO, S.K. TURITSYN & D.A. YAKUSHEV, Fokker-Planck equation approach to the description of soliton statistics in optical fiber transmission systems, *J. Opt. Soc. Am. B*, **28**, 2097-2099 (2003).
6. P.D. DRUMMOND & J.F. CORNEY, Quantum noise in optical fibers. II. Raman jitter in soliton communications, *J. Opt. Soc. Am. B*, **18**, 153-161 (2001).
7. G.E. FALKOVICH, I. KOLOKOLOV, V. LEBEDEV, V. MEZENTSEV & S.K. TURITSYN, Non-Gaussian error probability in optical soliton transmission, *Physica D*, **195**, 1-28 (2004).
8. E. GAUTIER, Large deviations and support results for nonlinear Schrödinger equations with additive noise and applications, *ESAIM : Probability and Statistics*, **9**, 74-97 (2005).
9. E. GAUTIER, Uniform large deviations for the stochastic nonlinear Schrödinger equation with multiplicative noise, *Stochastic Process. Appl.*, **115**, (12), 1904-1927 (2005).
10. J.P. GORDON & H.A. HAUS, Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission, *Opt. Lett.*, **11**, 665-667 (1986).
11. K.P. HO, Non-Gaussian statistics of soliton timing jitter induced by amplifier noise, *Opt. Lett.*, **28**, 2165-2167 (2003).
12. C.J. MCKINSTRIE & T.I. LAKOBA, Probability-density function for energy perturbation of isolated optical pulses, *Opt. Expr.*, **11**, 3628-3648 (2003).
13. R.O. MOORE, G. BIONDINI & W.L. KATH, Importance sampling for noise-induced amplitude and timing jitter in soliton transmission systems, *Opt. Lett.*, **28**, 105-107 (2003).
14. V.N. SMELYANSKIY & M.I. DYKMAN, Optimal control of large fluctuations, *Phys. Rev. E*, **55**, 2516-2521 (1997).
15. A.N. YANNAPOPOULOS, D.J. FRANTZESKAKIS, C. POLYMIS & K. HIZANIDIS, Motion of 2D Schrödinger solitary waves in the presence of random external potentials, *Physica Scripta*, **65**, 363-368 (2002).

Mélange topologique et tiges fantômes dans les écoulements bidimensionnels

E. Gouillart¹, J. -L. Thiffeault² & O. Dauchot¹

¹ Groupe Instabilités et Turbulence, SPEC/CEA, Bâtiment 772, Orme des Merisiers — CEA/Saclay 91191 Gif sur Yvette cedex

² Department of Mathematics, Imperial College London, London SW7 2AZ
emmanuelle.gouillart@cea.fr

Résumé. Le chaos topologique repose sur le mouvement topologiquement complexe d'obstacles dans un écoulement bidimensionnel. Ce mouvement provoque un étirement exponentiel des lignes matérielles, et donc un mélange efficace. Boyland *et al.* [P. L. BOYLAND, H. AREF, AND M. A. STREMLER, *J. Fluid Mech.* **403**, 277 (2000)] ont étudié un mouvement périodique spécifique d'agitateurs en forme de tiges dans un fluide visqueux qui présente du chaos topologique. Dans cet article, nous montrons qu'il est possible d'étendre ce formalisme à des cas où le mouvement des agitateurs est topologiquement trivial. Nous considérons pour cela la dynamique de points périodiques particuliers que nous appelons *tiges fantômes*, car ils jouent un rôle comparable à celui des tiges physiques. Le cadre des tiges fantômes fournit une nouvelle technique pour mesurer le chaos et présente sous un nouveau jour les mécanismes qui produisent le chaos et le mélange. Nous examinons également un éventuel prolongement de cette approche aux systèmes ouverts. Nos résultats s'appuient sur des simulations numériques d'écoulements de Stokes et des expériences.

Abstract. Topological chaos relies on the topologically complex motion of obstacles in a two-dimensional flow. This motion generates exponential stretching of lines, and hence efficient mixing. Boyland *et al.* [P. L. BOYLAND, H. AREF, AND M. A. STREMLER, *J. Fluid Mech.* **403**, 277 (2000)] have studied a specific periodic motion of rod-shaped stirrers that exhibits topological chaos in a viscous fluid. In this work, we show that it is possible to extend this formalism to cases where the motion of the stirring rods is topologically trivial by considering the dynamics of special periodic points that we call *ghost rods*, because they play a similar role to stirring rods. The ghost rods framework provides a new technique for measuring chaos and gives insight into the mechanisms that produce chaos and mixing. We also investigate a possible extension of this approach to open flows. Numerical simulations for Stokes flow and experiments support our results.

1 Introduction

Le mélange de fluides visqueux dans des écoulements à faible nombre de Reynolds peut sembler problématique : en l'absence de turbulence, il est difficile de créer des petites échelles pour accélérer l'action de la diffusion. Il s'agit pourtant d'un problème crucial pour de nombreux procédés industriels, de l'agro-alimentaire au traitement des polymères. Il est en fait possible de réaliser un bon mélange grâce à l'*advection chaotique* [1], c'est-à-dire grâce à des écoulements qui malgré une dépendance temporelle simple peuvent tout de même générer des trajectoires lagrangiennes chaotiques. L'advection chaotique a été étudiée dans de nombreux systèmes (voir [2] pour une revue détaillée).

Le mélange topologique est un aspect particulier de l'advection chaotique où on s'intéresse au mouvement périodique d'obstacles dans des écoulement bidimensionnels. Cette approche a été introduite par Boyland *et al.* [3], qui ont étudié le mouvement périodique de trois tiges dans un fluide bidimensionnel à partir d'une combinaison élégante d'expériences simples et d'analyse mathématique. Ils ont caractérisé deux protocoles de mélange différents uniquement à partir de leur topologie. Pour cela, ils ont considéré les tresses formées par les trajectoires spatio-temporelles des tiges (voir Fig. 1) et caractérisé le mélange à partir des invariants topologiques de ces tresses. Ils ont ainsi pu proposer des critères de mélange qui dépendent uniquement de la topologie du mouvement des agitateurs et non des détails de l'écoulement.

Dans cet article nous présentons une extension de ces travaux à des cas où le mouvement des tiges est topologiquement trivial, mais où nous considérons le mouvement de structures périodiques de l'écoulement que nous appelons *tiges fantômes* [4] car elles jouent un rôle similaire à celui des tiges physiques. Nous expliquons ainsi comment réaliser du chaos topologique avec des écoulements beaucoup plus simples que celui proposé par Boyland *et al.* [3].

Nous présentons en section 2 le mélange topologique, puis nous introduisons les tiges fantômes et nous mettons en évidence leur rôle dans le mélange en section 3. La section 4 est consacrée à une discussion et à l'application de ces résultats aux systèmes ouverts.

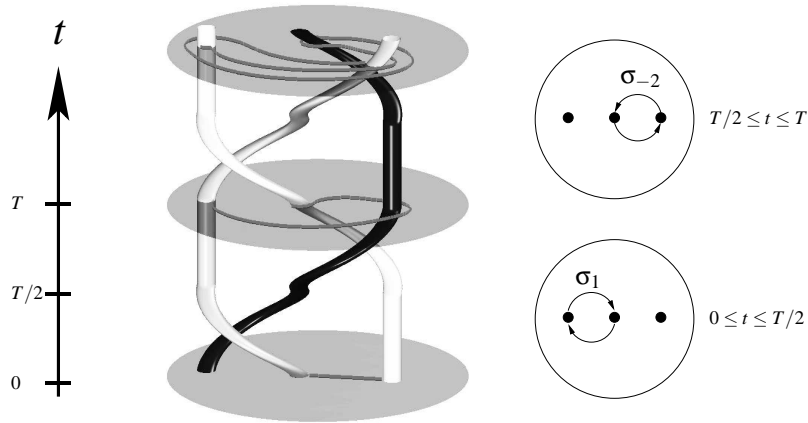


Fig.1. Les trajectoires de N agitateurs définissent une tresse à N brins dans un espace spatio-temporel (ici $N = 3$). Le mouvement périodique des agitateurs pour un protocole particulier est représenté sur les deux figures à droite : d'abord (en bas) les deux tiges de gauche sont échangées dans le sens des aiguilles d'une montre, puis (en haut) les deux tiges de droite sont échangées dans le sens contraire. La tresse en 3D représente deux périodes de ce protocole. Il s'agit du protocole mélangeant étudié dans [3].

2 Systèmes dynamiques et tresses

Nous nous intéressons dans cette section à des écoulements provoqués par le mouvement périodique de tiges dans un domaine bidimensionnel rempli de fluide, et nous exposons comment il est possible de caractériser le mélange dans ces écoulements uniquement à partir de la *topologie* du mouvement des tiges. Notre description est volontairement imagée et peu rigoureuse sur le plan mathématique : le lecteur intéressé par le formalisme mathématique sous-jacent peut se référer à [3,4].

Considérons tout d'abord l'écoulement schématisé en Fig. 1 où trois tiges évoluent périodiquement dans un domaine circulaire. Les deux tiges de gauche sont d'abord échangées dans le sens des aiguilles d'une montre, puis pendant la deuxième moitié de la période on échange les deux autres tiges dans le sens contraire. Boyland *et al.* [3] ont montré expérimentalement et justifié théoriquement que cet écoulement mélangeait beaucoup mieux qu'un écoulement apparemment comparable où pendant la deuxième demi-période on échangeait les deux tiges de droite cette fois-ci également dans le sens horaire. En effet, la topologie de ces deux protocoles de mélange est différente. Si l'on représente la trajectoire des tiges dans un diagramme spatio-temporel comme en Fig. 1, on voit que ces trajectoires forment les brins d'une tresse. La différence entre les deux protocoles peut se voir au niveau des tresses : la tresse représentée en Fig. 1 est topologiquement complexe, en ce sens qu'on ne peut pas la défaire en la déformant juste à ces bouts (par isotopie en termes mathématiques), alors que la tresse du deuxième protocole (non représentée) n'est en fait qu'une torsion d'ensemble des brins qu'on peut défaire à un bout [3]. Le cas

intéressant pour le mélange est celui des tresses topologiquement complexes, car on peut prouver [3] que dans ce cas l'écoulement induit est chaotique. De plus une ligne matérielle comme celle représentée en Fig. 1 est étirée par le mouvement des tiges, et dans le cas d'une tresse complexe on peut montrer qu'une telle ligne est étirée de façon exponentielle avec un exposant caractéristique de l'écoulement, l'*entropie topologique* de l'écoulement h_{top} [5]. L'entropie topologique de l'écoulement est un bon critère de mélange, puisqu'elle caractérise l'étirement des lignes (la frontière entre deux produits à mélanger par exemple). Tout l'intérêt de la description des écoulements avec les tresses réside dans la propriété suivante : une tresse possède également une entropie topologique, qui caractérise la manière dont un "élastique" est étiré de façon minimale par les brins de la tresse, et l'entropie topologique de la tresse formée par les tiges est une borne inférieure *universelle* de l'entropie topologique de l'écoulement, quelles que soient les autres caractéristiques de cet écoulement. On sait par exemple que si on déplace des tiges selon le protocole périodique représenté en Fig. 1, une ligne matérielle va voir sa longueur augmenter exponentiellement comme $l(t) \sim \exp(h_{\text{top}}t)$ avec $h_{\text{top}} \geq h_{\text{braid}} \sim 0.96$ où h_{braid} est l'entropie topologique de la tresse représentée en Fig 1.

3 Mise en évidence de tiges fantômes

Il est en fait possible d'étendre ces résultats en remarquant que toute structure périodique de l'écoulement est un obstacle topologique au même titre qu'une tige physique, et qu'une ligne matérielle doit donc s'enrouler autour d'elle [4]. La Fig. 2 illustre cette remarque. Nous avons réalisé une simulation numérique de l'advection d'un traceur passif dans un écoulement de Stokes induit par le mouvement d'une tige sur une trajectoire en huit. L'écoulement est caractérisé par le rayon du domaine, $a_{\text{out}} = 1$, la taille de la tige, $a_{\text{in}} = 0.04$, et le rayon d'une boucle du huit, $a = 0.35$. Il y a une seule tige, donc la tresse à un brin formée à partir de son mouvement est topologiquement triviale. Nous allons cependant montrer que l'écoulement présente du chaos topologique. On a représenté en Fig. 2(a) une section de Poincaré pour cet écoulement, c'est-à-dire la position d'une particule toutes les périodes pour trois conditions initiales différentes. On remarque la présence d'une large région chaotique, mais aussi de deux petits îlots elliptiques au centre des boucles du huit. Ces îlots sont des obstacles topologiques, et on peut voir sur la Fig. 2(b) qu'une ligne matérielle s'enroule bien autour de la tige « physique » et des deux îlots. De plus la tresse formée par la tige et les deux îlots est topologiquement non triviale et son entropie topologique est une borne inférieure de l'étirement exponentiel d'une ligne. Nous appelons donc *tiges fantômes* de telles structures responsables du mélange topologique.

Nous avons également observé des tiges fantômes dans une expérience "de coin de table" où on a réalisé ce même protocole de mélange en déplaçant à la main un agitateur dans un cristalliseur rempli d'un fluide visqueux. Une tache d'encre déposée à la surface a été étirée par le mouvement de la tige, et remplit une région importante du domaine, sauf les deux îlots elliptiques dont la position approximative a été représentée par deux disques gris sur la Fig. 2(c). La forme des îlots n'est pas exactement la même dans la simulation et dans l'expérience, elle dépend en effet des détails de l'écoulement (taille de la tige, rapport des tailles du domaine et du huit, ...) mais pour le chaos topologique la seule présence de ces îlots, quelle que soit leur forme ou leur taille, permet de donner une même borne inférieure à l'entropie topologique de ces écoulements.

Il est possible de proposer des bornes inférieures encore meilleures en considérant non seulement les îlots elliptiques, mais également les points périodiques instables de l'écoulement (il y en a une infinité dans un écoulement chaotique) qui sont également des obstacles topologiques et avec lesquels on peut construire des tresses. Ces points périodiques instables sont d'autant plus difficiles à détecter dans une simulation qu'ils sont instables, mais nous avons en fait constaté [4] qu'il est possible d'obtenir de très bonnes approximations de l'entropie topologique de l'écoulement avec un faible nombre de points périodiques (cf. Fig. 3). Les algorithmes pour détecter les points périodiques et construire des tresses à partir de ces points sont décrits en détail dans [4]. Boyland [6] a en fait montré qu'il est possible de construire une suite d'orbites périodiques d'un difféomorphisme du disque dont les tresses ont une entropie topologique qui converge vers l'entropie topologique du difféomorphisme, c'est-à-dire que "tout chaos est topologique" : toute la complexité de l'écoulement peut être déduite du mouvement de tiges fantômes. Ces résultats

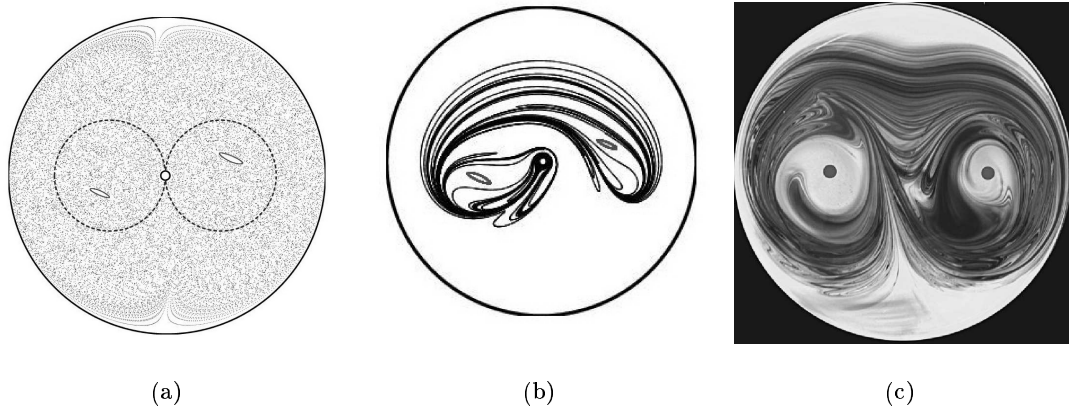


Fig.2. (a) Section de Poincaré pour un écoulement de Stokes créé par le mouvement d'une tige sur une trajectoire en huit (pointillés). La région chaotique remplit presque tout le domaine, mais deux petits îlots au centre des boucles du huit jouent le même rôle que des tiges fixes au même endroit : ce sont des « tiges fantômes ». (b) Simulation de l'advection d'un petit « blob » initialement placé autour de la tige. La ligne est étirée exponentiellement et s'enroule autour de la tige et des tiges fantômes. (c) Même protocole de mélange réalisé sur une expérience modèle. Une tache d'encre a été dispersée dans la région chaotique et permet de discerner “en négatif” deux tiges fantômes, c'est-à-dire deux îlots elliptiques représentés par les deux disques gris.

permettent d'envisager le mélange sous un nouvel angle : une ligne matérielle est repliée et étirée car elle est entraînée et “tressée” par les tiges fantômes, qui sont en quelque sorte les moteurs du mélange.

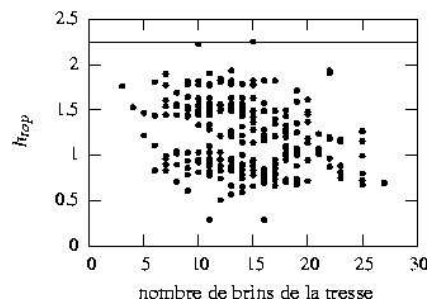


Fig.3. Pour le protocole en huit de la Fig. 2, on forme des tresses avec la trajectoire de l'unique tige et des paires d'orbites périodiques instables de l'écoulement. On a représenté l'entropie topologique des tresses non triviales en fonction du nombre de brins de la tresse (dépendant de la période des orbites choisies). La ligne pleine représente l'entropie topologique de l'écoulement $h_{\text{top}} = 2.25$ (L'entropie de l'écoulement a été calculée en faisant évoluer une ligne matérielle et en calculant sa longueur.). On constate qu'il est possible d'obtenir une très bonne borne inférieure de h_{top} à partir de peu d'orbites périodiques.

4 Discussion : application aux écoulements ouverts

Nous avons caractérisé le chaos dans les écoulements périodiques bidimensionnels en considérant les tresses formées par des points périodiques et en calculant leur entropie topologique. Nous avons montré le rôle des points périodiques dans le mélange, et nous les avons appelés tiges fantômes car leur mouvement étire les lignes matérielles comme le feraient de vraies tiges. D'autres domaines, comme l'étude des oscillateurs paramétriques optiques [7], utilisent également les tresses formées à partir de points périodiques pour quantifier le chaos, mais les tiges fantômes ont une signification physique particulière en mécanique

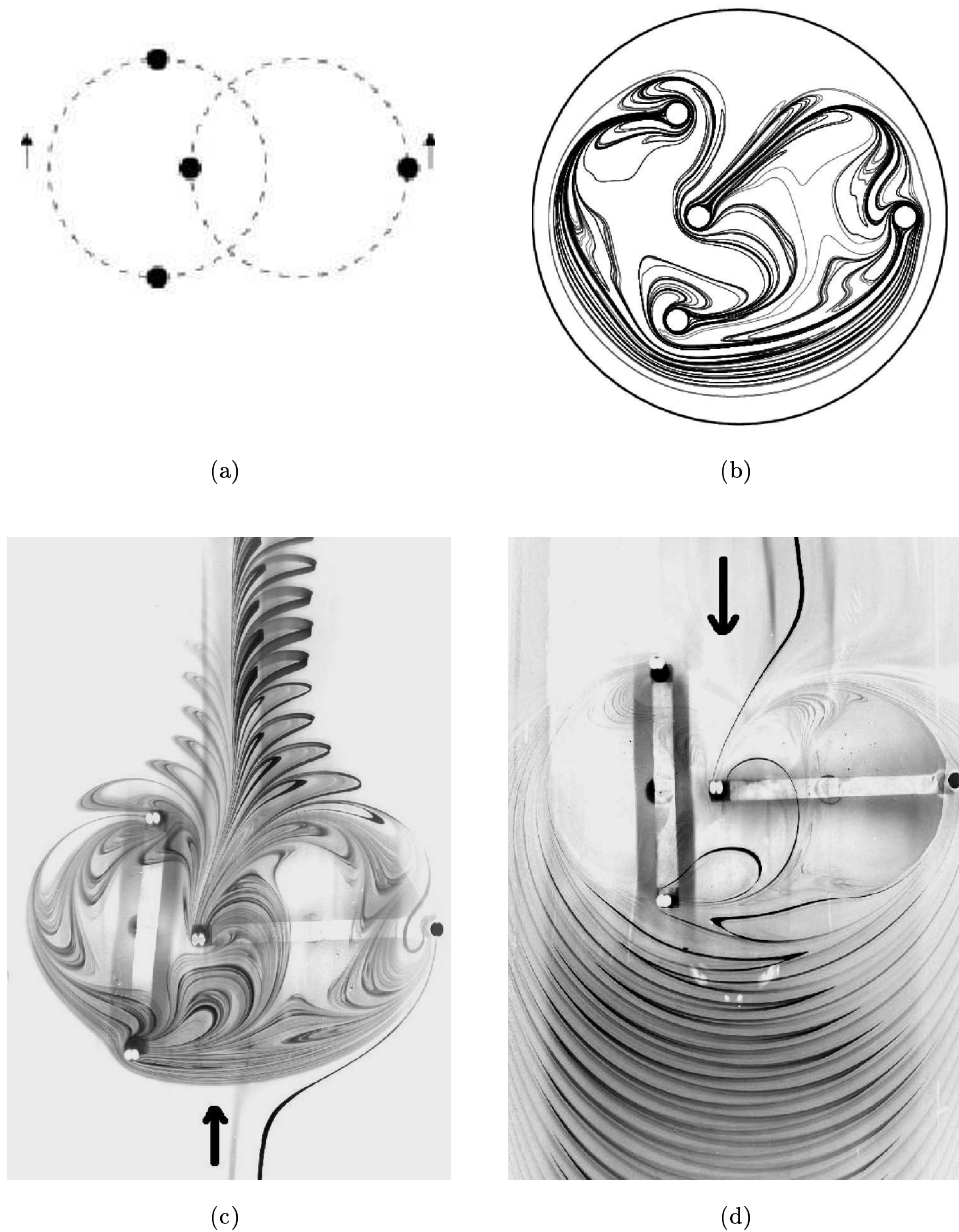


Fig.4. (a) Protocole de mélange « batteur à œufs » où deux couples de tiges tournent à vitesse constante, et dans des sens opposés, sur des cercles qui se coupent. (b) Simulation numérique de l'étirement d'un petit blob initialement placé autour d'une tige. Pour ces valeurs des paramètres de l'écoulement, les simulations montrent que l'écoulement est chaotique et possède deux îlots chaotiques au centre des cercles sur lesquels les tiges évoluent (pas de ligne). (c) Réalisation expérimentale du même protocole de mélange en écoulement ouvert. Le dispositif expérimental est constitué d'un canal rempli d'un fluide visqueux (du sucre de canne) auquel on impose un écoulement stationnaire « de bas en haut » en amont de la région de mélange où les tiges agitent le fluide. On injecte en continu du colorant en un point en amont de la région de mélange. Le colorant est mélangé par les tiges : la figure de mélange est qualitativement semblable à la simulation, avec notamment la présence des deux îlots elliptiques. A chaque période, une partie de la ligne semblable au haut de (b) se détache et s'en va avec l'écoulement, créant ainsi la figure de mélange observée en aval. (d) Même dispositif expérimental, mais avec un écoulement de haut en bas. Cette fois-ci, la partie de la ligne « qui s'en va » correspond au bas de (b) et est donc beaucoup plus homogène : le mélange est bien meilleur qu'en (c).

des fluides, puisque les points périodiques de l'espace des phases sont des particules fluides "réelles" qui entraînent le fluide environnant.

Le formalisme des tiges fantômes est une extension de la cinématique topologique introduite par Boyland *et al.* [3]. Cette théorie et ses futurs développements devraient permettre de mieux comprendre le mélange. Il reste en effet plusieurs points à creuser pour mieux comprendre les tiges fantômes. Il faudrait par exemple expliquer pourquoi certaines tiges fantômes tressent mieux que d'autres (i.e. ont une plus grande entropie topologique) et quelle est donc la signification physique des "meilleures" tiges fantômes.

Il est également intéressant de se demander comment cette approche topologique du mélange résiste au passage d'un écoulement dans un domaine fermé à un écoulement ouvert. On peut par exemple imaginer un écoulement, constant à l'infini, où des particules traversent une région de mélange où des tiges bougent selon des protocoles qui créeraient du chaos topologique dans un domaine fermé, et se demander si ces écoulements vont bien mélanger. Comme il y a une advection moyenne de l'amont vers l'aval de la région de mélange, une particule va rester en moyenne un nombre de périodes α dans cette zone de mélange (α est proportionnel au rapport entre la vitesse des tiges et la vitesse de l'écoulement à l'infini). L'intuition suggère que la qualité du mélange augmente avec α . Cependant une description plus fine est nécessaire. Nous présentons ici une courte discussion qualitative qui compare des simulations numériques d'un écoulement fermé et des expériences d'écoulement ouvert pour le même protocole de mélange. Le protocole en question est celui du "battre à oeufs" : quatre tiges tournent deux par deux dans des sens opposés sur des cercles qui se coupent (cf. Fig. 4(a)). Nos simulations numériques (Fig. 4(b)) montrent que cet écoulement est chaotique en domaine fermé et qu'il y a des îlots elliptiques au centre des deux cercles : ces tiges fantômes forment une tresse complexe avec les tiges. On peut noter que cet écoulement présente une dissymétrie "haut/bas" (sur la Fig. 4(b)) : les portions de la ligne "en bas" ont été étirées de façon très homogène, alors que celles "du haut" présentent des repliements et un étirement inhomogène. Cette dissymétrie se traduit dans les expériences d'écoulement ouvert. Dans celles-ci on injecte un colorant dans un canal où le fluide traverse la région de mélange où des tiges se déplacent selon 4(a) et on regarde comment le colorant est mélangé au reste du fluide par les tiges. Ces expériences correspondent à $\alpha \sim 4$. Les figures 4(c) et 4(d) correspondent respectivement à un écoulement moyen vers le haut, et vers le bas. La similarité entre l'aspect de la région de mélange dans 4(c) et 4(d) avec la simulation en fermé 4(b) montre l'intérêt des comparaisons ouvert/fermé. Cependant, la qualité du mélange en aval de la région de mélange est bien différente selon le sens de l'écoulement moyen. Cela s'explique à nouveau grâce à la simulation numérique, car on peut décrire grossièrement l'écoulement ouvert par l'écoulement fermé auquel vient se superposer un flux de fluide qui rentre et sort continuellement aux deux bouts de la région de mélange. La partie qui "sort" ressemble ainsi au haut de 4(b) pour 4(c), et au bas de 4(b) pour 4(d). L'inhomogénéité de l'étirement dans l'écoulement fermé est donc traduite de manière spectaculaire dans les écoulements ouverts : le mélange est très différent dans 4(c) et 4(d). La compréhension du mélange en système ouvert peut donc très clairement bénéficier de celle du mélange en système fermé.

Références

1. H. AREF, Stirring by chaotic advection, *J. of Fluid Mech.*, **143**, 1 (1984).
2. J. M. OTTINO, The kinematics of mixing : stretching, chaos, and transport, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1989).
3. P. L. BOYLAND, H. AREF, AND M. A. STREMLER, Topological fluid mechanics of stirring, *J. Fluid Mech.*, **403**, 277 (2000).
4. E. GOUILLART, J.-L. THIFFEAULT AND M. D. FINN, Topological Mixing with Ghost Rods, *Phys. Rev. E*, *in press*, [arXiv :nlin.CD/0510076](https://arxiv.org/abs/nlin.CD/0510076).
5. P. BOYLAND, Topological methods in surface dynamics, *Topology Appl.*, **58**, 223 (1994).
6. S. NEWHOUSE AND T. PIGNATARO, On the estimation of topological entropy, *J. Stat. Phys.* **72**, 1331 (1993).
7. A. AMON AND M. LEFRANC, Topological signature of deterministic chaos in short nonstationary signals from an optical parametric oscillator, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 094101 (2004).

Solitons optiques spatio-temporels dissipatifs

Philippe Grelu¹, Jose M. Soto-Crespo², & Nail Akhmediev³

¹ Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne, UMR 5027 CNRS, 9 avenue A. Savary, 21078 Dijon Cedex

² Insituto de Optica, CSIC, Serrano 121, 28006 Madrid

³ Optical Science Center, The Australian National University, Canberra ACT 0200

philippe.grelu@u-bourgogne.fr

Résumé. Afin d'obtenir des solitons spatio-temporels complets, autoconfinés dans les trois dimensions spatiales et dans le domaine temporel, nous proposons une approche nouvelle, fondée principalement sur l'emploi de non-linéarités dissipatives. Cette approche utilise un modèle de Ginzburg-Landau complexe cubique-quintique à coefficients complexes, dans lequel les effets de diffraction sont incorporés avec l'approximation paraxiale. Les simulations numériques conduisent à la démonstration de balles de lumières dissipatives stables. En variant les paramètres du modèle, la formation de structures transversales non stationnaires est également mise en évidence.

Abstract. In order to obtain stable spatio-temporal (3+1)D optical solitons, which means solitons self confined in the three spatial dimensions as well as localized in the temporal domain, we propose a novel approach mainly based on the use of dissipative nonlinearities. We perform numerical simulations of pulse propagation using a complex cubic-quintic Ginzburg-Landau equation model, for which diffraction effects are included in the paraxial approximation. Numerical simulations show the existence of stable dissipative light bullets. Varying the parameters of the model, the fomation of non stationary transverse patterns is also shown.

1 Introduction

La recherche de solitons spatio-temporels autoconfinés dans les trois dimensions spatiales et dans le domaine temporel, est un problème mythique de l'optique non-linéaire qui a débuté il y a une quinzaine d'années [1]. Le terme de *'balle de lumière'* a été alors employé pour désigner ces solitons complets se formant dans les (3+1) dimensions. Le choix de la non-linéarité permettant un tel autoconfinement et garantissant une solution stable est délicat, et le lien entre la dimensionalité et l'effet non-linéaire utilisé est particulièrement important. Par exemple, un milieu Kerr peut produire un confinement stable si l'on se limite à une dimension transverse, mais ce n'est plus le cas pour des dimensionalités plus élevées. En effet, à partir de deux dimensions transverses, on montre que la non-linéarité Kerr, seule, produit des solutions localisées instables, qui s'autofocalisent ou se dispersent rapidement en présence de bruit. Pour stabiliser les solitons spatio-temporels, des non-linéarités plus élaborées ont été proposées, comme par exemple des non-linéarités d'ordre 3 saturables ou bien des non-linéarités d'ordre 2 couplant deux longueurs d'ondes distinctes, le fondamental et la seconde harmonique [2,3].

Jusqu'au milieu des années 90, les recherches de milieux non-linéaires concernaient presque exclusivement les non-linéarités dispersives. Mais durant les dix dernières années, les solitons de cavité ont fait l'objet d'un nombre croissant de travaux, sur le plan théorique comme au niveau expérimental. Ces solitons de cavité correspondent à des structures transverses stables et localisées qui peuvent se former dans l'environnement dissipatif de cavités laser de grande ouverture, c'est-à-dire fortement multimodes. En particulier, l'emploi de lasers à semiconducteurs a permis la mise en évidence du contrôle de plusieurs solitons, ce qui présente un intérêt pour le développement de fonctions de traitement tout-optiques de l'information [4]. Il s'agit jusqu'à présent de solitons spatiaux localisés transversalement, mais non localisés dans le domaine temporel, puisque les cavités fonctionnent en régime quasi-continu.

La question des solitons dissipatifs spatio-temporels complets a été abordée récemment dans le cas de situations à symétrie sphérique, à la fois numériquement et théoriquement [5,6]. La symétrie sphérique permet de simplifier notablement le problème, cependant elle a de forte chances d'être brisée en réalité,

puisque les variables spatiales et temporelle ne sont pas complètement équivalentes, et que la stabilité ne peut être prouvée de façon satisfaisante qu'en considérant des conditions initiales brisant toute symétrie arbitraire. Nous rapportons dans cet article les résultats de travaux récents obtenus à partir de simulations numériques, sur la base d'un modèle de Ginzburg-Landau cubique-quintique à coefficients complexes, dans lequel les effets de diffraction sont incorporés avec l'approximation paraxiale [7]. Pour certains jeux de paramètres, nous obtenons des solitons spatio-temporels stables qui correspondent ainsi à des *balles de lumières dissipatives*. Le modèle et ses solutions *balles de lumière dissipatives* sont présentés à la section suivante. Nous y mettons en évidence le rôle important joué par le paramètre de contrôle associé au gain non-linéaire. La section 3 traite de situations pour lesquelles les balles de lumières ne sont pas stables, et montre dans ce cas la formation de structures transverses non stationnaires, dont l'énergie croît avec le temps de propagation.

2 Balles de lumières dissipatives stables

2.1 Présentation du modèle

Notre modèle est fondé sur une extension du modèle de Ginzburg-Landau cubique-quintique à coefficients complexes (CCQGLE). Ce modèle incorpore des non-linéarités dispersives et dissipatives d'ordre trois et cinq, ainsi que la diffraction spatiale. L'équation de propagation normalisée que nous avons employée est la suivante :

$$i\Psi_z + \frac{D}{2}\Psi_{tt} + \frac{1}{2}\Psi_{xx} + \frac{1}{2}\Psi_{yy} + |\Psi|^2\Psi + \nu|\Psi|^4\Psi = i\delta\Psi + i\epsilon|\Psi|^2 + i\beta\Psi_{tt} + i\mu|\Psi|^4\Psi \quad (1)$$

Ce modèle présente un grand intérêt dans le cadre de la modélisation d'un milieu amplificateur laser, car la signification physique de tous les termes est bien établie.

L'enveloppe du champ Ψ est une fonction des quatre variables spatio-temporelles x, y, z et t , où t est le temps dans le référentiel propre en mouvement avec l'impulsion optique tandis que x et y représentent les deux coordonnées spatiales transverses. Le membre de gauche de l'équation contient les termes dispersifs. D est le paramètre de dispersion chromatique, ν est le coefficient de saturation de la non-linéarité Kerr. Dans les simulations qui suivent, D est pris égal à 1 pour représenter une propagation en régime de dispersion anormale, et la valeur du coefficient de saturation de l'effet Kerr est très faible. Le membre de droite de l'équation contient les termes dissipatifs : δ représente le niveau des pertes linéaires ($\delta \leq 0$), tandis que ϵ et μ représentent l'importance respective du gain non-linéaire ($\epsilon \geq 0$) et de la saturation du gain non-linéaire ($\mu \leq 0$). Le coefficient β représente l'importance du filtrage spectral, qui est toujours à l'oeuvre en pratique car la bande passante du milieu à gain est finie.

2.2 Résolution numérique

L'équation de propagation est résolue numériquement au moyen d'une méthode de Fourier à pas divisés : les dérivées partielles secondes sont résolues dans l'espace de Fourier, tandis que les autres termes linéaires et non-linéaires sont résolus avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les simulations présentées ci-après ont été calculées à partir d'un maillage de 512 points dans chaque dimension spatiale transverse, et avec 256 points temporels. Afin d'éviter les artefacts numériques, divers pas spatiaux et temporels ont été testés.

En relation avec les travaux théoriques effectués dans le cas de solitons dissipatifs temporels [8], il est important de rappeler que plusieurs solutions isolées peuvent coexister pour un jeu de paramètres donné, et que ces solutions ne sont pas nécessairement stables.

Ainsi, en fixant par exemple le jeu de paramètres suivants : $D = 1$, $\nu = -0.01$, $\delta = -0.4$, $\beta = 0.3$, $\mu = -0.1$, et en faisant varier le paramètre de non-linéarité du gain ϵ , on peut trouver des domaines d'existence relativement étendus pour les solutions localisées, certaines étant stables et d'autres non.

La condition initiale de champ est choisie de la forme suivante :

$$\Psi(x, y, z = 0, t) = 4.e^{-\left(\frac{t}{1.3}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{y}{0.8}\right)^2} \quad (2)$$

Cette condition initiale est choisie elliptique plutôt que cylindrique en x et y , afin d'éviter la convergence vers une solution cylindrique instable. La brisure de symétrie initiale est utile afin de discriminer plus rapidement les solutions stables.

Le paramètre de contrôle le plus pertinent pour suivre l'évolution de la solution est l'énergie totale du champ, définie par :

$$Q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dt \quad (3)$$

S'agissant d'un système dissipatif, l'énergie n'est évidemment pas une quantité conservée a priori. Lorsque la solution reste localisée, l'énergie varie dans un intervalle borné. Si la solution converge vers un état stationnaire, l'énergie totale converge également, tandis que si le champ se délocalise, l'énergie totale tend vers l'infini. Une autre possibilité est évidemment le cas où le champ se dissipe et tend vers zéro.

2.3 Balles de lumière stables

En variant le paramètre de non-linéarité du gain ϵ , la figure 1 présente les diverses évolutions obtenues à partir de la condition initiale (2). Lorsque ϵ est compris entre 1.0 et 1.4, les solutions tendent rapidement vers des valeurs stationnaires lorsque la distance de propagation est supérieure à 10. Ces solutions stationnaires correspondent à des balles de lumière dissipatives stables, dont les profils spatiaux et temporels sont présentés à la figure 2.

Il faut mentionner que la condition initiale est choisie notablement éloignée des solutions stationnaires, comme l'indique la différence importante des énergies entre l'état initial et les solutions stationnaires.

Il est important de souligner que si l'on choisissait une condition initiale très différente de (2), l'évolution pourrait mener à une solution également très différente, et le domaine d'existence des balles de lumière stables par rapport au paramètre ϵ , sur lequel s'est porté précédemment notre discussion, en serait sensiblement modifié. Cela provient du fait que les solitons dissipatifs stables sont généralement associés à l'existence d'un bassin attracteur. Tant que les conditions initiales sont suffisamment voisines de l'attracteur, elles se trouvent dans le bassin attracteur et convergent toutes vers une unique solution stationnaire, dont les caractéristiques dépendent des valeurs des paramètres du modèle.

3 Structures non stationnaires

En employant toujours la condition initiale (2), et lorsque le paramètre ϵ est pris supérieur ou égal à 1.45, la solution devient instable. Les solutions stationnaires instables peuvent être observées en employant une condition initiale à symétrie cylindrique, par exemple [7]. L'évolution de Q converge d'abord vers une valeur stationnaire, puis diverge pour des grandes valeurs de z en raison de l'extrême sensibilité à la brisure de symétrie cylindrique induite par les arrondis numériques.

Lorsque ϵ est supérieur à 1.5, l'évolution ne passe plus par un état stationnaire, mais il y a divergence rapide de l'énergie totale Q . Cette évolution est présentée dans la figure 1, dans le cas où ϵ vaut 1.6 ou 1.8, et correspond à une extension de l'onde au cours de la propagation dans le domaine spatial transverse, et éventuellement dans le domaine temporel.

Les figures 3 et 4 rendent compte de ce phénomène. Pour ϵ valant 1.6, l'évolution du champ reste bornée dans le domaine temporel, tandis que dans le domaine spatial transverse de nombreuses filamentations apparaissent et remplissent peu à peu le cadre, tandis que pour $\epsilon = 1.8$, l'expansion du champ est plus rapide, la durée de l'impulsion diverge et l'extension transverse est beaucoup plus dense. Dans les deux cas présentés, les structures transverses formées ne sont pas stationnaires, et évoluent en se complexifiant.

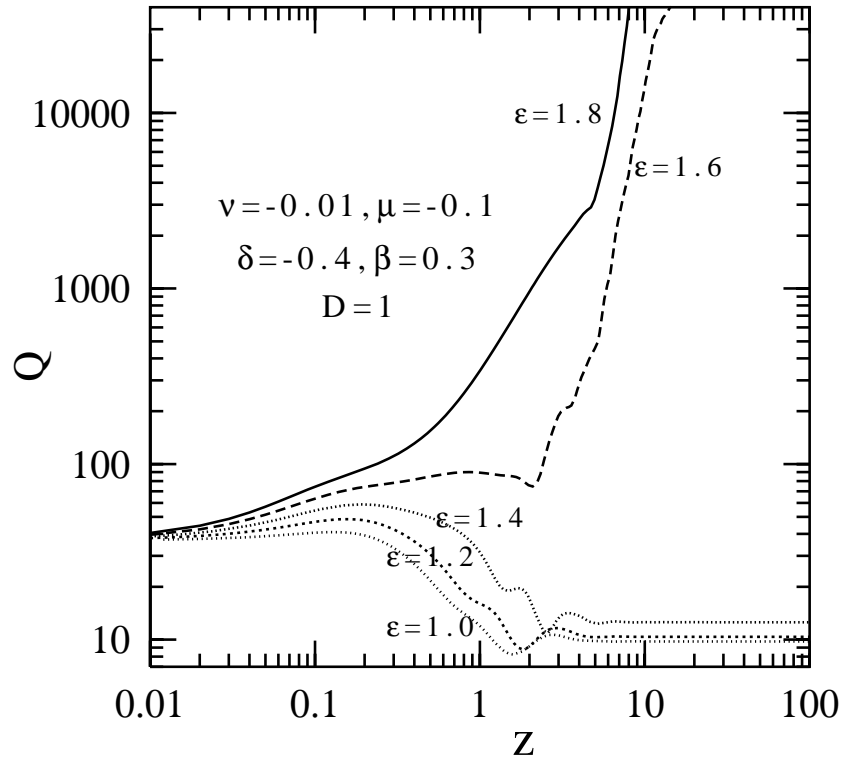


Fig.1. Evolution de l'énergie totale Q avec la distance de propagation z , pour diverses valeurs du gain non-linéaire ϵ . Les valeurs comprises entre 1.0 et 1.4 conduisent à des solutions stationnaires localisées, tandis que les valeurs supérieures ou égales à 1.6 conduisent à des solutions divergentes.

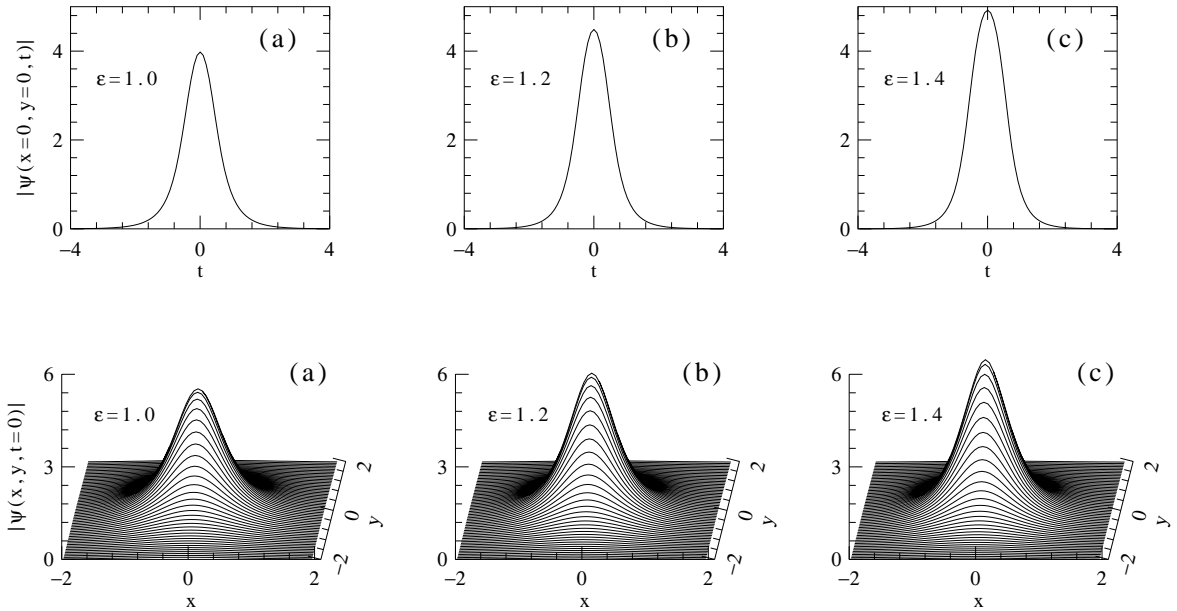


Fig.2. Profils temporels (en haut) et spatiaux (en bas) stationnaires de balles de lumière stables obtenues avec les valeurs du gain non-linéaire ϵ indiquées sur chaque figure.

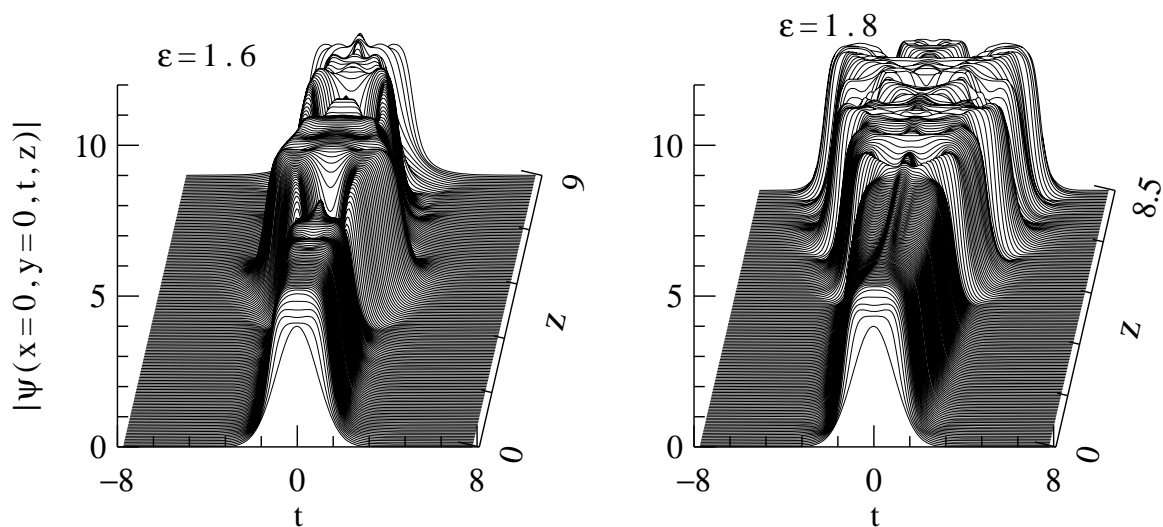


Fig.3. Profils temporels associés à des évolutions d'énergie totale divergentes ainsi qu'à la formation de structures transverse dont l'extension croît avec le temps. Les valeurs du gain non-linéaire ϵ sont 1.6 (à gauche) et 1.8 (à droite).

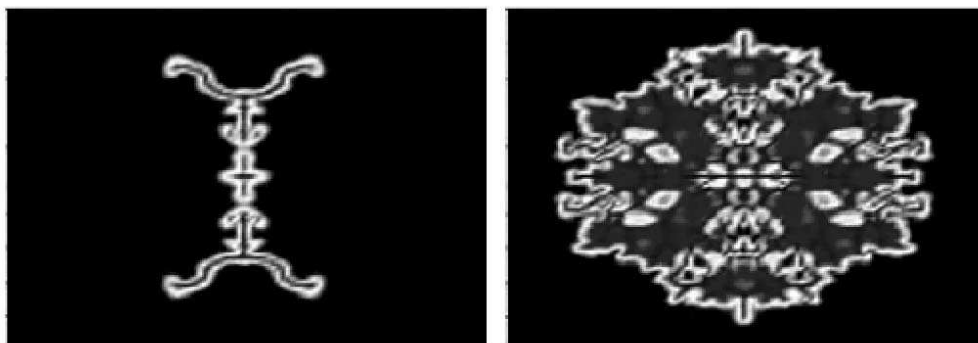


Fig.4. Profils spatiaux transverses obtenus pour une distance de propagation $z = 8$ dans le cas où ϵ vaut 1.6 (à gauche) et 1.8 (à droite).

4 Conclusion

Au moyen de simulations numériques, nous avons démontré la possibilité d'existence de balles de lumière dissipatives. Le modèle employé est une équation de propagation de Ginzburg-Landau cubique-quintique à coefficients complexes tenant compte de l'ensemble des dimensions spatio-temporelles. En variant l'un des paramètres essentiels du modèle, à savoir le gain non-linéaire, nous avons mis en évidence diverses situations : balles de lumières stables, balles de lumières instables, ainsi que la non-existence de solutions localisées conduisant à la formation de structures transverses.

Références

1. Y. SILBERBERG, Collapse of optical pulses, *Optics Letters* 15, 1282 (1990).
2. L. TORNER AND A. BARTHÉLÉMY, Quadratic solitons : recent developments, *IEEE Journal of Quantum Electronics* 39, 22 (2003).
3. Y.F. CHEN ET AL., Criteria for the experimental observation of multidimensional optical solitons in saturable media, *Physical Review E* 70, 046610 (2004).
4. S. BARLAND ET AL., Cavity solitons as pixels in semiconductor microcavities, *Nature* 419, 699 (2002).
5. N. ROSANOV, *Spatial hysteresis and optical patterns* Springer, Berlin (2002).
6. V. SKARKA, N. ALEKSIC, Stability Criterion for Dissipative Soliton Solutions of the One-, Two-, and Three-Dimensional Complex Cubic-Quintic Ginzburg-Landau Equations, *Physical Review Letters* 96, 013903 (2006).
7. PH. GRELU, J.M. SOTO-CRESPO AND N. AKHMEDIEV, Light bullets and dynamic pattern formation in nonlinear dissipative systems, *Optics Express* 13, 9352 (2005).
8. N. AKHMEDIEV AND A. ANKIEWICZ EDS., *Dissipative solitons* Springer, Berlin (2005).

Motifs d'activité et itinérance chaotique dans des réseaux de neurones en temps discret

B. Ibarz¹, Miguel A.F. Sanjuán¹, G. Tanaka², & K. Aihara²

¹ Grupo de Dinámica no Lineal y Teoría del Caos

Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza

Universidad Rey Juan Carlos, Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid, Espagne

² Department of Complexity Science and Engineering,

Graduate School of Frontier Science, The University of Tokyo, 113-8656 Tokyo, Japan

borja.ibarz@urjc.es

Résumé. Dans ce travail nous étudions la propagation des bouffées de potentiels d'action dans des réseaux de neurones modélisés en temps discret [2]. L'analyse linéaire explique la synchronisation en phase et en opposition de phase, et permet de distinguer l'effet de la dynamique des neurones individuels sur la synchronisation de celui de la topologie du réseau. On trouve ainsi des régions de paramètres où les bouffées sont une propriété d'émergence [3]. Dans ces régions il est possible d'observer des motifs complexes d'activité, même si le réseau est parfaitement homogène et régulier. Ces motifs, composés d'une alternance chaotique entre la synchronisation et la propagation des bouffées, apparaissent suite à une bifurcation qui casse la symétrie et produit des ondes progressives et stationnaires. La caractérisation des motifs à l'aide des exposants de Lyapunov et la persistance des corrélations dans le réseau indiquent que les motifs pourraient être interprétés comme des manifestations du phénomène appelé « l'itinérance chaotique » [4].

Abstract. In the present work we analyse the propagation of bursts of action potentials in networks of map-based neurons [2]. Linear analysis explains the mechanism for both in-phase and antiphase synchronization, and allows the separation of the effect upon synchronization of individual neuron dynamics from that of the topology of the network. A region of parameters is found where bursting is an emergent phenomenon [3]. In this region, complex patterns of activity are observed even if the network is perfectly regular and homogeneous. These patterns, which consist of a chaotic alternation between synchronization and propagation of bursts, appear due to a symmetry-breaking bifurcation that gives rise to standing and rotating waves. Characterization of the patterns by means of Lyapunov exponents and the persistence of correlations in the network point towards the possibility of construing them as a manifestation of the phenomenon called “chaotic itinerancy” [4]

1 Introduction

Divers systèmes neuronaux emploient, plutôt que des impulsions isolées, des bouffées de potentiels d'action pour assurer la fiabilité des communications, car ceux-ci facilitent la libération des neurotransmetteurs. La compréhension des mécanismes de propagation et synchronisation des bouffées est donc importante pour les neurosciences et fait l'objet de nombreuses recherches. Les modèles utilisés sont normalement des E.D.O. avec deux échelles de temps différentes, l'une rapide pour le voltage, l'autre lente pour les variables de porte. L'intégration numérique de systèmes avec une telle disparité des échelles demande une grande puissance de calcul, ce qui à présent empêche la simulation de grands ensembles neuronaux. Afin de surmonter ce problème, quelques modèles de neurones en temps discret ont été proposés récemment [1]. Ils combinent la simplicité du mécanisme *integrate and fire* pour les potentiels d'action avec une reproduction réaliste de la dynamique lente. Le succès de ces modèles nous a poussé à étudier leurs propriétés de synchronisation et de propagation de bouffées dans des topologies d'anneau et de treillis qui permettent un traitement analytique. De plus ces structures sont importantes en neurosciences. On verra que, malgré la régularité et la simplicité des réseaux, l'activité observée présente des comportements très intéressants provenant du caractère chaotique des neurones et de la topologie des connections.

2 Le modèle

Notre point de départ est le modèle proposé par N. Rulkov [7] :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t)) + y(t), \\ y(t+1) &= y(t) - \mu(x(t) - \sigma), \end{aligned} \quad (1)$$

où $\mu \ll 1$, donc $x(t)$ est la variable rapide, représentant voltage, tandis que $y(t)$ est une variable de porte lente. La fonction $f(x) = \alpha/(1+x^2)$ donne naissance à des bouffées chaotiques de potentiels d'action pour la valeur du paramètre α choisie dans ce travail. Le paramètre σ contrôle le régime d'activité du neurone et peut être interprété comme une entrée externe modulateur. La figure 1 montre un exemple d'évolution temporelle dans le régime de bouffées chaotiques ainsi qu'un diagramme de bifurcations en fonction des paramètres α et σ . Nous travaillerons toujours avec les valeurs $\mu = 0.001$ et $\alpha = 4.3$ et en alternant σ entre le régime de silence et de bouffées. La perte de stabilité qui donne lieu à ce changement de régime se produit comme conséquence d'une bifurcation sous-critique de Neimark-Sacker.

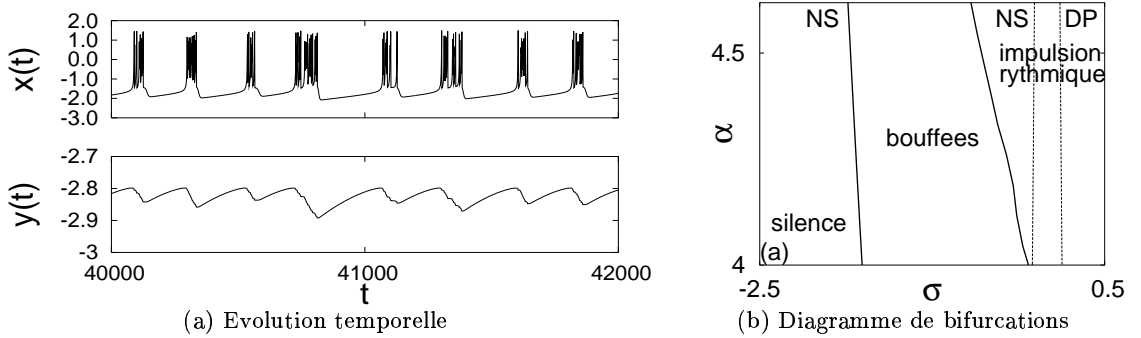


Fig.1. (a) Évolution temporelle de la variable rapide et lente dans le régime de bouffées ($\alpha = 4.3$, $\sigma = -1.5$, and $\mu = 0.001$). (b) Diagramme des bifurcations du modèle de Rulkov en fonction de α et σ ($\mu = 0.001$). NS - Neimark-Sacker; DP - doublement de période

Nous ajouterons ensuite les connections synaptiques pour former un réseau avec N neurones :

$$\begin{aligned} x_n(t+1) &= f(x_n(t)) + y_n(t) - g_c h_n^c(t) + g_e h_n^e(t), \\ y_n(t+1) &= y_n(t) - \mu(x_n(t) - \sigma) \end{aligned} \quad (2)$$

où les synapses chimiques et électriques sont modélisées de la manière suivante :

$$h_n^c(t) = \sum_{m=1}^N \gamma_{nm}^c (x_m(t) - \nu), \quad (3)$$

$$h_n^e(t) = \sum_{m=1}^N \gamma_{nm}^e (x_m(t) - x_n(t)). \quad (4)$$

Maintenant la variable rapide (respectivement lente) du neurone n est représentée par x_n (respectivement y_n). Les synapses chimiques sont inhibitrices ($g_c \geq 0$ et $\nu = -2.5$ l'assureront), et le couplage électrique est diffusif ($g_e \geq 0$). La topologie du réseau dépend des coefficients γ_{nm}^c et γ_{nm}^e , qui prennent les valeurs 1 ou 0. Nous simplifierons le traitement analytique du problème en couplant les deux types de synapses, c'est à dire, considérant des réseaux avec $\gamma_{nm}^c = \gamma_{nm}^e$. Alors toutes les synapses chimiques se situeront entre neurones voisins.

3 Synchronisation en phase et en opposition de phase

Les effets des synapses chimiques et électriques sont opposés : la synapse électrique favorise la synchronisation tandis que les synapses chimiques inhibitrices tendent à désynchroniser. Alors selon l'intensité de ces deux influences, on trouve deux classes de motifs d'activité, comme on peut le voir dans la figure 2.

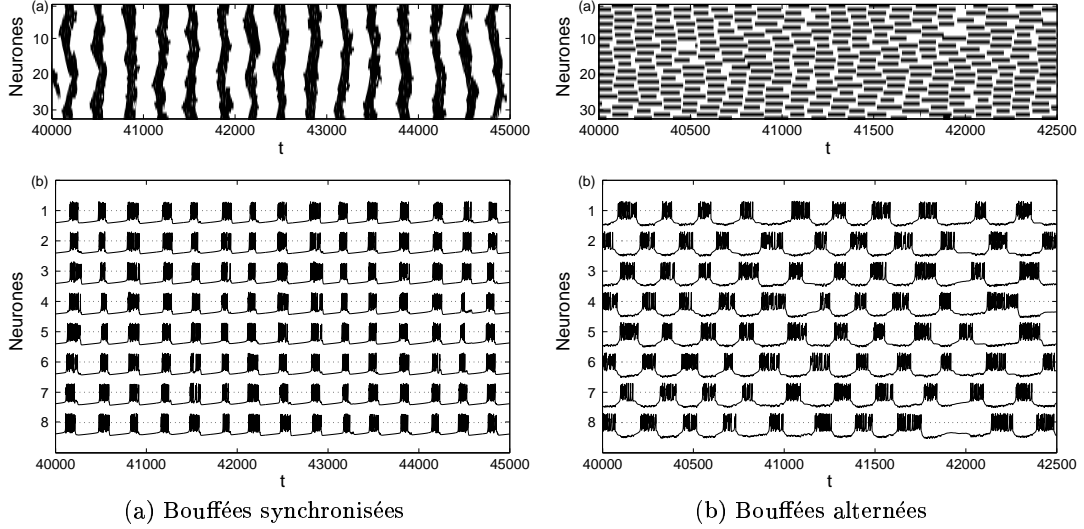


Fig.2. Diagramme de temps des impulsions (en haut) et évolution temporelle de huit neurones (en bas) dans un anneau de $N = 32$ neurones. À gauche, bouffées synchronisées ($\sigma = -1.5$, $g_c = 0$, and $g_e = 0.05$); à droite, bouffées alternées ($\sigma = -1.5$, $g_c = 0.05$, and $g_e = 0$)

L'analyse linéaire au moyen des fonctions maîtresses de stabilité [5] montre que la raison de cette différence réside dans le premier vecteur propre qui perd la stabilité quand σ augmente en partant du régime de silence. En plus, cette technique distingue l'effet du modèle de neurone de celui de la topologie du réseau. La matrice Jacobienne du système (2) dans le sous-espace Π de synchronisation en silence où $x_i = \sigma$ pour $i = 1 \dots N$ est :

$$J = I_N \otimes F + G \otimes H, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f'(\sigma) & 1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

où I_N est la matrice identité $N \times N$ et $G = -g_c \Gamma_c + g_e \Gamma_e$, avec Γ_c et Γ_e matrices d'adjacences des connections chimiques et électriques. On obtient une diagonalisation en N blocs (2×2) simplement diagonalisant G , chaque bloc ayant la forme

$$M_k = F + s_k H, \quad k = 0 \dots N - 1, \quad (6)$$

où s_k sont les valeurs propres de G , dépendant exclusivement de la topologie (pour un anneau, $s_k = -2(g_e - \delta \cos 2k\pi/N)$ avec $\delta = g_e - g_c$). Chacune d'elles donne lieu à deux valeurs propres du système complet :

$$\lambda_{k\pm}(r) = \frac{f'(\sigma) + 1 + s_k \pm \sqrt{(f'(\sigma) - 1 + s_k)^2 - 4\mu}}{2}. \quad (7)$$

La dynamique près du sous-espace Π est dominée par le vecteur propre (mode) avec la valeur propre positive la plus grande. Sur un diagramme de courbes de valeur propre maximale constante, comme dans

la figure 3, on voit bien que ce mode dominant correspond toujours à la valeur s_k majeure du réseau G . Pour toute réseau régulier de degré ν (pour l'anneau, $\nu = 2$; pour des treillis, $\nu = 4$ ou 8 ; etc) les valeurs propres sont comprises dans l'intervalle $-\nu(g_e \pm \delta)$, avec $\delta = g_e - g_c$. La valeur propre $s_k = -\nu(g_e - \delta)$ (s_0 dans la figure 3) correspond au vecteur propre parallèle à Π . On peut alors conclure que la condition pour synchronisation en phase dans n'importe quel réseau régulier est $g_e > g_c$. Au contraire, si $g_c > g_e$, un autre mode sera dominant; dans l'anneau avec N pair, c'est le vecteur propre de synchronisation en opposition de phase (avec N impair, deux modes en opposition de phase concourent).

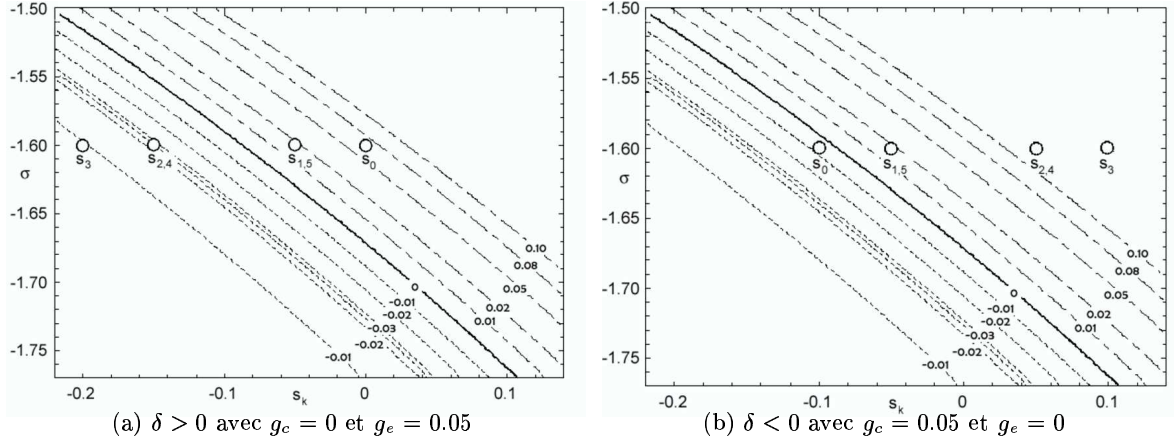


Fig.3. Diagramme maître de stabilité pour le modèle de Rulkov. Les cercles représentent les valeurs propres d'un anneau de $N = 6$ neurones. (a) Cas où le mode dominant correspond à s_0 (synchronisation en phase). (b) Cas où le mode dominant est s_3 (synchronisation en opposition de phase).

On notera aussi que pour $\delta < 0$ les bouffées sont une propriété émergente, puisque la perte de stabilité et les bouffées résultantes se produisent pour une valeur de σ inférieure à la valeur σ_0 nécessaire en absence de connections.

4 Motifs complexes et itinérance chaotique

L'analyse linéaire n'explique pas le comportement du réseau loin du sous-espace de synchronisation. En fait le caractère chaotique du modèle produit, dans le régime de bouffées alternantes, des motifs complexes d'activité changeant capricieusement entre des intervalles de synchronisation en opposition de phase et d'autres de propagation d'ondes métachronales, comme on peut le voir dans la figure 4. L'apparition des ondes métachronales (ondes composées par propagation avec un déphasage régulier) est un phénomène bien connu dans des réseaux en anneau, indépendamment du modèle choisi pour ses éléments [8]; les divers modes proviennent de la perte de stabilité suite à une bifurcation de Hopf qui casse la symétrie et donne naissance à plusieurs branches de solutions. Mais le changement irrégulier d'un mode à l'autre, qui se vérifie dans un intervalle très étroit du paramètre σ dans la région de bouffées émergentes, possède des caractéristiques qui dépendent du modèle de neurone. On trouve un comportement semblable avec des ensembles de neurones modélisés par E.D.O. De plus il est démontré qu'il peut être caractérisé comme une itinérance chaotique [6]. On l'observe ici dans notre modèle en temps discret.

Pour caractériser les changements des motifs spatiotemporels avec σ nous mesurons la instabilité orbitale à l'aide des exposants de Lyapunov λ_i . On obtient ainsi la dimension topologique D_T , qui est le nombre des exposants non négatifs, et aussi la dimension de Lyapunov, qui se définit comme :

$$D_L = j + \sum_{i=1}^j \lambda_i / |\lambda_j|; \quad \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \quad \sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0 \quad (8)$$

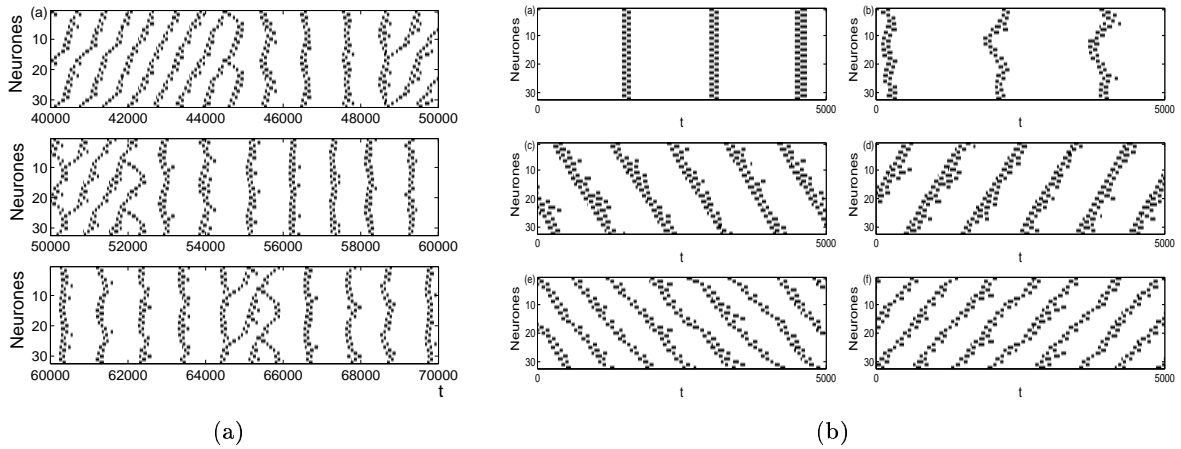


Fig.4. Activité dans un anneau de $N = 32$ neurones avec $\sigma = -1.69$, $g_c = 0.02$ et $g_e = 0$. (a) Alternance chaotique de synchronisation et propagation des bouffées. (b) Ondes stationnaires régulières et chaotiques (en haut), et ondes progressives (au centre et en bas) qui composent les motifs d'activité.

En conséquence, une différence grande entre D_L et D_T , comme dans le cas de la figure 5(a), indique la présence d'un grand nombre d'exposants négatifs très proches de zéro. C'est une particularité de l'itinérance chaotique [6], et son origine se trouve dans la stabilité neutrale de la variable lente du modèle de Rulkov (2). D'autre part, le fait que D_T et D_L augmentent à mesure que σ s'éloigne du régime de silence est dû à la croissance du nombre de neurones simultanément actifs.

D'autres indices qui trahissent la présence de l'itinérance chaotique sont la convergence lente du plus grand exposant de Lyapunov, voir figure 5(b), et la persistance des autocorrélations et des corrélations croisées au lieu d'une décroissance exponentielle, voir figure 5(c). La corrélation implique une structure spatiellement ordonnée mais temporellement irrégulière. Les orbites déploient des transitions qui ne sont pas aléatoires mais dépendantes de la trajectoire précédente.

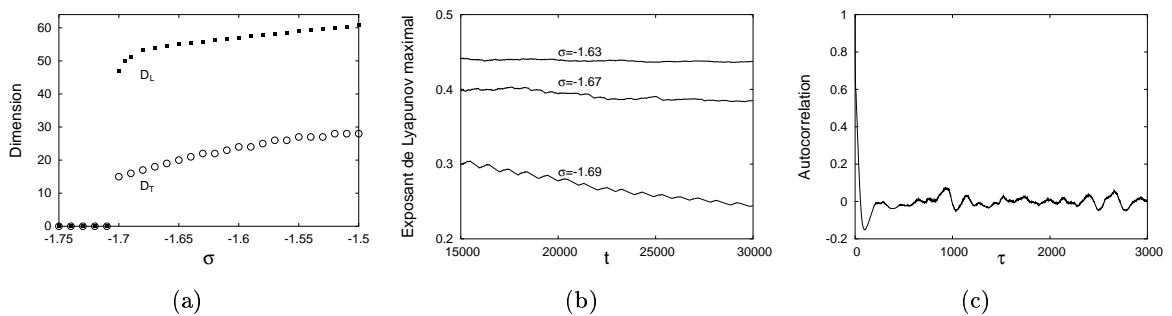


Fig.5. Mesures de l'instabilité orbitale dans un anneau de $N = 32$ neurones. (a) Dimension de Lyapunov D_L et dimension topologique D_T en fonction de σ . (b) Convergence de l'exposant de Lyapunov maximal pour diverses valeurs de σ ; la convergence est d'autant plus lente que σ est plus proche de la valeur de silence. (c) Auto-corrélation du voltage du premier neurone.

L'effet de l'itinérance chaotique sur le système est de borner la dynamique à un sous-espace de dimension petite pendant qu'il est attrapé autour du fantôme d'un attracteur, et de le laisser parcourir l'espace

de phases jusqu'à ce qu'il tombe dans un nouveau fantôme. Cette activité transitoire peut être responsable du changement dynamique des rôles fonctionnels des neurones nécessaires pour certaines tâches cognitives et associatives; en effet, on observe l'alternance chaotique entre phases de synchronisation et de désynchronisation dans le cortex cérébrale [9]. La propagation d'information au moyen des ondes, couplée à la formation d'ensembles synchronisés, peut être une voie de résolution du problème du liage [6].

5 Conclusion

Nous avons reproduit avec un modèle de neurones en temps discret les comportements observés sur des modèles en temps continu et sur des registres physiologiques de neurones produisant des bouffées de potentiels d'action. L'analyse linéaire explique l'apparition de modes de synchronisation et de propagation d'ondes métachronales, mais l'itinérance irrégulière entre ces modes est un comportement strictement nonlinéaire. Nous avons montré qu'il possède les caractéristiques propres du phénomène de l'itinérance chaotique. Néanmoins, l'attribution rigoureuse de cette notion exige la démonstration de l'existence des attracteurs de Milnor, qui n'a pas encore été faite.

6 Remerciements

Nous remercions le soutien financier du Ministère des Sciences et de la Technologie de l'Espagne, projet BFM2003-03081, et la subvention pour la Recherche Scientifique dans le Domaine Prioritaire 17022012 du Ministère de l'Éducation, de la Culture, du Sport, de la Science et de la Technologie du Japon.

Références

1. N. RULKOV, I. TIMOFEEV ET M. BAZHENOV, Oscillations in Large-Scale Cortical Networks : Map-Based Model, *Journal of Computational Neuroscience*, **17**, 203-223 (2004).
2. G. TANAKA, B. IBARZ, M. A. F. SANJUÁN ET K. AIHARA, Synchronization and Propagation of Bursts in Networks of Coupled Map Neurons, *Chaos*, **16**, 01XXXX (2006).
3. G. DE VRIES, Bursting as an emergent phenomenon in coupled chaotic maps, *Physical Review E*, **64**, 051914 (2001).
4. K. KANEKO ET I. TSUDA, Chaotic itinerancy, *Chaos*, **13**, 926 (2003).
5. L. M. PECORA ET T. L. CARROLL, Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2109 (1998).
6. I. TSUDA ET AL, Chaotic itinerancy as a mechanism of irregular changes between synchronization and desynchronization in a neural network, *Journal of Integrative Neuroscience*, **3**, 159 (2004).
7. N.F. RULKOV, Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map, *Phys. Review E*, **65**, 041922 (2002).
8. M. GOLUBITSKY, I. N. STEWART ET D. G. SCHAEFFER, Singularities and Groups in Bifurcation Theory : Vol. II, *Springer Applied Mathematical Sciences*, **69** (1988).
9. W. J. FREEMAN, A proposed name for aperiodic brain activity : stochastic chaos, *Neural Networks*, **13**, 11 (2000).

Bistabilité d'une surface liquide induite par la pression de radiation acoustique

Bruno Issenmann¹, Régis Wunenburger¹, Sébastien Manneville² & Jean-Pierre Delville¹

¹ Centre de Physique Moléculaire Optique et Hertzienne, UMR CNRS 5798, Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex

² Centre de Recherche Paul Pascal, UPR CNRS 8641, Avenue Schweitzer, 33600 Pessac
b.issenmann@cpmoh.u-bordeaux1.fr

Résumé. La déformation d'interfaces liquides par la pression de radiation d'une onde optique ou acoustique conduit à une grande diversité de phénomènes essentiellement dus au couplage entre la propagation de l'onde qui déforme l'interface et la déformation qui influence en retour la propagation de l'onde. Bien que la pression de radiation acoustique ait été mise en évidence depuis longtemps, les déformations d'interfaces induites par des ondes acoustiques ont fait l'objet de très peu d'études expérimentales. Nous avons étudié le cas d'une interface eau-air, totalement réfléchissante, pour laquelle le couplage propagation-déformation est maximum.

L'onde acoustique continue focalisée sur l'interface est confinée dans la cavité limitée par la surface de l'émetteur immergé et la surface libre. La déformation de l'interface induite par la pression de radiation acoustique modifie la longueur de la cavité, donc les conditions de résonance, ce qui en retour modifie la pression de radiation acoustique s'exerçant à l'interface. La longueur de la cavité présente alors un comportement bistable, qui se traduit par une hystérésis de la hauteur de la déformation fonction de la fréquence ou de l'amplitude de l'onde acoustique. Un modèle à une dimension d'un résonateur de Fabry-Pérot déformable permet de rendre compte fidèlement de ce comportement. Ce phénomène d'hystérésis n'implique pas de non linéarités acoustiques de volume.

Ce phénomène, dont on retrouve des analogues dans les interféromètres des détecteurs d'ondes gravitationnelles, ainsi qu'en microscopie à force atomique, ouvre d'intéressantes perspectives en terme de contrôle d'interfaces.

Abstract. The deformation of liquid interfaces driven by the radiation pressure of an optical or acoustical wave leads to a rich variety of phenomena mainly due to the coupling between the propagation of the wave that deforms the interface and the deformation that influences the wave propagation. Although the acoustic radiation pressure has been evidenced for a long time, very few experiments were performed on the deformations of interfaces driven by acoustic waves. We investigate the case of the totally reflecting water-air interface that leads to a maximum coupling between the propagation and the deformation.

The continuous acoustic wave focused on the interface is confined inside the cavity bounded by the immersed emitter and the free surface. The deformation of the interface induced by the acoustic radiation pressure changes the length of the cavity, and then the resonance conditions, modifying in turn the acoustic radiation pressure applied on the interface. The cavity length then shows a bistable behavior, leading to a hysteresis of the height of the deformation versus the frequency or the amplitude of the acoustic wave. A one dimensional model of a compliant Fabry-Pérot resonator describes well this behavior, which does not involve any bulk acoustic nonlinearities.

This phenomenon, which is also observed in the interferometers of gravitational waves detectors and in atomic force microscopy leads to interesting perspectives in term of interface control.

Le couplage entre le chemin optique d'un résonateur de Fabry-Pérot et l'intensité de la lumière qui se propage dans la cavité peut conduire à de nombreux phénomènes non linéaires statiques ou dynamiques, comme de la bistabilité, des oscillations régénératives, du chaos, etc [1]. On peut réaliser ce couplage soit en plaçant entre les deux miroirs un matériau dont l'indice de réfraction dépend de l'intensité lumineuse (non-linéarités de volume), soit en faisant varier la longueur physique de la cavité grâce à l'interaction des deux miroirs avec la lumière (non linéarités associées aux conditions aux limites). La pression de radiation permet de réaliser cette deuxième option. Ces phénomènes non linéaires ont été étudiés surtout en utilisant des ondes électromagnétiques, mais le couplage entre une onde et un résonateur a aussi été observé avec des ondes mécaniques : autoadaptation à résonance d'un système corde-masselotte mobile

forcé [2], hystérésis de la résonance de cavités acoustiques fermées rigides dans des régimes d'ondes de choc [3], due à la dépendance de la vitesse de l'onde avec l'amplitude [4]. Nous étudions ces phénomènes non linéaires en utilisant des ondes acoustiques. Elles présentent en effet plusieurs avantages :

- des fréquences relativement faibles et des longueurs d'onde relativement grandes impliquées, ce qui permet une mesure directe de la phase des ondes et du chemin optique
- une intensité de la pression de radiation acoustique qui rend ses effets mécaniques notables à l'échelle macroscopique, même avec une onde d'intensité modérée.

Par ailleurs, étudier ces phénomènes en acoustique pose la question de l'universalité des effets mécaniques de la pression de radiation, c'est-à-dire leur dépendance ou non vis-à-vis de la nature de l'onde excitatrice.

Nous présenterons deux aspects de ce couplage onde-résonateur donnant lieu à des phénomènes non linéaires, l'hystérésis de forme d'une interface liquide déformée par la pression de radiation acoustique, et la mise en oscillations auto-entretenues spontanée de cette interface dans certaines conditions.

1 Dispositif expérimental et observation de l'hystérésis

L'expérience est menée sur une interface eau-air, totalement réfléchissante aux ondes acoustiques (le coefficient de transmission en intensité vaut 10^{-3} en incidence normale). L'eau dégazée est placée dans un réservoir transparent. Nous utilisons un transducteur ultrasonore sphérique de marque *Imasonic* (distance focale $F = 38$ mm, ouverture 1, fréquence centrale $f = 2,25$ MHz, bande passante 600 kHz, profondeur de champ 4 mm, temps d'utilisation maximal 5 s), son axe étant vertical (cf Fig. 1). La surface de l'eau se trouve au point focal du transducteur ultrasonore immergé.

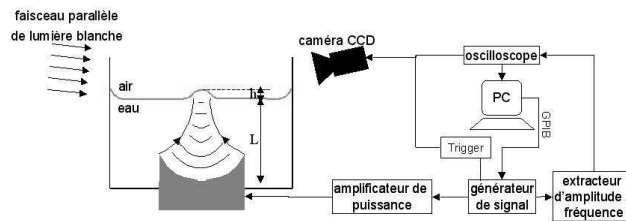


Fig.1. Dispositif expérimental.

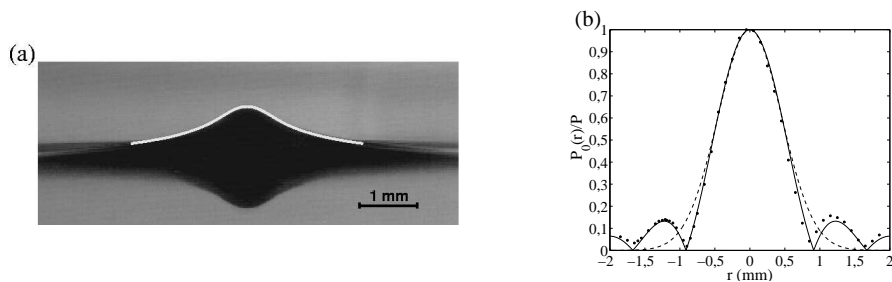


Fig.2. (a) Photo de la déformation stationnaire de la surface libre et de sa réflexion sur l'interface eau-air, observée pour une amplitude de pression incidente $P_i = 0,91$ MPa au point focal et $f = 2,46$ MHz. La ligne blanche continue représente la forme prédite par l'équation 4. (b) Amplitude renormalisée du champ de pression du faisceau entrant mesuré dans le plan focal. La ligne continue est la courbe théorique de la référence [5]. La ligne pointillée représente l'approximation par une gaussienne.

Le transducteur est alimenté par un amplificateur de puissance *Amplifier Research 75A250*, lui-même alimenté par un générateur de signaux piloté par ordinateur. L'amplitude instantanée du signal de sortie du générateur de signaux est extraite grâce à un démodulateur d'amplitude et envoyée vers un oscilloscope numérique. Des mesures de pression indépendantes réalisées dans un grand réservoir d'eau en émettant des trains d'ondes ont montré que dans le plan focal du transducteur, l'amplitude $P_0(r)$ du champ de

pression $p_0(r, t)$ du faisceau émis par le transducteur (que nous appelons plus loin le faisceau *entrant*) est bien décrite par l'expression usuelle pour les transducteurs sphériques [5], comme le montre la figure 2b :

$$P_0(r) = P \left| \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{2\lambda}} \right| \quad (1)$$

J_i est la fonction de Bessel d'ordre i , r le rayon en coordonnées cylindriques, et $\lambda = 660\mu m$ est la longueur d'onde acoustique à la fréquence centrale de fonctionnement du transducteur. Typiquement, l'amplitude de pression acoustique au point focal vaut $P = 0,04$ à $1,2 MPa$. La surface libre de l'eau, située au foyer du transducteur ($L \approx F$), réfléchit totalement le faisceau acoustique incident et est déformée par la pression de radiation, qui vaut [6]

$$\Pi(r) = \frac{2\langle p_i^2(r, t) \rangle_t}{\rho c^2} \quad (2)$$

où $p_i(r, t) = P_i(r)\cos(2\pi ft)$ est le champ de pression du faisceau *incident* au point focal (c'est-à-dire du faisceau entrant $p_0(r, t)$ plus ses réflexions multiples incidentes à la surface), ρ est la masse volumique de l'eau et c est la vitesse du son dans l'eau. La surface est éclairée en incidence rasante par un faisceau parallèle de lumière blanche, et les images de la déformation de la surface sont filmées grâce à une caméra rapide CCD déclenchée par le générateur de signaux. Lorsque l'intensité de l'onde acoustique est continue et modérée, les déformations de la surface liquide sont stationnaires, en forme de cloche, et leur diamètre à mi-hauteur est comparable au diamètre du faisceau acoustique à la moitié du maximum d'énergie ($650\mu m$), cf Fig. 2a. Si par contre P dépasse environ $1,1 MPa$, on observe une fontaine acoustique, c'est-à-dire un jet d'eau instationnaire éventuellement accompagné d'un brouillard de gouttelettes induit par la cavitation [7]. Pour mettre en évidence la bistabilité acoustique, nous faisons croître puis décroître linéairement $P^2 \propto \Pi(0)$ pendant $5s$ et nous mesurons simultanément les variations de la hauteur h de la déformation, définie sur la figure 1, en fonction du temps. Comme le montre la figure 3a, $h(P^2)$ présente plusieurs cycles d'hystérésis.

2 Modélisation

Pour modéliser l'hystérésis observée, nous considérons uniquement le couplage entre la déformation de la surface et l'onde acoustique induite par la pression de radiation, c'est-à-dire que nous négligeons l'effet des non linéarités de volume (nous avons vérifié qu'au point focal, l'amplitude de la première harmonique de pression ne dépassait pas 6 % de celle du fondamental dans le régime étudié) et des écoulements redressés [9]. Le volume compris entre la surface libre et le transducteur constitue une cavité résonante.

Modélisons d'abord la déformation de cette cavité par la pression de radiation. Le temps caractéristique de relaxation de la déformation étant d'une dizaine de millisecondes, la déformation évolue adiabatiquement pendant les rampes de pression de radiation. Par conséquent, sa forme axisymétrique $h(r)$ résulte de la compétition entre la pression de radiation d'une part et la gravité g et la tension superficielle σ d'autre part. $h(r)$ vérifie donc

$$\rho gh(r) - \sigma \kappa(r) = \Pi(r) \quad (3)$$

où $\kappa(r)$ est la courbure de la surface. En supposant que les déformations sont petites, c'est-à-dire que $|h'(r)| \ll 1$, et en supposant que $P_i(r) = P_i \exp(-r^2/\omega_0^2)$, où $\omega_0 = 0,86\lambda$, est l'amplitude de pression du faisceau incident (cf Fig. 2b), la forme de la surface s'écrit [10]

$$h(r) = \frac{P_i^2 \omega_0^2}{4\rho c^2} \int_0^\infty J_0(kr) \frac{\exp\left(-\frac{k^2 \omega_0^2}{8}\right)}{\rho g + \sigma k^2} k dk \quad (4)$$

et la hauteur de la déformation sur l'axe du transducteur vaut

$$h = h(r = 0) = \frac{P_i^2 \omega_0^2}{8\sigma \rho c^2} \exp\left(\frac{\rho g \omega_0^2}{8\sigma}\right) E_1\left(\frac{\rho g \omega_0^2}{8\sigma}\right) \quad (5)$$

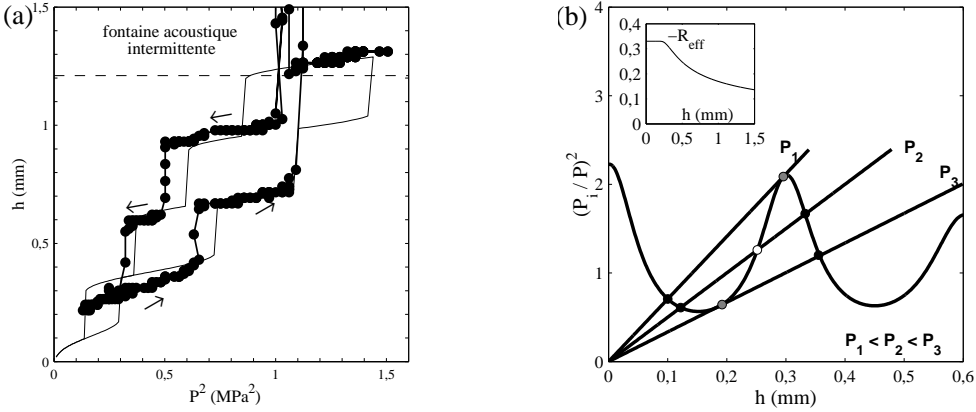


Fig. 3. (a) Hauteur h de la déformation en fonction du carré l'amplitude de pression P^2 du faisceau entrant ($f = 2,5 MHz$) pour une cavité de longueur sans déformation L telle que $L/\lambda = 64,5$. Symboles : données expérimentales. Ligne continue : prédiction théorique du modèle représenté en (b). (b) Modélisation de l'hystérésis acoustique. La courbe est la courbe de résonance de la cavité. Les droites représentent la relation linéaire entre h et la pression de radiation (cf Eq. 5) pour des pressions entrantes $P_1 < P_2 < P_3$. Les points noirs, blancs et gris représentent respectivement les points d'équilibre stable, instable et marginal de la surface libre. L'encart représente la variation en fonction de h du coefficient de réflexion effectif R_{eff} sur le transducteur.

où $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-u)}{u} du$. La figure 2a démontre la précision de ce modèle.

Modélisons d'autre part la cavité acoustique limitée par le transducteur et la surface libre de l'eau comme un résonateur de Fabry-Pérot à une dimension. En considérant que l'énergie acoustique incidente est totalement réfléchiée par la partie plane de la déformation proche de l'axe du faisceau et que l'onde réfléchiée reste plane, on s'attend à ce qu'il y ait résonance lorsque $2(L + h) = n\lambda$ avec n entier (cf Fig. 1). Plus précisément,

$$P_i = \left| 1 - RR' \exp\left(i \frac{4\pi(L + h)}{\lambda}\right) \right|^{-1} P \quad (6)$$

où $R = -0,38 \pm 0,05$ et $R' = -1$ sont les coefficients de réflexion en pression respectivement de la surface du transducteur et de l'interface eau-air mesurés indépendamment. Cependant, le fait que la surface libre de l'eau soit courbée entraîne une défocalisation du faisceau et donc une réduction de l'amplitude des échos à l'intérieur de la cavité. Cette perte d'énergie peut être estimée grâce à l'acoustique géométrique, et est prise en compte par un coefficient de réflexion effectif décroissant avec h (voir l'insert de la Fig. 3b).

Finalement, comme le montre la figure 3b, la hauteur de la déformation est donnée graphiquement par l'intersection de la courbe de résonance réduite $(P_i/P)^2(h)$ définie par l'équation 6 avec la droite $(P_i/P)^2 \propto h/P^2$ déduite de l'équation 5. La multistabilité qui en résulte conduit à une hystérésis à mesure que la pente de la ligne droite varie avec P . Le comportement doué d'hystérésis prédit de h en fonction de P^2 (cf. Fig. 3a) est en bon accord avec les mesures.

3 Oscillations mécaniques auto-entretenues de la surface libre

Il a été montré dans diverses configurations expérimentales que la pression de radiation électromagnétique pouvait provoquer une instabilité paramétrique d'oscillation de cavités optiques déformables [11,12,13,14], qui pourrait limiter la miniaturisation des résonateurs optiques ainsi que les performances des détecteurs d'ondes gravitationnelles [15]. Le mécanisme de cette instabilité proposé est le suivant : une oscillation de la longueur de la cavité à la fréquence $f_1 \ll f$ engendre une onde acoustique à la fréquence $f \pm f_1$ à la réflexion par modulation de phase [16]. Le battement des ondes aux fréquences f et $f \pm f_1$ engendre une modulation de la pression de radiation à la fréquence f_1 qui peut amplifier l'oscillation de

la cavité lorsque l'amplification de l'onde à fréquence $f \pm f_1$ dans la cavité compense sa dissipation [15]. Cette instabilité s'observe donc pour des intensités d'autant plus faibles que le facteur de qualité de la cavité est élevé.

Nous avons aussi observé expérimentalement des oscillations harmoniques spontanées et auto-entretenues de la déformation de la surface libre à une fréquence de l'ordre de 100Hz (voir Fig. 4a). Ces oscillations apparaissent lorsque la hauteur de la déformation vaut entre 1 et 2mm (Fig. 4b). Par ailleurs, elles n'ont lieu que lorsque le sommet de la déformation est éloigné du point focal d'au moins 1mm environ. Enfin, elles disparaissent toujours au-delà d'une certaine hauteur de déformation.

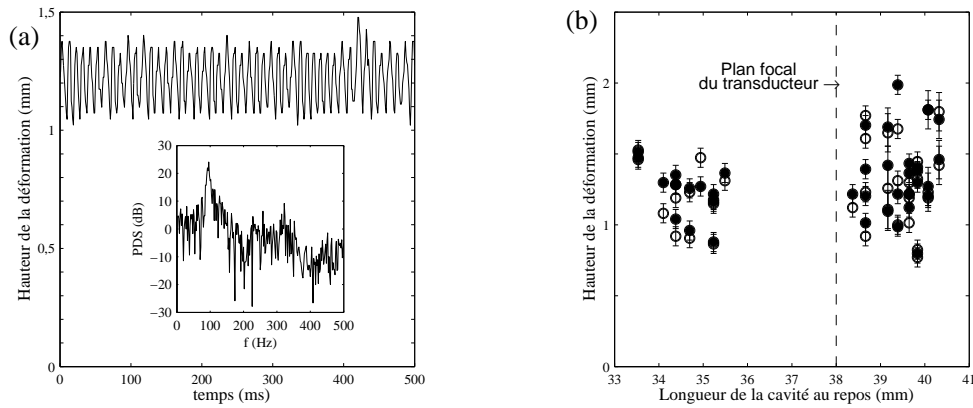


Fig.4. (a) Dans certaines conditions, la hauteur de la déformation oscille avec une fréquence de l'ordre de la centaine de hertz. Dans l'encart, le spectre de puissance de ce signal (la puissance de référence est arbitraire). (b) La hauteur de la déformation à l'apparition (points noirs) et à l'arrêt (points blancs) des oscillations pour différentes longueurs de cavité au repos. On observe que les oscillations n'ont pas lieu lorsque le sommet de la déformation est proche du point focal du transducteur (qui se trouve à 38mm du transducteur).

En adoptant le point de vue de l'optique géométrique, le facteur de qualité Q de la cavité acoustique est a priori maximal lorsque la surface libre et la surface du transducteur sont des miroirs conjugués, c'est-à-dire lorsque la forme des plans d'onde épouse parfaitement celle de la déformation. Autrement dit, le facteur de qualité est a priori maximal lorsque l'interface (i) se trouve au point focal, non déformée (Fig. 5b), (ii) occupe une position particulière de l'interface au-dessus du point focal telle que sa courbure coïncide avec celle des plans d'onde divergents (Fig. 5c). Au contraire, Q est doit être systématiquement plus faible lorsque l'interface se trouve au-dessous du point focal (Fig. 5a). Sur la figure 4b

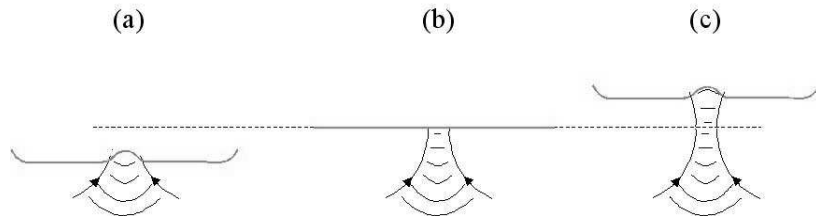


Fig.5. Influence de la forme et de la position de la surface libre par rapport au plan focal sur le facteur de qualité Q de la cavité acoustique : (a) interface au-dessous du plan focal : le faisceau réfléchi ne se superpose pas au faisceau incident, l'onde réfléchie est défocalisée, Q est a priori faible (b) interface au repos dans le plan focal : le faisceau réfléchi se superpose au faisceau incident, Q a priori élevé. (c) interface déformée au-dessus du plan focal, Q a priori élevé.

sont représentées les hauteurs de déformation auxquelles apparaît et disparaît l'instabilité d'oscillation en fonction de la longueur de la cavité L lorsque l'interface est plane. D'après le mécanisme d'instabilité présenté ci-dessus, l'instabilité d'oscillation devrait être observée préférentiellement près du point focal et au-dessus de ce point. Or l'instabilité apparaît à des hauteurs seuils (correspondant à des pressions incidentes seuils) comparables au-dessus et en-dessous du point focal. De plus, l'instabilité d'oscillation n'est pas observée autour du point focal dans la profondeur de champ, où le faisceau acoustique a la structure d'une onde plane. Une étude complémentaire est encore nécessaire sur ce point, mais on peut déjà suspecter que le fait que l'onde acoustique ne soit pas plane en-dehors de la tache focale joue un rôle important dans l'apparition de ces oscillations, ce qui distinguerait ce mécanisme d'oscillation de celui proposé pour les cavités optiques planes.

Conclusion

Nous avons mis en évidence pour la première fois l'hystérésis de forme d'une cavité acoustique formée entre un transducteur ultrasonore sphérique immergé et la surface libre située en son point focal. Cette hystérésis peut être décrite précisément en utilisant un modèle de résonateur de Fabry-Pérot à une dimension, en supposant que la pression de radiation acoustique est le seul couplage mécanique entre la longueur de la cavité et le champ acoustique. Cette étude démontre que, au moins dans une situation stationnaire et à une dimension, le couplage entre une onde et un résonateur par la pression de radiation peut-être décrit de manière universelle pour les ondes électromagnétiques et les ondes acoustiques. Nous avons aussi mis en évidence une instabilité d'oscillation apparaissant lorsque l'interface est placée hors de la tache focale du transducteur. Ces phénomènes originaux mettent en évidence la richesse du couplage non linéaire entre la propagation de l'onde qui déforme une interface et la déformation de l'interface qui modifie en retour la propagation de l'onde [17].

Nous remercions Alice Nicolas et Olivier Misère pour leurs expériences préliminaires, ainsi que Joël Plantard et Sébastien Cassagnere pour leur assistance technique. Ce travail a été financé par le CNRS, l'Université Bordeaux I et la région Aquitaine (contrat n°2005 - 1101010A).

Références

1. H. M. GIBBS, *Optical bistability : controlling light with light*, Academic Press (1985).
2. A. BOUDAUD, Y. COUDER & M. BEN AMAR, *Eur. Phys. J. B*, **9**, 159 (1999).
3. C. C. LAWRENSON, B. LIPKENS, T. S. LUCAS, D. K. PERKINS & T. W. VAN DOREN, *J. Acoust. Soc. Am.*, **104**, 623 (1998).
4. Y. A. ILINSKII, B. LIPKENS & E. A. ZABOLOTSKAYA, *J. Acoust. Soc. Am.*, **109**, 1859 (2001).
5. G. S. KINO, *Acoustic waves, devices, imaging and analog signal processing*, Prentice-Hall (1987).
6. B. CHU & R. E. APFEL, *J. Acoust. Soc. Am.*, **72**, 1673 (1982).
7. R. W. WOOD & A. L. LOOMIS, *Phil. Mag. S. 7*, **4**, 417 (1927).
8. G. HERTZ & H. MENDE, *Z. Physik*, **114**, 354 (1939).
9. *Nonlinear acoustics*, M. F. Hamilton and D. T. Blackstock eds., Academic Press (1998).
10. A. CASNER & J. P. DELVILLE, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 054503 (2001).
11. V. B. BRAGINSKY, A. AB MANUKIN & M. Y. TIKHONOV, *Sov. Phys. JETP*, **31**, 829 (1970).
12. C. HÖHBERGER METZGER & K. KARRAI, *Nature*, **432**, 1002 (2004) — M. VOGEL, C. MOOSER, K. KARRAI & R. J. WARBURTON, *Appl. Phys. Lett.*, **83**, 1337 (2003).
13. T. J. KIPPENBERG, H. ROKHSARI, T. CARMON, A. SCHERER & K. J. VAHALA, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 033901 (2005).
14. T. CARMON, H. ROKHSARI, L. YANG, T. J. KIPPENBERG & K. J. VAHALA, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 223902 (2005).
15. V. B. BRAGINSKY, S. E. STRIGIN & S. P. VYATCHANIN, *Phys. Lett. A*, **287**, 331 (2001).
16. R. WUNENBURGER, N. MUJICA & S. FAUVE, *J. Acoust. Soc. Am.*, **115**, 507 (2004).
17. A. CASNER & J. P. DELVILLE, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 144503 (2003).

Modification géométrique de l'onde cardiaque due à une morphologie particulière du tissu cardiaque

Sabir Jacquir¹, Binczak Stéphane¹, Bilbault Jean-Marie¹ & Laurent Gabriel², Athias Pierre²

¹ Laboratoire LE2I, UMR CNRS 5158, Université de Bourgogne, Dijon, France

² Institut de Recherche Cardiovasculaire, C.H.U, Dijon, France

sjacquir@u-bourgogne.fr

Résumé. En se propageant, l'excitation électrique initiée au niveau du noeud sinusal peut rencontrer des obstacles et des frontières non-excitables dans les tissus myocardiques. Cette rencontre peut engendrer des conséquences pathologiques telles que des arythmies. Dans cet article, la condition de propagation dans une géométrie particulière formée d'un couloir étroit de myocytes relié à une masse plus large de myocytes est étudiée. A l'interface, les ondes ralentissent ou se bloquent selon la largeur du couloir. Une approche analytique pour déterminer la condition de blocage basée sur les fronts d'ondes planaires et les ondes circulaires stationnaires est présentée. L'influence de la géométrie du tissu sur la vitesse de conduction de l'onde est examinée.

Abstract. The behaviour of impulse propagation in the presence of non-excitable scar and boundaries is a complex phenomenon and induces pathological consequences in cardiac tissue. In this article, a geometrical configuration is considered so that cardiac waves propagate through a thin strand, which is connected to a large mass of cells. At this interface, waves can slow down or even be blocked depending on the width of the strand. We present an analytical approach leading to determine the blockage condition, by introducing planar travelling wavefront and circular stationary wave. Eventually, the influence of the tissue geometry is examined on the impulse propagation velocity.

En se propageant, l'excitation électrique, initiée au niveau du noeud sinusal, peut rencontrer des obstacles et des frontières non-excitables dans les tissus myocardiques. Cette rencontre peut engendrer des conséquences pathologiques telles que des arythmies. Dans la plupart des cas, les arythmies mènent à l'infarctus du myocarde qui peut être le syndrome ultime d'une variété de maladies cardiaques [1]. Dans des conditions pathologiques, l'onde cardiaque peut être bloquée par exemple par des zones constituées de cellules non-excitables, qui peuvent induire un circuit de réentrée dans le tissu endocardiaque. Néanmoins, les caractéristiques géométriques normales peuvent également impliquer une variation des propriétés de conduction, comme celles des voies atrioventriculaires, se composant de chemins étroits de myocytes allant de l'oreillette au ventricule [2]. Des recherches menées ces dernières années ont montré que l'architecture du réseau cellulaire formant le myocarde [3] et la géométrie des ondes d'excitation [5,6,7] interviennent dans la naissance des arythmies cardiaques. Par exemple, des ondes spirales provoquent des mécanismes arythmogéniques dans le ventricule [8] ou encore les ondes deviennent instables dues aux arythmies cardiaques [9]. Une partie des études sur la propagation d'onde (potentiel d'action) dans les cellules cardiaques se basent sur des modèles mathématiques [10,11,12,13,14] et sur la dynamique non-linéaire. Un des modèles le plus utilisé de l'excitation et de la propagation de l'impulsion cardiaque est défini par l'équation de FitzHugh-Nagumo (FHN) [15]. Celui-ci reproduit d'une manière qualitative la forme d'un potentiel d'action mais surtout permet une approche analytique. Le but de cet article est d'étudier la condition de propagation dans une géométrie particulière composée d'un couloir étroit relié à une masse plus large de myocytes. En utilisant une version modifiée de l'équation de FHN, nous montrons par une approche asymptotique basée sur le principe d'Huygens, qu'une onde plane en traversant l'interface entre les deux parties du système, se transforme en une onde circulaire. La vitesse de conduction diminue et un phénomène d'arrêt de propagation survient selon la largeur du couloir. Nous déterminons d'une part la largeur minimale du couloir qui permet la propagation de l'onde, et d'autre part la largeur optimale du couloir qui réduit au minimum le délai de passage de l'onde à l'interface des deux parties du système.

1 Méthodes et résultats

Un modèle bidimensionnel est utilisé pour décrire la propagation de l'onde (potentiel d'action) dans une fine tranche de tissu cardiaque. Le milieu est isotrope et sa représentation schématique est donnée par la Fig. 1.

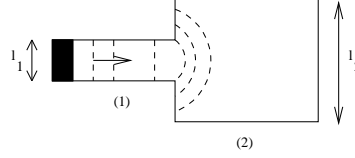


Fig.1. Diagramme schématique de la géométrie du tissu. l_1 (resp. l_2) est la largeur du domaine (1) (resp. domaine (2)). La flèche indique la direction de la propagation, la zone en noir représente la condition initiale.

Dans le domaine d'étude, les équations correspondantes modélisant ce système sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = D\Delta V - f(V) - W \\ \frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon(V - \gamma W) \end{cases} \quad (1)$$

où D est le paramètre de diffusion, t est le temps, Δ est l'opérateur Laplacien, V est la tension transmembranaire. W est la variable de recouvrement, qui indique la capacité (due au courant potassique) du milieu à retourner à son état de repos, après la propagation des impulsions et la fonction non-linéaire $f(V)$ représente le comportement du courant sodique. Habituellement, $f(V)$ est une fonction cubique, mais une simplification usuelle approxime cette fonction en une expression linéaire par morceaux. La caractérisation de la vitesse du potentiel d'action revient à déterminer la vitesse du front montant de l'impulsion, donnée par $\varepsilon = 0$ et $W(t) = 0 \forall t$. Le système (1) devient

$$\frac{\partial V}{\partial t} = D\Delta V - [V - H(V - \alpha)], \quad (2)$$

où α est un seuil entre le rôle passif et actif de la conductance du sodium ($0 < \alpha < 1/2$) et H est la fonction d'Heaviside. Ce système est borné par les conditions de frontières de Neumann, de sorte que

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ dénote la dérivée normale externe à la frontière du domaine borné. Pour étudier une propagation à l'interface, un front d'onde planaire est initié dans le domaine (1). La symétrie induite par ce choix de configuration nous permet de ramener le système à un milieu unidimensionnel continu de sorte que le système puisse être décrit par l'équation bistable suivante,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - [V - H(V - \alpha)]. \quad (4)$$

En introduisant une coordonnée de propagation $\xi = x - ct$, où c est la vitesse du front et x est le paramètre spatial représentant les cellules, eq. (4) peut être écrit de sorte que

$$D \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial V}{\partial \xi} - [V - H(V - \alpha)] = 0, \quad (5)$$

qui se rapporte, en respectant la condition de continuité C^0 , à la solution propagative dans le domaine (1) :

$$\begin{cases} V(\xi) = \alpha e^{\lambda_{2,1}\xi}, & \text{si } V < \alpha \\ V(\xi) = (\alpha - 1)e^{\lambda_{1,2}\xi} + 1, & \text{si } V \geq \alpha \end{cases} \quad (6)$$

où $\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2d} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{c}{d})^2 + \frac{4}{d}}$. Notez que dans [16], la stabilité de ce genre de solution dans un milieu infini a été analysée. Quand cette onde atteint l'interface, une rupture de symétrie se produit, selon la largeur l_1 (resp. l_2) du domaine (1) (resp. domaine (2)) :

- si $l_1 \leq l_c \ll l_2$, l'onde plane incidente est bloquée à l'interface, où l_c est une largeur critique à déterminer,
- si $l_2 > l_1 > l_c$, l'onde plane est transformée en une onde circulaire (l_1 petit) ou en une onde elliptique (l_1 grand),
- si $l_1 = l_2$, une onde plane se propage dans le domaine (2), selon (6).

En cas de blocage, à l'interface des deux domaines, les simulations numériques montrent que la forme de l'onde stationnaire est circulaire. Par conséquent, elle correspond à l'existence d'une solution stationnaire circulaire dans le domaine (2). Afin de déterminer la valeur critique l_c , nous devons exprimer la solution stationnaire dans le cas d'une onde circulaire. En raison de cette symétrie circulaire, nous recherchons une solution stationnaire $V(r)$ avec r , la coordonnée radiale; l'eq. (2) devient alors

$$D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}\right) = V - H(V - \alpha). \quad (7)$$

En introduisant $\rho = r\sqrt{\frac{1}{D}}$, eq. (7) devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} = V - H(V - \alpha). \quad (8)$$

Soit r_a défini par $V(r_a) = \alpha$.

- si $V < \alpha$, eq. (8) devient $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} - V = 0$ et la solution stationnaire est

$$V(\rho) = A_1 I_0(\rho) + B_1 K_0(\rho), \quad (9)$$

où I_0 et K_0 représentent respectivement les fonctions de Bessel modifiées du 1er et du 2nd ordre.

- si $V \geq \alpha$, eq. (8) devient $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} - V + 1 = 0$ et la solution stationnaire est

$$V(\rho) = 1 + A_2 I_0(\rho) + B_2 K_0(\rho). \quad (10)$$

Les conditions suivantes sont imposées pour trouver les constantes A_1 , B_1 , A_2 et B_2 :

- $V(r \rightarrow \infty) = 0$ mène à $A_1 = 0$.
- $V(r = 0) = V_0 > \alpha$ mène à $B_2 = 0$.
- V_0 est l'amplitude maximale de la condition initiale correspondante à $r = 0$.

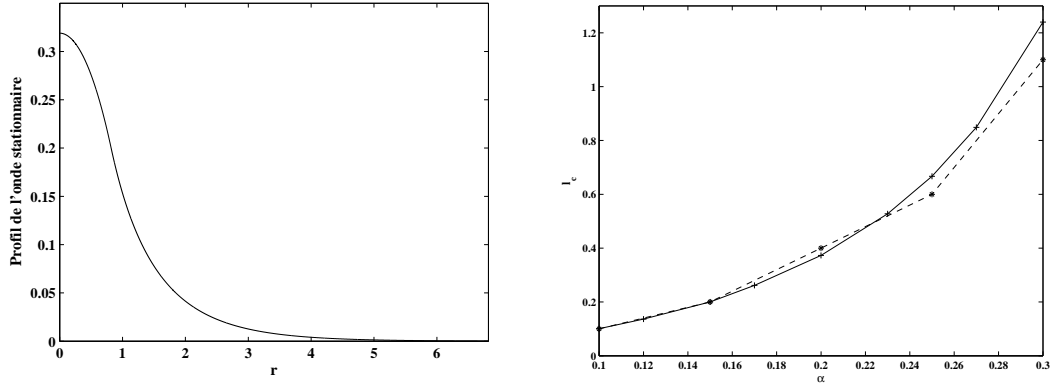
Finalement, la condition de continuité C^0 permet de connaître B_1 et A_2 , la solution stationnaire s'exprime alors par

$$\begin{cases} V(r) = \frac{\alpha K_0(\frac{r}{\sqrt{D}})}{K_0(\frac{r_a}{\sqrt{D}})}, & \text{si } r \geq r_a \\ V(r) = 1 + (\alpha - 1) \frac{I_0(\frac{r}{\sqrt{D}})}{I_0(\frac{r_a}{\sqrt{D}})}, & \text{si } r < r_a, \end{cases} \quad (11)$$

où r_a est déterminé par :

$$r_a = \sqrt{D} I_0^{-1}\left(\frac{\alpha - 1}{V_0 - 1}\right). \quad (12)$$

Une illustration de cette onde est présentée à la Fig. (2a).



(a) Profil de l'onde stationnaire avec $D = 1$, $\alpha = 0.2$, $r_a = 0.8186$ et $V_0 = 0.319$.

(b) l_c en fonction de α ($D = 1$). Les résultats théoriques (cf eq.(14)) en trait continu, les résultats numériques en trait discontinu.

Fig.2.

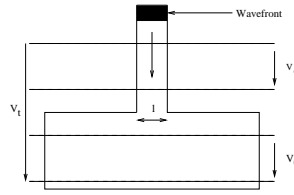
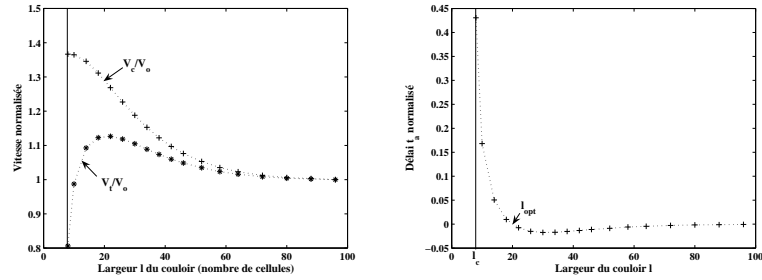
La solution stationnaire donnée par eq. (11) permet de déterminer la largeur critique l_c . En effet, la situation de blocage correspond au cas où une onde plane se propageant dans le domaine (1), donne naissance à une onde circulaire dans le domaine (2). En s'inspirant du principe de Huygens dans la dispersion optique, on suppose que chaque cellule élémentaire provoque une onde circulaire qui mène en une première approximation à une onde circulaire globale de propagation dans le domaine (2). En sachant que le déclenchement d'un front d'onde dans le domaine (2) exige une zone minimale où les cellules sont excitées (*i.e.* $V > \alpha$), nous supposons que cette zone, dans le cas du blocage, est l'endroit de la transformation de l'onde plane avec une vitesse nulle et où $V > \alpha$. Comme $c = 0$, ceci implique

$$V(r) = (\alpha - 1)e^{\sqrt{\frac{1}{2D}}(r-r_c)} + 1, \quad (13)$$

où $r_c = l_c/2 = r_a$. Quand $r \geq r_a$ ($V \leq \alpha$) la distribution spatiale correspond à l'onde stationnaire circulaire définie précédemment (première équation du système (11)). Les conditions de continuité C^0 et C^1 permettent de déterminer l_c de r_c implicitement obtenu par

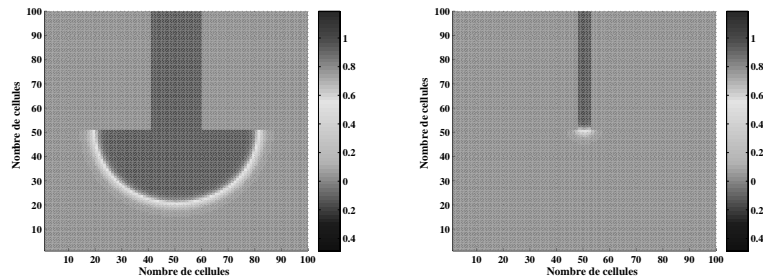
$$(\alpha - 1)\sqrt{\frac{1}{2D}} + \frac{\alpha K_1(r_c\sqrt{\frac{1}{D}})}{K_0(r_c\sqrt{\frac{1}{D}})} = 0. \quad (14)$$

Une comparaison entre les prévisions théoriques et les simulations numériques montre une bonne corrélation entre elles, comme illustré à la Fig. (2b) (résultat basé sur une méthode de différences finies en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 sur une grille de $100 * 100$). Outre le phénomène de blocage confirmé numériquement quand $l_1 \leq l_c$, les simulations numériques indiquent que la propagation de l'onde dans le domaine (2) induit un délai en raison de la transformation de l'onde plane en un front d'ondes courbe. En fait, ce retard est nécessaire pour que les cellules atteignent leur seuil d'excitation, tel qu'observé expérimentalement [2]. Dans la partie qui suit, nous présentons une étude numérique montrant le rapport entre la vitesse, les paramètres intrinsèques du modèle et les caractéristiques géométriques du tissu cardiaque. Un schéma illustrant la forme géométrique du tissu est donnée par la Fig. 3, où l est la largeur du domaine (1), V_c est la vitesse du front d'ondes se situant complètement dans le domaine (1), V_o est la vitesse du front d'ondes se situant complètement dans le domaine (2) et V_t est la vitesse du front d'ondes entre une cellule dans le domaine (1) et une deuxième cellule dans le domaine (2).


Fig.3. Schéma de la géométrie du tissu.


(a) Vitesse de l'onde en fonction de la largeur du couloir.

 (b) Délai t_a en fonction de la largeur du couloir.

Fig.4.


(a) Propagation.

(b) Blockage.

Fig.5.

La Fig. (4a) montre les différentes vitesses du front d'ondes lorsque $\alpha = 0.4$ et $D = 0.5$, en fonction de l (exprimé en nombre de cellules). Les résultats indiquent que la vitesse de l'onde circulaire dans le domaine (2) dépend de la largeur l du couloir et donc du rayon de courbure de l'onde. Il existe une valeur critique l_c de l en-dessous de laquelle un arrêt de propagation survient lors de la transition entre les 2 domaines, montré à la Fig. (5b). Quand l est assez grand, les vitesses sont égales et le front d'ondes n'est pas perturbé par l'interface. Entre ces deux cas, la rupture de symétrie implique un délai correspondant à la transformation géométrique de l'onde plane en un front d'ondes non planaires (voir la Fig. (5a) où une onde circulaire apparaît juste après la région de transition). Soit t_a le temps dont le front d'ondes a

besoin pour traverser l'interface tel que $t_a = \frac{\frac{d_t}{V_t} - \frac{d_o}{V_o} - \frac{d_c}{V_c}}{\frac{d_o}{V_o} + \frac{d_c}{V_c}}$ avec d_i , la distance entre les différentes parties

du milieu pour lequel la vitesse est V_i ($i = t, o, c$). La Fig. (4b) montre que ce retard global peut être positif ou négatif selon la valeur de l . Notez que ce retard peut engendrer des phénomènes de réentrée dus à un manque de synchronicité entre les fronts d'ondes venant de différentes voies. Les résultats indiquent que, en plus du cas de couloirs larges, il existe une largeur optimale l_{opt} autour de laquelle le retard est négligeable (voir la Fig. (4b)). Par conséquent, il pourrait exister une relation possible entre la longueur et la largeur des couloirs empêchant les changements dramatiques de l'activité cardiaque.

2 Conclusion

Dans cette étude, une solution analytique d'un front d'onde dans le cas d'une onde plane a été déterminée. Le critère d'initiation des ondes circulaires a été étudié, basé sur l'existence des ondes stationnaires, pouvant empêcher la propagation. Cet arrêt dépend non seulement du seuil de non-linéarité et du coefficient de diffusion mais également de la morphologie géométrique du syncytium cardiaque et de la forme du front d'onde d'excitation. Ce travail pourrait éventuellement être appliqué pour éviter des phénomènes de réentrée. En d'autres termes, ces résultats pourraient modifier les stratégies utilisées pendant les procédures d'ablation de cellules lors des arythmies. En effet, des applications précises d'ondes radiofréquences à l'intérieur de tissu cardiaque ont pu améliorer la vitesse de conduction dans des zones et empêcher les réentrées [17]. Ceci correspondrait à fixer une largeur optimisée de sorte que le retard deviendrait négligeable, ce qui assurerait alors la synchronicité entre les ondes venant de différents chemins.

Références

1. R.J MYERBURG, A. INTERIAN, R.M MITRAMI, K.M KESSLER AND A. CASTELLANOS, Frequency of sudden cardiac death and profiles of risk, *Am. J. Cardiol*, **80**, 10F-19F, (1997).
2. J.E. SAFFITZ, The pathology of sudden cardiac death in patients with ischemic heart disease-arrhythmology for anatomic pathologists, *Cardiovascular Pathology* **14** 195-203 (2005).
3. S. ROHR, J.P KUCERA AND A.G KLEBER, Form and function : impulse propagation in designer cultures of cardiomyocytes, *News Physiol. Sci.*, **12**, (1997).
4. Y. WANG, Y. RUDY, Action potential propagation in inhomogeneous cardiac tissue : safety factor consideration and ionic mechanism, *Am. J. Physiol.*, **278**, H1019, (2000).
5. V.G. FAST AND A.G. KLEBER, Role of wavafont curvature in propagation of cardiac impulse, *Cardiovascular Research* **33**, 258-271, (1997).
6. V.G. FAST AND A.G. KLEBER, Cardiac tissue geometry as a determinant of unidirectional conduction block : assessment of microscopic excitation spread by optical mapping in patterned cell cultures and in a computer model, *Cardiovascular Research*, **29**, 697-707, (1995).
7. V.G. FAST AND A.G. KLEBER, Block of impulse propagation at an abrupt tissue expansion : evaluation of the critical strand diameter in 2- and 3- dimensional computer models, *Cardiovascular Research*, **30**, 449-459, (1995).
8. H. HENRY AND W.J. RAPPEL, Mécanismes arythmogéniques dans le ventricule, *7e Rencontre du Non-Linéaire de l'Institut Henri Poincaré*, Paris, France, (2004).
9. A. KARMA, Instabilités d'ondes liées aux arythmies cardiaques, *7e Rencontre du Non-Linéaire de l'Institut Henri Poincaré*, Paris, France, (2004).
10. A.G. KLEBER, Y. RUDY, Basic mechanisms of cardiac impulse propagation and associated arrhythmias, *Am. Physiol. Rev.*, **84**, 431-488, (2004).
11. D. NOBLE, A modification of the Hodgkin-Huxley equation applicable to Purkinje fiber action and pacemaker potentials, *J. Physiol.*, **160**, 317-352, (1962).
12. J.D MURRAY, *Mathematical Biology*, Springer Verlag, Berlin (1989).
13. J. KEENER AND J. SNEYD, *Mathematical Physiology, IAM*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
14. A. SCOTT, *Nonlinear Science : Emergence and Dynamics of Coherent Structures*, Oxford Univ. Press (1998).
15. J. NAGUMO, S. ARIMOTO AND S. YOSHIZAWA, An active impulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE* **50**, 2061-2070, (1962).
16. E.P. ZEMSKOV, V.S. ZYKOV, K. KASSNER, S.C. MÜLLER, Stability of travelling fronts in a piecewise-linear reaction-diffusion system, *Nonlinearity*, **13**, 2063-2076, (2000).
17. C. CHILLOU, D. LACROIX, D. KLUG, I. MAGNIEN-POULL, C. MARQUIE, M. MESSIER, M. ANDRONACHE, C. KOUAKAM, N. SADOUL, J. CHEN, E. ALIOT E, S. KACET, Isthmus characteristics of reentrant ventricular tachycardia after myocardial infarction, *Circulation*, **105(6)**, 726-731, (2002).

Coupled Logistic Maps, growing surfaces and slow systems

Eytan Katzav^{1,2} & Leticia F. Cugliandolo^{2,3}

¹ Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

² Laboratoire de Physique Théorique de l'École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

³ Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, Jussieu, 5ème étage, Tour 25, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

eytan.katzav@lpt.ens.fr

Résumé. Nous étudions le comportement spatio-temporel de la limite continue d'un ensemble d'applications logistiques couplées sur un échelle uni-dimensionnelle. Nous montrons que l'équation à dérivés partielles résultante est reliée à l'équation stochastique de croissance de Kardar-Parisi-Zhang et à l'équation de Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov décrivant la propagation des fronts. Une étude du vecteur de Lyapunov du modèle discret confirme que son comportement spatio-temporel est de type KPZ.

Abstract. We discuss the space and time dependence of the continuum limit of an ensemble of coupled logistic maps on a one dimensional lattice. We show that the resulting partial differential equation has elements of the stochastic Kardar-Parisi-Zhang growth equation and of the Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov equation describing front propagation. A study of the Lyapunov vector of the discrete model confirms that its space-time behavior is of KPZ type.

1 Introduction

Coupled map lattices are dynamical systems with very different collective spatio-temporal regimes selected by tuning a few parameters that are, typically, local ones controlling the chaoticity of the independent units, and the coupling between different units [1]. There have been several attempts to use statistical mechanics notions to describe their spatiotemporal behavior [2]. Continuous limits have also been considered [3]. In this contribution we summarize the results of our recent investigation of the continuous limit of a one dimensional ring of diffusively coupled logistic maps [7]. We discuss its connection with (i) the stochastic Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) growth partial-differential equation [4]; (ii) the deterministic Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov (FKPP) partial differential equation for the spreading of a favorable mutation in the form of a wave [5,6].

2 The continuum limit of the coupled map lattice

The logistic map is a non-linear evolution equation acting on a continuous variable x taking values in the unit interval $[0, 1]$:

$$x_n = f(x_{n-1}) \equiv r x_{n-1}(1 - x_{n-1}) . \quad (1)$$

The discrete time is labeled by $n = 0, 1, \dots$. The parameter r takes values in $[0, 4]$. The time series has very different behavior depending on the value of r . For $0 \leq r < 1$ the iteration approaches the fixed point $x^* = 0$. For $1 \leq r < 3$ the asymptotic solution takes the finite value $x^*(r) = 1 - 1/r$ for almost any initial condition. Beyond $r = 3$ the asymptotic solution bifurcates, x_n oscillates between two values x_1^* and x_2^* , and the solution has period 2. Increasing r other bifurcations appear at sharp values. Very complex dynamic behavior arises in the range $r \in [3.57, 1]$: the map has bands of chaotic behavior, *i.e.* different initial conditions exponentially diverge, intertwined with windows of periodic behavior.

A coupled logistic map lattice is a discrete array of coupled continuous variables, x_n^i , each of them evolving in time following (1). A typical interaction that we use here is a nearest neighbors spatial coupling of Laplacian form :

$$x_n^i = f(x_{n-1}^i) + \frac{\nu}{2} [f(x_{n-1}^{i-1}) - 2f(x_{n-1}^i) + f(x_{n-1}^{i+1})], \quad (2)$$

with $x_n^{i+N} = x_n^i$ for all n with N the number of elements on the ring. The initial condition is usually chosen to be random and thus taken from the uniform distribution on the interval $[0, 1]$ independently on each site. ν is the coupling strength between the nodes and plays the role of a viscosity. In a nutshell, the dynamics of this system is characterized by a competition between the diffusion term, that tends to produce an homogeneous behavior in space, and the chaotic motion of each unit, that favors spatial inhomogeneous behavior due to the high sensitivity to the initial conditions.

The main idea is to take the continuum limit of the CML using the usual discretization of time and space derivatives, *e.g.* $\frac{\partial h}{\partial t} \leftrightarrow \frac{h_{n+1}^i - h_n^i}{\delta t}$, *etc.* with δt the time-step and δx the lattice spacing that equal one in our system of units. The CML of logistic elements then becomes

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\nu r}{2}(1-2h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \nu r \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + (r-1)h - rh^2, \quad (3)$$

where we called x the coordinate ($i\delta x \rightarrow x$), t the time ($n\delta t \rightarrow t$), and h the field [$x_n^i \rightarrow h(x, t) = h$].

One immediately notices that eq. (3) looks like a KPZ or FKPP equation but :

- (i) By definition the field h is bounded and takes values in the unit interval. Thus, the resulting equation should have an effective confining potential that limits the field to a finite range. The field is not bounded in KPZ but it is in the FKPP equation.
- (ii) The elastic term is here multiplied by a field-dependent viscosity

$$\nu(h) \equiv \frac{\nu r}{2}(1-2h). \quad (4)$$

First, $\nu(h)$ is negative for $h < 1/2$ which implies an instability in the hydrodynamic limit. It was shown in [8] and [9] that in the Kuramoto-Sivashinsky equation a similar instability taps the system and so creates an effective ‘noise’ leading to a mapping onto the KPZ equation. The confining potential restrains the instabilities caused by $\nu(h) < 0$. Second, if h remains bounded the viscosity takes values on a finite interval. However, we expect the field-dependent bare viscosity to be renormalized at large scales by the effect of the non-linear terms (see below) and thus its precise value seems not to be very important.

- (iii) The second, non-linear term is of the form of the one in the KPZ equation with a negative coupling $\lambda \equiv -\nu r$, though the sign of λ should not be important. This term does not exist in the FKPP equation.
- (iv) The last two terms read

$$\eta(x, t) \equiv (r-1)h(x, t) - rh^2(x, t). \quad (5)$$

We notice that these terms are not present in the KPZ equation. In order to compare to the latter we argued that they have a double identity : on the one hand η behaves roughly as a short-range correlated noise in space and time; on the other hand it can be interpreted as a force derived from a confining potential

$$\eta = -\frac{\partial V(h)}{\partial h}, \quad V(h) = -\frac{(r-1)}{2}h^2 + \frac{r}{3}h^3. \quad (6)$$

On the other hand, these terms are identical to the ones in the FKPP equation with a particular choice of the parameters in the source terms.

3 Results

Having the connection with KPZ and FKPP equations in mind we integrated numerically the CML of logistic units with up to $N = 1024$ sites and periodic boundary conditions, and we analyzed the space and time behavior of several observables. All units were updated in parallel. We focused on parameters that set the system in the asymptotic chaotic regime (typically, $\nu = 0.4$ and $r = 4$).

First, we analyzed the statistical properties of the ‘noise’ η_n^i and we found that, even though it is not a perfect random noise it is rather short-ranged correlated in space and time. These terms also provide a confining potential to the surface fluctuations and its roughness is suppressed.

The decay in time of the field-field correlations is still non-trivial and very similar to the one found for the (usual and unbounded) KPZ equation [see, [10,11,12]]. In Fig. 1 we show the space averaged, time correlation of the field [$\langle h_{m+n} h_m \rangle$].

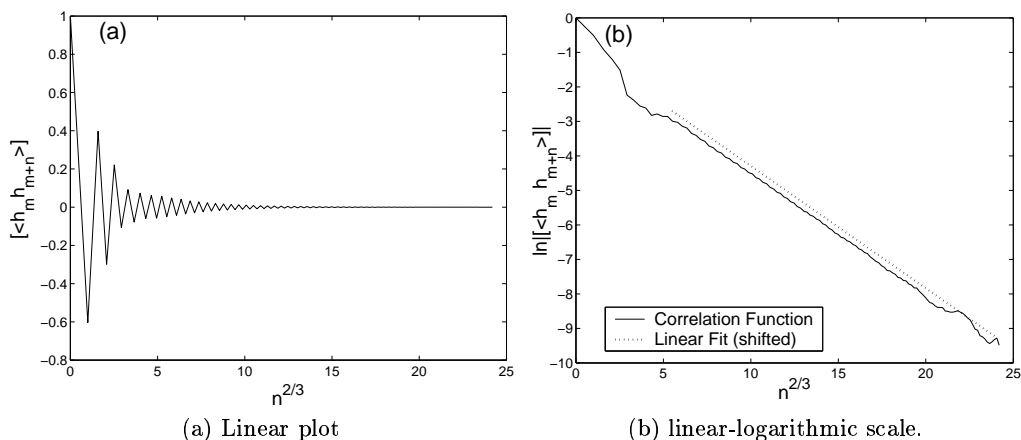


Fig.1. The correlation function [$\langle h_{m+n} h_m \rangle$] as a function of $n^{2/3}$.

The linear dependence in the linear-logarithmic scale used in panel (b) indicates the stretched exponential decay

$$C_n^h(t) \approx e^{-n^\zeta}, \quad \text{with} \quad \zeta = 2/3. \quad (7)$$

Panel (a) shows that the decay occurs in an oscillatory way. The dependence of the exponent ζ with r is very weak. A number of authors have signalled the possible relevance of CMLs in describing different aspects of glassy relaxation. Recently, [13] studied the same model in its intermittent regime ($\nu = 0.4$, $r \approx 3.83$) with the aim of relating the 10 orders of magnitude stretched exponential decay of its distribution of trapping times (times in which an element remains locked into one of the coarse-grained values $s_n^i = \pm 1$) to the one observed in super-cooled liquids, and they associated this stretched exponential decay to the one of the correlation function. As we have already stressed, we also obtain a stretched exponential relaxation for larger value of r where trapping intervals for the coarse-grained variables s_n^i do not exist.

In the same spirit, we derive a continuum partial differential equation governing the evolution of the Lyapunov vector of that system. The notion of a Lyapunov vector is one of the ways to extend the notion of Lyapunov exponent to space-time chaos. By deriving the continuum equation, we confirm a conjecture by [14,15] that the space-time behavior of the Lyapunov vector becomes the one of the KPZ through a mapping to the Directed Polymer problem. The largest Lyapunov exponent is then obtained from the norm of the Lyapunov vector. If one uses the so-called 0-norm,

$$N_0(t) = \exp \left[\frac{1}{L} \int_0^L h(x, t) dx \right], \quad (8)$$

it is then assured to be a self-averaging quantity. In addition, the Lyapunov exponent is given by

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln N_0(T) - \ln N_0(0)}{T}, \quad (9)$$

and this is no other than the large-deviation function for the Asymmetric Exclusion Process (ASEP), calculated previously by Derrida and Appert [16]. The ASEP is a discrete model in the universality class as KPZ in one dimension. In terms of the ASEP, the Lyapunov exponent is given by

$$\lambda = \rho(1 - \rho) + \sqrt{\frac{\rho(1 - \rho)}{2\pi L^3}} G\left(\sqrt{2\pi\rho(1 - \rho)L}\right) \quad (10)$$

where L is the system size, ρ is a the density of particles (a parameter in ASEP), and $G(\beta)$ is a scaling function independent of L and ρ and known is an implicit form (see [16] for more details).

This result is useful for studying finite size effects and, more importantly, it can be used to estimate the largest Lyapunov exponent. Doing this we get $\lambda = 9/32 \simeq 0.28$ while in numerical simulations it was found to be $\lambda \simeq 0.38$ [15] which is of the same order of magnitude as our result.

Finally, we analyzed the interpretation of the continuum limit of the CML as a FKPP non-linear diffusion equation with an additional KPZ non-linearity and the possibility of developing traveling wave configurations. We found that the CML do indeed have traveling wave solutions with a velocity that depends on the initial conditions. A more careful analysis is needed to classify them all.

4 Conclusions

Emergence of slow relaxations for this system signals the possible relevance of CMLs in describing different aspects of glassy relaxation, as was already noticed by several authors. With the baggage gained from the current understanding of the dynamics of glassy systems we intend to address generations of effective temperatures in this nonlinear chaotic system and the possible appearance of a fluctuation relation.

Acknowledgements : We thank very useful discussions with H. Chaté, B. Derrida, J. González, J. Kurchan, S. Majumdar, N. Mousseau, I. Procaccia, L. Trujillo and F. Zamponi, and financial support from PICS 3172. L. F. C. is a member of IUF.

Références

1. K. KANEKO, *Chaos* **2**, 3 (1992).
2. P. C. HOHENBERG and B. I. SHRAIMAN, *Physica D* **37**, 109 (1989).
3. L. A. BUNIMOVICH, *Physica D* **86**, 248 (1995).
4. M. KARDAR, G. PARISI and Y-C ZHANG, *Physical Review Letters* **56**, 889 (1986).
5. R. A. FISHER, *Annals of Eugenics* **7**, 355 (1937).
6. A. N. KOLMOGOROV, I. G. PETROVSKII and N. S. PISCOUNOV, *Moscow University Mathematics and Mechanics* **1**, 1 (1937).
7. E. KATZAV AND L. F. CUGLIANDOLO, cond-mat/0512019.
8. V. YAKHOT, *Physical Review A* **24**, 642 (1981).
9. V. S. L'VOV, V. V. LEBEDEV, M. PATON and I. PROCACCIA, *Nonlinearity* **6**, 25 (1993).
10. F. COLAIORI and M. MOORE, *Physical Review E* **63**, 057103 (2001); *ibid* **65**, 017105 (2001).
11. M. SCHWARTZ and S. F. EDWARDS, *Physica A* **312**, 363 (2002).
12. E. KATZAV and M. SCHWARTZ, *Physical Review E* **69**, 052603 (2004).
13. S. I. SIMDYANKIN and N. MOUSSEAU, *Physical Review E* **68**, 041110 (2003).
14. A. S. PIKOVSKY and J. KURTHS, *Physical Review E* **49**, 898 (1994).
15. A. S. PIKOVSKY and A. POLITI, *Nonlinearity* **11**, 1049 (1998).
16. D. DERRIDA and C. APPERT, *Journal of Statistical Physics* **94**, 1 (1999).

Approximation des équations 3D de la magnétohydrodynamique par une méthode spectrale-éléments finis nodaux

R. Laguerre

LIMSI (CNRS-UPR 3251), BP 133, 91403, Orsay, France
laguerre@limsi.fr

Résumé. Ce projet s'inscrit dans le développement d'un code de résolution des équations de la MHD. L'objet de cet article est de présenter une nouvelle méthode de résolution des équations de Maxwell dans un milieu hétérogène, utilisant des éléments finis de Lagrange et une technique de pénalisation de type Galerkin discontinue pour imposer les continuités nécessaires. Cette méthode s'est montrée satisfaisante pour des cas simples. Nous proposons dans cet article des résultats en rapport avec l'effet dynamo, pour une configuration bien connue (dynamo de Ponomarenko), puis pour un projet expérimental en cours de développement (dynamo de Perm).

Abstract. The Maxwell equations in the MHD limit are solved in heterogeneous domains by using Lagrange finite elements and by enforcing continuities across interfaces using an interior penalty technique. Comparisons show good agreement with analytical solutions or previously published numerical solutions. We show in this paper some results dealing with dynamo action.

1 Introduction

Le but du présent article est de présenter et de valider une nouvelle méthode numérique de résolution des équations de la magnétohydrodynamique (MHD) en trois dimensions. Une des principales difficultés numériques à surmonter dans ce type de problème est l'hétérogénéité du domaine de calcul. Il est composé d'un domaine conducteur et d'un domaine isolant, généralement du vide. Les équations de Maxwell dans ces deux domaines ne s'expriment pas de la même façon. La loi d'Ohm ne s'applique plus dans le vide. Certaines conditions de passage sont alors à respecter au niveau de l'interface entre les deux milieux, et des conditions aux limites acceptables doivent être imposées sur les bords du domaine numérique, de manière à respecter une décroissance du champ magnétique en $1/r^3$ lorsque l'on s'éloigne des sources de perturbation du champ magnétique.

Plusieurs approches ont été proposées pour résoudre ce type de problème. L'une d'elles consiste à considérer le domaine isolant comme un domaine très faiblement conducteur et ensuite à éliminer le champ électrique \mathbf{E} des équations de Maxwell [4]. Une autre approche consiste à considérer le champ électrique \mathbf{E} à l'extérieur du domaine comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de rotationnel nul du champ magnétique \mathbf{H} dans le vide [2]. Cette méthode s'est avérée être efficace en deux dimensions en utilisant des éléments finis mixtes [3]. Mais son extension à trois dimensions d'espace, en gardant les deux champs \mathbf{E} et \mathbf{H} , deviendrait très coûteuse. C'est ce qui nous a amené à choisir une formulation utilisant le potentiel magnétique.

L'approche que nous avons choisie pour résoudre les équations de la MHD est largement présentée dans [5] pour la résolution des équations de Maxwell. Cette approche consiste à exprimer le champ magnétique à rotationnel nul dans le domaine isolant comme le gradient d'un potentiel scalaire ϕ . De cette façon, le nombre de variables est réduit. Une autre approche, utilisant des éléments de frontière, permet également de réduire le nombre de variables. Cette méthode s'est avérée efficace dans le cas de la diffusion ohmique [6]. Nous utilisons des éléments finis de Lagrange pour approcher \mathbf{H} et ϕ et utilisons une méthode de pénalisation de Galerkin (IPG) pour imposer la continuité entre H et $\nabla\phi$. Cette méthode apparaît satisfaisante dans le cas de Benchmark 3-D et de dynamo.

L'article se divise en deux parties. Nous présentons dans la première les équations à résoudre ainsi que la méthode de résolution. Dans la seconde, il s'agit de présenter des résultats obtenus dans notre cadre d'intérêt, l'effet dynamo.

2 Equations et méthode numérique

Les équations complètes de la MHD se composent des équations de Navier-Stokes incompressibles et des équations de Maxwell. Ces deux ensembles d'équations interagissent par l'intermédiaire de la loi d'Ohm, responsable des effets d'induction, et de la force Laplace, qui traduit la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse. Dans cet article, on s'intéresse à la résolution des équations de Maxwell uniquement, en considérant un champ de vitesse figé qui ne sera pas influencé par la force de Laplace. Dans cette partie, nous dérivons une formulation $\mathbf{H}-\phi$ des équations de Maxwell, par élimination du champ électrique et nous introduisons la méthode de pénalisation, permettant d'imposer la continuité du champ magnétique à l'interface.

2.1 Formulation $\mathbf{H}-\phi$ des équations de Maxwell

Dans le cas de la MHD, les équations de Maxwell sont résolues dans l'approximation des courants de Foucault, le terme de courant de déplacement de l'équation de Maxwell-Faraday est négligé. Une étude asymptotique de cette approximation est présentée dans [1]. L'approximation est valable tant que la vitesse caractéristique de déplacement du fluide reste faible devant la vitesse de la lumière. Les équations à résoudre deviennent :

$$\begin{cases} \mu \partial_t \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mu \mathbf{H}) + \mathbf{j}^s, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0, \end{cases} \quad (1)$$

avec \mathbf{H} le champ magnétique, \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{u} le champ de vitesse, \mathbf{j}^s un éventuel courant source, σ la conductivité électrique et μ la perméabilité magnétique du milieu. Les deux premières équations sont à résoudre dans l'ensemble du domaine de calcul, que nous appellerons Ω . Le problème est muni d'une condition initiale \mathbf{H}_0 , et des conditions limites découlant de la formulation faible du problème, à savoir l'imposition des composantes tangentielles du champ électrique sur la frontière Γ du domaine.

Pour les problèmes que nous voulons traiter, le domaine Ω se compose de deux milieux différents. Il y a un milieu conducteur Ω_c et un milieu isolant Ω_v . Dans le domaine isolant, la loi d'Ohm ne s'applique pas et le champ magnétique est à rotationnel nul. Il peut donc s'exprimer comme le gradient d'un champ scalaire ϕ , à condition que Ω_c soit simplement connecté. Des conditions de passage sont à respecter au niveau de l'interface Σ entre les deux milieux. Les composantes tangentielles des champs magnétique et électrique doivent être continues :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^c \times \mathbf{n}^c + \mathbf{E}^v \times \mathbf{n}^v)|_{\Sigma} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{H}^c \times \mathbf{n}^c + \mathbf{H}^v \times \mathbf{n}^v)|_{\Sigma} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2)$$

où les exposants c et v signifient que le champ est pris dans Ω_c ou Ω_v et les vecteurs \mathbf{n}^c et \mathbf{n}^v sont les normales extérieures à leurs domaines respectifs. Dans notre méthode, \mathbf{E} est éliminé et les conditions de passage à l'interface Σ s'expriment comme la continuité entre les composantes tangentielles de \mathbf{H} et de $\nabla\phi$, et la continuité entre les composantes normales de $\mu^c \mathbf{H}$ et de $\mu^v \nabla\phi$. On aboutit à un système d'équations pour \mathbf{H} et pour ϕ , couplées par les conditions de continuité à l'interface :

$$\begin{cases} \mu_c \partial_t \mathbf{H}^c = -\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} (\nabla \times \mathbf{H}^c - \mathbf{j}^s) - \mathbf{u} \times \mu^c \mathbf{H}^c \right), & \text{dans } \Omega_c, \\ \mu_v \partial_t \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega_v, \\ (\nabla \times \mathbf{H}^c - \sigma \mathbf{u} \times \mu^c \mathbf{H}^c) \times \mathbf{n}^c = \sigma \mathbf{a} + \mathbf{j}^s \times \mathbf{n}^c & \text{sur } \Gamma_c, \\ \mu_v \partial_{\mathbf{n}^v} (\partial_t \phi) = -\mathbf{n}^v \cdot \nabla \times (\mathbf{n}^v \times \mathbf{a}), & \text{sur } \Gamma_v, \\ \mathbf{H}^c \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi \times \mathbf{n}^v = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \mu_c \mathbf{H}^c \cdot \mathbf{n}^c + \mu_v \nabla \phi \cdot \mathbf{n}^v = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{H}^c|_{t=0} = \mathbf{H}_0^c, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0. \end{cases} \quad (3)$$

où Γ_c et Γ_v sont les bords de Ω_c et Ω_v ne contenant pas la frontière Σ . Nous retrouvons une équation d'évolution pour \mathbf{H}^c et une autre pour ϕ .

2.2 Méthode de pénalisation Galerkin discontinue

Nous approchons la solution du système (3) à l'aide d'une méthode éléments finis. Nous utilisons des éléments de Lagrange de degré 1 pour le champ magnétique dans le domaine conducteur, et des éléments de degré 2 pour le champ potentiel ϕ dans le domaine isolant. Il y a différentes façons d'imposer les continuités à respecter au niveau de l'interface. Il est possible de l'imposer directement dans l'espace des fonctions d'approximation, en utilisant des éléments de Nédélec [1]. Nous avons choisi d'imposer les continuités des champs à l'aide d'une méthode de pénalisation de type Galerkin discontinue. Cette méthode consiste à rajouter un terme de pénalisation théoriquement nul dans la formulation faible des équations (3). La résolution du problème consiste alors à trouver les champs \mathbf{H}_h et ϕ_h tels que, pour toutes les fonctions tests \mathbf{b} et ψ suffisamment régulières :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_h|_{t=0} = \mathbf{H}_{0,h}, & \phi_h|_{t=0} = \phi_{0,h}, \\ \int_{\Omega_c} \mu^c \partial_t \mathbf{H}_h \cdot \mathbf{b} + \int_{\Omega_v} \mu^v \nabla \partial_t \phi_h \cdot \nabla \psi + a_h((\mathbf{H}_h, \phi_h), (\mathbf{b}, \psi)) = J(\mathbf{H}_h; \mathbf{b}, \psi), \end{cases} \quad (4)$$

Le terme source J se décompose en un terme de forçage éventuel dû à un courant imposé et un terme traduisant l'influence des conditions aux limites. Dans la forme bilinéaire a_h , on retrouve un terme de dissipation, un terme assurant la consistance du schéma numérique et un terme ajouté de pénalisation qui s'exprime de la manière suivante :

$$Pen((\mathbf{H}_h, \phi_h), (\mathbf{b}, \psi)) = \int_{\Sigma} \frac{\beta}{h} (\mathbf{H}_h \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi_h \times \mathbf{n}^v) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n}^c + \nabla \psi \times \mathbf{n}^v). \quad (5)$$

Théoriquement, ce terme est bien nul, et on observe qu'il est pondéré par une constante β ajustable, h étant le pas d'espace. Il force la quantité $\frac{\beta}{h} (\mathbf{H}_h \times \mathbf{n}^c + \nabla \phi_h \times \mathbf{n}^v)$ à rester faible sur l'interface. Cette méthode est stable et convergente lorsque β est assez grand.

Techniquement, nous avons choisi d'écrire l'ensemble des équations dans un repère cylindrique, et de décomposer toutes les variables en séries de Fourier suivant la direction azimutale. De ce fait, la géométrie du problème doit être axisymétrique (sphère, cylindre, ellipsoïde,...). L'avancée temporelle est discrétisée à l'aide d'un schéma semi explicite (BDF2) d'ordre 2. Enfin, les conditions limites peuvent être imposées de deux manières. La première consiste à imposer les valeurs des composantes tangentielles de \mathbf{E} , ce qui revient à imposer le flux de $\partial_t \phi$ sur Γ_v (conditions limites de Neumann). La seconde solution est d'imposer directement la valeur de ϕ sur Γ_v (conditions limites de Dirichlet), ce qui revient à imposer la composante tangentielle du champ magnétique.

3 Résultats : Effet dynamo

Dans le but de valider notre méthode, nous avons abordé des cas simples, tels que la diffusion dans la sphère ou le cylindre périodique, qui admettent des solutions analytiques, puis la diffusion dans un cylindre fini et une ellipse. Nous avons ensuite abordé des problèmes d'induction tels que le rotor placé dans un champ uniforme. Les résultats obtenus sont satisfaisants [9]. Pour plus de clarté, nous ne présenterons ici que les résultats relatifs à l'effet dynamo. Le paramètre de contrôle de l'instabilité dynamo est le nombre de Reynolds magnétique, défini par :

$$R_m = \frac{UL}{\eta}, \quad (6)$$

avec U et L des valeurs caractéristiques d'une vitesse et d'une longueur, et η la diffusivité magnétique. Ce nombre adimensionné compare le temps caractéristique d'advection et le temps caractéristique de diffusion du champ. L'étude des problèmes de dynamo que nous allons présenter consiste à obtenir les valeurs critiques R_m^c , ainsi que d'autres valeurs pertinentes, pour lesquelles le taux de croissance du champ magnétique devient positif.

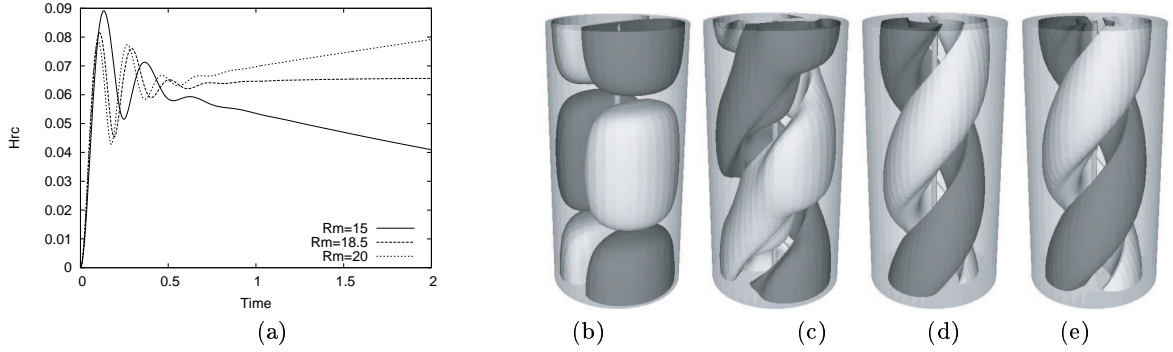


Fig.1. Dynamo de Ponomarenko dans un cylindre périodique : (a) Evolution temporelle de la partie réelle de H_r pour différents nombres de Reynolds magnétique; isosurfaces de la composante axiale de \mathbf{H} avec 25% du maximum (en noir) et 25% du minimum (en blanc), (b) à l'instant initial, (c) pendant le régime transitoire, et pendant le régime asymptotique, (d) à $t = 0.7$ et (e) à $t = 1$.

3.1 La dynamo de Ponomarenko

Nous avons choisi cette configuration afin de simuler un problème bien connu en trois dimensions [10,11] et qui a donné lieu à l'observation de l'effet dynamo en laboratoire. Dans sa version analytique, la configuration consiste en un écoulement hélicoïdal de fluide conducteur dans un cylindre de rayon R_i ($u_r = 0$, $u_\theta = r\omega$, $u_z = \chi R_i \omega$), placé dans un milieu conducteur infini et au repos. Dans ces conditions, le mode propre critique associé au plus bas nombre de Reynolds magnétique $R_m^c = 17.73$, correspond à $\chi = 1.3$, $k = -0.39$ et $m = 1$, où k et m sont les nombres d'onde axial et azimutal respectivement.

Dans notre étude, l'écoulement est entouré de conducteur immobile jusqu'à $R_o = 2R_i$ et l'ensemble est plongé dans du vide avec $R_v = 8R_i$. Afin de comparer nos résultats avec [7], nous prenons $\chi = 1$ et $L_z^c = L_z^v = 8$ et nous prenons la même définition du nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu\sigma R_i^2 \omega$, basé sur la vitesse de rotation ($\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$). L'écoulement est axisymétrique et périodique en z et le terme de couplage, $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H})$, est linéaire en \mathbf{H} . La solution initiale doit donc être excitée en mode azimutal $m = 1$ et être axialement périodique, de période L_z^c (nombre d'onde axial $k_n = 2\pi n/L_z^c$). La condition initiale utilisée s'écrit :

$$\begin{aligned} H_r(r, \theta, z, t = 0) &= 0, \\ H_\theta(r, \theta, z, t = 0) &= -J_2(zj_2 r/R_o)k_1 \cos(\theta) \sin(k_1 z), \\ H_z(r, \theta, z, t = 0) &= J_2(zj_2 r/R_o) \sin(\theta) \cos(k_1 z)/r, \end{aligned} \quad (7)$$

où $j_2 = 5.135662\dots$ est la première racine de la fonction de Bessel J_2 . Le potentiel extérieur est nul à $t = 0$. La figure 3(b) présente cet état initial.

La figure 3(a) montre l'évolution de la partie réelle de la composante H_r pour $R_m = 15$, $R_m = 18.5$ et $R_m = 20$. Nous obtenons, par interpolation linéaire des taux de croissance, une approximation du nombre de Reynolds magnétique critique qui vaut $R_{mc} = 18.5$. On observe que l'évolution de la composante, qui est nulle à $t = 0$, présente un régime transitoire d'un temps de l'ordre de la période de rotation ($2\pi/R_m$). La fréquence axiale, obtenue à partir de la période axiale, vaut environ $0.11R_m$. Ces résultats sont en accord avec [7]. Lorsque le nombre de Reynolds magnétique est pris au dessus du seuil, on observe sur la figure 3(c)(d)(e) que la source du mode instable est localisée sur la discontinuité du champ de vitesse en $r = 1$, là où le cisaillement est maximum. Le mode instable est alors en forme d'hélice.

Cet exemple valide le code dynamo pour des conductivités du fluide et du conducteur immobile identiques. Nous sommes en train de tester le code en imposant un saut de conductivité électrique entre le domaine de fluide en mouvement et le domaine conducteur au repos.

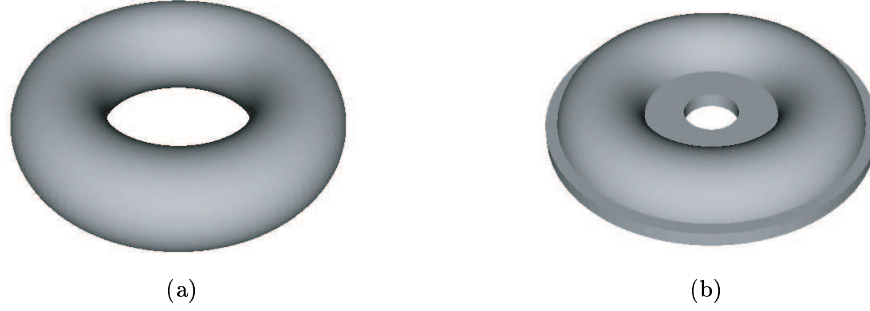


Fig.2. Représentation des deux configurations utilisées pour la modélisation de la dynamo de Perm. Le rayon au centre vaut $R = 4$, le rayon intérieur d'une section est $r_0 = 1.2$, et le rayon extérieur $r_1 = 1.6$. La conductivité du matériau constituant ces tores vaut cinq fois celle du fluide ($\sigma_{shell} = 5\sigma$). (a) cas 'Tore'; (b) cas 'Perm' plus proche de la réalité.

3.2 La dynamo de PERM

Nous ne sommes pas encore capables de simuler des problèmes de tokamak, mais il est possible d'étudier des écoulements de fluide conducteur dans des tores, comme c'est le cas dans l'expérience de Perm [8]. L'idée de l'expérience est d'engendrer un effet dynamo au sein d'un écoulement instationnaire hélicoïdal dans un container toroïdal. Ce tore est mis en rotation rapide et est brusquement freiné. Pour modéliser ce problème, nous considérons un écoulement stationnaire élicoidal dans un tore de rayon au centre $R_i = 4$, de rayon de section $r_0 = 1.2$ et d'épaisseur $e = r_1 - r_0 = 0.4$. La conductivité électrique du tore est 5 fois celle du fluide ($\sigma_{sh} = 5\sigma_{fl}$). Deux configurations différentes ont été étudiées et sont montrées sur la figure 3.2 : la première (*Tore*) consiste en un tore simple, et la seconde (*Perm*) est plus proche de l'expérience avec un manchon rajouté au tore initial. L'écoulement dans les deux configurations, pour un rayon de section r_0 est :

$$\begin{cases} u_r = -\chi(R_m/r_0) \frac{Rz}{r_0 r} \\ u_\theta = R_m/r_0 \\ u_z = \chi(R_m/r_0) \frac{R(r-R)}{r_0 r} \end{cases} \quad (8)$$

où χ est le rapport entre vitesses poloidale et toroidale et R_m le nombre de Reynolds magnétique défini par $R_m = \mu\sigma r_0 U$. Nous avons pris $\chi = 1$ comme dans [8]. Pour la même raison que dans le cas de la dynamo de Ponomarenko, la condition initiale doit contenir l'ensemble des modes à tester. Nous voulons a priori tester tous les modes à part le mode $m = 0$ car l'écoulement est axisymétrique, auquel cas la dynamo serait impossible. La condition initiale consiste à allumer une boucle de courant purement toroïdale ($\mathbf{j}^s = j_0 \mathbf{e}_\theta$) pendant un temps court, pour l'ensemble des modes azimutaux. Nous avons effectué ces simulations pour différents R_m et nous trouvons que le mode instable est le mode $m = 3$, correspondant aux nombres de Reynolds critiques $R_{mc}(Perm) = 16 \pm 0.5$ et $R_{mc}(Torus) = 17.5 \pm 0.5$. Ces valeurs critiques sont plus faibles que celles obtenues dans [8] pour $(r_1 - r_0)/r_0 = 0.33$ dans le cas d'un cylindre périodique ($R/r_0 \rightarrow 0$) similaire au cas d la figure 3. Cette différence pourrait provenir de l'effet de courbure introduit dans le problème. Pour $R_m = 17 > R_{mc}(Perm)$, on observe sur la figure 3.2 que la source du mode instable se situe également au niveau du cisaillement fort du champ de vitesse.

4 Conclusion

Nous avons montré que notre méthode de résolution des équations de Maxwell est satisfaisante pour des cas de dynamo cinématique. Cette méthode donne également de bons résultats pour des cas plus simple de diffusion ou d'induction [5,9].



Fig.3. Isosurfaces de la composante azimutale de \mathbf{H} avec 25% du maximum (en noir) et 25% du minimum (en blanc), pour le cas 'Tore' à deux instants : (a) $t = 1$ et (b) $t = 2 \sim 1 + T/4$ avec T la période.

Cette méthode présente pour l'instant une limitation, qui est qu'elle s'applique seulement à des cas pour lesquels le champ magnétique dans le domaine isolant peut s'exprimer sous la forme d'un potentiel. Cela est vérifié lorsque la circulation du champ magnétique sur tout circuit fermé dans le domaine isolant est nulle. Ainsi, nous ne sommes pas encore capables de modéliser des tokamak, mais le code de calcul peut être utilisé pour d'autres applications telles que le chauffage par induction dans des formes axisymétriques, ou des mesures de résistivité électrique.

Notre objectif est maintenant de coupler la résolution des équations de Maxwell à la résolution des équations de Navier-Stokes. Le code hydrodynamique éléments finis est prêt. Il nous sera alors possible d'étudier des problèmes non linéaires et plus réalistes de MHD en trois dimensions.

Références

1. A. BOSSAVIT *Electromagnétisme en vue de la modélisation*, SMAI/Springer-Verlag, Paris (1993).
2. J.-L. GUERMOND AND P.D. MINEV, Mixed Finite element approximation of an MHD problem involving conducting and insulating regions : the 2D case, *modél. Math. Anal. Numér. (M2AN)*, **36** (3), 517-536 (2002).
3. J.-L. GUERMOND, J. LÉORAT AND C. NORE, A new Finite Element Method for magneto-dynamical problems : two-dimensional results, *Eur. J. Mech./Fluids*, **22**, 555-579 (2003).
4. K. H. CHAN, K. ZHANG, J. ZOU AND G. SCHUBERT, A non-linear, 3-D spherical α^2 dynamo using a finite element method, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **128**, 35-50 (2001).
5. J.-L. GUERMOND, R. LAGUERRE, J. LÉORAT AND C. NORE, A Discontinuous Galerkin Method for the MHD equations in heterogeneous domains, En préparation, (2006)
6. A. B. ISKAKOV, S. DESCOMBES AND E. DORMY, An integro-differential formulation for magnetic induction in bounded domains : boundary element-finite volume method, *J. Comput. Phys.*, **197** (2), 540-554 (2004)
7. R. KAISER AND A. TILGNER, Kinematic dynamos surrounded by a stationary conductor, *Phys. Rev. E*, **60** (3), 2949-2952 (1999)
8. W. DOBLER, P. FRICK AND R. STEPANOV, Screw dynamo in a time-dependent pipe flow, *Phys. Rev. E*, **67**, 056309 (2003)
9. R. LAGUERRE, C. NORE, J. LÉORAT AND J.-L. GUERMOND, Induction effects in isolated axisymmetric conductors using a new finite element method, à paraître dans proceedings of MHD Summer Program 2006.
10. F. PÉTRÉLIS, Instabilité Dynamo : Etude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique, PhD Thesis, Ecole normale supérieure (2002).
11. YU. B. PONOMARENKO, Theory of the hydromagnetic generator, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **14**, 775 (1273)

Transition du Map vers le Flot dans un oscillateur opto-électronique à retard

L. Larger¹, D. Fournier², P. Lacourt¹, & S. Poinso¹

¹ FEMTO-ST, UMR 6174, Univ. de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, France

² Groupe SYD, LESIA, DGEI, INSA, 135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 4 FRANCE

laurent.larger@univ-fcomte.fr

Résumé. Nous présentons un montage expérimental permettant d'obtenir, en fonction d'un paramètre temporel, une dynamique temporelle non linéaire qui est soit de type discret (application $x_{n+1} = f(x_n)$), soit de type continu (flot $\dot{x} = f(x, t)$). L'interprétation physique de ce nouveau type de montage permet de répondre à la problématique de la validité de l'approximation singulière du Map (aussi appelé approximation adiabatique) posée dans le cas des dynamiques à retard.

Abstract. We report a new experimental setup, which allows for the observation of a discrete time dynamic (map $x_{n+1} = f(x_n)$) or a continuous time one (flow $\dot{x} = f(x, t)$), depending on a particular time parameter. The physical interpretation of this new kind of setup enables to answer to the non-validity of the singular limit map (or adiabatic) approximation well known for delay differential dynamics.

Les systèmes dynamiques à retard possèdent cette particularité étrange de pouvoir générer des comportements chaotiques de grande complexité évoluant dans un espace des phases de dimension infinie [1], à l'aide d'une simple équation dynamique scalaire :

$$\tau \dot{x}(t) + x(t) = f[x(t - \tau_R)]. \quad (1)$$

Dans le cas où les composantes fréquentielles d'une trajectoire solution $x(t)$ sont limitées à des basses fréquences (comparées à la fréquence caractéristique liée au temps de réponse physique τ ($f_c = 1/(2\pi\tau)$)), une approximation courante consiste à négliger le terme différentiel $\tau \dot{x}(t)$ dans (1), et à considérer que la trajectoire solution est constituée d'une succession de valeurs constantes sur des intervalles de temps correspondant au retard τ_R . Cette approximation appelée *adiabatique* dans la littérature, ou encore *limite singulière du Map*, conduit à une simplification assez radicale de (1) en une application d'ordre 1 :

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ avec } x_n = x(n\tau_R + t) \text{ pour } t \in [0, \tau_R[. \quad (2)$$

Bien que rude, cette approximation conduit dans le cas des grands retards ($\tau_R \gg \tau$) à de très bons accords de comportements dynamiques entre les solutions de l'application (2), celles de la simulation numérique de (1), et celles qui sont observées dans des systèmes physiques réalisant des dynamiques non linéaires à retard [2,3]. Ce très bon accord est toutefois limité aux solutions de faible complexité, de type point fixe ou cycle limite d'ordre peu élevé, précisément ceux pour lesquels les composantes fréquentielles sont principalement de l'ordre de $1/\tau_R$, rendant ainsi le terme différentiel négligeable dans l'équation (1).

Pour les régimes de plus grande complexité, ceux pour lesquels le poids des non linéarités devient significatif dans le processus dynamique, générant ainsi de plus en plus de hautes fréquences en $1/\tau$, le flot à retard commence effectivement à occuper le grand nombre de degrés de libertés de son espace des phases infini (taille des conditions initiales pour le flot à retard : une fonctionnelle $x(t)$ pour $t \in [-\tau_R, 0]$, donc une infinité de valeurs; alors que dans le cas de l'application, il s'agit bien sûr d'une condition initiale de dimension 1 : $x_{n=0}$). Cette différence importante entre flot et application –parmi d'autres– retire beaucoup de crédibilité à l'approximation adiabatique, malgré la simplicité et l'efficacité relative de celle-ci. Le travail présenté ici a pour but de proposer une vision alternative d'interprétation du flot à retard par une application à temps discret, en faisant appel à un schéma qui préserve la grande dimension lors du passage de l'un à l'autre [4].

1 Oscillateur opto-électronique à temps discret ou continu

Le schéma expérimental à la base de ce travail est directement lié à une application récente des dynamiques chaotiques et de leur possible synchronisation : la cryptographie par chaos [5,6]. Le développement de cette application dans le domaine de l'optique a été particulièrement conséquent, du fait du potentiel de sécurisation qui peut être proposé au niveau de la couche physique, et du fait de la très grande rapidité de cryptage qui peut être obtenue (au delà de ce que peuvent faire les techniques algorithmiques classiques). Une démonstration sur un réseau installé a même pu être faite récemment [7] à un débit supérieur au Gb/s, et sur une distance de plus de 100 km. Dans ce contexte de communications optiques par chaos, les dynamiques non linéaires à retard ont joué un rôle central pour fabriquer la porteuse chaotique. Un retard pur (i.e. avec une très faible dispersion pour l'ensemble des composantes fréquentielles du chaos) est en effet très facilement réalisé par une simple longueur d'un milieu de propagation (la fibre optique).

Cependant, les porteuses chaotiques utilisées pour l'instant sont issues d'un flot à retard, et correspondent donc à des comportements en temps continu difficilement compatibles avec la plupart des systèmes de communication modernes, qui opèrent sur la base du rythme régulier d'une horloge, donc à temps discret. À partir de cette problématique, nous avons cherché les moyens expérimentaux de produire un comportement dynamique chaotique en amplitude, mais discret en temps, de manière à pouvoir envisager une interface de communication compatible avec les systèmes en temps discret des communications numériques.

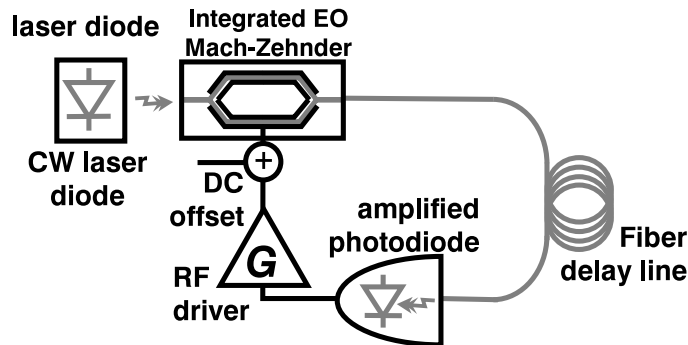


Fig.1. Oscillateur opto-électronique non linéaire, large bande, à retard.

Le schéma de la figure 1 représente un des oscillateurs chaotiques de [7] produisant un comportement chaotique très large bande d'une porteuse optique, destinée à masquer un message optique à haut débit. Le flot chaotique de l'intensité optique de sortie est produit de la manière suivante : le faisceau laser continu qui entre dans un interféromètre électro-optique de Mach-Zehnder, est modulé de manière non linéaire par une tension de commande d'amplitude largement supérieure à celle permettant de passer d'une interférence constructive à une interférence destructive. La fonction de transfert de modulation en question est celle d'une interférence à deux ondes de contraste unité, elle correspond à la fonction $f(x) = \beta \sin^2(x)$ dans l'équation (1). Le résultat optique de cette transformation non linéaire est ensuite retardé dans le temps par une durée τ_R , puis détecté par une photodiode, amplifié, et filtré par le processus dynamique limitant de la partie électronique de la boucle d'oscillation. Le signal résultant correspond alors à la commande même de modulation non linéaire de la lumière par l'interféromètre en optique intégrée. Lorsque le gain de la boucle d'oscillation est suffisant, on observe effectivement un comportement chaotique de grande complexité, dont le spectre est quasi plat sur une large gamme de fréquences liée à la bande passante de la partie électronique (près de 10 GHz en pratique, ce qui correspond dans (1) à $1/(2\pi\tau)$). Cet oscillateur non linéaire est typiquement à grand retard, puisque les quelques mètres de fibre optique conduisent à $\tau_R = 45$ ns de retard temporel, alors que le temps de réponse électronique est de l'ordre de $\tau \simeq 40$ ps.

À l'image des principes de communications numériques RZ (Return-to-Zero), nous avons eu l'idée assez simple de remplacer la source laser continue par une source laser impulsionnelle qui rythme ha-

bituellement les communications optiques de type RZ. Les impulsions irriguant alors le modulateur de Mach–Zehnder, sont caractérisées par une largeur d’impulsion τ_p , et une période de répétition des pulses T_r . Pratiquement, les impulsions ont une largeur très petite devant le temps de réponse électronique τ , alors que la période de répétition est réglable à des valeurs soit largement supérieures soit légèrement supérieures à τ , de 400 ps à 100 ps (resp. 2,5 GHz à 10 GHz).

Si l’on ajuste précisément le retard temporel de la boucle d’oscillation à un multiple entier N de la période des pulses optiques, chacun de ces pulses est modulé non linéairement par la même fonction de transfert de modulation du Mach–Zehnder. Le résultat retardé de ces pulses optiques modulés en amplitude est ensuite détecté par la photodiode, amplifié et filtré par la contre-réaction électronique. Ce filtrage va avoir pour effet d’élargir l’image électrique des impulsions optiques, selon la réponse impulsionnelle de cette partie électrique (caractérisée par la constante de temps τ). Selon la largeur temporelle de la réponse impulsionnelle par rapport à la période de répétition des impulsions optiques, les impulsions électriques sont soit indépendantes si elles sont bien séparées temporellement, soit en interaction via la superposition temporelle de deux impulsions électriques successives. Une première approche de modélisation d’un tel système donne l’application en temps discret suivante :

$$x_n = \beta \cdot \sin^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (h_k \cdot x_{n-N-k}) + \Phi_0 \right], \quad (3)$$

où les h_k peuvent être interprétés comme les échantillons de la réponse impulsionnelle électronique échantillonnée par les impulsions optiques. L’indice N représente le nombre d’impulsions optiques stockées pendant un tour dans la cavité opto-électronique. Lorsque les impulsions électriques successives sont bien séparées, cela signifie que seul h_0 peut-être conservé dans la sommation infinie, et l’application en temps discret est d’ordre 1. Plus les impulsions sont proches, et plus il faut considérer un grand nombre d’échantillons de la réponse impulsionnelle.

2 Résultats expérimentaux

La figure 2 représente des diagrammes de bifurcation numériques et expérimentaux obtenus en faisant varier continûment, et lentement, le gain de la boucle d’oscillation. Une coupe verticale de chacun de ces diagrammes représente la densité de probabilité de la variable dynamique codée en niveaux de gris, pour un gain fixé, donc pour un régime dynamique fixé. Lorsque le gain augmente, on observe une route progressive vers le chaos.

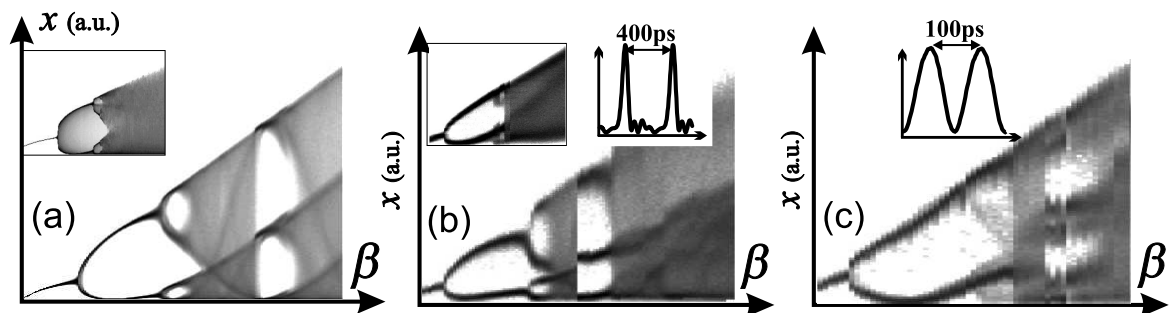


Fig.2. Diagrammes de bifurcation ; a : simulation numérique, b : $T_r = 400$ ps, c : $T_r = 100$ ps.

La figure 2a représente le résultat de la simulation numérique effectuée à partir de (3) pour un modèle discret ; l’insert de cette figure correspond à une simulation dans des conditions très similaires, mais à partir d’un modèle de flot du type de (1). On remarque une différence caractéristique entre le flot et le modèle discret, la présence d’une fenêtrée de périodicité (période 3) à l’intérieur des zones chaotiques dans le cas du temps discret uniquement.

La figure 2b correspond au relevé expérimental dans le cas où les impulsions optiques sont suffisamment éloignées pour pouvoir être séparées lors de leur conversion / amplification électrique ($T_r = 400$ ps). L'insert de gauche représente également le même diagramme de bifurcation, du même système expérimental, mais dans le cas d'un laser continu (auquel correspond un oscillateur en temps continu). À nouveau, on peut remarquer que l'expérience confirme la présence d'une fenêtre de périodicité de période 3 dans le cas du temps discret uniquement.

Enfin, la figure 2c illustre un début de transition du temps discret vers le temps continu, lorsque la séparation des impulsions électriques ne peut plus être faite aussi nettement. Ce diagramme correspond à un taux de répétition des impulsions optiques de 100 ps seulement. L'insert représente l'allure dans le domaine électrique des impulsions optiques détectées; cette image des impulsions optiques apparaît nettement comme une variation quasi-continue (de type sinusoïdal), alors que dans la figure précédente, les impulsions électriques ont toujours un aspect impulsionnel. On remarque aussi dans le diagramme de bifurcation, que la fenêtre de périodicité tend à se fermer et à disparaître, du fait de la transition du comportement dynamique du temps discret vers le temps continu.

3 Conclusion

Nous avons présenté un montage expérimental en opto-électronique dont on peut ajuster la nature temps continu ou temps discret du comportement dynamique, en fonction de l'utilisation d'une source laser continue ou impulsionnelle. Le comportement en temps continu du système dynamique semble pouvoir être retrouvé à partir de l'utilisation d'une source impulsionnelle, lorsque l'on augmente la cadence de répétition des impulsions optiques, comparativement au temps de réponse électronique de l'oscillateur : la transition temps discret / temps continu est définie par la résolution, ou la non-résolution des impulsions optiques par la partie électronique. Ce mécanisme de transition, contrairement à la limite singulière du Map, conserve la grande dimension des dynamiques à retard. En effet, en temps discret, deux impulsions successives sont résolues et indépendantes, et le nombre de degrés de liberté est alors lié au nombre d'impulsions stockées dans l'oscillateur à retard. De plus, lorsque les impulsions utilisées ont un taux de répétition de plus en plus élevé, cette dimension n'augmente pas indéfiniment; elle est en effet limitée par le temps de réponse physique τ de l'oscillateur. Cette limitation de dimension par le rapport τ_R/τ est tout à fait connu dans le cas du calcul de dimension de Lyapounov des dynamiques à retard [8].

Références

1. T. ERNEUX, Les dynamiques non linéaires à retard, *Compte-Rendus de la 8ème Rencontre du Non Linéaire*, pp. 73–78 (2005).
2. K. IKEDA, Multiple-Valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System, *Optics Communications*, **30** (3), 257–261 (1979).
3. H. M. GIBBS, F. A. HOPF, D. L. KAPLAN & R. L. SHOEMAKER, Observation of chaos in optical bistability, *Physical Review Letters*, **46** (7), 474–477 (1981).
4. L. LARGER, P.-A. LACOURT, S. POINSOT, M. HANNA, From flow to map in experimental high dimensional electro-optic nonlinear delay oscillator, *Physical Review Letters*, **95** (4), 043903 (2005).
5. L. M. PECORA & T. L. CARROLL, Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters*, **64** (8), 821–824 (1990).
6. K. M. CUOMO & A. V. OPPENHEIM, Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications, *Physical Review Letters*, **71** (1), 65–68 (1993).
7. A. ARGYRIS, D. SYVRIDIS, L. LARGER, V. ANNOVAZZI-LODI, P. COLET, I. FISCHER, J. GARCIA-OJALVO, C. R. MIRASSO, L. PESQUERA, K. A. SHORE, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fiber-optic links, *Nature*, **437**, 343–346 (2005).
8. B. DORIZZI, B. GRAMMATICOS, M. LE BERRE, Y. POMEAU, E. RESSAYRE & A. TALLET, Statistics and dimension of chaos in differential delay systems, *Physical Review A*, **35** (1), 328–328 (1987).

Solitons spatiaux dissipatifs dans des résonateurs optiques modulés : effets de résonances

M. Le Berre¹, E. Ressayre¹, M. Taki², S. Coulibaly² and M. Tlidi³

¹ Laboratoire de Photophysique moléculaire, Bat. 210, Université de Paris Sud, 91 405 Orsay cedex

² PHLAM, Université de Lille, Villeneuve d'Ascq

³ Laboratoire d'Optique nonlinéaire, ULB, Bruxelles, Belgique

`martine.le-berre@ppm.u-psud.fr`

Résumé. La modulation périodique d'un paramètre spatial, en une dimension, est étudié pour deux résonateurs optiques avec absorbant saturable, le laser et l'oscillateur paramétrique dégénéré, qui présentent des solutions localisées, ou solitons, de profil spatial symétriques et asymétriques, respectivement, avec des ailes oscillantes. On observe une amplification de l'énergie du soliton lorsque la fréquence du modulation est respectivement une harmonique, ou une sous-harmonique, de celle de l'aile du soliton.

Abstract. Under one dimensional transverse periodic modulation, two optical cavities with saturable absorber are studied, (i) the laser, and (ii) the degenerate optical parametric oscillator, which display both localized solutions with oscillating tails of symmetrical and asymmetrical spatial profiles, respectively. When the frequency of the modulation is twice (i), or half (ii) the spatial frequency of the oscillating tail, strong modifications of the spatial profiles are observed.

1 Introduction

Des solitons, en une dimension transverse, ont été étudiés récemment dans des systèmes nonlinéaires avec modulation périodique d'un paramètre. Les premières études concernaient des systèmes conservatifs (cristaux photoniques, condensation de Bose, etc..) régis par l'équation de Schrodinger nonlinéaire où des solitons de Bragg (ou de bande interdite) ont été analysés [1]. Ces solitons sont des solutions stationnaires de l'équation, de la forme $A(x, t) = \Phi(x)e^{i\mu t}$, où la fonction réelle $\Phi(x)$ décroît à l'infini et où la fréquence μ appartient à une des bandes interdites du spectre de l'équation linéaire. Dans ce cas il y a deux familles de solitons que l'on peut distinguer par la valeur de la fréquence spatiale k_0 de l'onde porteuse (i) les solitons normaux, avec $k_0 = 0$, dont le profil spatial est centré sur un puits de potentiel, et (ii) les solitons décalés, avec $k_0 = k_m/2$, dont le profil spatial est centré sur un maximum du potentiel. Très peu d'études ont été menées pour les solitons de systèmes périodiques dissipatifs, à l'exception du travail de Staliunas [3] qui a montré l'existence d'une grande variété de solitons dans le laser avec absorbant saturable (LAS) : non seulement des solitons normaux et décalés, mais aussi une 3ème famille dite "de milieu de bande", dont le spectre spatial est centré sur une fréquence porteuse k_0 intermédiaire entre 0 et $k_m/2$. Une analyse linéaire simplifiée incluant les deux modes spatiaux de nombre d'onde k_0 et k_m permet de déduire la largeur des solitons. Dans la limite des grandes valeurs de k_m , ce travail montre ainsi l'existence de solitons très étroits, ce qui présente un avantage considérable pour des applications potentielles au stockage de l'information. Nous considérons ici un aspect qui n'a pas été abordé dans cette dernière étude, bien qu'il concerne, outre le LAS, de nombreux systèmes dissipatifs. Nous étudions l'effet du forçage multiplicatif sur les structures localisées présentant des ailes oscillantes, i.e. dont la solution s'accroche sur sa base par des oscillations amorties. La présence, dans le spectre, de la fréquence d'accrochage k_p va profondément modifier les caractéristiques des solutions dans le domaine $k_m \sim k_p$. Nous mettons en évidence deux comportements différents selon que le soliton est mobile ou fixe, en illustrant notre propos par deux exemples, les solitons immobiles du LAS, et les solitons mobiles asymétriques de l'oscillateur paramétrique dégénéré avec absorbant saturable (DOPOAS).

2 Solitons symétriques du laser

Dans l'approximation de champ moyen, l'amplitude complexe du champ électromagnétique du LAS obéit à l'équation

$$\partial_t A = \left(\frac{D_0}{1 + |A|^2} - 1 - \frac{\alpha_0}{1 + s|A|^2} + (g + id)\partial_{xx} + iV(x) \right) A \quad (1)$$

contenant respectivement les termes de gain, pertes linéaire et saturable, diffusion, diffraction, et de modulation périodique de l'indice de réfraction suivant la variable transverse $V(x) = m(e^{ik_m x} + e^{-ik_m x})$.

2.1 Solitons sans modulation

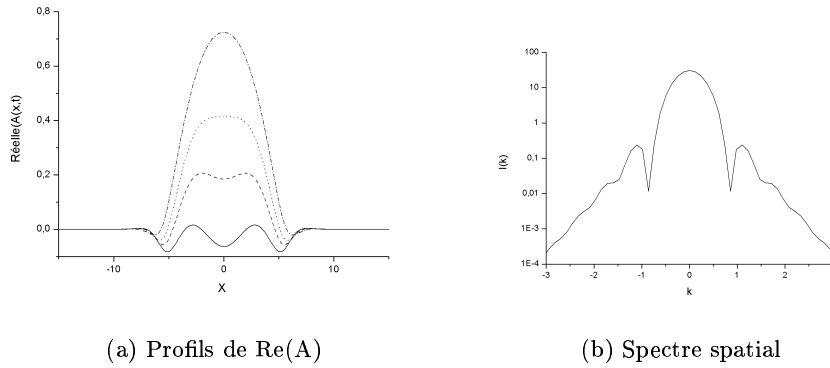


Fig.1. LAS non modulé pour $m = 0$, $D_0 = 1.65$, $\alpha = 5$, $s = 100$, $d = 1$, $g = 10^{-4}$

Des solitons ont été reportés dans ce système bistable, en absence de modulation [2], $m = 0$. La solution est de la forme $A(x, t) = \Phi(x)e^{i\omega t}$, où $\phi(x)$ tend vers zéro à l'infini, et vers la solution homogène stable en $x = 0$. Si l'intensité décroît de façon monotone, la fonction complexe $\Phi(x)$ présente des oscillations au voisinage de la base, c'est-à-dire lorsque la partie réelle ou imaginaire de $\Phi(x)$ est voisine de zéro, cf. Fig. 1, où la partie réelle de $A(x, t)$ est représentée sur 1/4 de période, aux instants $t = n\pi t/6\omega$, $n = 1, 2, 3, 4$. Le spectre spatial contient un pic central et deux pics latéraux centrés sur les nombres d'onde $\pm k_p$. La valeur de k_p est en accord qualitatif avec les prédictions de l'analyse linéaire au voisinage de la solution triviale. En supposant $A = e^{-i\omega t + Kx - ik_{p,lin} x}$, on obtient $k_{p,lin}^2 = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2 + (D_0 - 1 - \alpha_0)^2}$. Précisons que si la valeur numérique de k_p est très proche de $k_{p,lin}$ au seuil d'existence du soliton, elle décroît lorsque son intensité augmente. En particulier dans le domaine où l'intensité devient oscillante, au-delà de la bifurcation de Hopf [2], on remarque que *les minima de k_p sont associés aux maxima de la largeur du soliton*. Les modulations spatiales observées entre les deux points d'accrochage du soliton sur sa base, sont analogues à celles d'une corde forcée dont on varierait la longueur. Cette propriété va se révéler être la clef pour comprendre la suite.

Bien que l'amplitude des modes latéraux soit 10 fois plus faible que celle du mode central, nous allons montrer qu'ils peuvent jouer un grand rôle lorsque le système est soumis à des modulations spatiales extérieures.

2.2 Solitons avec forçage spatial

Nous reportons ici l'effet des modulations sur les solitons normaux, i.e. émis suivant l'axe optique. Une évaluation de leur largeur a été proposée, basée sur une analyse linéaire bi-modale de l'équation (1) au

voisinage de $A = 0$. Bien que très simplifiée, cette analyse décrit qualitativement les effets d'élargissement et de rétrécissement des solitons lorsque le nombre d'onde k_m est très supérieur à la largeur du spectre spatial du soliton non modulé. En supposant $A = e^{ik_0x}(A_0 + A_1e^{ik_mt})e^{-i\omega t}$, les termes imaginaires du système couplé $-i\omega A_{0,1} = -idk_{0,1}^2 A_{0,1} + imA_{1,0}$ conduisent à une relation de dispersion d'où l'on déduit que la largeur du soliton w_{sol} normal modulé est $w_{sol} \propto \sqrt{d}(1 - f^2/2)$, où $f = 2m/(dk_m^2)$ est le contraste de modulation. La largeur d'un soliton normal modulé est donc légèrement réduite par rapport à celle d'un soliton non modulé, et indépendante du nombre d'onde k_m , si $k_m \gg k_p$. Nous montrons ici que

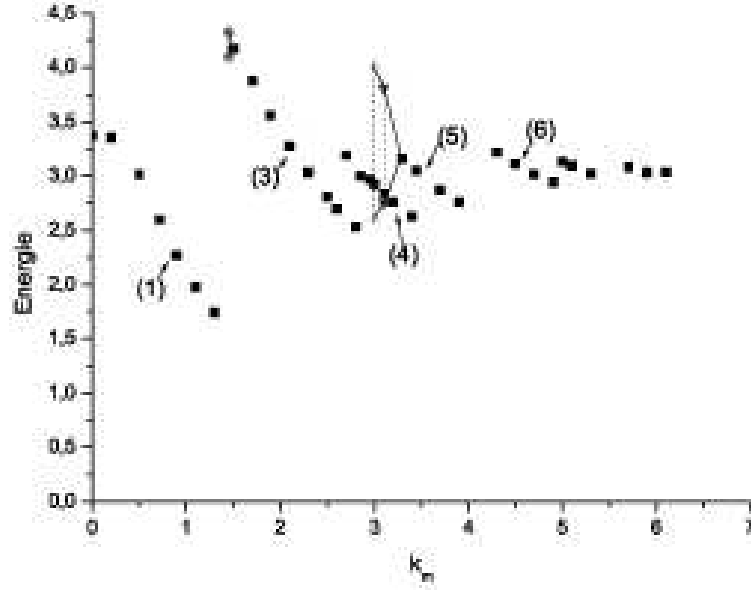


Fig.2. Energie du soliton modulé du LAS en fonction du nombre d'onde k_m , mêmes paramètres que ceux de la Fig. 1, sauf $f = 0.15$

les caractéristiques du soliton dépendent fortement de k_m dans le domaine des "petits" nombre d'onde (de l'ordre de quelques k_p). L'énergie $\Xi = \int |A(x)|^2 dx$ du soliton modulé, est reporté Fig. 2, où chaque portion de courbe décroissante correspond à une forme particulière du profil de l'intensité, présentant un nombre constant d'extréma ($n_{ext} = 1, 3, 4, 5, 6$, indiqué sur la figure). On obtient des courbes analogues à celle de la Fig. 2 en reportant en ordonnée la largeur du soliton, ou encore les amplitudes des trois composantes spectrales, de nombre d'onde $k = 0, \pm k_p$ et $\pm k_m$ (excepté au voisinage de $k_m \sim 0$ où l'on n'observe qu'un large pic central non différencié). Sur chaque domaine défini par n_{ext} , la décroissance de l'énergie en fonction de k_m , est due essentiellement à un rétrécissement du soliton, sa hauteur changeant peu, cf. Figs. 3 représentant les profils d'intensité aux extrémités des domaines pour $n_{ext} = 1, 3, 5$. Le rétrécissement spatial du soliton s'accompagne de l'augmentation du nombre d'onde k_p , comme dans le cas du soliton non modulé, cf. section 2.1. Le long des domaines qui présentent des maxima d'énergie, $n_{ext} = 3, 5, 6$, les nombres d'onde des 2 modes latéraux obéissent à la relation

$$k_m = Nk_p \quad (2)$$

avec respectivement $N = 2, 3, 4$. Pour $N = 2$, qui correspond au pic de résonance le plus intense, cette relation indique le blocage en phase des termes e^{ik_px} et $e^{ik_mx}e^{-ik_px}$ de $A_0(x)$ et $A_0(x)V(x)$, respectivement. Les pics de résonance correspondent aux valeurs inférieures de k_m le long de chaque domaine où la relation (2) est vérifiée.

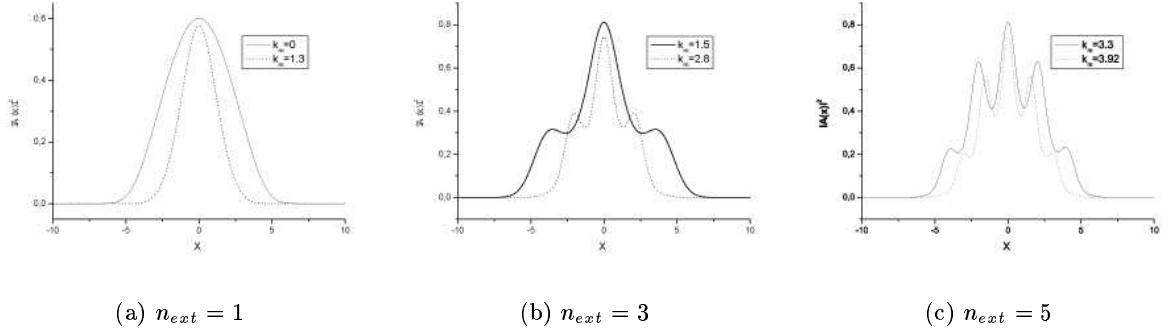


Fig.3. Profils d'intensités des solitons modulé du LAS, aux extrémités des domaines (1),(3),(5) de la Fig.2

Notons que le soliton devient oscillant au voisinage des pics de résonances, l'énergie oscillant périodiquement entre les deux extrêmes indiqués en pointillés sur la Fig. 2, au voisinage de $k_{m,res} \sim 1.5 \times N$. Pour k_m grand, l'énergie devient indépendante de k_m , en accord avec l'étude de la Ref. [3].

3 Solitons asymétriques de l'oscillateur paramétrique

L'oscillateur paramétrique optique dégénéré avec absorbant saturable est un résonateur passif décrit par les deux équations couplées

$$\partial_t A_0 = \gamma[E - (1 + i\Delta_0 + iV(x))A_0 - A_1^2] + \frac{i}{2}\partial_{xx} A_0 \quad (3)$$

$$\partial_t A_1 = \left[-(1 + i\Delta_1) - \frac{R}{1 + s|A_1|^2}\right]A_1 + A_0 A_1^* + i\partial_{xx} A_1 \quad (4)$$

pour les amplitudes complexes $A_{0,1}$ des champs pompe et signal aux fréquences ω_0 et $\omega_0/2$ respectivement. Dans les équations (3)-(4), E est l'amplitude de la pompe externe, γ est le rapport de transmittivité des miroirs pour les champs pompe et signal, et nous supposons que seul le champ pompe subit la modulation spatiale périodique, le terme $V(x)$ s'ajoutant au désaccord en fréquence Δ_0 .

En absence de modulation, les équations (3)-(4) admettent des solutions localisées en régime bistable, la base étant la solution triviale $\overline{A}_0 = E/(1 + i\gamma\Delta_0)$, $\overline{A}_1 = 0$. Quand la solution homogène non triviale est le siège d'une double instabilité de Hopf et de Turing, des solitons très intenses ont été reportés [4], qui deviennent asymétriques pour γ petit, et se propagent à vitesse constante. Le profil d'amplitude du champ pompe $A_0(x - vt)$ est le plus remarquable par sa dissymétrie : il présente une aile raide s'accrochant sur la base par une modulations peu amortie de grand nombre d'onde, k_p , et une aile beaucoup plus large s'accrochant par une modulation de petit nombre d'onde à peine visible. Le spectre spatial du champ pompe est composé d'un pic central et d'un seul pic latéral bien distinct, signature de la modulation d'accrochage de grand nombre d'onde, k_p . Celui du champ signal présente également un pic central et un plus petit pic latéral de nombre d'onde $k_p/2$, signature de la nonlinearité, cf. équation (3). Cet accrochage dissymétrique a été expliqué par l'analyse linéaire au voisinage de la solution triviale stable, qui montre l'émergence de deux modes spatiaux d'égal amortissement et de nombre d'onde différents, $k_{1,2} = \text{Re}[v \pm \sqrt{v^2 - 2\gamma(\Delta_0 - i)}]$, soit $k_p \simeq k_2 \simeq \gamma\Delta_0/v$ pour γ petit.

Précisons que, contrairement au cas du LAS, où les modulations de nombre d'onde k_p sont visibles entre les deux points d'accrochage du soliton sur sa base (Fig.1), ici elles sont clairement localisées autour du point d'accrochage, à gauche dans la Fig. 3 de la Ref. [4]-(b). Cette différence est due au fait qu'ici les parties réelles et imaginaires de $A_{0,1}$ sont de grande amplitude et constantes dans le référentiel lié au soliton.

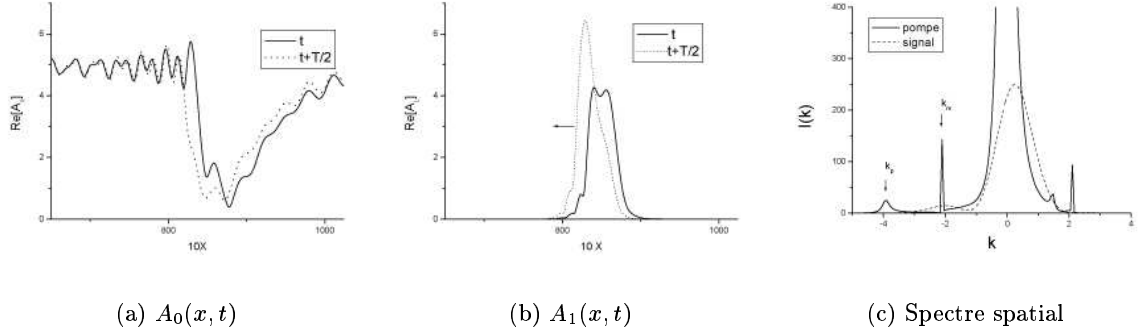


Fig.4. Profils des parties réelles des solitons mobiles, (a) pompe, et (b) signal, à deux instants décalés d'une demi-période. (c) Intensités spectrales des champs pompe (ligne) et signal (pointillé). Mêmes paramètres que ceux de la Fig. 5, et $k_m = 1.5$

En présence de modulation extérieure du champ pompe, les équations (3)-(4) admettent encore des solutions de type soliton-asymétriques, qui se propagent sur la base de la solution triviale modulée, $A_1 = 0, A_0 = \bar{A}_0 + a_m \cos k_m x$ où la profondeur de modulation est $\rho = \frac{a_m}{\bar{A}_0} = \frac{m}{[(1+(\Delta_0 + k_m^2/2\gamma)^2)^{1/2}]}$. Au cours de la propagation les solitons ondulent, i.e. différentes grandeurs comme les amplitudes $A_{0,1}(x-vt)$, les énergies $\Xi_{0,1} = \int |A_{0,1}(x)|^2 dx$, les intensités des composantes spectrales $0, k_p, \pm k_m$ etc... oscillent périodiquement, avec la période spatiale $2\pi/k_m$ et temporelle $2\pi/vk_m$, cf. Fig. 4 qui montre des profils $|A_{0,1}(x)|$ décalés d'une demi-période.

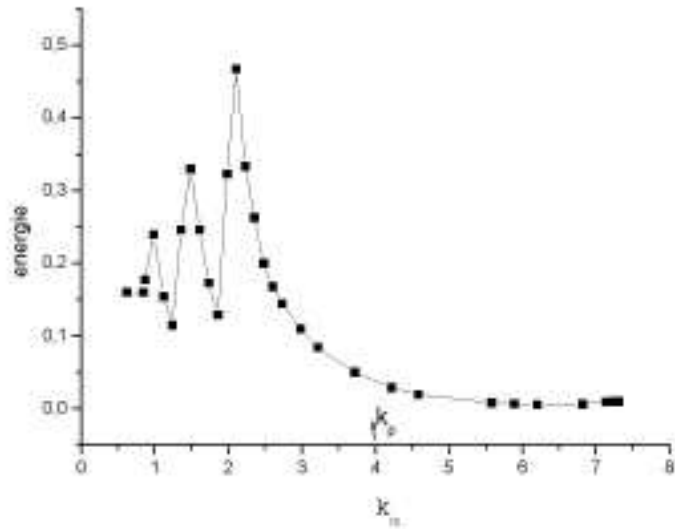


Fig.5. Profondeur d'oscillation de l'énergie du soliton signal $A_1(x, t)$ du DOPOAS, au cours de la propagation suivant x , pour $E = 5.5, R = 5, S = 1, \Delta_{0,1} = 0.5, \gamma = 0.25$, soit $k_p = 3.95$ indiqué par la flèche.

L'amplitude de ces oscillations dépend fortement du nombre d'onde de la modulation, comme le montre la Fig. 5 où la variation de l'énergie du signal $(\Xi_1^{\max} - \Xi_1^{\min})/0.5(\Xi_1^{\max} + \Xi_1^{\min})$, est reportée en

fonction de k_m , pour $\rho = 0.02$. Les ondulations du soliton sont maximales quand

$$k_m = k_p/N \quad (5)$$

avec $N = 2, 3, 4...$ Notons que les pics de résonances ont lieu lorsque la fréquence de la modulation est une sous-harmonique de la fréquence propre du soliton, contrairement au cas des systèmes forcés ayant un spectre symétrique, où les pics de résonances ont lieu pour les harmoniques de k_p . Il est en effet impossible d'obtenir, pour le DOPOAS, des accords de phase analogues à ceux du LAS, cf. section 2, puisque le mode $-k_p$ n'est pas actif. En revanche, on remarque qu'il y a accord de phase entre la composante k_m du terme $A_0(x)$ et la composante $k_p - k_m$ du terme $A_0(x)V(x)$ dans les équations (3)-(4), lorsque $k_m = k_p/2$.

4 Conclusion

Nous avons étudié l'effet d'un forçage multiplicatif, de fréquence spatiale k_m , sur deux systèmes dissipatifs, le laser, et l'oscillateur paramétrique, qui réagissent très différemment. Les changements spectaculaires observés pour certaines fréquences de modulation, sont attribués à l'existence d'une "fréquence propre" k_p déjà présente dans le spectre des solitons non modulés, distincte de celle du pic central. Dans les deux cas l'amplitude du pic central est 10 fois supérieure à celle du mode k_m , mais c'est ce dernier qui est responsable des résonances décrites ici, c'est-à-dire pour des fréquences de modulation multiples ou sous-multiples de k_p .

Nous avons choisi des profondeurs de modulation conduisant à des pics de résonance de hauteur comparable, dans les deux sections. Notre étude met en évidence tout d'abord que les changements dynamiques des structures aux alentours des pics de résonance, sont différents pour les deux systèmes : Pour le laser la résonance est caractérisée par l'élargissement du soliton, donc une amplification de son énergie, l'intensité restant presque constante. Pour l'oscillateur paramétrique, c'est l'ondulation qui est amplifiée, i.e. les oscillations périodiques de l'intensité du soliton au cours de sa propagation.

D'autre part nous avons montré que la "fréquence propre" k_p du LAS, est fortement modifiée par le forçage, alors qu'elle est inchangée dans le cas du DOPOAS. Il en résulte que les pics de résonances de ce dernier sont prédictibles à partir de l'analyse linéaire de l'accrochage de la solution, $k_m = k_{p,lin}/N$. En revanche, pour le LAS, une analyse nonlinéaire est nécessaire pour prédire les valeurs des pics de résonance. En effet, la relation de blocage en fréquence $k_m = Nk_p$ ne définit pas un pic de résonance, mais un domaine fini. Le pic de résonance correspond au minimum de k_m dans le domaine, soit $k_{m,res} \sim 1.5xN$ pour $D_0 = 1.65$, Figs.2-3; mais devient $k_{m,res} \sim 0.8xN$ dans le cas des solitons décalés pour $D_0 = 1.7$. En conclusion nous avons mis en évidence deux comportements différents selon que l'accrochage est dissymétrique ou symétrique. Les résultats présentés devraient être généralisables à de nombreux systèmes où l'accrochage de la structure sur sa base est oscillatoire.

Références

1. D. E. PELINOVSKI, A.A. SUKHORUKOV, AND Y.S. KIVSHAR, Bifurcations and stability of gap solitons in periodic potentials, *Physical Review E*, **70** (036618), 1-17 (2004).
2. A.G. VLADIMIROV, S.V. FEDOROV, N.A. KALITEEVSKII, G.V. KHODOVA AND N.N. ROSANOV, Numerical investigation of laser localized structures, *Journal of Optics : Quantum and Semiclassical Optics*, **1** (036618), 101-106 (1999).
3. K. STALIUNAS, Midband dissipative spatial solitons, *Physical Review letters*, **91** (053901), 1-4 (2003).
4. (a) M. TLIDI, P. MANDEL, M. HAELTERMAN, Spatiotemporal patterns and localized structures in nonlinear optics, *Physical Review E*, **56**, 6524-6530 (1997); (b) M. TLIDI, M. TAKI, M. LE BERRE, E. RESSAYRE, A. TALLET AND L. DI MENZA Moving localized structures and spatial patterns in quadratic media with a saturable absorber, *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, **6**, 2635-2672, (2004); (c) A.Barsela, C. Lepers, M. Taki, M. Tlidi, *Optics Communications*, **232**, 381-389 (2004)

Cloches de liquides viscoélastiques

L. Lebon¹, L. Limat¹, & A. Belmonte²

¹ Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes - ESPCI, UMR 7636 CNRS, 10 rue Vauquelin 75005 Paris

² Department of Mathematics, Penn State University, University Park, PA 16802 USA

lebon@pmmh.espci.fr

Résumé. Nous nous sommes intéressés à des cloches liquides formées par l'impact d'un jet de fluide viscoélastique projeté sur un obstacle circulaire plus grand que le diamètre du jet, à la manière des cloches d'eau historiques de Savart [1]. Nous avons utilisé comme fluide viscoélastique des solutions de polymères et de micelles géantes. En régime de cloches fermées, nous observons un profil des cloches très différent de celui observé et prévu pour des cloches d'eau (Clanet[1]). La forme des cloches est contrôlée ici par la rhéologie du viscoélastique ; nous l'illustrons par des mesures d'évolution de la taille des cloches. Elle semble également très sensible aux éventuelles différences de pression à travers le film liquide. A débit plus élevé, les cloches ne se referment plus et forment des nappes liquides dont le mécanisme de désintégration apparaît très différent dans le cas des viscoélastiques ; alors qu'une telle géométrie est fréquemment utilisée dans le cas de solutions aqueuses Newtoniennes dans le but de faire de l'atomisation en fines gouttes, on observe en viscoélastique des structures en filaments, éventuellement enchevêtrés, qui prolongent la nappe sans formation de goutte. Un mécanisme original de croissance de trou circulaire avec bourrelets épais dans la nappe viscoélastiques est également observé.

Abstract. We performed experiments on liquid bells resulting from the impact of a viscoelastic fluid on a circular obstacle larger than the jet diameter, in the way of water bells by Savart [1]. We used polymer solutions or giant-micelle solutions as viscoelastic fluid. In the regime of closed bell, we observed a particular shape of bells, very different from the shape of water bells as observed and predicted by Clanet [1]. The bells shape is essentially controlled here by the viscoelastic rheology. It appears also very sensitive to the pressure gap through the liquid film. For higher flow rate, the bells do not close anymore and form liquid sheets. Their desintegration is very different from the one observed for Newtonian liquid : filaments structure extends the sheet without any drops formation. An original behaviour of growth of circular holes with a thick rim is also observed.

1 Introduction

Les écoulements à surface libre de fluides complexes fréquemment rencontrés dans des applications (extrusion, mise en forme...) permettent d'explorer des lois de comportement des ces fluides et mettent en évidence des phénomènes originaux (instabilités, sélection de formes).

Il existe de nombreux cas de jets de fluides complexes qui viennent frapper des surfaces solides ; nous nous sommes intéressés ici au cas particulier dans lequel la taille de l'obstacle D_i , ou impacteur, est de l'ordre de celle du jet D_o . Le liquide est alors projeté plus ou moins horizontalement et commence à former une nappe horizontale, qui dans certaines conditions, tend à se refermer et donne finalement une cloche liquide comme Savart l'a observé pour des cloches d'eau [1] (Le principe de formation des cloches est schématisé sur la figure 1).

A la suite de Savart, Boussinesq [3] a prédit la forme de cloches qui résulte de l'équilibre de la tension de surface, la gravité et l'inertie. Taylor s'est intéressé également aux cloches horizontales en considérant le problème de l'entraînement de l'air [4]. Bond [5] a utilisé des expériences de cloches liquides pour déduire des tensions de surface dans des conditions dynamiques. Le travail de Savart a été repris et largement complété récemment pour les cloches formées avec de l'eau [2]. Des études récentes s'intéressent à des cloches formées par des liquides visqueux : Buckingham et Bush [6] obtiennent de spectaculaires cloches polyhédriques à partir de liquides extrudés d'une ouverture annulaire. Brunet *et al* [7] se sont intéressés à des cloches visqueuses transoniques, c'est-à-dire présentant un point où la vitesse du fluide est identique à celle des ondes de surfaces sinusoïdales.

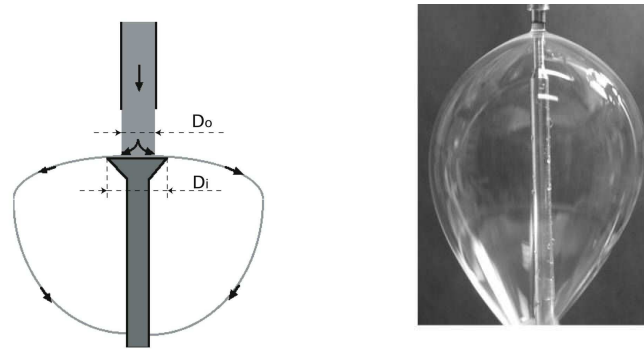


Fig.1. A gauche : Principe des cloches liquides : un jet de diamètre D_o vient percuter un impacteur de diamètre D_i . A droite : cloche formée par un viscoélastique

Nous avons repris ces expériences en utilisant comme fluide viscoélastique des solutions de polymères concentrées et de micelles géantes. Au niveau de l'impacteur, le liquide qui est éjecté pratiquement horizontalement est soumis à une forte elongation radiale; on peut donc supposer qu'alors la structure du fluide et ses caractéristiques rhéologiques vont modifier la structure des cloches.

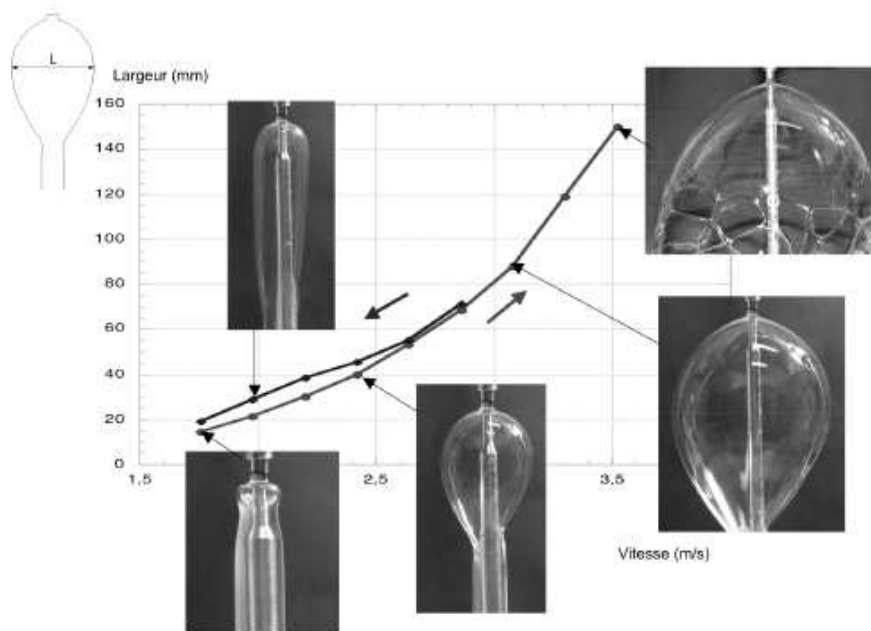


Fig.2. Evolution de la taille des cloches en fonction de la vitesse moyenne du jet impactant : largeur L en fonction de U . Débit croissant : cloches isobares (pression à l'extérieur et à l'intérieur de la cloche identique); débit décroissant : cloches non-isobares. Solution aqueuse à 2 % de CMC

2 Forme des cloches

2.1 Evolution de la forme en fonction du débit

La figure 2 illustre une évolution typique de la formes de cloches en fonction de la vitesse moyenne du jet impactant (taille L en fonction de U). Dans le sens croissant du débit impactant, les cloches se forment à partir d'une valeur seuil, puis leur taille augmente jusqu'à une valeur à partir de laquelle la cloche ne se referme plus et se désagrège (nous y reviendrons plus tard).

Dans ce cas (débit croissant), nous avons toujours veillé à ce que la pression soit bien la même à l'intérieur et à l'extérieur de la cloche (cloches isobares) ; en effet nous avons pu observer que la forme de la cloche est très sensible à une éventuelle différence de pression, ce qui en fait de très bon manomètres, comme cela avait déjà été remarqué [7,8]. On le voit dans le cas des débits décroissants : ici, la pression n'est pas rééquilibrée si bien que l'on obtient des cloches d'allure très différentes quand bien même leur taille varie peu.

2.2 Effet de la rhéologie

En observant le profil des cloches au niveau de l'injecteur on observe leur dépendance très nette en fonction de la rhéologie de la solution. A titre d'exemple, nous présentons sur la figure 3 les évolutions en fonction du débit des contours des cloches au niveau de l'injecteur pour des cloches d'eau pure (3-a) et des cloches de viscoélastiques (3-b).

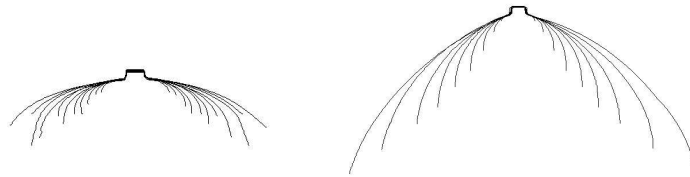


Fig.3. Evolution des profils des cloches en fonction du débit. A gauche (a) : Cloche d'eau. A droite (b) : cloche de viscoélastique

3 Taille des cloches

Dans le cas de liquide Newtonien, la forme des cloches se calcule à partir d'un bilan des forces prenant en compte l'inertie, la gravité et la tension de surface. Ainsi si la gravité est négligeable, la cloche est une caténoïde ; on alors trouve que la taille des cloches L est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne d'injection U^2 [2,3].

Ce résultat se retrouve d'ailleurs simplement dans le cas d'un fluide parfait par des bilans élémentaires (cf. figure 4). h est l'épaisseur locale du film liquide : elle vaut h_D juste après l'impacteur et h_L quand la cloche est à son extension maximale. D_o est le diamètre initial du jet, D_i celui de l'impacteur (cf. figure 1). ψ est l'angle d'éjection initial.

- D'après Bernouilli, U est constante le long de l'écoulement.
- La conservation de la masse impose alors :

$$\pi U D_o^2 / 4 = \pi L h_L U, \quad \text{soit} \quad h_L = D_o^2 / 4L \quad \text{et} \quad h_D D_i = h_L L$$

- Le bilan de quantité de mouvement vertical donne :

$$\pi L (2\gamma) - \pi D_i (2\gamma) \sin \psi = \pi L (\rho h_L U^2) - \pi D_i (\rho h_D U^2) \sin^2 \psi$$

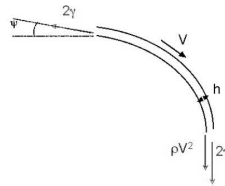


Fig.4. Bilan de quantité de mouvement sur un élément de cloche liquide.

On obtient alors facilement :

$$L = \frac{\rho D_0^2}{8\gamma} U^2 (1 - \sin^2 \psi) \tag{1}$$

Nous avons testé cette prédiction pour des cloches formées de différents liquides : eau, huile silicone (viscosité 50 cP, Newtonien) et des solutions de polymères à différentes concentrations : il s'agit de solutions de gomme de cellulose à 1%, 1,5 % et 2 % (concentration massique).

Comme prévue, la taille des cloches varie bien linéairement avec le carré de la vitesse linéaire dans le cas des liquides Newtoniens (eau et huile silicone). En revanche pour les solutions de polymères, nous n'observons plus cette dépendance linéaire, mais l'apparition d'un seuil qui apparaît d'autant plus élevé que la solution est concentrée (figure 5).

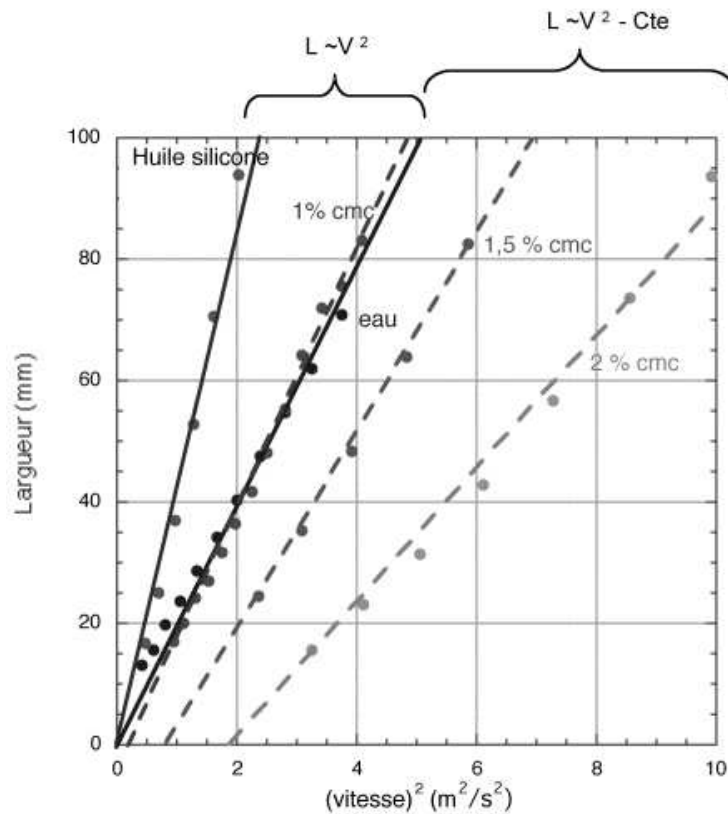


Fig.5. Evolution de la taille L des cloches en fonction du carré de la vitesse débitante U^2 pour différents liquides ; liquides Newtoniens : eau et huile silicone (50 cP) et liquides viscoélastiques : solution de gomme de cellulose de concentration massique 1%, 1,5% et 2%.

Pour interpréter ce seuil, on peut rajouter une contrainte élastique σ_E pour prendre en compte l'étiement subi par les chaînes de polymères après l'impacteur ; le bilan de quantité de mouvement établi précédemment devient alors :

$$\pi L(2\gamma + \sigma_E h_L) - \pi D_i(2\gamma) \sin \psi = \pi L(\rho h_L U^2) - \pi D_i(\rho h_D U^2) \sin^2 \psi \quad (2)$$

On obtient alors pour l'expression de la taille des cloches :

$$L = \frac{\rho D_o^2}{8\gamma} \left[U^2(1 - \sin^2 \psi) - \frac{\sigma_E}{\rho} \right] \quad (3)$$

On retrouve bien qualitativement l'effet de seuil observé, qui croit en fonction de l'élasticité du viscoélastique, ce qui est cohérent avec son augmentation lorsque la concentration de polymère croit.

4 Désintégration des cloches liquides

Quand la vitesse d'injection devient trop forte, les effets de tension de surface ne suffisent plus à compenser l'inertie ; la cloche ne se referme plus et on observe un front d'atomisation le long duquel inertie et tension de surface sont égales (le rapport des deux forces définit le nombre de Weber : $We = \rho h U^2 / 2\gamma$; il est égal à l'unité le long du front d'atomisation). Cette atomisation est illustrée sur la figure 6 pour une cloche liquide d'eau où l'on voit la désintégration sous forme de gouttes.

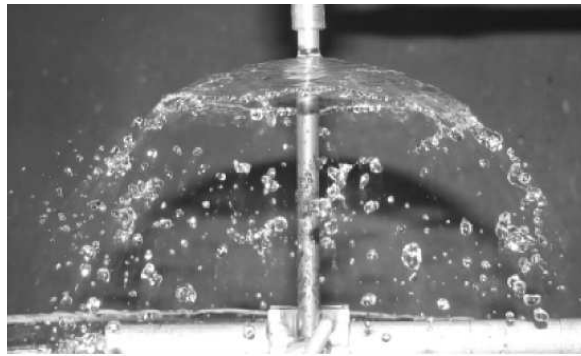


Fig.6. Désintégration d'une cloche liquide : fluide Newtonien (eau).

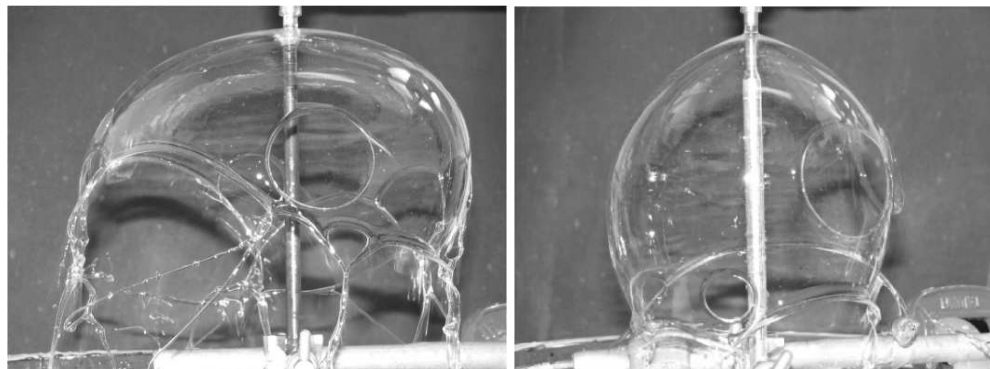


Fig.7. Désintégration d'une cloche liquide : fluide viscoélastique (solution de gomme de cellulose concentrée à 2 %).

Dans le cas d'un fluide complexe comme les viscoélastiques constitués de solution de polymères, on n'observe plus de front d'atomisation. Au contraire, on observe un effet « antiatomisant » : il n'y a plus

formation de gouttes. La cloche se désintègre en longs filaments dont on voit bien, quand on les observe à la caméra rapide, le caractère élastique.

Références

1. F. SAVART, Mémoire sur le choc d'une veine liquide lancée contre un plan circulaire, *Ann. Chim.*, **54** (1833).
2. C. CLANET, Dynamics and stability of water bells, *J. Fluid Mech.*, **430** (2001).
3. J. BOUSSINESQ, Théories des expériences de Savart, sur la forme que prend une veine liquide après s'être choquée contre un plan circulaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **69** (1869).
4. G.I. TAYLOR, The dynamics of thin sheets of fluid. I Water bells, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **253** (1959).
5. W.N. BOND, The surface tension of moving water sheet, *Proc. Phys. Soc. B*, **67** (1935).
6. R. BUCKINGHAM & J.W.M. BUSH, Fluid Polygons, *Phys. Fluids*, **13** (2001).
7. P. BRUNET, C. CLANET & L. LIMAT, Transonic liquid bells, *Phys. Fluids*, **14** (2004).
8. F.L. HOPWOOD, Water bells, *Proc. Phys. Soc. B*, **65** (1952).

Influence d'un gradient de température sur la stabilité des rouleaux de Taylor

V. Lepiller, A. Prigent, & I. Mutabazi

LMPG, Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, BP 540, 76058 Le Havre cedex
valerie.lepiller@univ-lehavre.fr

Résumé. Ce travail expérimental porte sur l'influence d'un gradient de température sur la stabilité des rouleaux de Taylor. Il concerne le couplage entre la force centrifuge et le couple de forces induit par la stratification radiale de la masse volumique du fluide. Le système est caractérisé par le rapport d'aspect $\Gamma = 114$ et le rapport des rayons $\eta = 0,8$. Pour cette étude, le nombre de Reynolds est $Re = 100 = 1,25.Re_c$ et le nombre de Grashof est compris entre -1500 et 1500 pour un nombre de Prandtl autour de $5,5$. Dès que Gr est différent de zéro, les rouleaux de Taylor deviennent instationnaires et une spirale se forme. Nous avons étudié les variations des propriétés spatio-temporelles du motif en fonction du nombre de Grashof.

Abstract. This experimental work concerns the influence of a radial temperature gradient on the first instability of a Couette–Taylor system with aspect ratio 114 and radius ratio 0.8. This study is about the identification of the effect of coupling between centrifugal force and torque induced by density radial stratification. The studied range of Grashof number is limited between -1500 and 1500 for a Prandtl number near 5.5. A spiral vortex flow appears due to the effect of a radial temperature gradient under Taylor vortices. Thanks to the analysis of complex demodulation, we have studied spatio-temporal properties of the pattern versus the control parameter.

1 Introduction

Le mécanisme de la transition vers la turbulence dans le système de Couette–Taylor a fait l'objet d'un grand nombre d'études expérimentales, numériques et théoriques[1,2]. Le déséquilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression provoque l'apparition de rouleaux axisymétriques stationnaires déstabilisant l'écoulement de base azimutal. Nous nous sommes intéressés à l'effet engendré par une perturbation thermique sur la première instabilité du système de Couette–Taylor avec seul le cylindre intérieur en rotation. Cette configuration est rencontrée dans de nombreuses applications industrielles, comme les échangeurs thermiques, les systèmes de refroidissement des composants électroniques ou dans les procédés de traitement des matériaux CVP (chemical phase deposition). De nombreuses études numériques[3,4,5] existent sur l'influence d'un gradient de température sur le premier mode d'instabilité dans ce système annulaire en rotation. Elles prédisent l'apparition de rouleaux propagatifs inclinés, en accord avec les expériences de Snyder et Karlsson[6] qui ont observé l'apparition de rouleaux inclinés quand un gradient radial de température et la rotation du cylindre intérieur sont imposés. Ils ont constaté que le seuil de propagation dépend du gradient radial de température. Des résultats expérimentaux similaires ont été rapportés par Ball et al [7] et confirmés dans des simulations numériques [8].

A notre connaissance, il existe très peu d'études sur la déstabilisation des rouleaux de Taylor par un gradient radial de température dans le système de Couette–Taylor. Ce système est caractérisé par deux paramètres de contrôle, le nombre de Grashof lié à l'influence du gradient de température et le nombre de Reynolds lié à l'effet inertiel. Le nombre de Reynolds est le rapport entre le temps de diffusion visqueuse $\tau_\nu = d^2/\nu$ sur le temps d'advection $\tau_a = d/\Omega a$ avec d , ν , Ω et a respectivement la taille de l'entrefer, le coefficient de viscosité, la rotation du cylindre intérieur, et le rayon du cylindre intérieur. Le nombre de Grashof est défini comme le rapport du temps caractéristique de diffusion visqueuse au carré sur le temps de la poussée d'Archimède au carré $\tau_A^2 = g\alpha\Delta T d/\nu$ avec g l'accélération de pesanteur, α le coefficient de dilatation et ΔT l'écart de température imposé.

2 Dispositif expérimental

Le système (Fig. 1) se compose de trois cylindres coaxiaux verticaux de même longueur $H = 57$ cm : un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon $a = 2$ cm, un cylindre extérieur en verre transparent de rayon $b = 2,5$ cm et un cylindre d'isolation en verre transparent de rayon $c = 5$ cm. Le liquide étudié, de l'eau déminéralisée, se trouve confiné dans l'espace entre les deux premiers cylindres dont la distance est $d = b - a = 0,5$ cm. Ainsi le rapport d'aspect est $\Gamma = H/d = 114$ et le rapport des rayons est $\eta = a/b = 0,8$. Le cylindre intérieur et l'espace compris entre les cylindres extérieur et d'isolation peuvent être maintenus à des températures différentes respectivement T_1 et T_2 grâce à deux circulations d'eau provenant de deux cryo-thermostats. Un gradient radial de température $\delta T = \mu * (T_1 - T_2) = \mu * \Delta T$ est ainsi créé dans l'entrefer, où le coefficient μ dépend de la conductivité des matériaux des cylindres et de l'eau. Dans notre expérience, μ vaut 0,6. Afin de visualiser l'écoulement, on ajoute 2 % de Kalliroscope AQ-1000 [9], une suspension de 1-2 % de plaquettes réfléchissantes de dimensions $30 \mu\text{m} \times 6 \mu\text{m} \times 0,07 \mu\text{m}$. Un faisceau monochromatique issu d'un laser He-Ne ($\lambda = 638$ nm) est transformé par une lentille cylindrique en une nappe plane parallèle à l'axe des cylindres. L'intersection de cette nappe avec l'entrefer permet de visualiser une section droite verticale de l'écoulement. Une caméra CCD linéaire de 2048 pixels enregistre, à intervalles de temps réguliers, le signal de distribution de l'intensité lumineuse le long d'une ligne verticale de la section. Le signal est représenté sous forme de 256 niveaux de gris. Les lignes ainsi enregistrées sont disposées les unes à la suite des autres et forment un diagramme spatio-temporel (Fig. 2). Deux miroirs plans entourent le dispositif expérimental pour permettre une visualisation complète de l'écoulement dont nous enregistrons une hauteur de 32 cm à l'aide d'une caméra 2D [10].

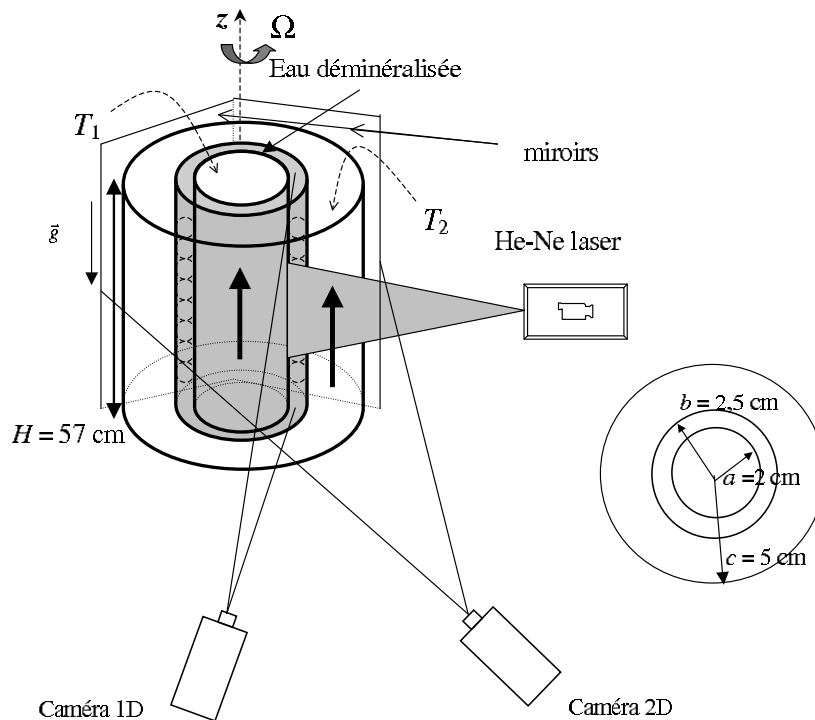


Fig.1. Dispositif expérimental.

3 Protocole

Nous étudions le mécanisme de déstabilisation des rouleaux de Taylor par un gradient de température. Dans cette perspective, nous imposons au départ la même température aux deux bains thermostatés $T_1 = T_2 = 30^\circ\text{C}$. Puis, nous augmentons progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur. L'écoulement de base, l'écoulement azimutal de Couette se déstabilise pour $Re = Re_c$ et des rouleaux axisymétriques stationnaires, les rouleaux de Taylor, apparaissent avec une périodicité le long de la direction axiale du système. Nous nous plaçons un peu au-dessus de ce seuil pour un nombre de Reynolds $Re = 100 \approx 1,25.Re_c$. Ensuite, nous créons un écart radial de température constant avec une température du cylindre extérieur $T_2 = 30^\circ\text{C}$. Dès que le gradient de température est imposé ($Gr \neq 0$), nous enregistrons un diagramme spatio-temporel. Nous enregistrons ensuite un deuxième diagramme spatio-temporel lorsque l'état asymptotique est atteint puis un troisième lors du retour à $Gr = 0$. La gamme de valeurs du nombre de Grashof étudiée s'étend de -1500 à 1500 . Ainsi seul un paramètre de contrôle, le nombre de Grashof, varie tandis que le nombre de Reynolds est fixé.

4 Résultats

Avant d'imposer un gradient de température, le motif se compose des rouleaux de Taylor : ce sont des rouleaux axisymétriques ($m = 0$) et stationnaires (pas de fréquence). Le nombre d'onde axial adimensionné par la taille de l'entrefer est $q = 3,12$. Quand nous imposons un gradient radial de température, le motif se déstabilise et une spirale se forme dans tout le système. La figure 2(a) met en évidence le passage des rouleaux de Taylor vers la spirale. Le motif comporte une zone de rouleaux de Taylor, une zone terminale de spirales. Les deux zones sont séparées par un front. Au voisinage du front, la vitesse de propagation subit une forte variation. Dans le front, le motif présente des défauts spatio-temporels et des modulations. La figure 2(b) montre le passage du motif spiralé vers le motif de rouleaux de Taylor quand le système redevient isotherme. Alors que la spirale apparaît systématiquement vers le bas du système, les rouleaux de Taylor apparaissent plutôt vers le haut. Aucune propagation des rouleaux n'apparaît après le front.

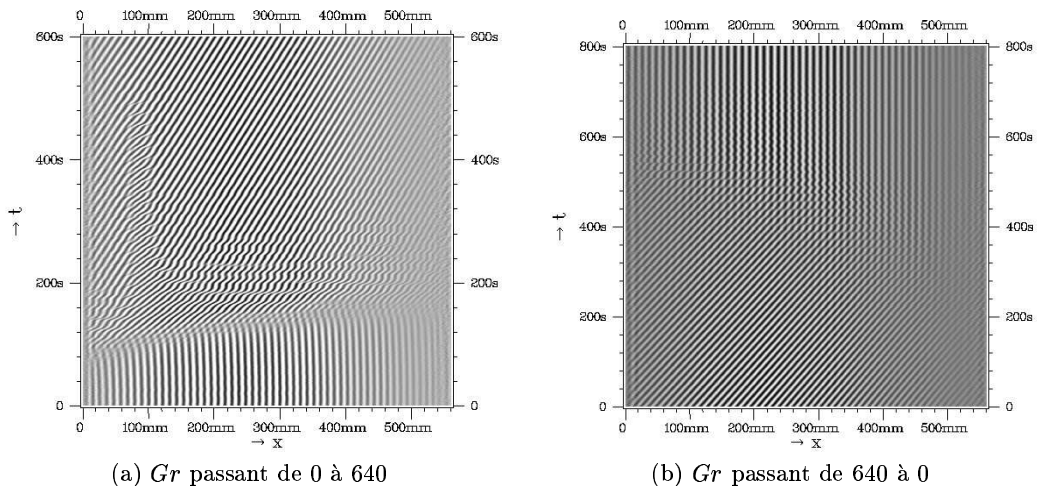


Fig.2. Diagrammes spatio-temporels pour deux intervalles de Gr .

La figure 3 présente deux diagrammes spatio-temporels pour $Gr > 0$ et $Gr < 0$. La spirale se propage vers le haut ou le bas du système suivant le signe du nombre de Grashof. Lorsque le nombre de Grashof est positif (on chauffe le cylindre intérieur), la spirale se propage vers le bas du système : la vitesse de

phase est positive. Lorsque le nombre de Grashof est négatif, la spirale se propage vers le haut du système, la vitesse de phase est négative.

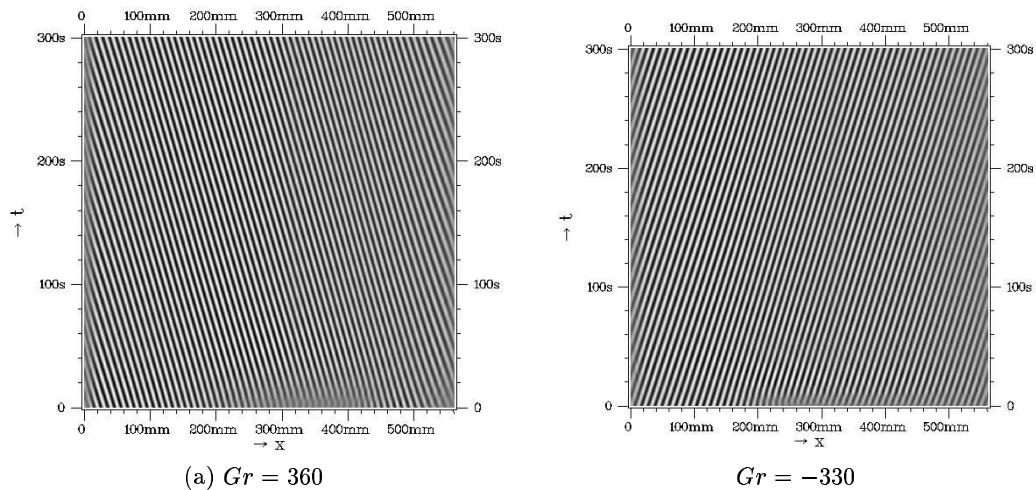


Fig.3. Diagrammes spatio-temporels représentant deux sens de propagation différents suivant le signe du nombre de Grashof.

Après le front la spirale formée par la déstabilisation des rouleaux de Taylor comporte des défauts et des modulations. Pour les faibles valeurs du nombre de Grashof, ces défauts disparaissent rapidement et laissent place à un motif homogène. La durée de vie τ_t de l'état spiralé avec défauts augmente lorsqu'on augmente le Grashof et diverge pour $|Gr| \simeq 1200$. Les diagrammes spatio-temporels (Fig. 4(a,b)) sont obtenus pour un motif avec un nombre de Grashof $Gr = -930$ dès l'application d'un écart de température puis deux heures après. Les dislocations ont complètement disparu. Nous ne sommes plus dans la phase transitoire. Si nous augmentons le nombre de Grashof (Fig. 5)(a,b), les défauts ne disparaissent pas.

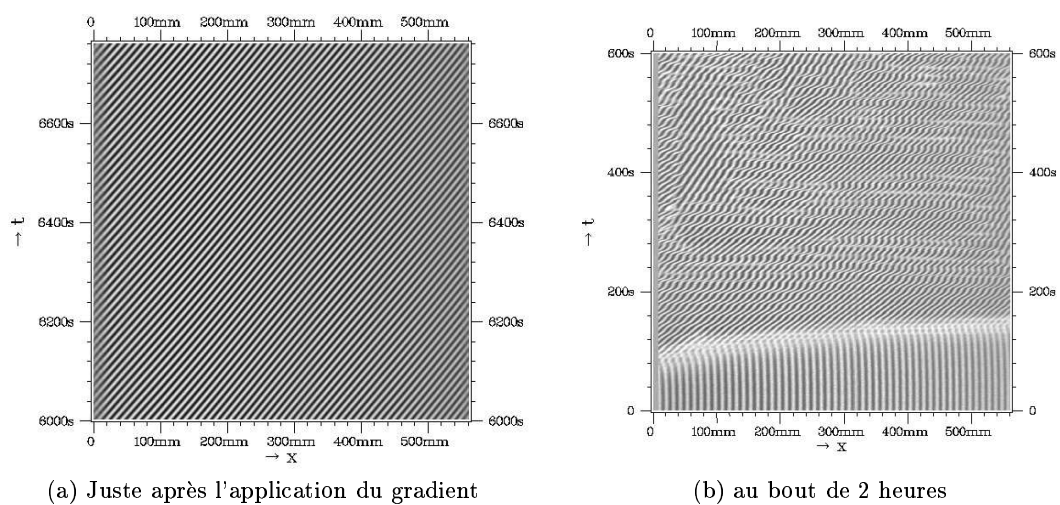


Fig.4. Diagrammes spatio-temporels du motif pour $Gr = -930$.

Des diagrammes spatio-temporels et des visualisations 2D, nous avons extrait le nombre d'onde axial, la fréquence et le nombre d'onde azimutal pour les différents motifs. Les figures 6(a, b) et 7(a) présentent ces quantités en fonction du nombre de Grashof pour la spirale. Le nombre d'onde azimutal (Fig. 6(a)) vaut 1 pour les faibles nombres de Grashof et 2 pour les plus grands. La fréquence du motif, représentée sur la figure 6(b), augmente faiblement avec le nombre de Grashof. Le nombre d'onde axial (Fig. 7(a)) varie très peu pour de faibles valeurs du nombre de Grashof. La figure 7(b) représente la variation du nombre d'onde axial en fonction du nombre de Grashof imposé juste avant le retour au cas isotherme. Le passage de la spirale vers les rouleaux de Taylor par suppression du gradient de température s'accompagne d'une faible variation du nombre d'onde axial.

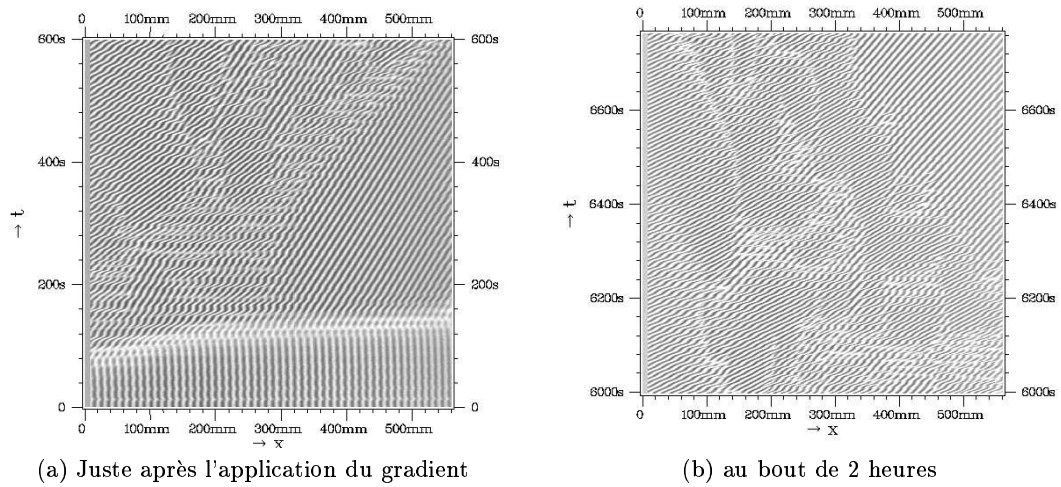


Fig.5. Diagrammes spatio-temporels du motif pour $Gr = -1200$.

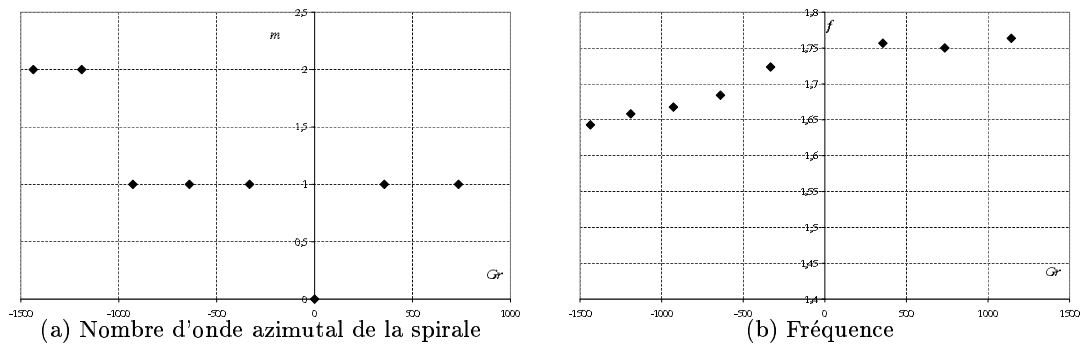


Fig.6. Variations en fonction du nombre de Grashof.

5 Conclusion et Perspectives

Avec un écart de température, les rouleaux de Taylor disparaissent au profit d'une spirale après le passage d'un front comportant des défauts. L'inclinaison et le sens de propagation de la spirale sont

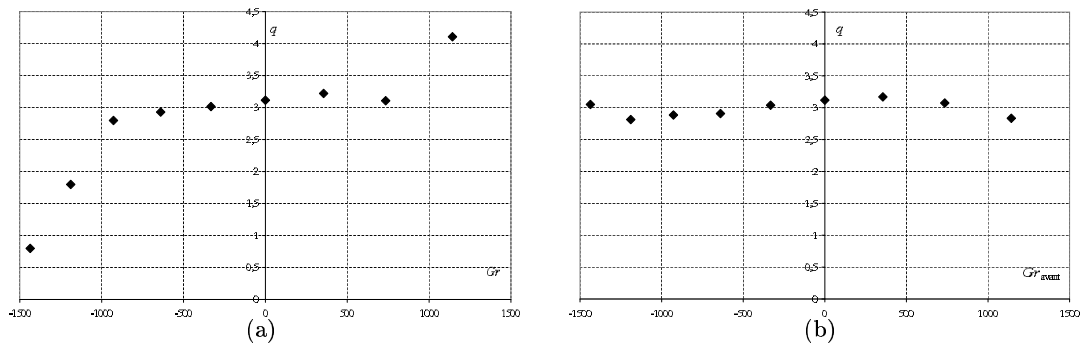


Fig. 7. (a) Variation du nombre d'onde axial de la spirale en fonction de Gr , (b) Variation du nombre d'onde axial des rouleaux de Taylor en fonction du nombre de Grashof calculé juste avant le retour au cas isotherme.

conformes aux résultats obtenus en convection mixte lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds pour un Grashof donné [3,8,11]. Juste avant l'apparition du front, les rouleaux de Taylor deviennent propagatifs avec un sens de propagation opposé à celui de la spirale. Nous avons observé des modulations et des dislocations spatio-temporelles disparaissant au bout d'un temps τ_t divergeant avec le nombre de Grashof. En convection mixte nous n'avons pas atteint $Re = 100$. Cependant, le nombre d'onde azimutal et axial et la fréquence de la spirale sont proches des valeurs obtenues alors. Ce travail se prolonge actuellement avec une étude des défauts et une analyse du front de propagation en fonction du nombre de Grashof.

Références

1. C.D. ANDERECK, S.S. LIU & H.L. SWINNEY, Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, **164**, 155 (1986).
2. P. CHOSSAT & G. IOOSS, *The Couette-Taylor Problem*, Springer-Verlag, Berlin (1994).
3. P. D. WEIDMAN & M. E. ALI, On the stability of circular Couette flow with radial heating, *J. Fluid Mech.*, **220**, 53 (1990).
4. K.S. BALL & B. FAROUK, Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow with buoyancy effects, *J. Fluid Mech.*, **197**, 479–501 (1988).
5. C.H. KONG & I.C. LIU, The stability of nonaxisymmetric circular Couette flow with a radial temperature gradient, *Phys. Fluids*, **6** (8), 2617–2622 (1994).
6. H.A. SNYDER & S.K.F. KARLSSON, Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient, *Phys. Fluids*, **7**, 1696–1706 (1964).
7. K.S. BALL, B. FAROUK & V.C. DIXIT, An experimental study of heat transfer in a vertical annulus with a rotating inner cylinder, *J. Heat Mass Transfer*, **32**, 1517–1526 (1989).
8. D.C. KUO & K.S. BALL, Taylor-Couette flow with buoyancy : Onset of spiral flow, *Phys. Fluids*, **9** (10), (1997).
9. M.A. DOMINGUEZ-LERMA, G. AHLERS & D.S. CANNELL, Effects of “kalliroscope” flow visualization particles on rotating Couette-Taylor flow, *Phys. Fluids*, **28**, 1204–1206 (1985).
10. A. PRIGENT & O. DAUCHOT, Visualization of a Taylor-Couette flow avoiding parasitic reflections, *Phys. Fluids*, **12** (10), 2688–2690 (2000).
11. V. LEPILLER, A. PRIGENT, F. DUMOUCHEL & I. MUTABAZI, Mode d'instabilité primaire dans un anneau cylindrique vertical soumis à un gradient radial de température, *Compte-Rendus de la 8^{ème} Rencontre du Non-Linéaire*, Paris 2005.

Comparaison d'un observateur à modes glissants et un observateur adaptatif pour la synchronisation de systèmes chaotiques

M. L'Hernault¹, J. De Leon², J.P. Barbot¹, & A. Ouslimani¹

¹ ECS-ENSEA, 6 Avenue du Ponceau, 95014 Cergy Cedex, France

² Fac. de Ingeniera Mecanica y Electrica, Universidad Autonoma de Nuevo Leon., Apartado Postal 148-F, CU San Nicolas de los Garza, Nuevo Leon, Mexico

lhernault@ensea.fr

Résumé. Dans ce travail, un système de transmission sécurisée d'information basé sur la synchronisation de deux systèmes chaotiques est présenté. L'émetteur est un oscillateur de type Colpitts chaotique dans lequel le message est inséré à l'aide de la méthode dite *par inclusion*. Seulement un des états de l'émetteur est transmis au récepteur via un canal public. Ce dernier est un observateur conçu pour reconstruire tous les états de l'émetteur, ainsi que le message. La problématique traitée est l'inversion à gauche avec observation de l'état complet. Deux types d'observateur sont utilisés : le premier est un observateur à modes glissants et le deuxième est un observateur adaptatif. Ainsi, la synchronisation des deux systèmes chaotiques (émetteur - récepteur) est obtenue et le message est récupéré en utilisant deux méthodes différentes. Les résultats de simulation sont présentés afin d'étudier les performances de chaque observateur et enfin, une étude comparative est effectuée.

Abstract. In this paper, a secure data transmission system based on the synchronisation of two chaotic systems is presented. The transmitter is a chaotic Colpitts oscillator in which the message signal is inserted by *inclusion method*. Only one of the states of the emitter is transmitted to the receiver via a public channel, which is an observer designed to reconstruct all of the states of the emitter, as well as the message. The left inversion problem with observation of the complete state is studied in this work. Two types of observer are used : the first one is a sliding mode observer, and the second one is an adaptive observer for a class of non-linear systems. The synchronization of the two chaotic systems (transmitter - receiver) is obtained and the message signal is recovered by two different methods. Simulation results are presented in order to study the performances of each observer and finally, a comparative study is given.

1 Introduction

Dans les méthodes de communication chaotique, l'information est transmise au récepteur à l'aide d'un signal chaotique. Différentes techniques ont été proposées pour la cryptographie chaotique [16,12]. Des systèmes de communication chaotique basés sur le circuit de Chua sont réalisés [11,1] et plusieurs méthodes sont proposées pour la synchronisation de systèmes chaotiques [4,15,1]. Dans ce travail nous proposons un système de communication chaotique pour réaliser une communication sécurisée. Le système est composé d'un émetteur chaotique et d'un récepteur. L'émetteur est un oscillateur de Colpitts chaotique [8,10,9]. Le message est injecté dans l'oscillateur de Colpitts par la méthode dite *par inclusion* [2]. Seulement un des états de l'émetteur est transmis au récepteur, qui est un observateur, conçu pour reconstruire tous les états de l'émetteur, ainsi que le message. Deux types d'observateur sont proposés : le premier est un observateur à modes glissants [5,6], [2,7]. Le deuxième observateur est un observateur adaptatif, capable d'estimer les états et certains des paramètres inconnus pour une classe de systèmes nonlinéaires [14,17]. Les résultats de simulation obtenus par chaque observateur sont présentés et commentés.

2 Oscillateur de Colpitts

La Fig. 1(a) montre le schéma électronique d'un oscillateur de Colpitts en base commune. Le transistor T est simplement modélisé par une résistance nonlinéaire et une source de courant (Fig. 1(b)).

L'élément clé de ce modèle est la résistance nonlinéaire, qui est responsable du comportement chaotique de l'oscillateur.

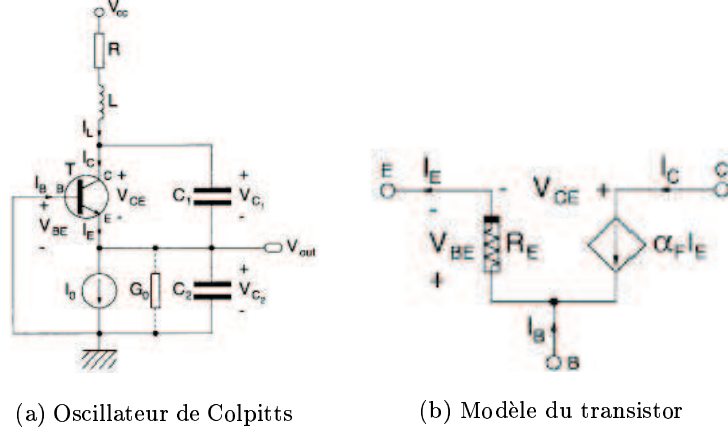


Fig.1. Oscillateur de Colpitts et le modèle du transistor

2.1 Modèle de l'oscillateur de Colpitts

Le modèle mathématique de l'oscillateur de Colpitts décrit dans la Fig. 1(a) est donné par :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = -f(V_{C_2}) + I_L \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = I_L - I_0 \\ L \frac{dI_L}{dt} = -V_{C_1} - V_{C_2} - I_L R + V_{CC} \end{cases} \quad (1)$$

où $f(V_{C_2})$ est la caractéristique courant-tension de la résistance nonlinéaire donnée par ¹ :

$$f(V_{C_2}) = I_S \exp\left(-\frac{V_{C_2}}{V_T}\right) \quad (2)$$

Afin de simplifier l'étude de l'oscillateur, nous utilisons le modèle normalisé proposé en [8], où les coefficients sont normalisés comme suit : $V_{ref} = V_t$, $I_{ref} = I_0$, et $t_{ref} = \frac{1}{\omega_0}$. Par conversion, nous noterons : $(V_{C_2}, V_{C_1}, I_L)^T = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T = A\zeta$. Alors les équations du système sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \frac{g}{Qk} \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -\frac{Qk(1-k)}{g} [\zeta_3 + \zeta_1] - \frac{1}{Q} \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_3 = \frac{g}{Q(1-k)} [-n(\zeta_1) + \zeta_2] \end{cases} \quad (3)$$

avec $n(\zeta_1) = \exp(-\zeta_1) - 1$ et $k = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$. g est le gain en boucle ouverte de l'oscillateur lorsque le critère de Barkhausen est satisfait, et $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ est le facteur de qualité du circuit LC non chargé.

¹ Si $V_{BE} \gg V_T$, $I_E = I_S \left[\exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) - 1 \right] \approx I_S \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right)$ I_S est le courant de saturation inverse et $V_T \simeq 26mV$

2.2 Comportement chaotique

En faisant varier certains paramètres, nous obtenons un comportement chaotique pour l'oscillateur de Colpitts. Conformément aux résultats présentés par G.M. Maggio *et al.* en [8], nous constatons que pour $g = 4.46$ et $Q = 1.5$, le système (3) génère des signaux chaotiques comme on peut le voir sur le plan de phase de la Fig. 2(b). Dans le but de réaliser une liaison sécurisée par la synchronisation chaotique unidirectionnelle, nous avons considéré ζ_1 comme sortie de l'oscillateur utilisée pour transmettre le message. Dans la Fig. 2(a) il est facile de remarquer l'aspect chaotique de ce signal.

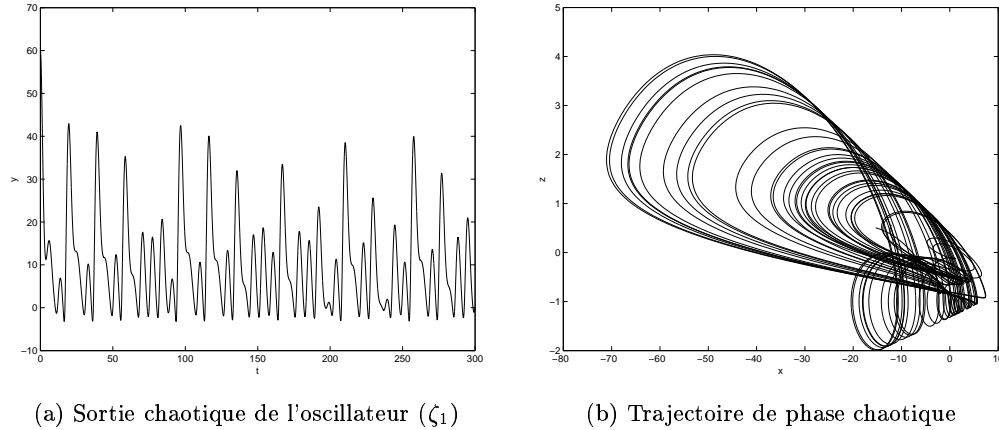


Fig.2. Comportement chaotique de l'oscillateur de Colpitts

3 Design d'un observateur à modes glissants pour l'oscillateur de Colpitts

3.1 Cryptage

Afin de réaliser une transmission avec la méthode par inclusion, nous ajoutons le message (m) à l'état ζ_3 . Comme nous l'avons déjà dit préalablement, la sortie $y = \zeta_1$ de l'oscillateur est transmise au récepteur à travers le canal public. Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \frac{g}{Qk} \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -\frac{Qk(1-k)}{g} [\zeta_3 + \zeta_1] - \frac{1}{Q} \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_3 = \frac{g}{Q(1-k)} [-n(\zeta_1) + \zeta_2] + m \\ y = \zeta_1 = h(\zeta) \end{cases} \quad (4)$$

Notons que le message est le dernier état à reconstruire par des dérivations successives des sorties. Cela constitue un moyen sûr pour satisfaire la condition d'*observability matching condition*². Pour simplifier les simulations, nous avons choisi un message sinusoïdal qui varie lentement par rapport aux dynamiques de l'oscillateur chaotique.

² On pose $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ et $\dot{x} = f(x) + g(x)m$. Le système (4) vérifie l'*observability matching condition* si $[dh \ dL_f h \ dL_f^2 h]^T g = [0 \ 0 \ \theta]^T$ avec $\theta \neq 0$ (voir [13])

3.2 Décryptage

Pour décrypter le message transmis à l'aide du système (4), nous utilisons dans un premier temps, l'observateur à modes glissants ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\zeta}_1}{dt} = \frac{g}{Qk}\hat{\zeta}_2 + \lambda_1 \text{sign}(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1) \\ \frac{d\hat{\zeta}_2}{dt} = \frac{-Qk(1-k)}{g}(\hat{\zeta}_3 + \zeta_1) - \frac{\tilde{\zeta}_2}{Q} + E_1\lambda_2 \text{sign}(\tilde{\zeta}_2 - \hat{\zeta}_2) \\ \frac{d\hat{\zeta}_3}{dt} = \frac{g}{Q(1-k)}[-n(\zeta_1) + \tilde{\zeta}_2] + E_2\lambda_3 \text{sign}(\tilde{\zeta}_3 - \hat{\zeta}_3) \end{cases} \quad (5)$$

où sign représente la fonction sign usuelle.

Avec les conditions suivantes : si $\hat{\zeta}_1 = \zeta_1$ alors $E_1 = 1$ sinon $E_1 = 0$. Ainsi, lorsque $E_1 = 1$, l'observateur synchronise l'état ζ_2 . Aussi, si $\hat{\zeta}_2 = \tilde{\zeta}_2$ et $E_1 = 1$ alors $E_2 = 1$ sinon $E_2 = 0$ et l'observateur synchronise ζ_3 . Enfin si $\hat{\zeta}_3 = \tilde{\zeta}_3$ le message sera reconstruit par l'observateur. On calcule maintenant les états auxiliaires comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\zeta}_2 = \hat{\zeta}_2 + E_1\lambda_1 \frac{Qk}{g} \text{sign}(\zeta_1 - \hat{\zeta}_1) \\ \tilde{\zeta}_3 = \hat{\zeta}_3 - E_2\lambda_2 \frac{g}{Qk(1-k)} \text{sign}(\tilde{\zeta}_2 - \hat{\zeta}_2) \\ \tilde{m} = E_3\lambda_3 \text{sign}(\tilde{\zeta}_3 - \hat{\zeta}_3) \end{cases} \quad (6)$$

4 Observateur adaptatif pour l'oscillateur de Colpitts

L'observateur adaptatif est conçu en cas d'utilisation de systèmes nonlinéaires dépendant de paramètres inconnus. Nous utilisons le système (3) et nous cherchons à concevoir un observateur adaptatif pour synchroniser les deux systèmes chaotiques.

4.1 Cryptage

Considérons le système (4). Le système peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = A(u)\zeta + \varphi(u, y) + \Phi m \\ y = C\zeta \end{cases} \quad (7)$$

avec : $C = [1 \ 0 \ 0]$, où les éléments de la matrice $A(u)$ et les vecteurs $\varphi(u, y)$ sont des fonctions continues dépendantes de u et y et uniformément bornées, et m est le message inconnu.

4.2 Décryptage

L'observateur adaptatif dédié au système (7) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{Z} = Az + \varphi(u, y) + \phi\hat{m} + \{AS_m^{-1}A^TC^T + S_z^{-1}C^T\}(\zeta_1 - Z_1) \\ \dot{\hat{m}} = S_m^{-1}A^TC^T(\zeta_1 - Z_1) \\ \dot{S}_z = -\rho_z S_z - A^TS_z - S_z^TA + C^TC \\ \dot{S}_m = -\rho_m S_m + A^TC^TC A + \Phi \\ \dot{A} = \{A - S_z^{-1}C^TC\}A + \Phi \end{cases} \quad (8)$$

dans lequel $S_z(0) > 0$, $S_m(0) > 0$ et ρ_z, ρ_m sont des constantes positives et suffisamment grandes.

Lemme 1. *Considérons le système (7). Le système (8) est alors un observateur adaptatif pour le système (7). De plus, le vecteur d'erreur d'estimation ($e_z = Z - \zeta$, $e_m = \hat{m} - m$) converge exponentiellement à zéro à une vitesse de convergence contrôlée par $\rho = \min(\rho_z, \rho_m)$ [3].*

5 Résultats de simulation

Les états et le message reconstruits par chaque observateur sont montrés dans les figures 3 et 4. D'après ces figures, nous constatons la convergence plus rapide et plus précise de l'observateur à modes glissants, dûes à la convergence en temps fini de celui-ci, tandis que l'observateur adaptatif possède la propriété de convergence exponentielle [3]. Par contre, l'observateur à modes glissants fonctionne étape par étape, alors que l'observateur adaptatif synchronise tous les états en même temps.

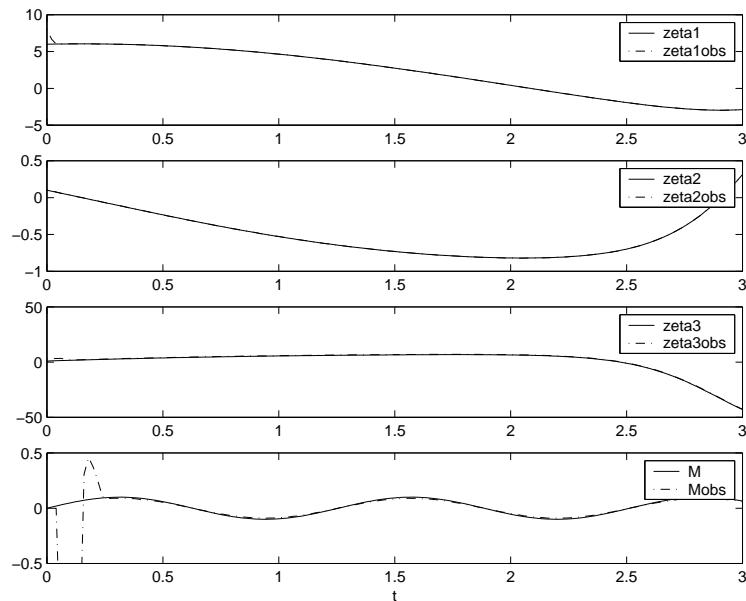


Fig.3. Les états et le message reconstruits par l'observateur à modes glissants

6 Conclusion

Un système de communication sécurisée est réalisé à l'aide des méthodes de la cryptographie chaotique. L'émetteur est un oscillateur de Colpitts chaotique dans lequel le message est injecté en utilisant la méthode par inclusion. Deux observateurs sont proposés comme récepteur : un observateur à modes glissants, et un observateur adaptatif. Ces observateurs utilisent deux méthodes différentes pour reconstruire tous les états de l'émetteur, ainsi que le message. Les résultats de simulation sont présentés et les deux observateurs sont comparés. Il est à noter que la réalisation pratique de l'observateur à modes glissants a été faite au laboratoire ECS-EA3649. Les résultats présentés ici sont seulement pour le but de démontrer qu'un grand nombre d'observateurs peuvent être employés comme récepteur dans un problème de synchronisation chaotique. Le principal problème restant est de choisir le plus robuste et le plus facile observateur à réaliser.

Références

1. L. BOUTAT-BADDAS, Sliding Mode Observers and Observability Singularity in Chaotic Synchronization, *Mathematical problems in engineering*, **53** (1), 11-31 (2004).
2. L. BOUTAT-BADDAS, *Analyse des singularités d'observabilité et de détectabilité : Application à la synchronisation des circuits électroniques chaotiques*, Thèse de doctorat de l'Université de Cergy-Pontoise, (2002).

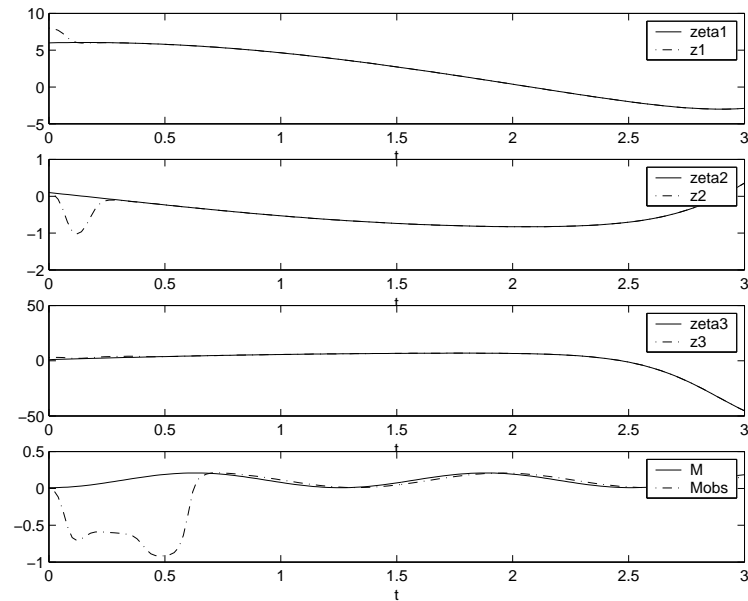


Fig.4. Les états et le message reconstruits par l'observateur adaptatif

3. G.BESANÇON, On adaptive observers for state affine systems and application to synchronous machines, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, USA, (2003).
4. T.M. CARROLL, Synchronizing chaotic circuits, *IEEE Transactions on circuits and systems*, **38** (4), (1991).
5. L.C. DE SOUZA MARQUES, Commande par Modes Glissants de la Machine Asynchrone : appliquée au Benchmark Manutention Horizontale, *Action Nationale Inter-GDR « Commande de machines »*, (1999).
6. M.S. ISLAM, Design and Analysis of Sliding-Mode Observers for Sensorless Operation of Switches Reluctance Motors, *IEEE Transactions On Control Systems Technology*, **11** (3), 383-389 (2003).
7. M. L'HERNAULT, Chaotic Frequency Modulation in Cryptography, *International Workshop on Electronics and System Analysis*, Espagne, (2004).
8. GIAN MARIO MAGGIO, Nonlinear Analysis of the Colpitts Oscillator and Applications to Design, *IEEE Transactions on circuits and systems-I*, **46** (9), (1999).
9. N. MAXIMOV, Chaotic oscillators design with preassigned spectral characteristics, *ECCTD'01 — European Conference on Circuit Theory and Design*, Epsou, Finland, (1999).
10. G. MYKOLAITIS, Experimental demonstration of chaos from Colpitts oscillator in VHF and UHF ranges, *Electronics Letters*, **40** (4), (2004).
11. U. PARLITZ, Transmission of digital signals by chaotic synchronization, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **2** (4), 973-977 (1992).
12. W. PERRUQUETTI, Observability Bifurcations : Application to Cryptography, *Chaos in Automatic Control*, M. Dekker, (2005).
13. W. PERRUQUETTI, *Sliding Mode control in Engineering*, M. Dekker, (2002).
14. A. RODRIGUEZ, on Adaptive Observer for a P-Class of Chaotic Systems, accepted for publication in *Chaos, Solitons & Fractals*.
15. N.F. RULKOV, Synchronization Methods for Communication with Chaos over Band-Limited Channels, *International journal of Circuit Theory and Applications*, **27**, 555-567.
16. T. YANG, Cryptography based on chaotic systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, **44** (5), 469-471 (1997).
17. Q. ZHANG, Implicit Adaptive Observers for a Class of Nonlinear Systems, *Proceedings of the American Control Conference* (2001).

Observation et contrôle du chaos hamiltonien dans les interactions ondes-particules

A. Macor & F. Doveil

Turbulence Plasma, PIIM, UMR6633 CNRS/Université de Provence, Centre de Saint Jérôme, case 321, Avenue Escadrille Normandie-Niémen, 13397 Marseille cedex 20
macor@up.univ-mrs.fr, doveil@up.univ-mrs.fr

Résumé. On injecte un faisceau d'électrons de faible intensité dans un tube à onde progressive. Celui-ci interagit avec les ondes émises par un générateur de forme d'onde arbitraire. On relie la dispersion de la fonction de distribution en vitesses des électrons mesurée à la sortie du tube à la transition au chaos pour le mouvement de particules dans un spectre d'ondes. Une stratégie de contrôle du chaos a ainsi pu être mise à l'épreuve.

Abstract. A low intensity electron beam is injected in a travelling wave tube. It interacts with waves launched from an arbitrary waveform generator. We relate the measured spread of the electron velocity distribution function at the outlet of the tube to the transition to large scale chaos for the electron dynamics in a spectrum of waves. A new strategy for control of Hamiltonian chaos could thus be tested.

Les interactions ondes-particules sont au coeur du fonctionnement des tubes électroniques [1,2]. Un Tube à Onde Progressive (TOP) de grande longueur permet de simuler avantageusement le système faisceau-plasma, paradigme de la turbulence plasma [3,4]. Quand des ondes sont injectées extérieurement dans le TOP et que l'intensité du faisceau est suffisamment faible pour ne pas induire de croissance significative des ondes, les électrons du faisceau jouent le rôle de particules tests évoluant dans le potentiel des ondes.

Le mouvement d'une particule chargée dans le potentiel d'une seule onde est intégrable et identifiable au classique pendule non linéaire. Une particule, dite "résonante", de vitesse moyenne proche de la vitesse de phase de l'onde v_ϕ , peut être piégée au fond d'un puits de potentiel de l'onde et effectuer des oscillations de piégeage (libration du pendule). Une particule « non résonante », beaucoup plus rapide ou plus lente que l'onde, verra sa vitesse osciller autour de sa vitesse moyenne (rotation du pendule). Une courbe, la séparatrice, sépare ces deux types de mouvement dans l'espace de phase. Ne peuvent être piégées dans l'onde que les particules dont la vitesse initiale diffère de v_ϕ de moins de $\delta v = 2\sqrt{(|\eta|\phi)}$ où η désigne le rapport de la charge à la masse de la particule et ϕ est l'amplitude du potentiel de l'onde. En présence d'une deuxième onde de vitesse de phase différente v'_ϕ , le mouvement de la particule est non intégrable. On introduit le paramètre de recouvrement de résonances $s = (\delta v + \delta v')/|v_\phi - v'_\phi|$. Si $s \ll 1$, les orbites de la particule restent régulières et le théorème de Poincaré-Birkhoff [5] prévoit que des résonances secondaires apparaissent et confèrent à l'espace de phase une structure fractale, comme on le voit sur la moitié gauche de la Fig. 1. Si $s \geq 1$, le chaos grande échelle apparaît avec la destruction des derniers tores de KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) [6], comme on le voit sur la moitié droite de la Fig. 1.

L'injection d'un faisceau test dans le TOP a récemment permis d'observer la synchronisation non linéaire de particules non résonantes par une onde isolée [7], à la base de l'amortissement Landau dans les plasmas. Pour un faisceau résonant, le piégeage peut être observé [8]. En présence de deux ondes, le recouvrement de résonances conduit à la transition au chaos grande échelle [9,10] avec mise en évidence de « l'escalier du diable » traduisant la structure fractale de l'espace de phase [11]. Même lorsqu'une seule fréquence est excitée, la transition associée au recouvrement de résonances entre le mode d'hélice et le mode faisceau oscillant à la même fréquence a pu être observée. C'est dans ces conditions qu'une nouvelle stratégie de contrôle du chaos hamiltonien a été mise en oeuvre avec succès [12].

Dans la section 2, le principe des mesures est brièvement rappelé. La section 3 dresse un tableau des résultats obtenus dans cette configuration. Les conclusions et perspectives sont énoncées en section 4.

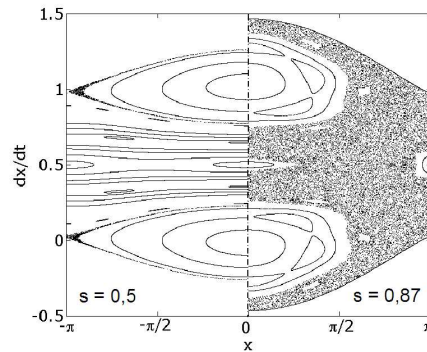


Fig.1. Section de Poincaré pour 26 conditions initiales de la dynamique régie par $\ddot{x} = -\varepsilon(\sin(x) + \sin(x - t))$. La moitié gauche pour $\varepsilon = 1/64$ ($s = .5$) exhibe des chaînes d'îlots de resonances secondaires aux vitesses rationnelles $m/(n + m)$; la moitié droite pour $\varepsilon = 3/64$ ($s = .87$) exhibe du chaos grande échelle.

1 Faisceau test dans un TOP

Les détails concernant le TOP ont déjà été publiés [8,9]. Il consiste en trois éléments principaux : un canon à électrons, une structure à onde lente constituée d'une hélice de 4 m de long, présentant un rayon de 11.3 mm et un pas de 0.8 mm, couplée capacitivement à 4 antennes mobiles le long de la structure, et un analyseur électrostatique trochoïdal. La Fig. 2a rappelle le principe des mesures. A l'entrée, on peut contrôler la vitesse initiale du faisceau d'une intensité de l'ordre de $10nA$ émis par une cathode à oxyde devant une anode percée d'un trou circulaire dont le diamètre fixe celui du faisceau. Le faisceau est confiné le long de l'axe de l'hélice par un champ magnétique de 500 G. Avec une antenne, on peut exciter un spectre d'ondes dont on contrôle indépendamment la fréquence, l'amplitude et la phase. Pour chaque fréquence, la longueur d'onde du mode d'hélice (essentiellement longitudinal près de l'axe) est fixée par la relation de dispersion de l'hélice [9]. La position de l'antenne à la sortie de l'hélice fixe la longueur d'interaction du faisceau avec les ondes. A la sortie de l'hélice, un analyseur trochoïdal permet de reconstituer la fonction de distribution en vitesses du faisceau (moyennée en temps) après son interaction avec les modes propagés dans le dispositif. La Fig. 2b rappelle le principe de fonctionnement de l'analyseur qui utilise la dérive $E \times B$ du faisceau associée à la présence d'un champ électrique constant dans l'analyseur [13].

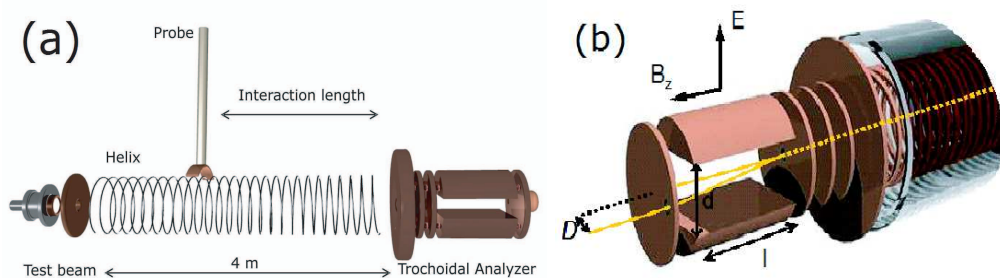


Fig.2. a) Principe de la mesure; b) Schéma de l'analyseur trochoïdal.

2 Résultats pour un faisceau test

Nous avons tout d'abord vérifié que le faisceau d'électrons se propage sans modification le long de l'axe de la machine.

2.1 Synchronisation du faisceau avec une onde non résonante

Dans cette expérience [7], on applique un signal de fréquence 30 MHz sur l'antenne. D'après la relation de dispersion de l'hélice, on excite ainsi une onde progressive de vitesse de phase $v_\phi = 4.07 \cdot 10^6$ m/s. La Fig. 3a montre un contour 2D de la fonction de distribution en vitesses (fdv) d'un faisceau test d'intensité $I_b = 10$ nA et de vitesse initiale $v_b = 2.5 \cdot 10^6$ m/s, mesurée à la sortie du tube après son interaction, sur une longueur de 0.5 m, avec le mode d'hélice. Il est le résultat d'une interpolation linéaire par MATLAB des mesures obtenues pour différentes amplitudes du signal appliqué variant de 0 mV à 1500 mV par pas de 100 mV. Quand l'amplitude augmente graduellement, le pic initial isolé du faisceau donne naissance à deux pics dont la séparation augmente. La ligne continue de la Fig. 3a donne une estimation de la limite basse de la zone de piégeage de l'onde qui varie comme la racine carrée de l'amplitude de l'onde ϕ . Comme la vitesse initiale du faisceau est hors de cette zone, les électrons du faisceau subissent une simple modulation de leur vitesse d'amplitude $\eta\phi/|v_\phi - v_b|$ autour de leur vitesse initiale v_b . Cette estimation est le résultat d'un calcul perturbatif du premier ordre en ϕ autour du mouvement libre d'une particule de vitesse constante v_b . Une moyenne sur la phase initiale de l'électron par rapport à l'onde engendre deux pics aux vitesses maximum et minimum de l'électron pour sa fonction de distribution. Ces deux pics correspondent aux deux lignes pointillées de la Fig. 3a, symétriques autour de v_b . On observe une déviation systématique par rapport à cette estimation orientée vers v_ϕ quand l'amplitude de l'onde augmente. Pour v_b plus grand que v_ϕ nous observons aussi une déviation vers v_ϕ . Cette déviation traduit une synchronisation des électrons avec l'onde. On peut l'expliquer en considérant le mouvement d'électrons tests dans le potentiel de l'onde, décrit par l'équation intégrable du pendule non linéaire classique.

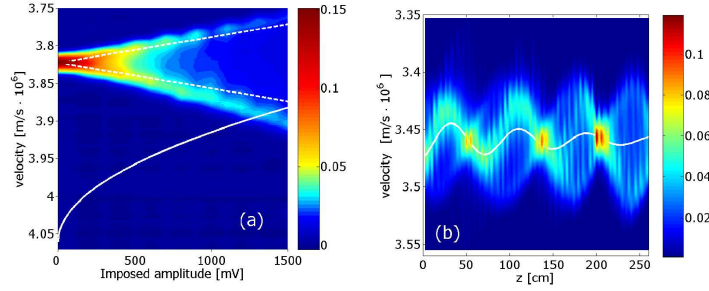


Fig.3. Contour 2D de fdv d'un faisceau test dans une onde à $v_\phi = 4.06 \times 10^6$ m/s : a) vs amplitude de l'onde (longueur d'interaction $L = 0.5$ m) avec estimation au 1er ordre de la modulation (lignes) et zone de piégeage (demie parabole) ; b) vs distance du canon à l'antenne émettrice z (amplitude de l'onde $\phi = 18$ mV) avec estimation au 2nd ordre de la vitesse moyenne du faisceau (courbe continue)

Ceci apparaît encore plus clairement quand on garde l'amplitude de l'onde constante et fait varier la longueur d'interaction z en déplaçant l'antenne émettrice le long de l'hélice. La Fig. 3b est obtenue en superposant les fdv du faisceau test mesurées à la sortie de l'hélice pour 100 différentes positions de l'antenne espacées de 2.5 cm. On remarque tout d'abord un regroupement périodique en vitesses des vdv avec une période spatiale de $L_b = v_b v_\phi / (f|v_b - v_\phi|) = 0.76$ m qui correspond à la longueur pour laquelle le temps de transit des électrons L_b/v_b diffère du temps de propagation de l'onde L_b/v_ϕ d'une période $1/f$. On remarque aussi que l'amplitude de la modulation en vitesse du faisceau augmente avec z car, quand l'antenne s'approche de la sortie du tube, l'onde est moins amortie dans la structure à onde lente. Un examen plus attentif des contours de la Fig. 3b révèle que la vitesse moyenne du faisceau test oscille avec z . La courbe continue superposée sur le contour correspond à l'estimation au second ordre de la vitesse des électrons moyennée sur la phase initiale quand l'amortissement de l'onde est aussi pris en compte. On trouve un excellent accord entre cette estimation et la vitesse moyenne calculée à partir des fdv mesurées. Cet effet de synchronisation du faisceau est à la source de l'amortissement Landau dans les plasmas [7].

2.2 Piégeage du faisceau dans une onde résonante

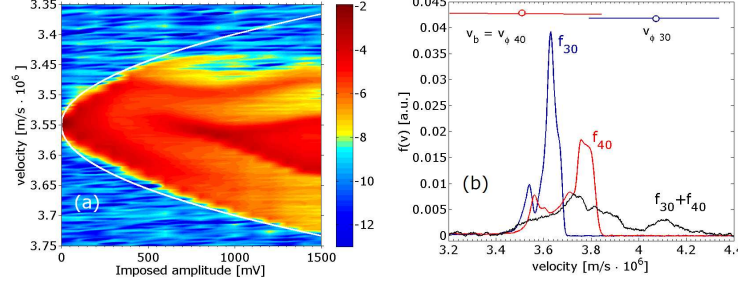


Fig.4. a) Contours 2D de la $f dv$ mesurée pour un faisceau test ($I_b = 120$ nA, $v_b = 3.55 \times 10^6$ m/s) piégé dans une onde à 40 MHz avec zone de piégeage (courbe continue) vs amplitude de l'onde (longueur d'interaction $L = 2.3$ m); b) $f dv$ normalisée pour une onde à 30 MHz (courbe f_{30}), une onde à 40 MHz (courbe f_{40}), et deux ondes à 30 et 40 MHz (courbe $f_{30} + f_{40}$). Les cercles indiquent les vitesses de phase; les barres horizontales indiquent les zones de piégeage.

La Fig. 4a est obtenue de la même façon que la Fig. 3a mais correspond à un signal appliqué à 40 MHz sur une antenne située à $L = 2.3$ m de la sortie du tube, et à un faisceau de vitesse initiale égale à la vitesse de phase $v_{\phi} = 3.55 \cdot 10^6$ m/s du mode d'hélice. On observe que la forme du domaine de vitesse embrassée par le faisceau est très différente de la Fig. 3a. Sa largeur n'augmente pas linéairement avec l'amplitude de l'onde mais plutôt comme la racine carrée comme prévu par le piégeage des électrons dans les puits de potentiel de l'onde. On observe aussi un regroupement en vitesse des électrons autour de leur vitesse initiale pour une amplitude du signal appliqué de 900 mV. Si on se réfère au modèle d'une barre tournante [14] pour décrire le mouvement des électrons piégés dans l'espace de phase, ce phénomène est aussi relié au piégeage. En égalant L à une demie période de piégeage quand le regroupement en vitesses se produit, on peut calculer l'amplitude du mode d'hélice et vérifier qu'elle est en accord avec une mesure indépendante du coefficient de couplage des antennes [15] ou de la largeur en vitesse de la zone de piégeage [8].

2.3 Recouvrement de résonances pour deux ondes

Trois différentes $f dv$ sont tracées sur la Fig. 4b. La longueur d'interaction est de 3.6 m. le faisceau test d'intensité $I_b = 50$ nA est initialement centré en $v_{\phi 40} = 3.55 \cdot 10^6$ m/s, la vitesse de phase d'une onde à 40 MHz. La courbe bleue (resp. rouge) étiquetée f_{30} (resp. f_{40}) montre la $f dv$ normalisée du faisceau mesurée à la sortie du tube après modulation (resp. piégeage) du faisceau test dans une onde isolée à 30 MHz (resp. 40 MHz) émise sur une antenne fixe. La zone de piégeage de l'onde à 30 MHz (resp. 40 MHz) est indiquée par la barre horizontale bleue (resp. rouge) centrée sur sa vitesse de phase. Dans les deux cas, avec la résolution expérimentale utilisée, aucun électron n'est détecté au delà de la vitesse limite supérieure de la zone de piégeage de l'onde à 40 MHz. Comme les zones de piégeage des deux ondes se recouvrent, on observe que, quand les deux signaux à ces deux fréquences sont excités sur la même antenne avec un générateur de forme d'onde arbitraire, la $f dv$ mesurée étiquetée f_{30+40} s'étend sur les deux domaines au delà de la limite précédente. Ceci constitue une indication claire qu'aucune barrière à la diffusion chaotique en vitesses ne subsiste, comme prévu par la théorie KAM qui décrit la transition au chaos à grande échelle pour le mouvement d'une particule chargée dans deux ondes électrostatiques [6].

2.4 Transition au chaos et « escalier du diable »

La Fig. 5a correspond à des conditions similaires à la Fig. 3a mais pour un signal appliqué sur l'antenne plus grand, une longueur d'interaction $L = 3.6$ m plus grande, et un faisceau test avec une

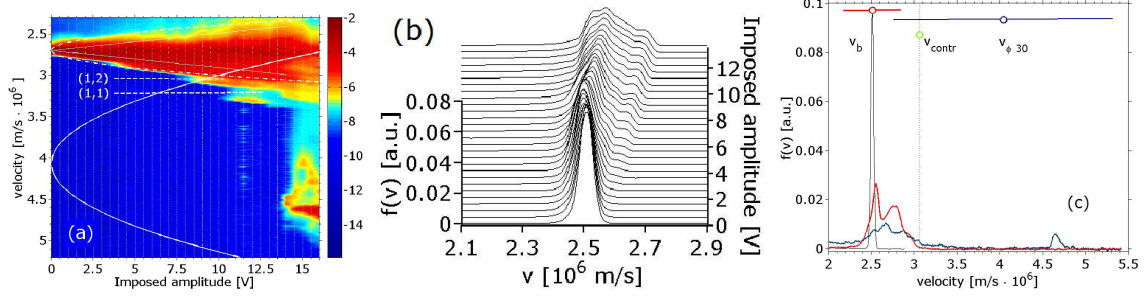


Fig.5. Transition au chaos grande échelle, contrôle du chaos et “escalier du diable” expérimental : a) contour 2D des $f dv$ d’un faisceau test ($I_b = 10 \text{ nA}$, $v_b = 2.7 \times 10^6 \text{ m/s}$) après interaction sur $L = 3.6 \text{ m}$ avec une onde à 30 MHz vs. amplitude du signal ; zone de piégeage du mode d’hélice (resp. mode faisceau) indiquée par parabole continue (resp. pointillée) ; résonances secondaires (n, m) indiquées aux vitesses $m\kappa/(n+m\kappa)$ avec $\kappa = v_\phi/v_b$; b) $f dv$ exhibant des marches de “l’escalier du diable” ; c) $f dv$ normalisée à la sortie du TOP : faisceau test ($I_b = 50 \text{ nA}$, $v_b = 2.5 \times 10^6 \text{ m/s}$) [pic noir] ; avec modes d’hélice et de faisceau à 30 MHz (vitesse de phase et zone de piégeage de chaque mode données respectivement par les cercles et les barres horizontales) [courbe bleue avec grande dispersion] ; avec une onde de contrôle additionnelle à 60 MHz (vitesse de phase au cercle médian) [courbe rouge moins étalée].

vitesse initiale égale à $2.7 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Quand l’amplitude du signal augmente, on constate que la taille de la zone sur laquelle s’étend la $f dv$ ne croît pas linéairement et suit plutôt la parabole pointillée typique d’un comportement de piégeage. Ceci correspond à l’existence d’un mode faisceau, associé aux oscillations plasma dans le référentiel du faisceau. Les électrons du faisceau sont piégés dans ce mode, qui se propage à la même vitesse que le faisceau. Il est opportun de remarquer que l’on retrouve les mêmes régions en V horizontales que sur la Fig. 4a, associées au “piquage” périodique de la distribution en vitesses résultant du piégeage du faisceau dans le mode faisceau.

Quand on continue d’augmenter l’amplitude du signal appliqué, les zones de piégeage du mode faisceau et du mode d’hélice se recouvrent et les électrons peuvent même être accélérés à une vitesse plus grande que la vitesse de phase du mode d’hélice comme le prévoit la transition au chaos pour le mouvement des électrons dans ces deux modes de vitesses de phase différentes. De plus nous observons que cette transition ne se produit pas de façon régulière mais opère par sauts. La Fig. 5b montre quelques détails de ces sauts. Chaque saut peut être relié à la présence des résonances secondaires [18] telles que celles observées sur la moitié gauche de la Fig. 1. Ces résonances secondaires exhibent un comportement en “escalier du diable” avec une infinité de résonances à l’intérieur des résonances. Seules deux résonances principales sont indiquées par les lignes horizontales de la Fig. 5a. Une comparaison avec les simulations numériques, une analyse plus détaillée de ce comportement, ainsi que son exploration quand deux fréquences sont excitées ont été conduites [17].

La connaissance approfondie de ce système nous a permis de mettre à l’épreuve une nouvelle théorie de contrôle du chaos Hamiltonien [19]. Le coeur de cette approche consiste en une modification réduite du system qui permet de contenir le chaos en construisant des barrières de transport dans l’espace de phase.

2.5 Contrôle du chaos

La Fig. 5c montre trois différentes fonctions de distribution des vitesses. Le pic étroit correspond au faisceau test initial après qu’il a parcouru l’intégralité de l’hélice en l’absence de signal excité. La courbe bleue, exhibant un étalement maximum du faisceau, correspond au recouvrement de résonances du mode d’hélice et du mode faisceau décrit dans la sous-section précédente. On superpose alors sur l’antenne un signal de contrôle correspondant au battement de ces deux modes, avec amplitude et phase bien définies. Pour le choix judicieux de la phase de la Fig. 5c on observe un “piquage” de la fonction de distribution rouge sans électrons détectés de vitesse supérieure à la vitesse de phase du signal de contrôle. Au contraire, pour une phase augmentée de π , nous observerions un plus grand étalement de la fonction de distribution.

On montre que la condition de résonance, qui implique que le mode de battement du mode de faisceau et du mode d'hélice à 60 MHz doit satisfaire la relation de dispersion de l'hélice à cette fréquence, est cruciale pour l'efficacité de la méthode. Ce contrôle est réalisé avec un coût d'énergie additionnel qui correspond à moins que 1 de l'énergie initiale du système à deux ondes. Intuitivement il correspond à annuler la résonance secondaire associée au battement des deux modes et restaurer localement un tore de KAM pour empêcher la diffusion des électrons dans l'espace de phase. Cette expérience fut inspirée par une méthode générale de contrôle du chaos Hamiltonian [19] et a aussi été comparée aux prédictions numériques [11].

3 Conclusions et perspectives

Ce système fournit un moyen de mettre en évidence les caractéristiques fondamentales des systèmes hamiltoniens chaotiques. On espère obtenir encore plus de détails sur la dynamique des particules en injectant, non pas un faisceau continu, mais des paquets d'électrons avec une phase initiale bien définie par rapport aux ondes [20]. Un autre sujet d'étude concerne la robustesse des phénomènes chaotiques lorsqu'on introduit l'auto-cohérence en autorisant les électrons à agir sur le spectre d'ondes, comme dans les TOP conventionnels. Ceci peut être étudié en augmentant progressivement l'intensité du faisceau.

Ces études fondamentales ouvrent de nouvelles pistes en physique des plasmas et pour le contrôle des systèmes complexes, tels que les tubes électroniques et les lasers à électrons libres pour lesquels l'amélioration des performances est cruciale.

Les auteurs remercient J-C Chezeaux, D. Guyomarc'h, et B. Squizzaro de leur précieuse aide technique. Ce travail a bénéficié du soutien d'un contrat Euratom/Cea. A. Macor bénéficie d'une bourse du Ministère de la Recherche Scientifique.

Références

1. J.R. PIERCE, *Traveling wave tubes* (Van Nostrand, New York, 1950).
2. A.S. GILMOUR JR, *Principles of traveling wave tube* (Artech House, London, 1994).
3. G. DIMONTE AND J.H. MALMBERG, *Phys. Fluids* **21**, 1188 (1978).
4. S.I. TSUNODA, F. DOVEIL AND J.H. MALMBERG, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1112 (1987).
5. H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* Gauthier-Vilars, Paris (1899).
6. D.F. ESCANDE, *Phys. Rep.* **121**, 165 (1985).
7. F. DOVEIL, D.F. ESCANDE AND A. MACOR, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 085003 (2005).
8. F. DOVEIL, A. MACOR AND KH. AUHMANI, *J. Phys.* **C7**, 154-162 (2005).
9. F. DOVEIL, A. MACOR AND KH. AUHMANI, *Plasma Phys. Control. Fusion* **47**, A261-A271 (2005).
10. F. DOVEIL, KH. AUHMANI, A. MACOR AND D. GUYOMARC'H, *Phys. Plasmas* **12**, 010702 (2005).
11. A. MACOR, F. DOVEIL AND Y. ELSKENS, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 264102 (2005).
12. C. CHANDRE, G. CIRAOLO, F. DOVEIL, R. LIMA, A. MACOR AND M. VITTOT, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 074101 (2005).
13. D. GUYOMARC'H AND F. DOVEIL, *Rev. Sci. Instrum.* **71**, 4087 (2000).
14. H.E. MYNICK AND A.N. KAUFMAN, *Phys. Fluids* **21**, 653 (1978).
15. J.H. MALMBERG, T.H. JENSEN AND T.M. O'NEIL, *Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion Res.* **1**, 683 (1966).
16. F. DOVEIL AND D.F. ESCANDE, *Phys. Lett.* **90A**, 226 (1982).
17. F. DOVEIL, A. MACOR, AND Y. ELSKENS, *Electron climbing a "devil's staircase" in wave particle interaction*, submitted.
18. F. DOVEIL AND D.F. ESCANDE, *Phys. Lett.* **90A**, 226 (1982).
19. G. CIRAOLO, C. CHANDRE, R. LIMA, M. VITTOT, M. PETTINI, AND PH. GHENDRIH, *Europhys. Lett.* **69**, 879 (2005).
20. A. BOUCHOULE AND M. WEINFELD, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1144 (1976).

Une nouvelle famille de systèmes chaotiques minimaux équivariants par rotation de π autour d'un axe

Jean-Marc Malasoma

Laboratoire Géomatériaux, DGCB URA CNRS 1652
ENTPE, Rue Maurice Audin, 69518 Vaulx en Velin Cedex
malasoma@entpe.fr

Résumé. Nous montrons l'existence d'une nouvelle classe de systèmes tridimensionnels, équivariant sous l'action d'une rotation d'angle π autour d'un axe et présentant une structure algébrique minimale autorisant une dynamique chaotique. Nous énonçons les premiers résultats obtenus en effectuant une analyse topologique des attracteurs chaotiques observés. Nous montrerons, en particulier, qu'une description fine de cette topologie nécessite l'emploi d'une dynamique symbolique utilisant un alphabet contenant 8 symboles.

1 Introduction

Quarante années après la découverte du premier système chaotique par Lorenz [1], la détermination des conditions minimales d'apparition du chaos, dans un système d'équations différentielles, demeure un problème largement ouvert. Les premières tentatives pour trouver un système chaotique algébriquement plus simple sont dues Rössler [2]. En 1976 il propose un premier modèle, constitué toujours de sept monômes mais cette fois un seul d'entre eux est non linéaire. Depuis cette époque de nombreux systèmes chaotiques ont été décrits et étudiés dans la littérature spécialisée, mais ce n'est qu'en 1997 que HeideI et Zhang [3] obtiennent le premier résultat donnant des bases rigoureuses à cette recherche. Ils démontrent qu'en dimension trois, aucun système quadratique ne peut être chaotique s'il n'est pas constitué d'au moins cinq monômes dont une non linéarité. La même année Sprott [4] montre que ces conditions nécessaires sont en fait suffisantes, en exhibant deux modèles chaotiques équivalents présentant une structure minimale. Enfin plus récemment [5], nous avons décrit sept nouveaux systèmes chaotiques minimaux et nous avons prouvé que ces systèmes ainsi que les deux de Sprott peuvent être regroupés en deux classes d'équivalence en utilisant la C^k -équivalence des flots.

Toutefois, le modèle de Lorenz présente une invariance par rotation d'angle π autour de l'axe Oz , ce qui ne peut pas être le cas des modèles minimaux appartenant aux deux classes que l'on vient d'évoquer. Pour cette raison, nous avons récemment entrepris de déterminer mathématiquement l'ensemble des systèmes quadratiques équivariants sous l'action de la rotation $R_z(\pi)$ et présentant une structure algébrique minimale autorisant une dynamique chaotique. Nous présentons dans cet article, une partie des résultats obtenus lors de cette étude.

2 Systèmes chaotiques connus équivariant par $R_z(\pi)$

Considérons un système quadratique tridimensionnel équivariant sous l'action d'une rotation d'angle π autour d'un axe. On peut, sans perte de généralité, supposer que cet axe est l'axe Oz et que par conséquent la symétrie en jeu est la rotation $R_z(\pi)$. Dans ces conditions, la forme la plus générale pour un tel système est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y + a_3xz + a_4yz \\ \dot{y} = b_1x + b_2y + b_3xz + b_4yz \\ \dot{z} = c_0 + c_1z + c_2x^2 + c_3xy + c_4y^2 + c_5z^2 \end{cases} \quad (1)$$

S'il n'y a pas de non linéarités dans les deux premières équations, c'est-à-dire si $a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 0$, alors x et y sont solutions d'un système différentiel bidimensionnel, par conséquent ces variables ne peuvent

pas être chaotiques en vertu du théorème de Poincaré-Bendixon. De façon similaire, si $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, z est solution d'une équation monodimensionnelle et en vertu du même théorème ne présentera pas de comportement chaotique. En conséquence, un tel système ne pourra être chaotique que s'il contient au moins une nonlinéarité dans l'une de ses deux premières équations et une nonlinéarité différente de z^2 dans la troisième.

Cette condition nécessaire est en fait suffisante comme le montre un certain nombre de systèmes chaotiques déjà décrits dans la littérature. Le premier d'entre eux est bien évidemment le célèbre système de Lorenz [1] qui comporte sept monômes dont deux sont quadratiques :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

En 1980, Shimizu et Morioka [6] ont proposé un nouveau modèle chaotique présentant une structure algébriquement plus simple que celle du système de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \mu y - xz \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 \end{cases} \quad (3)$$

En 1981, Shaw [7] a décrit un modèle chaotique trouvé en collaboration avec Burke. Ce système, comporte les mêmes nonlinéarités que celui de Lorenz, mais il a la même complexité que le système de Shimizu and Morioka :

$$\begin{cases} \dot{x} = -Sx - Sy \\ \dot{y} = -y - Sxz \\ \dot{z} = V + Sxy \end{cases} \quad (4)$$

En 1994, Sprott [8] a trouvé cinq systèmes chaotiques constitués de seulement cinq monômes dont deux quadratiques. Deux de ces systèmes sont dissipatifs et équivariants par $R_z(\pi)$. Le premier est connu sous le nom de système de Sprott B :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = x - y \\ \dot{z} = 1 - xy \end{cases} \quad (5)$$

Le second est le système de Sprott C :

$$\begin{cases} \dot{x} = yz \\ \dot{y} = x - y \\ \dot{z} = 1 - x^2 \end{cases} \quad (6)$$

Ces deux systèmes présentent la structure algébrique minimale autorisant un comportement chaotique.

En 2000, Van der Schrier et Maas [9] ont obtenu une version simplifiée du modèle de Lorenz dans la limite dans grands nombres de Rayleigh et de Prandtl. Ce système possède encore des solutions chaotiques, mais il présente une structure algébrique minimale :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = -xz \\ \dot{z} = R + xy \end{cases} \quad (7)$$

Enfin, en 2002, Lü et Chen [10] ont décrit un système chaotique très similaire à celui de Burke et Shaw. Seul le terme constant du modèle de Burke et Shaw est remplacé par un terme proportionnel à la variable z :

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (8)$$

Ces exemples, prouvent que deux nonlinéarités bien placées, suffisent pour obtenir des systèmes chaotiques équivariants par $R_z(\pi)$, à condition toutefois qu'ils contiennent suffisamment de termes linéaires ou constants. En échangeant au besoin le nom des variables x et y , ce qui n'affecte pas le nom de l'axe de rotation, on peut sans perte de généralité, supposer que les deux nonlinéarités nécessaires et suffisantes appartiennent à la seconde et à la troisième équation. Tous les systèmes précédents, à l'exception des deux systèmes de Sprott, s'écrivent déjà sous cette forme.

Si on utilise cette convention, les systèmes de Sprott B et de Sprott C s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = 1 - xy \end{cases} \quad (9)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = 1 - y^2 \end{cases} \quad (10)$$

Sous cette forme canonique, il devient évident que le système de Van der Schrier et Maas (en changeant y en $-y$) est une généralisation à un paramètre du système de Sprott B. De plus, tous ces exemples possèdent la même nonlinéarité xz dans la seconde équation. Écrit sous forme canonique, le système de Sprott B constitue un exemple de système chaotique équivariant sous l'action de $R_z(\pi)$ présentant une structure minimale avec la nonlinéarité supplémentaire xy . De même, le système de Sprott C fournit un exemple de système chaotique à structure minimale avec la nonlinéarité supplémentaire y^2 . Enfin, le seul système chaotique connu et équivariant sous l'action de $R_z(\pi)$ qui possède la nonlinéarité x^2 est celui de Shimizu et Morioka, sa structure algébrique n'est toutefois pas minimale.

3 Nouveau système à structure minimale équivariant par $R_z(\pi)$

Les conclusions de la section précédente, ouvrent la possibilité de trouver une nouvelle famille de systèmes chaotiques équivariants sous l'action de $R_z(\pi)$ et présentant une structure algébrique non encore décrite dans la littérature spécialisée. Si l'on impose la nonlinéarité x^2 dans la troisième équation, on peut montrer [11] qu'il n'existe que quatre types de systèmes dissipatifs non trivialement non chaotiques. Ces quatre types peuvent être classés par paires que nous allons analyser successivement.

La première de ces paires est constituée des deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_2 y \\ \dot{y} = b_6 x z \\ \dot{z} = c_0 + c_3 z + c_4 x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = a_2 y \\ \dot{y} = b_1 x + b_6 x z \\ \dot{z} = c_3 z + c_4 x^2 \end{cases} \quad (11)$$

Ils sont équivalents par un changement de variables linéaire, de plus ils ne peuvent pas être chaotiques. En effet, à partir du premier d'entre eux, on obtient facilement :

$$b_6 z \ddot{z} = b_6 c_3 z \dot{z} + 2a_2 c_4 y \dot{y} \quad (12)$$

c'est-à-dire :

$$\dot{S}_1 = -\dot{z}^2 \quad (13)$$

où, S_1 est une fonction du temps par l'intermédiaire des variables x , y , et z , définie par la relation :

$$S_1(x, y, z) = b_6 c_3 z^2 + 2a_2 c_4 y^2 - b_6 z (c_0 + c_3 z + c_4 x^2) \quad (14)$$

S_1 étant une fonction monotone décroissante, elle possède une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque t tend vers l'infini. Si L est finie, alors le comportement asymptotique se situe sur la surface bidimensionnelle $S_1 = L$, par conséquent le théorème de Poincaré-Bendixon interdit tout comportement chaotique. Si $L = -\infty$ alors au moins une des trois variables n'est pas bornée par conséquent n'est pas chaotique.

L'autre paire de systèmes est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_2y \\ \dot{y} = b_6xz \\ \dot{z} = c_0 + c_4x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = a_2y \\ \dot{y} = b_2y + b_6xz \\ \dot{z} = c_0 + c_4x^2 \end{cases} \quad (15)$$

Ces deux systèmes sont à leur tour équivalents par un changement de variables linéaire. Il suffit par conséquent de ne considérer que le premier qui s'écrit en simplifiant les notations de ses coefficients :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cxz \\ \dot{z} = d + ex^2 \end{cases} \quad (16)$$

avec $a < 0$ pour que le système soit dissipatif et $de < 0$ afin d'avoir deux points fixes n'appartenant pas à l'axe de rotation. On obtient facilement :

$$z\ddot{z} + 2ea^2x\dot{x} - 2eax\ddot{x} - 2eb^2y\dot{y} = 0 \quad (17)$$

La fonction S_2 définie par :

$$S_2(x, y, z) = bcdz + 2abey - a^2ex^2 - b^2ey^2 + bce x^2 \quad (18)$$

possède alors la dérivée par rapport au temps :

$$\dot{S}_2 = bc\dot{z}^2 - 2ae\dot{x}^2 \quad (19)$$

Si $abce < 0$ cette dérivée garde un signe constant, par conséquent S_2 est monotone donc possède une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque t tend vers l'infini. Comme précédemment, on en déduit que ce système n'est pas chaotique.

Considérons maintenant le cas $abce > 0$. Comme $a < 0$ cela signifie que $bce < 0$ c'est-à-dire $bcd > 0$ puisque $de < 0$. En utilisant alors les changements d'échelle suivants :

$$\begin{cases} t = (bcd)^{-1/3}\tau \\ x = \sqrt{-d/e}X \\ y = d\sqrt{-c(be)^{-1}(bcd)^{-1/3}}Y \\ z = d(bcd)^{-1/3}Z \end{cases} \quad (20)$$

On obtient le système à un paramètre :

$$\begin{cases} \dot{X} = -\alpha X + Y \\ \dot{Y} = XZ \\ \dot{Z} = 1 - X^2 \end{cases} \quad (21)$$

où $\alpha > 0$.

4 Un nouvel exemple de système chaotique minimal équivariant par $R_z(\pi)$

Nous allons maintenant montrer, en utilisant des simulations numériques, que le système à structure minimale identifié dans la section précédente, possède bien des solutions chaotiques.

Par exemple, pour $\alpha = 0.88$, les conditions initiales $(x, y, z) = (1.21, 0, -1.67)$ conduisent à un cycle limite stable. Afin d'étudier les bifurcations que subit ce cycle lorsque α diminue, nous avons utilisé la section de Poincaré Σ définie par :

$$\Sigma = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y > 0\} \quad (22)$$

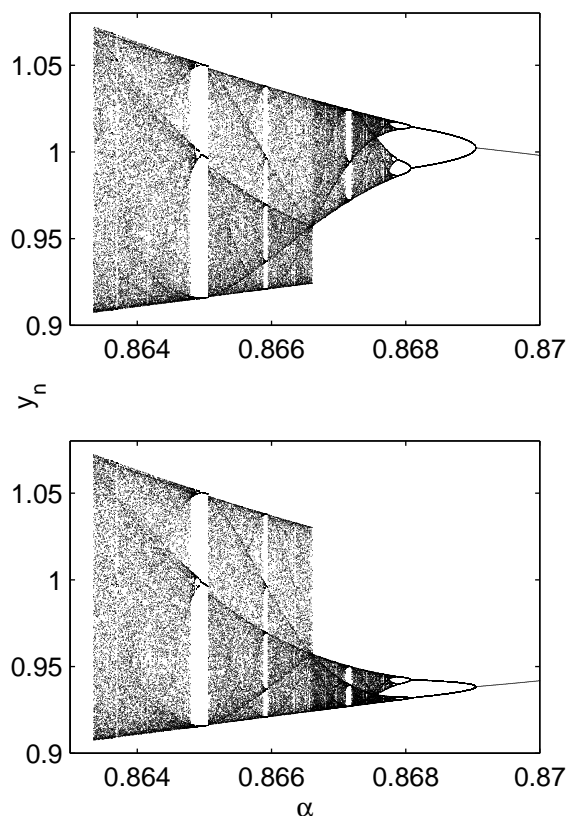


Fig.1. Pour $\alpha = 0.87$ le diagramme du haut commence par un cycle limite stable tandis que celui du bas commence par le cycle limite qui se déduit du précédent par la rotation $R_z(\pi)$

Le diagramme de bifurcation obtenu de cette façon est représenté sur la figure 1. Il à été calculé en diminuant la valeur du paramètre à partir de $\alpha = 0.87$, valeur pour laquelle deux cycles stables coexistent.

On trouvera une description détaillée de l'ensemble des bifurcations observables sur ce diagramme dans [12]. Pour $\alpha < 0.8666\dots$, le système possède un unique attracteur chaotique équivariant sous l'action de la rotation $R_z(\pi)$. Un portrait de phase de cet attracteur est représenté sur la partie gauche de la figure 2 pour $\alpha = 0.86335$ un peu au dessus de la crise frontalière. Les exposants de Lyapunov de cet attracteur sont $\lambda_1 = 0.0997$, $\lambda_2 = 0$, and $\lambda_3 = -0.9630$. l'application de premier retour représentée sur la partie droite de la figure 2, montre que cette application est multimodale à quatre branches. par conséquent, en première approximation, une analyse topologique de cet attracteur conduit à un gabarit à quatre branches, ainsi qu'à une dynamique symbolique utilisant un alphabet à quatre symbole [12]. Une analyse plus fine de cette topologie, révèle qu'en fait chacune des quatre branches est double, comme on peut le suspecter en regardant l'application de premier retour au voisinage du point critique proche de $y_n = 1$. Le gabarit possède alors huit branches et la dynamique symbolique utilise un alphabet à huit symboles [12].

Enfin ce système donne un nouvel exemple [12] de mécanisme conduisant, lorsqu'un paramètre varie, un attracteur chaotique inclus dans un tore de genre 1, a donner naissance à une paire d'attracteurs chaotiques, symétriques l'un de l'autres et entrelacés. Chacun de ces deux attracteurs étant eux mêmes contenus dans un tore de genre 1. Ce mécanisme dit de pérestroika à été décrit récemment dans [13].

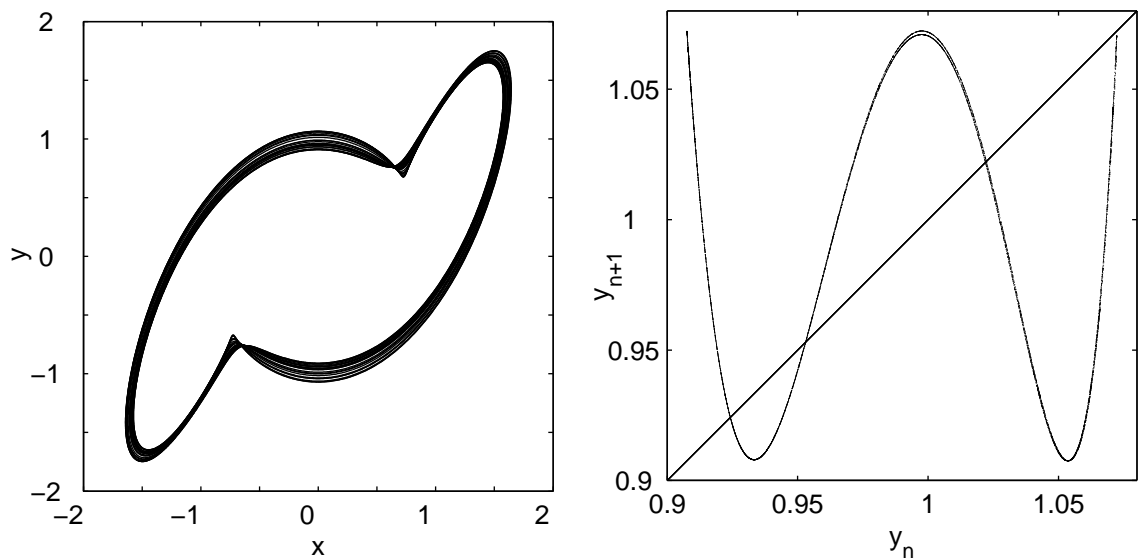


Fig.2. Portrait de phase de l'attracteur chaotique pour $\alpha = 0.86335$ et son application de premier retour.

5 Conclusion

Nous avons prouvé l'existence d'une nouvelle classe de systèmes tridimensionnels, équivariants sous l'action d'une rotation d'angle π autour d'un axe. Ces systèmes sont quadratiques et présentent la structure algébrique la plus simple qui permet l'existence de solutions chaotiques. Une description fine de la topologie des attracteurs chaotiques observés dans ces systèmes, nécessite l'emploi d'une dynamique symbolique utilisant un alphabet contenant 8 symboles.

Références

1. E.N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141 (1963).
2. O. E. RÖSSLER, An equation for continuous chaos, *Physics Letters A*, **57** (5), 397-398 (1976).
3. F. ZHANG & J. HEIDEL, Non-chaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems, *Nonlinearity*, **10**, 1289-1303 (1997).
4. J.C. SPOTT, Simplest dissipative chaotic flow, *Physics letters A*, **228**, 271-274 (1997).
5. J.M. MALASOMA, A new class of minimal chaotic flows, *Physics letters A*, **305**, 52-58 (2002).
6. T. SHIMIZU & N. MORIOKA, On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model, *Physics Letters A*, **76**, 201-204 (1980)
7. R. SHAW, *Z. Naturforsch.*, **36**, 80-112 (1981)
8. J.C. SPOTT, Some simple chaotic flows, *Physical Review E*, **50** (2), R647-650 (1994)
9. G. VAN DER SCHRIER & L.R.M. MAAS. The diffusionless Lorenz equations; Shilnikov bifurcations and reduction to an explicit map, *Physica D*, **141**, 19-36 (2000)
10. J. LÜ & G. CHEN, A new chaotic attractor coined, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12** (3), 659-661 (2002)
11. J.M. MALASOMA, A classification of minimal chaotic flows equivariant by rotation of π around an axis, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, à soumettre (2006).
12. J.M. MALASOMA, A new family of minimal chaotic flows equivariant by rotation of π around an axis, *Physical Review E*, soumis (2006).
13. C. LETELLIER, T.D. TSANKOV, G. BYRNE & R. GILMORE, Large-scale structural reorganization of strange attractors, *Physical Review E*, **72**, 026212 (2005).

Modélisation globale de la population de Lynx du Canada pour une preuve de chaos dans un écosystème réel

J. Maquet & C. Letellier

CORIA UMR 6614 — Université et INSA de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex
Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé. La population de lynx de la Baie d’Hudson est connue entre 1825 et 1934 grâce aux comptes de la Compagnie commercialisant les fourrures de lynx dans cette région. Les données étudiées par Elton et Nicholson en 1942 regroupe une dizaine de cycle sous-échantillonnés. Nous proposons deux modèles globaux (un en 3D et un 4D) qui consistent en des jeux d’équations différentielles ordinaires directement estimés à partir des données. Les deux modèles sont chaotiques et présentent des caractéristiques dynamiques communes.

Abstract. Lynx population in the Hudson Bay is known between 1825 and 1934 by the activity of the Company saling Lynx furs in this region. The data were collected by Elton and Nicholson in 1942. Ten undersampled cycles are available. Two global models (3D and 4D, respectively) are obtained. They are under the form of sets of ordinary differential equations directly estimated from the data. Both models are chaotic and share some dynamical characteristics.

1 Introduction

De nombreux systèmes biologiques et écologiques oscillent avec une période presque constante alors que les niveaux d’abondance présentent de grandes variations [1,2,3]. Parmi les rares données disponibles figure l’évolution des populations de Lynx du Canada (*Lynx canadensis*) à travers les livres de comptes de la Compagnie de la Baie d’Hudson qui ont fait l’objet de nombreuses études depuis celle d’Elton et Nicholson [4]. Ainsi, les fluctuations de la population de Lynx sont liées à celles des lapins blancs (*Lepus americanus*) et celles d’espèces aquatiques comme les rats musqués (*Ondatra Zibethica*). Les lynx font donc partie d’un écosystème à au moins trois espèces qui pourrait présenter des comportements chaotiques, comme cela est fréquemment rencontré dans les modèles (voir par exemple, [5,6,7]).

Malheureusement, tous les modèles proposés jusqu’ici sont empiriques, c’est-à-dire que ce sont des modèles dont les oscillations chaotiques « ressemblent » à celles des données observationnelles. Ceci provient essentiellement du fait que les données disponibles sont le plus souvent trop courtes pour identifier des attracteurs chaotiques. Pour pallier à cette petite quantité de données, il est possible d’utiliser une technique de modélisation globale qui fournit un jeu d’équations différentielles ordinaires dont les paramètres sont estimés directement à partir des données observationnelles [8,9,10].

Nous présentons ici un modèle tridimensionnel estimé à partir des relevés de fourrures de Lynx commercialisés par la Compagnie de la Baie d’Hudson donnés par Elton et Nicholson [4]. Ce modèle a pour solution un attracteur chaotique qui apparaît après une cascade de doublements de période. Un chaos multimodal est également observé. Toutes ces propriétés sont topologiquement équivalentes à un modèle *ad hoc* proposé en 1999 par Blasius *et al* comme pouvant expliquer les fluctuations observées dans la population de Lynx [7]. A notre connaissance, ceci constitue une première preuve directe d’un comportement chaotique au sein d’un écosystème réel.

2 Les données de la Compagnie de la Baie d’Hudson

Un relevé minutieux des comptes de la compagnie de la Baie d’Hudson a été réalisé en 1942 par Charles Elton et Mary Nicholson [4]. Depuis, de nombreuses études ont été effectuées sur ces données

[3,11]. Toutefois, le nombre total de lynx manque entre 1892 et 1896. De manière à disposer d'une série temporelle continue, nous avons reconstruit à la main les données manquantes comme suit. Parmi les dix cycles disponibles, nous avons identifié le cycle qui ressemblait le plus au cycle précédent le cycle manquant, nous avons alors superposé ces deux cycles, et avons reportés les points pour les années 1892 à 1896. Les données utilisées pour notre analyse sont représentées Fig. 1. Puisque les données n'étaient pas échantillonnées avec un pas de temps suffisamment petit, nous avons appliqué une procédure d'interpolation qui préserve le spectre de Fourier [12].

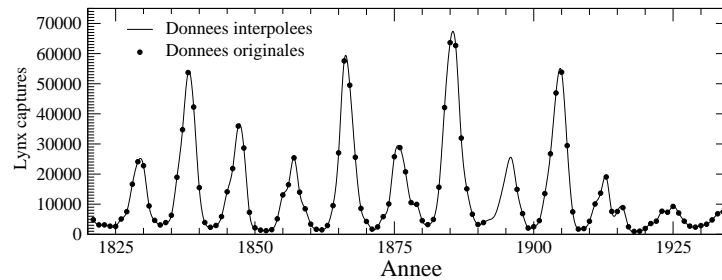


Fig.1. Evolution du nombre total de peaux de Lynx vendues dans les différentes régions du Canada entre 1821 et 1934. Les données entre 1892 et 1896 sont insérées à la main comme cela est expliqué dans le texte. Les données sont interpolées grâce à une procédure standard MATLAB qui préserve le spectre de Fourier.

Puisque notre objectif est d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires reproduisant la dynamique sous-jacente aux données d'Elton et Nicholson, nous utilisons les coordonnées dérivées pour reconstruire l'espace des phases (Fig. 2a). L'attracteur obtenu se présente comme de grandes boucles autour d'un point singulier de type col-foyer. Les petites oscillations autour de ce point sont la signature d'un mécanisme de repliement responsable — dynamiquement parlant — des fluctuations irrégulières de la population de lynx. Une telle organisation du portrait de phase n'est pas sans rappeler le portrait de phase reconstruit à partir de la variable z du système de Rössler, une variable réputée difficile pour une modélisation globale optimale [13].

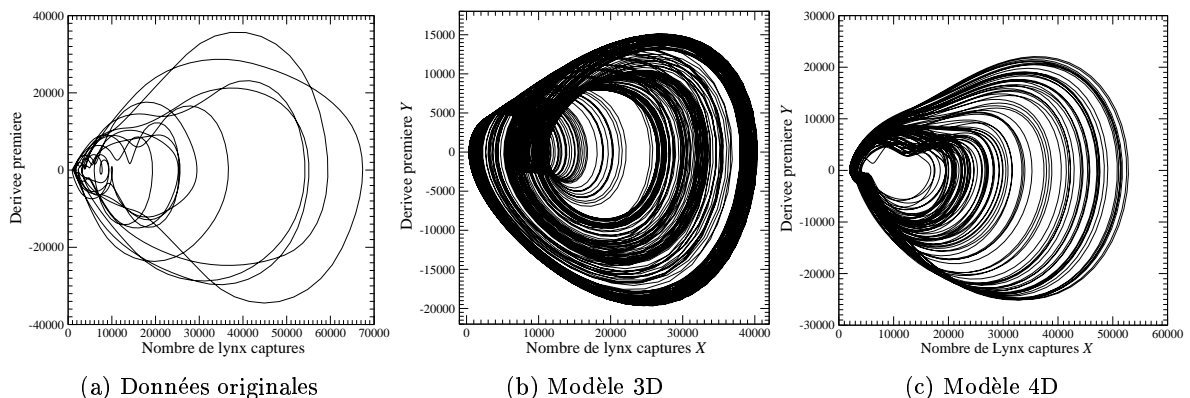


Fig.2. Différents portraits de phase obtenus des données originales ou par intégration des modèles globaux.

3 Modélisation globale

Lorsqu'une modélisation globale est tentée, il y a grossièrement deux types de modèles qui peuvent être obtenus : les modèles continus (des équations différentielles ordinaires) et des modèles discrets (des

itérations). Comme cela a été montré par ailleurs, les deux techniques sont équivalentes du point de vue de leur capacité à fournir un modèle de bonne qualité. La technique ici utilisée [8] permet l'estimation d'équations différentielles ordinaires à partir de données expérimentales. Lorsque la dimension de plongement de la dynamique est de 3, l'espace des phases reconstruit est développé sur les coordonnées X , Y et Z où X représente les données originales, Y et Z étant les deux dérivées successives de X . Le jeu d'équations différentielles ordinaires est alors de forme canonique, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = Z \\ \dot{Z} = F(X, Y, Z) \end{cases} \quad (1)$$

où $F(X, Y, Z)$ est la fonction canonique à estimer sur une base de polynômes multivariables. Cette fonction est de la forme

$$F(X, Y, Z) = K_0 + K_1X + K_2Y + K_3Z + K_4X^2 + \dots \quad (2)$$

où les valeurs des coefficients K_p sont retournées par l'algorithme.

Après quelques essais, un premier modèle de dimension 3 a été obtenu à partir de 117 centres à raison de 13 centres par cycle. Neuf cycles sont donc utilisés, le cycle reconstruit entre 1892 et 1896 y compris. La fonction canonique de ce premier modèle comprend 19 termes. Une intégration numérique de ce modèle conduit au portrait de phase représenté Fig. 2b. Puisque ce modèle est très stable, un diagramme de bifurcations en fonction du paramètre K_3 (ou tout autre paramètre) a été calculé (Fig. 3a). Ce diagramme révèle une cascade de doublements de période comme route vers le chaos (ce qui est très fréquent) et une longue fenêtre de période 3 (ce qui l'est beaucoup moins). Cette fenêtre de période 3 est perturbée par une bifurcation transcritique impliquant l'échange de stabilité entre deux cycles de période 3, ce qui provoque un « décrochement » des branches au tout début de la fenêtre. Ceci résulte d'une application de premier retour un peu particulière (Fig. 3b). En effet, la branche décroissante se dédouble. L'une des extrémités a une ordonnée égale à celle du maximum de l'application : ceci induit, sous une très faible variation de l'un des paramètres, une crise qui impose une application à la structure beaucoup plus développée et plus compliquée. C'est ce qui se retrouve à la sortie de la fenêtre de période 3. Cet incident au niveau de la fenêtre de période 3 est particulièrement important à signaler car un incident relativement semblable est observé dans le modèle *ad hoc* proposé par Blasius *et al* [7]. Le modèle global 3D partage avec ce modèle *ad hoc* une cascade de doublements de période, une longue fenêtre de période 3 et un incident au cours de la fenêtre de période 3 qui interdit l'obtention d'une dynamique symbolique complète.

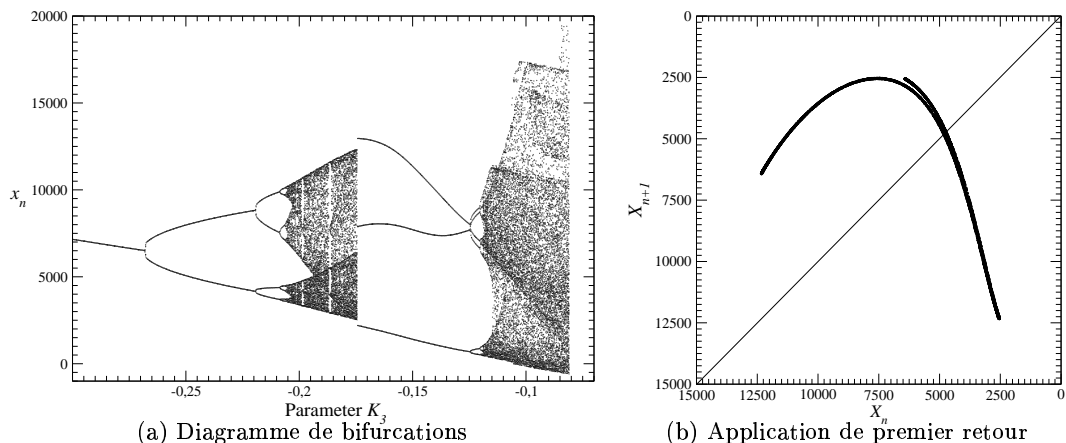


Fig.3. Diagramme de bifurcations du modèle 3D obtenu à partir des Lynx capturés par la Compagnie de la Baie d'Hudson. Une application de premier retour est calculée pour $K_3 = -0.175$, juste avant la crise.

Parmi les conclusions d'Elton et Nicholson, nous relevons que l'évolution de la population de lynx dépend des lapins blancs et d'autres espèces aquatiques comme le rat musqué et le saumon. Par ailleurs, le lynx est chassé et sa population dépend donc de l'activité de l'homme. Il est d'ailleurs surprenant que ce facteur ne soit pas pris en compte dans la plupart des études de ces données. La conclusion importante est qu'une description rigoureuse de l'écosystème nécessiterait d'utiliser plus de trois espèces en interaction. Aussi, un modèle de dimension 4 — quatre espèces en interaction — est donc recherché... et obtenu.

Pour l'obtention de ce modèle de dimension 4, la dérivée quatrième doit être calculée pour l'estimation de la fonction canonique. Les limites de ce qui est contenu dans les données (10 cycles sous-échantillonnés) est atteint avec cette recherche. Un modèle global a tout de même été obtenu à partir de 600 points retenus pour l'estimation, à raison de 93 points par cycle : ceci correspond à six cycles et demi. Cet ensemble de données sur lequel est estimé le modèle présente l'avantage de ne pas utiliser les données entre 1892 et 1896 reconstruites « à la main ». Malheureusement, le meilleur modèle obtenu n'est pas complètement stable et il ne peut être intégré au delà de 420 cycles (ce qui correspond déjà à 4000 ans environ), la trajectoire étant éjectée à l'infini. Le modèle 4D n'est donc pas robuste face à une variation de l'un de ses paramètres et un diagramme de bifurcations ne peut être obtenu comme cela a été calculé pour le modèle 3D. Cette absence de stabilité résulte directement de la qualité toute relative des données à notre disposition. Rappelons de plus, qu'indépendamment du problème de la précision avec laquelle les relevés de la Compagnie de la Baie d'Hudson reflètent la dynamique de l'écosystème, se présente un important problème d'observabilité.

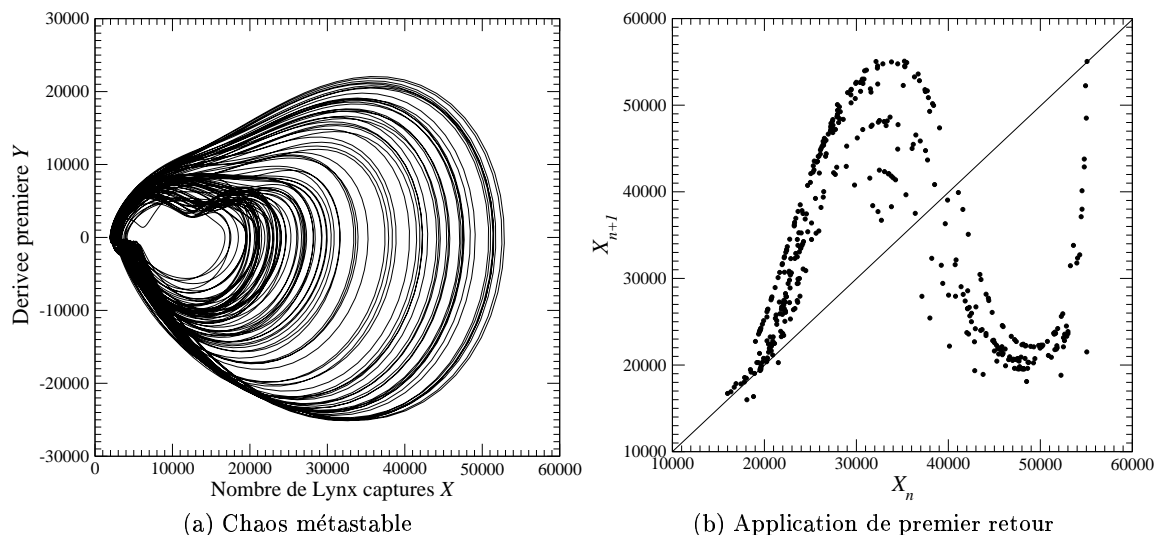


Fig.4. Portrait de phase du chaos métastable solution du modèle global 4D estimé à partir du nombre de Lynx capturés par la Compagnie de la Baie d'Hudson.

Le portrait de phase correspondant au chaos métastable (Fig. 4a) ressemble à celui reconstruit à partir des données originales (Fig. 2). De ce point de vue, augmenter la dimension de plongement de la dynamique permet l'obtention d'un modèle de meilleure qualité que le modèle 3D. Une application de premier retour à une section de Poincaré révèle trois branches monotones principales avec une structure feuilletée (Fig. 4b). La première branche croissante touche la première bissectrice, signature de l'existence de léthargies — long minima autour de zéro — au sein de l'évolution de la population de lynx. En fait, de telles léthargies sont liées à l'existence d'un point singulier de type col-foyer dont le voisinage est visité. Une orbite homocline (au moins secondaire) doit donc faire partie de la population d'orbites périodiques instables. Avec cette propriété, le modèle 4D reproduit une caractéristique dynamique importante — non présente dans le modèle 3D — des données originales (Fig. 5). Notons que ce sont ces léthargies

— également observées sur la variable z du système de Rössler — qui sont responsables du manque d'observabilité [13] et qui rendent par conséquent la dynamique délicate à modéliser.

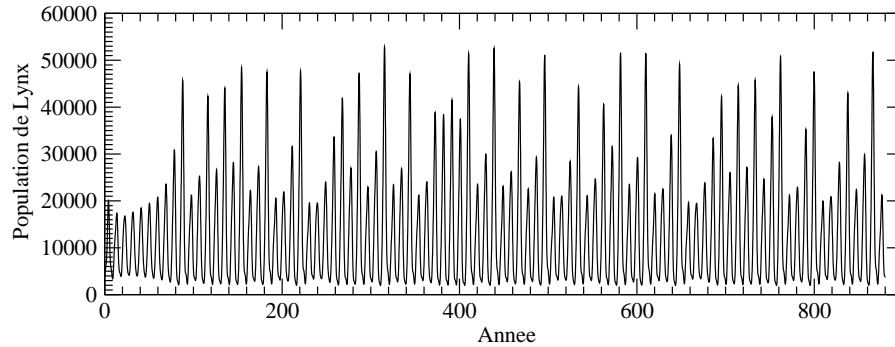


Fig.5. Evolution de la population de Lynx obtenue par intégration numérique du modèle 4D. Des léthargies — passages au minimum un peu longs — sont reproduits de manière très proches de ce qui était présent dans les données originales.

La seconde branche croissante (à l'extrême droite de l'application de premier retour) atteint également la première bissectrice. Son extrémité a une ordonnée égale à celle du maximum de l'application de premier retour. Une explosion dynamique est ainsi attendue comme cela est discuté pour le modèle 3D. Le fait que les deux modèles globaux présentent cette propriété dynamique suggère fortement que la dynamique sous-jacente aux relevés de la Compagnie de la Baie d'Hudson ait également cette propriété. Une telle propriété pourrait être à l'origine du manque de stabilité du modèle 4D obtenu.

La structure feuilletée (Fig. 4b) de l'application de premier retour, rarement rencontrée dans les systèmes de dimension 3, pourrait être un indicateur que la dynamique originale soit caractérisée par une application de premier retour bi-dimensionnelle. De ce fait, la dynamique serait naturellement mieux décrite par un modèle 4D. Ceci pourrait être une indication pour inclure l'activité humaine de chasse dans la description de l'écosystème. Notons que tout ceci provient directement des données. A notre connaissance, il n'existe pas d'autre méthode pour extraire plus d'informations de données de qualité et de quantité aussi limitées. Ceci implique directement qu'il est très difficile de valider tout modèle. Les modèles globaux ici proposés présentent l'avantage de ne pas nécessiter de connaissance préalable sur la phénoménologie de l'écosystème comme cela était nécessaire pour le modèle *ad hoc* de Blasius *et al* [7]. Toutes les caractéristiques dynamiques révélées par les modèles sont des représentations de la dynamique sous-jacentes mais leur adéquation ne peut malheureusement pas être estimée.

4 Conclusion

Etudier des données comme le nombre de Lynx capturés par la Compagnie de la Baie d'Hudson est toujours un grand challenge puisque seuls dix cycles sous-échantillonnés sont disponibles, ce qui est très insuffisant pour toute technique d'analyse. Aussi, il n'est pas question de réaliser une bonne description topologique de la dynamique originale et, par conséquent, aucun modèle ne peut être validé rigoureusement. Toutefois, ces données demeurent l'un des rares exemples de chaîne alimentaire suivie sur plus d'un siècle.

Nous avons proposé deux modèles globaux estimés à partir des données disponibles sans aucune connaissance préalable sur les mécanismes de la dynamique sous-jacente. Ceci signifie que les couplages entre les différentes espèces — les variables dynamiques — ne sont pas imposés mais résulte seulement des estimations numériques de la fonction canonique projetées sur une base multivariable polynomiale. En dépit de la pauvre qualité des données, les modèles ici obtenus capturent des caractéristiques dynamiques contenues dans les données et qui devraient être prises en compte pour de nouveaux modèles *ad hoc*. En

particulier, une cascade de doublements de période accompagnée d'une longue fenêtre de période 3 sont identifiées sur le modèle 3D. Dans les deux modèles globaux, une crise est identifiée : elle implique une troisième branche sur l'application de premier retour à une section de Poincaré qui se termine par un point dont l'ordonnée est égale à celle du maximum de l'application. C'est une caractéristique dynamique qui n'est pas observée dans le modèle *ad hoc* proposé par Blasius *et al.*

Obtenir un modèle global à partir des données collectées par Elton et Nicholson contribue à défendre l'idée que les écosystèmes réels pourraient évoluer de manière chaotique — les deux modèles sont chaotiques — sans variation spécifique des conditions environnementales. Nos modèles suggèrent que la dynamique sous-jacente possède une composante de nature déterministe et de basse dimension. Les similitudes entre le modèle 4D et les données originales suggèrent que l'écosystème impliquant les lynx correspondent à une chaîne à au moins quatre niveaux. Peut-être cela suggère-t-il d'introduire l'activité humaine de chasse dans cet écosystème.

Remerciements

Nous remercions vivement Dair José de Oliveira qui a interpolé les données.

Références

1. A. J. NICHOLSON, The self-adjustment of populations to change, *Cold Spring Harb. Symposium Quant. Biology*, **22**, 153-173 (1957).
2. W. S. C. GURNEY, S. P. BLYTHE & R. M. NISBET, Nicholson's blowflies revisited, *Nature*, **287**, 17-21 (1980).
3. W. M. SCHAFFER, Stretching and folding in lynx fur returns : evidence for a strange attractor in nature?, *The American Naturalist*, **124**, 798-820 (1984).
4. C. ELTON & M. NICHOLSON, The ten-year cycle in numbers of the Lynx in Canada, *Journal of Animal Ecology*, **11**, 215-244 (1942).
5. M. GILPIN, Spiral chaos in a predator prey model, *The American Naturalist*, **113**, 306-308 (1979).
6. R. K. UPADHYAY, S. R. K. JYENGAR & V. RAI, Chaos : an ecological reality?, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, **8** (6), 1325-1333 (1998).
7. B. BLASIUS, A. HUPPERT & L. STONE, Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems, *Nature*, **399**, 354-359 (1999).
8. C. LETELLIER, L. LE SCELLER, P. DUTERTRE, G. GOUESBET, Z. FEI & J. L. HUDSON, Topological characterization and global vector field reconstruction from experimental electrochemical system, *Journal of Physical Chemistry*, **99**, 7016-7027 (1995).
9. C. LETELLIER, J. MAQUET, H. LABRO, L. LE SCELLER, G. GOUESBET, F. ARGOUËL & A. ARNÉODO, Analyzing chaotic behaviour in a Belousov-Zhabotinskii reaction by using a global vector field reconstruction, *Journal of Physical Chemistry A*, **102**, 10265-10273 (1998).
10. C. LETELLIER, J. MAQUET, L. A. AGUIRRE, R. GILMORE & T. DUDOK DE WIT, Un modèle chaotique pour l'activité solaire, 6^{ème} Rencontre du Nonlinéaire, Paris, 13-14 Mars 2003. Ed. Y. Pomeau & R. Ribotta, pp 179-184, Editions Paris Onze (2003).
11. A. R. E. SINCLAIR *et al*, Can the solar cycle and climate synchronize the snowshoe hare cycle in Canada?, Evidence from the tree rings and ice cores, *The American Naturalist*, **141**, 173-198, 1993.
12. C. LETELLIER, O. MÉNARD, TH. KLINGER, A. PIEL & G. BONHOMME, Dynamical analysis and map modelling of a thermionic diode plasma experiment, *Physica D*, **156**, 169-178, 2001.
13. C. LETELLIER & L. A. AGUIRRE, Investigating nonlinear dynamics from time series : the influence of symmetries and the choice of observables, *Chaos*, **12**, 549-558, 2002.

Modélisation locale du comportement de l'interface de contact cellule-vaisseau sanguin : approche stochastique

Nacim Mefti^{1,2}, Bernard Haussy¹, Jean-François Ganghoffer²

¹ ESEO. 4, rue Merlet de la Boulaye. 49009 Angers Cedex 01, BP 30926. France

² LEMTA - ENSEM. 2, Avenue de la Forêt de Haye. B.P. 160. 54504 VANDOEUVRE Cedex. France

nacim.mefti@eseo.fr

Résumé. L'adhésion cellulaire est un phénomène important dans divers processus biologiques, tels que la division cellulaire, la croissance des tissus, le développement de tumeurs cancéreuses ainsi que la mise au point de vecteurs artificiels de transport de substances médicamenteuses vers des zones spécifiques du corps. Ce travail a pour objectif la mise en place d'un modèle mécanique servant à la description d'un cas particulier d'adhésion cellulaire : le rolling. Ce dernier représente le captage et le ralentissement par roulement de la cellule, par une succession de création et de rupture des liaisons entre la cellule et la paroi du vaisseau sanguin. Nous supposons que cette interface est soumise aux effets de l'écoulement du fluide autour de la cellule et aux interactions répulsives (électrostatiques) et attractives (Van der Waals). Ces efforts extérieurs génèrent au niveau des liaisons des efforts de traction, qui conduisent à la rupture des liaisons existantes s'ils dépassent une certaine valeur limite. Les limites de rupture des liaisons peuvent fluctuer d'une liaison à une autre à cause de conditions extérieures différentes lors de la création de ces liaisons. Ces fluctuations sont décrites au moyen d'un processus stochastique gaussien. Le rapprochement entre la cellule et la paroi peut conduire à la jonction entre les deux molécules d'adhésion complémentaires libres, ce qui correspond à la création de nouvelles liaisons. Nous étudions aussi l'influence de la variation de certains paramètres intrinsèques de ces liaisons sur le comportement général de l'interface pendant le rolling : une raideur croissante ou des comportements de type linéaire et visco-élastique des liaisons. Des simulations numériques nous permettent d'observer et de quantifier le rolling, par le biais de la variation temporelle du nombre de liaisons présentes et de l'inclinaison de la cellule par rapport à la paroi du vaisseau sanguin.

Abstract. Rolling is an important way of biological cell adhesion. It combines several phenomena such the affinity, the junction and failure between the adhesion molecules and the active deformation of the cell during the motility. The focus in this paper is the mechanical description of the kinetic of adhesion of a single cell in terms of the failure and creation of connections during the rolling; the mechanical and physical interactions occurring at the cell-wall interface are modeled as stochastic phenomena. Numerical simulations emphasize the rolling phenomenon and the kinetics of creation and rupture of the ligands-receptors connections

1 Présentation du modèle

On réalise une modélisation locale sur une cellule unique (leucocyte par exemple) adhérente à un substrat et soumise aux effets de l'écoulement d'un fluide (exemple plasma) (figure. 1) et aux interactions physico-chimiques d'attraction de Van der Waals et de répulsion électrostatique [1] entre la surface de la cellule et la paroi. Ce type de phénomène s'appelle rolling d'une cellule.

Cette modélisation est de caractère mécanique et local parce qu'elle ne s'intéresse qu'à la région de contact entre la cellule et la paroi, par soucis de simplification du problème, nous considérons en première approche que les effets de l'écoulement du fluide autour de la cellule sont remplacés par l'effort qu'ils génèrent au niveau de la couche de contact cellule paroi (figure. 2), ces derniers sont caractérisés par les paramètres ajustables que sont l'intensité et l'inclinaison.

La zone de contact entre la cellule et la paroi est modélisée dans un cadre bidimensionnel par deux poutres rigides reliées entre elles par un ensemble de ressorts qui représentent les liaisons moléculaires, en supposant qu'elles ont un comportement élastique linéaire (figure. 3).

L'étude se décompose en deux parties, la première concerne la rupture des liaisons existantes par traction, lorsque la force appliquée à une liaison donnée dépasse un certain seuil de résistance appelé

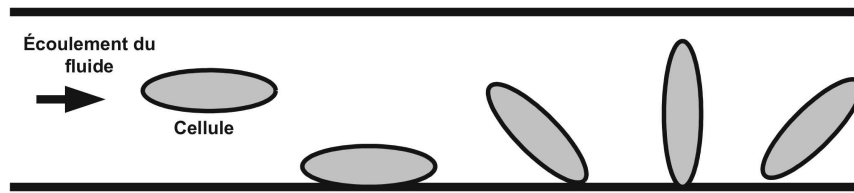


Fig.1. Description du rolling d'une cellule présente dans une paroi.

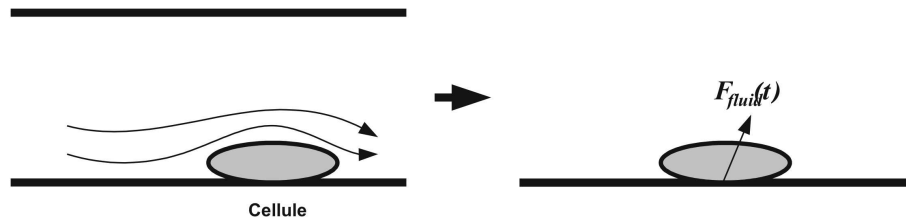


Fig.2. Effet du fluide sur la cellule.

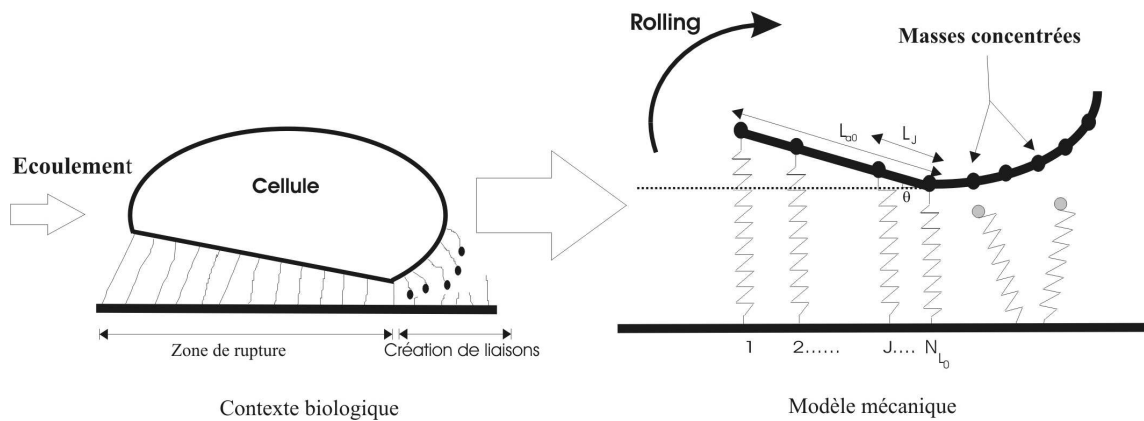


Fig.3. Modélisation mécanique de la zone de contact.

limite de rupture. La fluctuation entre les limites de rupture des liaisons est supposée stochastique et elle est obtenue par l'utilisation de processus aléatoires gaussiens. La combinaison des équations d'équilibre dynamique et un critère de rupture probabiliste permet de décrire l'évolution temporelle des événements de rupture. La seconde partie concerne les créations de nouvelles liaisons, qui se produit lorsque deux molécules d'adhésion complémentaires (ligand récepteur) se rapprochent et sont suffisamment proches pour créer une liaison. Nous supposons qu'une molécule libre est soumise aux forces d'interaction spécifique intermoléculaire et à l'agitation thermique des particules fluide. De manière analogue, la combinaison des équations d'équilibre dynamique et un critère cinématique de rapprochement permet d'aboutir à une description temporelle des créations de nouvelles liaisons (figure. 4)

2 Résultats de simulations

Des simulations ont été réalisées concernant la description des événements de rupture d'une cellule soumise à l'écoulement du fluide (tableau 1) et ont conduit aux résultats présentés dans la figure suivante :

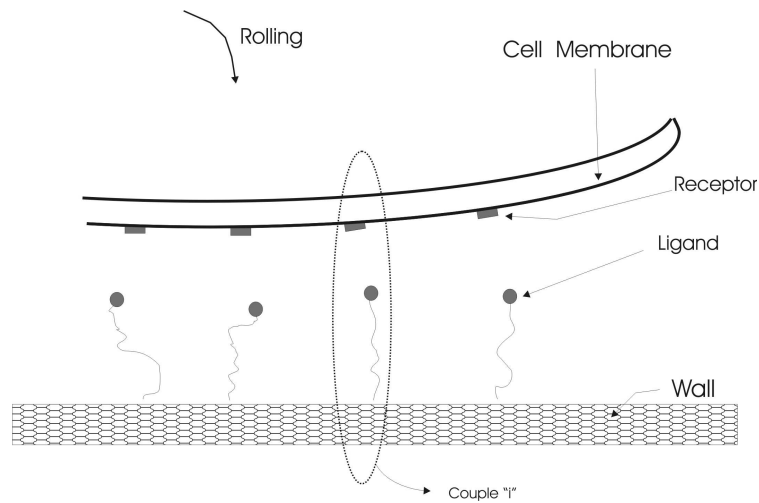


Fig.4. Schématisation des molécules libres complémentaires.

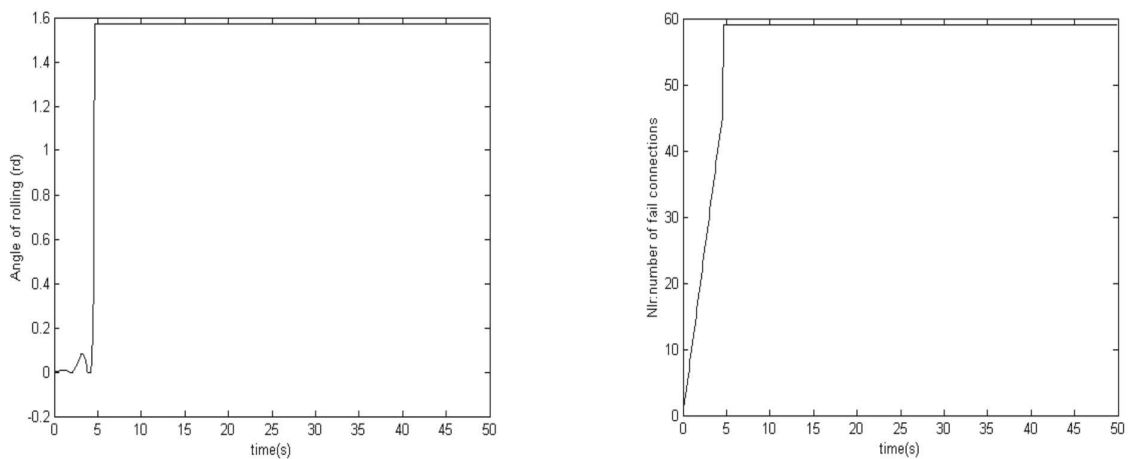


Fig.5. Profil de vibration-rupture de l'interface de contact et évolution du nombre de liaisons rompues sur une interface de 60 liaisons.

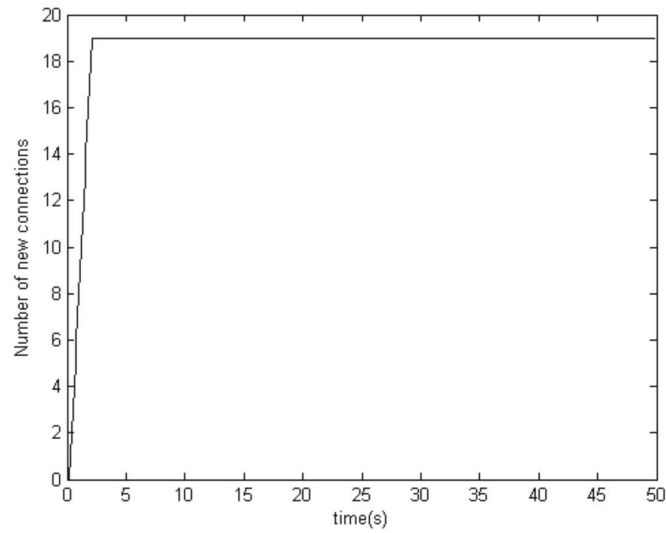
Nous pouvons remarquer que pour une cellule soumise à une valeur maximale de force de fluide 0.1nN, nous constatons une rupture totale de lien au bout de 5s, ce qui correspond à approximativement à 1.6rd d'angle de rolling. Concernant la création de liaisons, les calculs numériques conduisent aux résultats suivants :

Nous pouvons voir que l'intensité des forces en jeu conduit à la jonction de 19 couples de molécules sur un total de 20 couples. D'un autre coté, la variation des raideurs des liaisons ou la prise en compte des effets dissipatifs ont une influence très importante sur le comportement général de l'interface :

Un chargement croissant linéairement appliqué à une cellule dont les liaisons sont caractérisées par des raideurs croissantes conduit à une réponse pseudo-périodique, à cause de la compétition entre les raideurs et le chargement (figure. 7 .b). L'introduction des amortissements conduit à une dissipation de l'énergie dynamiques (action du fluide) au bout d'une durée donnée (période transitoire), et ne maintenant que l'énergie statique : action des interactions de Van der Waals et répulsion (figure. 7 .a).

Tab.1. Données utilisées

$\sigma = 1$	$b=1$	$\bar{k}=0,001nN/nm$	$L_{i_0} = 6nm$	$\mu_a = \mu_b = 1c$
$T=36^\circ C$	$r=6nm$	$\bar{m}=0,0013nkg$	$\tau = 10nm$	$\xi = 80$
$F_{max} = 14\%$	$\varepsilon = 2nm$	$\chi = 0.01nN$	$h=10nm$	
$m_i = 10^{-6}nkg$	$\omega_u = 4\pi$	$\tilde{F}_{\text{aver}}^{rupt} = 0.07nN$	$\omega = 6.28rd/s$	
$k_i = 10^{-3}nN/nm$	$N=100$	$D_0 = 7nm$	$l_{a_0} = 3000nm$	

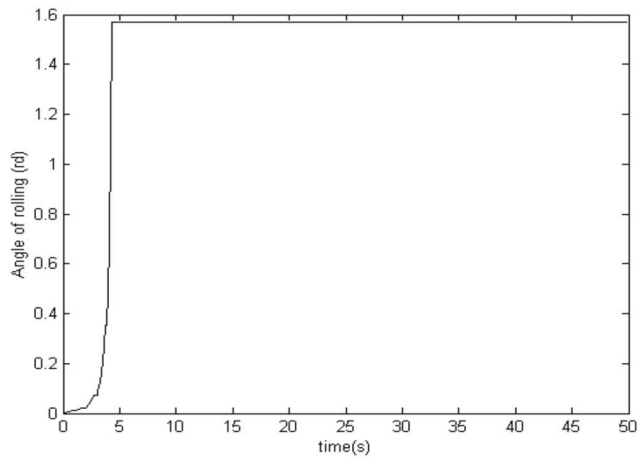
**Fig.6.** Evolution temporelle des créations de liaisons.

3 Conclusion

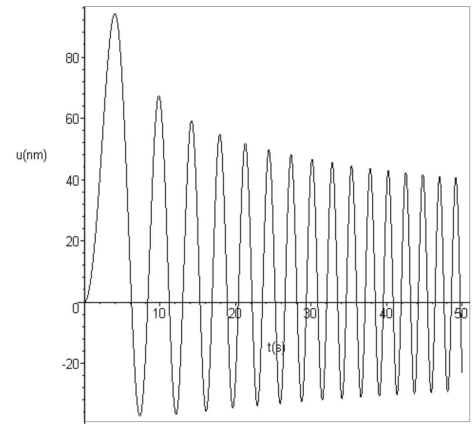
Nous pouvons conclure que la réponse et la rupture de l'interface de contact sont dépendantes du nombre de liaisons, de leur raideur et de l'intensité des efforts externes tandis que le nombre de liaisons libres n'influe pas d'une manière explicite sur la vitesse de création des nouvelles liaisons. Cette dernière dépend des efforts qui sont appliquées à chaque liaison; l'affinité chimique intermoléculaire et l'agitation thermique. En perspective, nous pouvons envisager l'étude de l'influence de propriétés mécaniques variables (amortissement mécanique, raideurs variables) sur le comportement de l'interface en terme de rupture et de création de liaisons, dans un cadre bi et tridimensionnel.

Références

1. G. I. BELL, M. DEMBO, P. BONGRAND, Cell adhesion : competition between non-specific repulsion and specific bonding, *Biophys. J*, **vol145**, 1051-1064 (1984).
2. N. MEFTI, B. HAUSSY, J. F. GANGHOFFER, Modélisation du rolling des globules rouges, *17èmeCFM*, **159**, (2005).



(a)



(b)

Fig.7. Influence des paramètres intrinsèques des liaisons.

Effets combinés du bruit et d'inhomogénéités dans un milieu de réaction-diffusion

S. Morfu, P. Marquié

Laboratoire LE2I UMR 5158 Aile des sciences de l'ingénieur BP 47870 21078 Dijon Cedex
smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé. Nous nous intéressons aux conditions de propagation d'un front dans un milieu non linéaire diffusif à la fois inhomogène et perturbé par du bruit. Nous montrons numériquement que les inhomogénéités structurelles nuisent à la transmission de l'information tandis que le bruit améliore la transmission.

Abstract. We investigate the pinning and de-pinning conditions of a kink in both homogeneous and inhomogeneous reaction-diffusion media. We show that structural inhomogeneities hinder information propagation whereas noise enhances propagation.

1 Introduction

Les équations de réaction-diffusion sont présentes dans de nombreux domaines de la physique, chimie et biologie [1]. Ces dernières années, de nombreuses études ont été consacrées à ces systèmes non linéaires car les équations de réaction diffusion peuvent modéliser le comportement des fibres nerveuses et des tissus cardiaques. Dans ce papier, nous focaliseront notre étude sur l'équation de Nagumo exprimée ci-après dans sa version discrete [2] :

$$\frac{du_n}{dt} = D(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + f(u_n), \quad (1)$$

où D représente le couplage intercellulaire et $f(u_n) = -u_n(u_n - a)(u_n - 1)$ représente une non linéarité cubique modélisant les échanges ioniques.

Pour les faibles couplages D en dessous d'une valeur critique D^* , le milieu n'autorise plus la propagation de l'information ce qui peut induire de graves conséquences au niveau des tissus cardiaques. De nombreuses études ont porté sur la détermination de l'expression analytique de cette valeur critique D^* qui ne dépend que du seuil de la non linéarité a [3,4,5,6]. La Figure 1 résume les différents résultats obtenus dans [3,4,6] qui sont comparés aux résultats numériques obtenus avec une simulation directe de l'eq. (1) en utilisant un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4.

Comme le montre la figure 1, le mécanisme d'arrêt de propagation est maintenant bien compris dans les milieux homogènes non perturbés.

Cependant, les fibres nerveuses et les tissus cardiaques modélisés par ces équations de réaction-diffusion sont plutôt inhomogènes qu'homogènes et souvent soumis à des perturbations qu'elles soient aléatoires ou non, ce qui peut conduire à de nouvelles conditions de propagation [7,8]. Par exemple, le mécanisme d'arrêt de propagation peut également se manifester dans un milieu discret de couplage intercellulaire D_1 du fait d'une inhomogénéité de couplage D_2 plus grande que D_1 (c'est à dire pas forcément plus petite que D^*) [9,10,11]. Au contraire, il a été montré que le bruit agissait contre le mécanisme d'arrêt de propagation dans un réseau électrique de circuit de Chua modifié [12] ou dans un milieu de Nagumo homogène [13]. On se propose de restreindre notre étude au milieu de Nagumo en considérant à la fois des inhomogénéités structurelles et les effets du bruit.

Nous étudions tout d'abord les effets d'une distribution de couplage de type heaviside sur les conditions de propagation. Dans la troisième partie de cet article, nous considérons les effets du bruit sur les inhomogénéités de couplage.

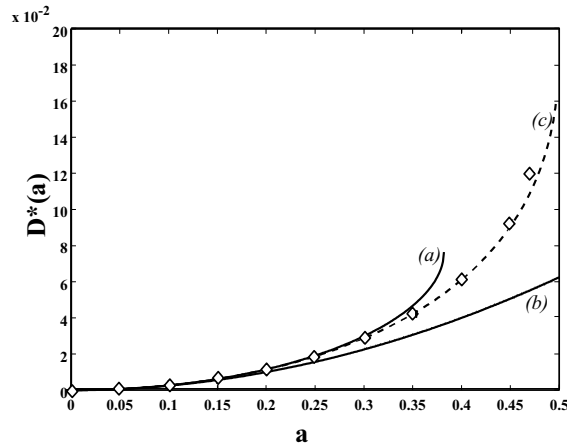


Fig.1. Couplage critique interdisant la propagation. Les prédictions théoriques (pointillés (c)) tirées de [6] sont comparées aux résultats numériques ((\diamond)). Nous présentons également les résultats tirés de [3,4] (lignes continues (a) et (b) respectivement).

2 Milieu inhomogène

Dans cette partie, nous considérons la jonction de deux milieux homogènes M_1 et M_2 de couplage respectif D_1 et D_2 , la jonction étant localisée au site d'interface m . Cette configuration d'inhomogénéités est similaire à celle étudiée par les cardiophysologistes Wang et Rudy qui ont étudié la propagation de potentiels d'action dans les tissus cardiaques présentant un changement abrupte de couplage intercellulaire [14]. Ils ont montré expérimentalement que la propagation n'était possible que si le couplage D_2 dans le second milieu est compris entre deux valeurs critiques [D_{inf}^* ; D_{sup}^*]. Nous nous proposons d'étudier numériquement ce comportement en considérant le modèle de Nagumo.

Le milieu de Nagumo inhomogène est décrit par l'eq. (1) avec $D = D_1$ avant l'interface (soit pour $n < m$), et avec $D = D_2$ après l'interface (soit pour $n > m$), tandis que la dynamique du site d'interface m est régie par

$$\frac{du_m}{dt} = D_1(u_{m-1} - u_m) + D_2(u_{m+1} - u_m) + f(u_m). \quad (2)$$

Pour un couplage donné D_1 dans le premier milieu, nous analysons numériquement en fonction du couplage D_2 du second milieu si un front initié dans le premier milieu franchit l'interface située au site m . La longueur du réseau simulé est 50 cellules, le site d'interface est localisé au site $m = 25$. Nous obtenons numériquement le même comportement qu'ont rapporté les cardiophysologistes Wang et Rudy, c'est à dire l'existence de deux valeurs critiques D_{inf}^* et D_{sup}^* définissant l'intervalle de valeur de D_2 autorisant la propagation dans le second milieu.

Nous avons réalisé plusieurs simulations numériques du système à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 et de pas d'intégration temporel $dt = 0.01$. Nous avons changé à chaque fois le couplage D_2 pour estimer par dichotomie la valeur critique D_{sup}^* au delà de laquelle un front initié dans le premier milieu reste piégé au site d'interface m .

En utilisant la même méthode nous avons également déterminé numériquement la seconde valeur critique D_{inf}^* en dessous de laquelle le front ne franchit pas l'interface. Les deux valeurs critiques sont tracées en pointillés figure 2 et fournissent la plage de paramètres autorisant la propagation d'un front dans un milieu inhomogène de Nagumo présentant une distribution de couplage de type heaviside.

Nous avons également étudié l'effet d'arrêt de propagation induit par une seule inhomogénéité de couplage D_2 dans un milieu de Nagumo de couplage intercellulaire D_1 . On observe le même comportement qualitatif, c'est à dire l'existence de deux valeurs critiques de couplage D_{inf}^* et D_{sup}^* définissant les conditions de propagation (ligne continue de la figure 2).

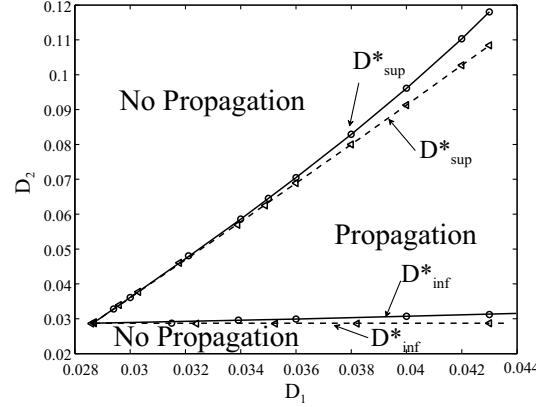


Fig.2. Mécanisme d'arrêt de propagation induit par deux distribution de couplages. Valeurs critiques D_{inf}^* et D_{sup}^* du couplage D_2 définissant les conditions de propagation pour une distribution de couplage du type heaviside (pointillés) et pour une distribution de Dirac (traits pleins). Seuil de non linéarité $a = 0.3$.

3 Milieu inhomogène bruité

Dans ce paragraphe, nous étudions numériquement le comportement d'un milieu inhomogène de Nagumo initialement en condition d'arrêt de propagation au site d'interface m et soumis à un bruit spatio-temporel. Un tel milieu inhomogène bruité est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} = D_1(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + f(u_n) + \eta_n(t) \text{ for } n < m \\ \frac{du_m}{dt} = D_1(u_{m-1} - u_m) + D_2(u_{m+1} - u_m) + f(u_m) + \eta_m(t) \text{ for } n = m \\ \frac{du_n}{dt} = D_2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + f(u_n) + \eta_n(t) \text{ for } n > m. \end{cases} \quad (3)$$

où $\eta_n(t)$ est un bruit blanc spatialement indépendant et uniforme sur $[-\sqrt{3}\sigma; \sqrt{3}\sigma]$.

Nous fixons le couplage D_1 dans le premier milieu à 0.03. De plus, le couplage D_2 dans le second milieu est plus grand que la valeur critique $D_{sup}^* = 0.036$ de tel sorte que sans bruit le front se propageant dans le premier milieu ne peut pas franchir le site d'interface m . Nous étudions en fonction de l'amplitude (R.M.S.) de bruit σ du bruit spatio-temporel $\eta_n(t)$ si le front franchit le site d'interface m . Nos résultats de simulation révèlent qu'il existe une quantité minimum de bruit σ^* qui permet au front de franchir le site d'interface m . Cette valeur, tracée figure 3 en fonction de D_2 , est estimée par dichotomie pour chaque valeur de D_2 en simulant le système pour un temps de simulation suffisamment long (soit $t = 30000$ dans notre cas).

4 Conclusion

Dans le cas du model discret de Nagumo, nous avons numériquement montré que la présence d'inhomogénéités structurelles peut nuire à la propagation d'information, tandis que le bruit peut réduire les conséquences fatales de ces inhomogénéités. Nous pensons que ces résultats peuvent être étendu à d'autres distributions d'inhomogénéités qu'elles soient périodiques ou non et pourraient également concerner d'autres paramètres du milieu présentant des inhomogénéités comme par exemple le seuil de la non linéarité a . En fait, ce travail étend au milieu inhomogène l'effet de propagation assisté par le bruit souvent observé dans les milieux non linéaires [13,15,16]. Pour finir, ce travail pourrait être utile pour mieux comprendre la propagation de l'information dans les fibres nerveuses myelinisées.

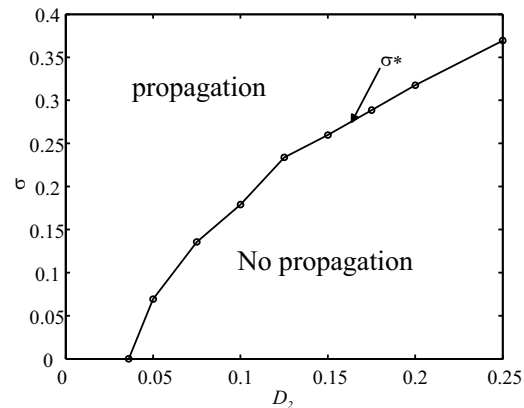


Fig.3. Amplitude R.M.S de bruit minimum σ^* permettant de franchir le site d'interface en fonction du couplage D_2 . $D_1 = 0.03$, $a = 0.3$.

Références

1. Murray J.D. (1989). *Mathematical biology*, ed. Springer-Verlag, Berlin.
2. Nagumo J., Arimoto S. and Yoshisawa S., (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, **50** : 2061.
3. Keener J.P. (1987). Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells. *SIAM J. Appl. Math.*, **47** : 556–572.
4. Laplante J.P. and Erneux T. (1992). Propagation failure and multiple steady states in an array of diffusion coupled flow reactor. *Physica A*, **188** : 89–98.
5. Mitkov I. (1999). One-and two-dimensional wave fronts in diffusive systems with discrete sets of nonlinear sources. *Physica D*, **133** : 398–403.
6. Comte J.C., Morfu S. and Marquié P. (2001). Propagation failure in discrete bistable reaction-diffusion systems : theory and experiments. *Phys. Rev. E*, **64** : 027102.
7. Kulka A., Bode M., Purwins H.-G, (1995). On the influence of inhomogeneities in a reaction-diffusion system. *Phys. Lett. A*, **203** : 33–39.
8. Keener J.P. (2000). Homogenization and propagation in the bistable equation. *physica D*, **136** : 1–17.
9. Mornev O.A. (1991). Elements of the Optics of Autowaves in Nonlinear Wave Processes in Excitable Media, ed. A.V. Holden, M. Markus and H.G. Othners, Plenum Press, N.Y. : 111–118.
10. Morfu S., Comte J.C., Marquié P. and Bilbault J.M. (2002). Propagation failure induced by coupling inhomogeneities in a nonlinear diffusive medium. *Phys. Lett. A*, **294** : 304-307.
11. Morfu S., Nekorkin V.I., Bilbault J.M. and Marquié P. (2002). The wave front propagation failure in an inhomogeneous discrete Nagumo chain : theory and experiments. *Phys. Rev. E*, **66** : 046127–1/8.
12. Báscones R., Garcia-Ojalvo J., Sancho J.M., (2002). Pulse propagation sustained by noise in arrays of bistable electronic circuits. *Phys. Rev. E*, **65** : 061108.
13. Morfu S. (2003). Propagation failure reduction in a Nagumo chain *Phys. Lett. A*, **317**, 73-79.
14. Wang Y. and Rudy Y. (2000). Action potential propagation in inhomogeneous cardiac tissue : safety factor consideration and ionic mechanism. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.*, **278** : H1019.
15. Lindner J.F., Chandramouli S., Bulsara S.R., Löcher M., and Ditto W.L. (1998). Noise enhanced propagation. *Phys. Rev. Lett.*, **23** : 5048–5051.
16. Löcher M., Cigna D., and Hunt E.R., (1998). Noise sustained propagation of a signal in coupled bistable electronic element. *Phys. Rev. Lett.*, **80** : 5212–5215.

Diagrammes de récurrence et entropie de Shannon pour l'étude des asynchronismes en ventilation non invasive

H. Rabarimanantsoa¹, C. Letellier¹, L. Achour², A. Cuvelier³, & J.-F. Muir³

¹ CORIA UMR 6614 — Université de Rouen, BP. 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

² ADIR Association, Hôpital de Bois-Guillaume, 147, Av. du Maréchal Juin, 76031 Rouen cedex

³ Service de Pneumologie et Soins Intensifs, Hôpital de Bois-Guillaume, CHU de Rouen, France
rabari@coria.fr

Résumé. Les diagrammes de récurrence ont été introduits pour quantifier les propriétés de récurrences des dynamiques chaotiques. Des indices statistiques furent également introduits pour transformer cette représentation graphique en une analyse statistique. Parmi ces indices, une mesure appelée “entropie de Shannon” était corrélée à l'inverse du plus grand exposant de Lyapunov. Ceci était en désaccord avec la définition habituelle de l'entropie de Shannon. Nous proposons ici une nouvelle définition — toujours basée sur les diagrammes de récurrence — qui est maintenant corrélée au plus grand exposant de Lyapunov. Nous utilisons ensuite les diagrammes de récurrence et l'entropie de Shannon pour l'étude des asynchronismes en ventilation mécanique non invasive.

Abstract. Recurrence plots were introduced to quantify the recurrence properties of chaotic dynamics. Few years later, the recurrence quantification analysis was introduced to transform graphical interpretations into statistical analysis. Among the different measures introduced, one, called “Shannon entropy”, was correlated with the inverse of the largest Lyapunov exponent. This discrepancy with the usual definition of the Shannon entropy is here solved by using a new definition — still based on the recurrence plots. This new definition is now correlated with the largest Lyapunov exponent. A first use of the recurrence plots and of the Shannon entropy is then discussed in the case of mechanical non invasive ventilation.

1 Introduction

Un comportement chaotique est habituellement défini comme une dynamique déterministe de basse dimension avec une grande sensibilité aux conditions initiales et certaines propriétés de récurrence. Ces dernières permettent d'obtenir une solution aperiodique bornée dans l'espace des phases. Les propriétés de récurrence ne sont donc pas nécessairement triviales et Eckmann, Hamphorst et Ruelle [1] en introduirent une représentation graphique. Les *diagrammes de récurrence* R_{ij} se définissent comme une matrice carrée construite comme suit. Il est regardé si chaque point du portrait de phase $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ est proche ou non d'un autre point \mathbf{x}_j . Ainsi, si la distance entre deux points est inférieure à un seuil prédéfini ϵ , les points sont dits récurrents et sont associés à un point noir ; dans le cas contraire, ils sont non récurrents et sont associés à un point blanc. Ceci se traduit par une matrice $N \times N$ telle que

$$R_{ij} = \theta(\epsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \quad (1)$$

où $\theta(\mathbf{x}_i)$ est la fonction de Heaviside.

A partir de ces matrices il est possible d'introduire diverses quantités statistiques. Parmi celles-ci, une entropie de Shannon a été définie [2] et réutilisée comme telle depuis. Malheureusement, cette entropie se trouve être inversement proportionnelle au plus grand exposant de Lyapunov, λ_{\max} , ce qui est contraire au sens usuel d'une entropie de Shannon qui mesure habituellement le degré de complexité d'une dynamique. Dans cette étude nous fournirons une nouvelle définition de l'entropie de Shannon que nous appliquerons ensuite à l'étude des asynchronismes en ventilation mécanique non invasive.

2 Diagrammes de récurrence et entropie de Shannon

Une entropie de Shannon se définit comme $S = - \sum_{n=1}^H P_n \log(P_n)$ où P_n désigne la probabilité d'observation d'un évènement n . Lorsqu'elle est estimée à une dynamique symbolique, n désigne une séquence symbolique donnée. Dans les travaux récents utilisant l'entropie de Shannon calculée à partir des diagrammes de récurrences, n désigne la longueur des segments diagonaux de points récurrents. L'entropie alors définie quantifie le degré de récurrence — de périodicité — et non de complexité. Cette entropie est trouvée inversement proportionnelle au plus grand exposant de Lyapunov [3], ce qui est contraire au sens usuel. Pour pallier à ce désaccord, il suffit de remplacer la probabilité d'observer des segments diagonaux de points récurrents par la probabilité d'observer des segments diagonaux de points **non** récurrents. L'entropie de Shannon ainsi redéfinie croît alors au fur et à mesure que la dynamique se développe comme cela est attendu (Fig. 1).

Pour confirmer cela, le diagramme de récurrence est construit à partir de l'évolution de la fonction logistique. Le seuil ϵ est pris égal à 10% des fluctuations observées. La dimension de l'espace des phases reconstruit est prise égale à 3 après une estimation de la dimension de plongement à l'aide d'une technique de faux voisins [4]. Pour chaque valeur du paramètre μ , le plus grand exposant de Lyapunov et l'entropie de Shannon sont calculés (Fig. 1). L'entropie de Shannon est directement proportionnelle au plus grand exposant de Lyapunov. A l'instar de l'exposant de Lyapunov, l'entropie de Shannon permet de distinguer les différentes fenêtres périodiques du diagramme de bifurcations et croît au fur et à mesure que le chaos se développe. La robustesse de l'entropie de Shannon au bruit est à peu près équivalente à celle du plus grand exposant de Lyapunov.

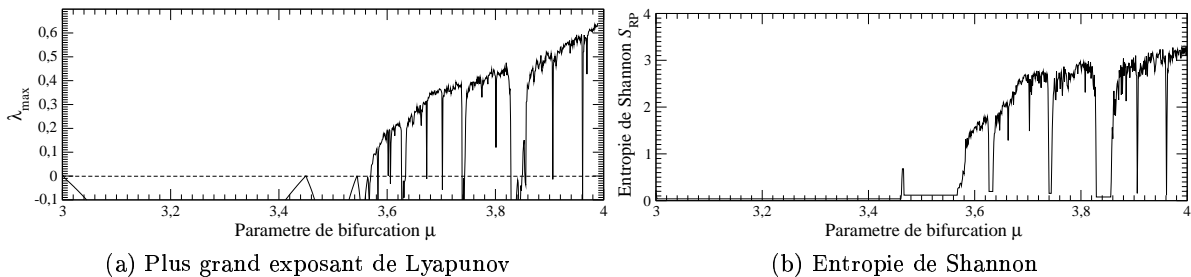


Fig.1. Evolution du plus grand exposant de Lyapunov et de l'entropie de Shannon en fonction du paramètre μ de la fonction logistique.

Les diagrammes de récurrence peuvent être calculés aussi bien pour des flots que pour des applications de premier retour à une section de Poincaré. De manière à estimer la qualité des résultats à partir d'une série temporelle, le système de Rössler

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (2)$$

est utilisé avec comme paramètres $b = 2$, $c = 4$ et $a \in [0.38 ; 0.432]$ dans le but d'obtenir une évolution de la dynamique semblable à celle observée sur la fonction logistique, c'est-à-dire à l'évolution d'une dynamique unimodale vers une dynamique symbolique complète. L'entropie de Shannon est alors estimée à partir de chacune des variables du système. Pour cela, 1500 points sont retenus. La série de ces 1500 points est échantillonnée avec un pas de temps égal à un décalage optimal pour une reconstruction du portrait de phase, soit $\tau = 1.5$ s (approximativement le quart de la pseudo-période). Les estimations de l'entropie de Shannon à partir d'une série temporelle d'une variable du système — et non d'une série d'itérations successives dans la section de Poincaré — se révèlent moins sensibles aux variations du

comportement dynamique et les fenêtres périodiques ne sont plus identifiées et ce, même en l'absence de bruit (Fig. 2). Lorsque cela est possible nous aurons donc intérêt à travailler avec une section de Poincaré, la discrimination entre les différents régimes dynamiques étant plus probante.

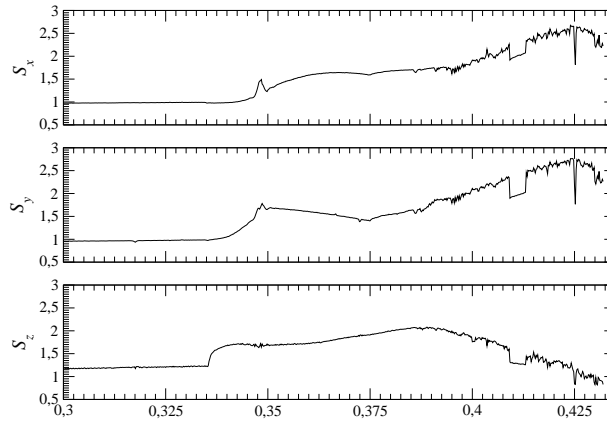


Fig.2. Entropie de Shannon estimée à l'aide des diagrammes de récurrence calculés à partir de chacune des variables du système de Rössler. Un espace des phases 3D est reconstruit à l'aide des coordonnées décalées avec un décalage $\tau = 1.5$ s. 1500 points échantillonnés à τ sont utilisés.

3 Ventilation mécanique non invasive

La ventilation non invasive (VNI) a pour objectif de pallier à l'insuffisance respiratoire chronique par l'intermédiaire d'un masque facial. Le mode de ventilation ici utilisé permet de réduire les efforts inspiratoires du patient et d'assurer une oxygénation correcte de son corps. D'un point de vue clinique, l'asynchronisme le plus fréquemment rencontré est le non déclenchement du ventilateur lors d'un effort inspiratoire du patient [5]. Ceux-ci peuvent être détectés automatiquement par des mesures non invasives (le débit et la pression aérienne) [6]. Typiquement, un cycle non déclenché correspond à un effort inspiratoire du sujet — se traduisant par une petite oscillation « négative » de la pression aérienne — qui n'est pas suivi par un apport d'air du ventilateur — un large pic de pression à une valeur prédéfinie (IPAP). Un cycle non déclenché se détecte aisément car l'effort inspiratoire est tout de même suivi d'une oscillation d'amplitude modérée du débit (Fig. 3).

Des portraits de phase et des applications de premier retour sur la durée totale du cycle (T_{tot}) ont permis de montrer que la régularité du cycle respiratoire n'est pas nécessairement corrélée à la présence de cycles non déclenchés [6]. Ceci est d'importance dans la mesure où la régularité de la respiration est finalement une bonne signature du confort du sujet sous assistance ventilatoire. De plus, il est important de suivre l'historique des asynchronismes et des modifications du rythme respiratoire. Pour cela, les diagrammes de récurrence et l'entropie de Shannon seront calculés. Etant donné que l'entropie de Shannon est estimée de manière beaucoup plus précise lorsqu'une section de Poincaré est utilisée (section 2), nous utiliserons la pression maximale, P_{max} , atteinte au cours d'un cycle pour le suivi des asynchronismes (liés aux non déclenchements) et la durée totale du cycle, T_{tot} , pour la régularité du rythme respiratoire.

Dans le cadre du protocole réalisé [6], 12 sujets étaient impliqués. Quatre d'entre eux souffraient de BPCO — Broncho Pneumopathie Chronique Obstructive — (patients S_1 à S_4), quatre présentaient une SOH — Syndrome d'Obésité avec Hypoventilation — (patients S_5 à S_8) et quatre étaient des sujets sains (sujets S_9 à S_{12}). Parmi eux, certains n'étaient pas accoutumés à la ventilation non invasive. De l'étude précédente [6], il ressort que le taux de cycles non déclenchés dépendait clairement de l'accoutumance au ventilateur ou, en d'autres termes, de la capacité du sujet à gérer son ventilateur. Ceci peut encore

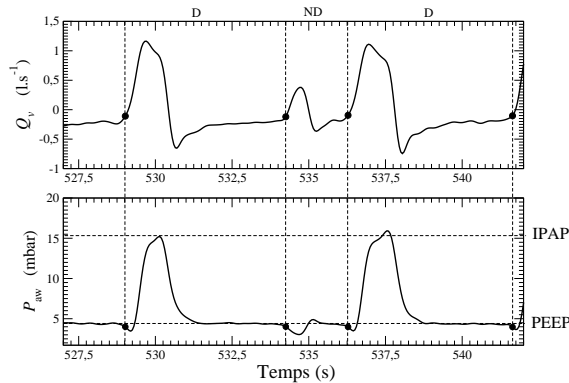


Fig.3. Evolution du débit Q_v et de la pression aérienne P_{aw} en ventilation non invasive à deux niveaux de pression IPAP=16 mbar et PEEP=4 mbar. Présence d'un cycle non déclenché (ND) entre deux cycles déclenchés(D).

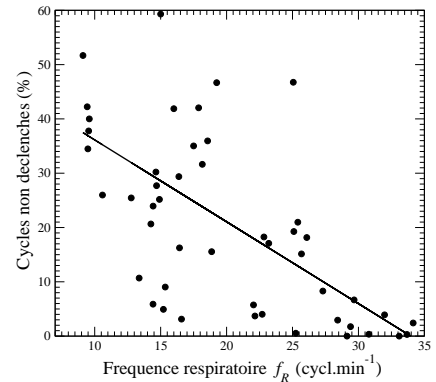


Fig.4. Evolution de la fréquence respiratoire f_r en fonction du taux de cycles non déclenchés (ND).

se traduire par la capacité du sujet à maintenir une respiration régulière qu'il y ait ou non présence d'asynchronismes. De manière générale, il a été trouvé que la fréquence respiratoire (f_r) était corrélée au taux de cycles non déclenchés (Fig. 4). Ainsi, augmenter la fréquence respiratoire contribue à réduire le taux de cycles non déclenchés.

Lorsqu'un suivi des asynchronismes est requis, un diagramme de récurrence calculé à partir de la pression maximale au cours de chaque cycle respiratoire permet, en un coup d'œil, de disposer d'un compte rendu du déroulement de la séance de ventilation. Par exemple, dans le cas du patient S_5 ventilé à une IPAP de 10 mbar (Fig. 5a), la pression maximale est relativement constante et le diagramme de récurrence est assez marqué : de nombreux « îlots » de récurrence sont observés, signature de nombreux déclenchements comme le traduit le faible taux de non déclenchement (8,3 %). Lorsque l'IPAP est augmenté à 16 mbar, le taux de cycles non déclenchés augmente (31,7 %) et les « îlots » de récurrence disparaissent, révélant ainsi une séance de ventilation beaucoup plus agitée (Fig. 5b).

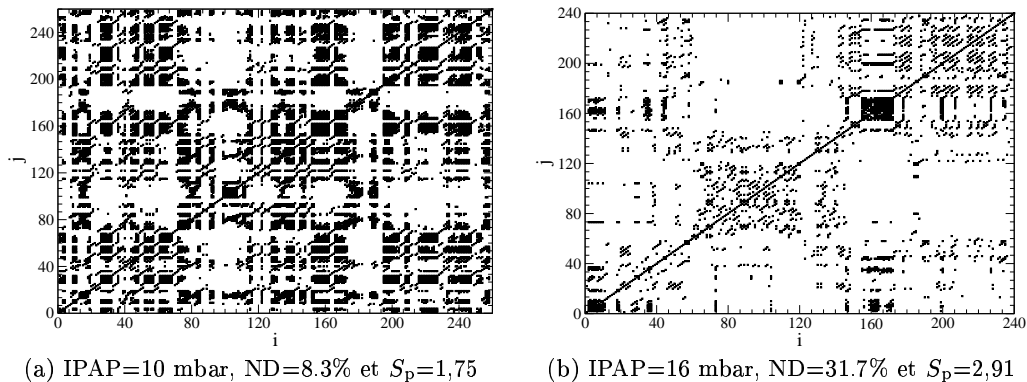
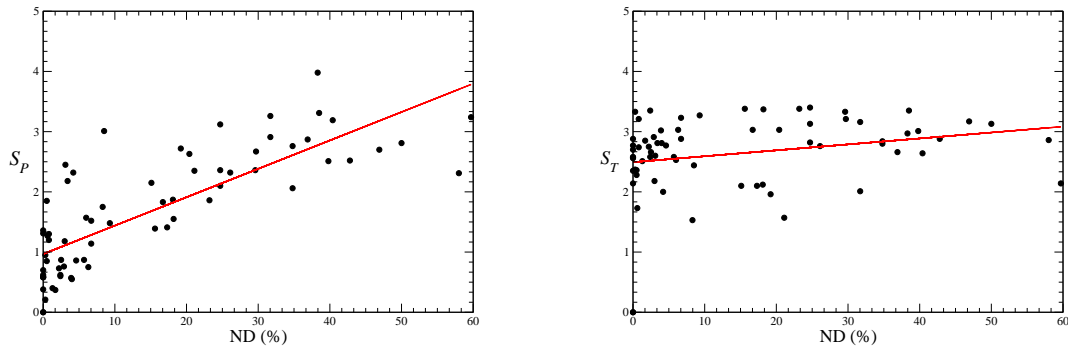


Fig.5. Diagrammes de récurrences et entropies de Shannon calculés à partir des pressions maximales P_{max} mesurées sur un patient S_5 souffrant d'un syndrome d'obésité avec hypoventilation. Le taux de cycles non déclenchés (ND) et l'entropie de Shannon (S_p) sont reportés.

Ceci peut se quantifier aisément grâce à l'entropie de Shannon qui est directement proportionnelle au taux d'asynchronismes (Fig. 6a); ainsi, plus le taux de cycles non déclenchés augmente, plus l'entropie de Shannon S_p croît. De ce fait, l'entropie S_p se présente comme un indicateur du taux d'asynchronismes.



(a) Pression P_{\max} : coefficient de régression $R = 0.80$ (b) Temps T_{tot} : coefficient de régression $R = 0.24$

Fig.6. Entropies de Shannon calculées à partir de (a) la pression maximale atteinte au cours de chaque cycle et (b) de la durée du cycle respiratoire T_{tot} .

Lors d'une étude précédente, la variabilité sur la durée du cycle respiratoire était relativement décorrélée de celle observée sur la pression maximale [6]; comme cela était obtenu avec des applications de premier retour sur la durée T_{tot} (Fig. 7a). Ainsi, un sujet découvrant la ventilation non invasive présentait des applications de premier retour moins regroupées le long de la première bissectrice — véritable signature de grandes variations du rythme respiratoire à l'échelle du cycle — que celles calculées pour des sujets accoutumés à une assistance ventilatoire [6]. Dans les deux cas présentés Fig. 7, peu de variations à l'échelle du cycle sont observées. Toutefois, si un suivi de l'historique des durées respiratoires est effectué, il apparaît que le patient S_7 présente une variation plus importante que celle du patient S_5 (comparez les évolutions de la durée des cycles, Fig. 7). Ceci se traduit immédiatement sur les diagrammes de récurrence, le premier (Fig. 7a) étant nettement plus fourni que le second (Fig. 7b). En d'autres termes, malgré des applications de premier retour qu'il est délicat de distinguer, les diagrammes de récurrence révèlent une régularité bien meilleure pour le sujet S_5 , c'est-à-dire une meilleure gestion de son ventilateur, que le sujet S_7 . Ceci se traduit immédiatement par une entropie de Shannon plus faible (2,05 pour le sujet S_5 contre 3,03 pour le sujet S_7). Si l'on considère que la régularité du rythme respiratoire est un ingrédient important du confort du patient, alors l'entropie de Shannon S_T estimée sur la durée des cycles quantifie un certain confort du patient.

Il est à remarquer que l'entropie S_T varie peu avec le taux d'asynchronismes (Fig. 6b). Pourtant nous avons montré que la fréquence respiratoire, soit la durée totale du cycle respiratoire, était corrélée au taux de cycles non déclenchés. Mais la valeur moyenne de la durée du cycle respiratoire et la variabilité sont deux choses différentes, faisant probablement intervenir des facteurs très différents des interactions entre un patient et son ventilateur. Il est toutefois possible que cette décorrélation entre l'entropie S_T et le taux de cycles non déclenchés résulte de la présence de nombreux novices au sein du protocole étudié ici.

4 Conclusion

En reprenant les diagrammes de récurrence et la définition de l'entropie de Shannon qui y était associée, nous avons montré que ceux-ci offraient une caractérisation de dynamiques non linéaires relativement simple à implanter. D'une part, nous avons montré que l'entropie de Shannon était corrélée au plus grand exposant de Lyapunov et, d'autre part, il a été montré que les diagrammes de récurrence permettent une caractérisation particulièrement fiable lorsqu'une section de Poincaré est utilisée.

Dans le contexte de la ventilation non invasive, nous avons montré que cette approche offrait une caractérisation de la dynamique des interactions patient-ventilateur. La présence des asynchronismes et la variabilité du rythme respiratoire peuvent ainsi être finement suivies. Une entropie de Shannon calculée sur la pression maximale du cycle respiratoire permet de quantifier la dynamique des asynchronismes

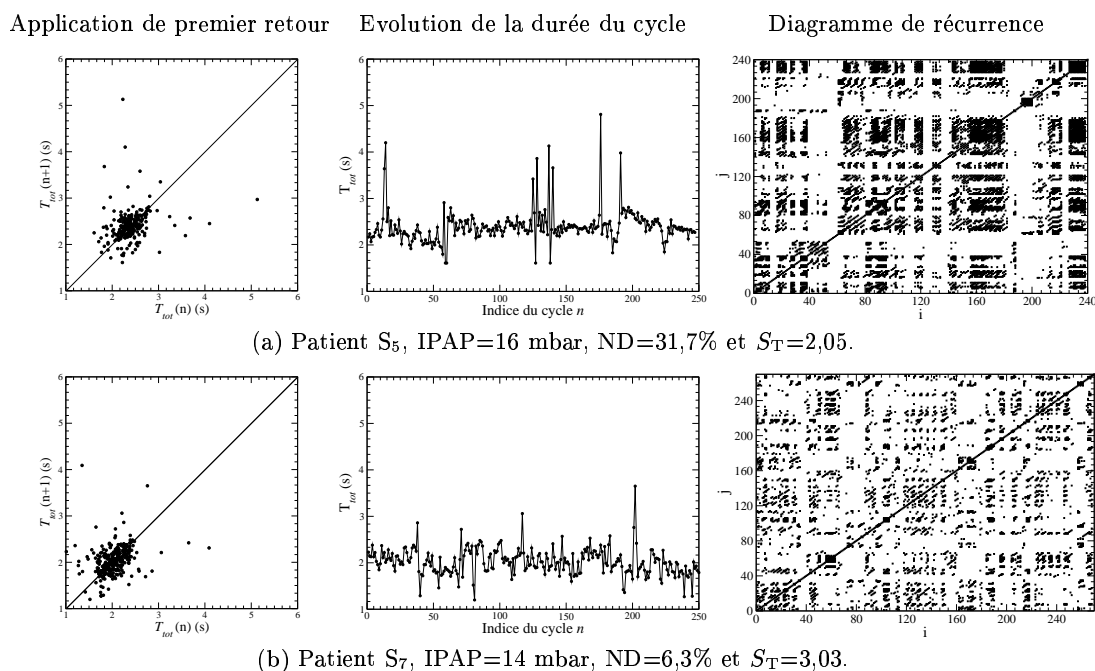


Fig.7. Suivi de la régularité du cycle respiratoire pour deux patients souffrant d'un syndrome d'obésité avec hypoventilation. Les diagrammes de récurrence et l'entropie de Shannon permettent de distinguer clairement deux dynamiques ventilatoires dont les caractéristiques diffèrent essentiellement par leur histoire.

tandis qu'une entropie de Shannon estimée sur la durée du cycle respiratoire peut être vue comme une quantification de la capacité du patient à gérer son ventilateur.

Remerciements : C. L. remercie Wassila Hamadene et Laurent Peyrodie pour leurs remarques stimulantes sur les diagrammes de récurrence.

Références

1. J.-P. ECKMANN, S. OLIFFSON KAMPHORST & D. RUELLE, Recurrence plots of dynamical systems, *Euro-physics Letters*, **4**, 973-977 (1987).
2. L. L. TRULLA, A. GIULIANI, J. P. ZBILUT & C. L. WEBBER JR., Recurrence quantification analysis of the logistic equation with transients, *Physics Letters A*, **223** (4), 255-260 (1996).
3. W. HAMADENE, *Systèmes chaotiques et méthode des récurrences : application à la détection précoce des crises d'épilepsie*, Thèse, Université de Lille (2005).
4. L. CAO, Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series, *Physica D*, **110** (1 & 2), 43-52 (1997).
5. M.J. TOBIN, K.L. YOUNG, & F. LAGHI, Patient-ventilator interaction, non invasive, *American Journal of Respiratory Care*, **163** (4), 1059-1063 (2001).
6. L. ACHOUR, C. LETELLIER, A. CUVELIER & J.-F. MUIR, Dynamique des asynchronismes entre patient et ventilateur en ventilation non invasive, 8^{ème} Rencontre du Nonlinéaire, Paris, 9-11 Mars 2005. Ed. J.-R. Chazottes, A. Joets, C. Letellier & R. Ribotta, Editions Paris Onze (2005).
7. N. MARWAN, N. WESSEL, U. MEYERFELDT & J. KURTHS, Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data, *Physical Review E*, **66** (4), 026702 (2002).
8. J. ZBILUT, A. GIULIANI, C. WEBBER, Recurrence quantification analysis as a tool for non linear exploration of non stationary cardiac signals, *Physical Letters A*, **237** (4), 131-135 (1998).

Apparition d'un attracteur chaotique et anti-synchronisation de deux neurones couplés

M. Senneret & M. Courbage

UMR CNRS 7057 M.S.C., Université Paris 7 Denis Diderot

`marc.senneret@free.fr`

`courbage@ccr.jussieu.fr`

Résumé. On étudie la dynamique de deux applications unidimensionnelles couplées, continues par morceaux. L'application de départ est le résultat d'une coupe de Poincaré du modèle de neurone de FitzHugh-Nagumo. On démontre qu'un couplage diffusif amène à l'apparition d'un attracteur chaotique. Les oscillations de cet attracteur suivent une forme spike-burst.

1 Introduction

De nombreux réseaux neuronaux ont un comportement oscillatoire auto-entretenu menant à diverses formes spatio-temporelles. De telles formes sont supposées jouer un rôle central dans le traitement de l'information dans le cerveau. Il existe deux types de phénomènes où apparaissent des oscillations (régulières ou chaotiques) dans une assemblée de neurones. Le premier concerne des neurones oscillant individuellement ; le second concerne des neurones stables, oscillant ensemble sous certaines conditions. Dans ce second cas, les cellules de l'assemblée de neurones sont caractérisées par une oscillation "moyenne" qui a pour effet de faire osciller les cellules originalement stables. De telles oscillations sont caractérisées par des pics anti-synchronisés. L'approche est alors d'utiliser un modèle simplifié afin de décrire l'origine de la dynamique de l'assemblée. Nous étudions donc un système composé de deux applications unidimensionnelles continues par morceaux couplées. L'application simple est tirée de la dynamique d'une cellule neuronale isolée décrite par le modèle de FitzHugh-Nagumo [1]. Le modèle décrit les caractéristiques principales d'une dynamique neuronale, incluant la génération de potentiel d'action, l'excitabilité et le seuil d'excitation.

2 Description du modèle.

Pour reproduire la dynamique d'un neurone isolé, nous utilisons un modèle de FitzHugh-Nagumo :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u - u^3/3 - v, \\ \dot{v} &= \epsilon(k(u) - v - I), \end{aligned} \tag{1}$$

La variable u représente l'évolution du potentiel de membrane du neurone, v , la dynamique des courants ioniques dirigés vers l'extérieur (la variable de rétablissement). La fonction $k(u)$, contrôlant la forme du terme de rétablissement, est linéaire par morceaux. Le paramètre ϵ définit l'échelle de temps de l'impulsion d'excitation, et le paramètre I le courant stimulant. Le comportement excitable de l'équation 1 est illustré par la Fig. 1.

$O1$, $O2$, $O3$ sont des points fixes du système 1. Si une perturbation de l'état de repos, $O1$, est suffisamment forte, c'est-à-dire, dépasse la séparatrice (variété stable de $O2$), alors le système répond par une impulsion, sinon, le système retourne directement à l'état d'équilibre $O1$. Le but du travail étant d'étudier les trains d'impulsions et leur anti-synchronisation, nous simplifions ce modèle en effectuant une coupe de Poincaré par la demi-droite $[O, +\infty[$. Cette réduction du problème permet de garder complètement l'information sur les impulsions en ne perdant que l'information sur le temps de retour de la trajectoire sur

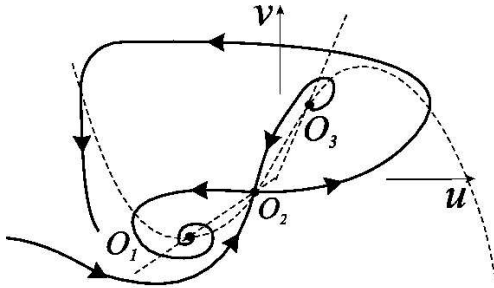


Fig.1. Schéma de l'espace des phases de l'eq. (1).

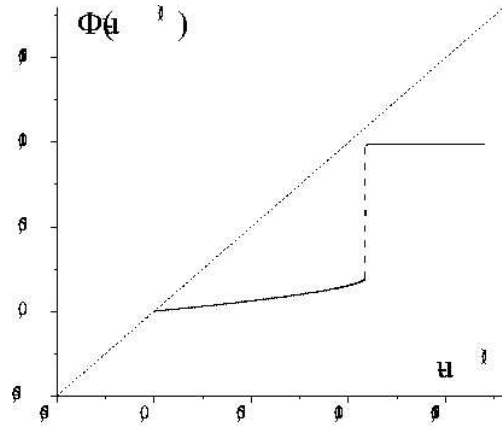


Fig.2. la courbe $\Phi(x)$ obtenu par la coupe de Poincaré de l'eq. (1) par la ligne L . Valeurs des paramètres : $\epsilon = 0.5, k_1 = 0.5, k_2 = 2$ et $I = 0.221$.

la demi-droite. On obtient la courbe de premier retour Fig. 2, sur laquelle on observe que toute trajectoire retourne de manière monotone vers le point fixe. La discontinuité joue le rôle de seuil d'excitation. On approxime maintenant cette courbe par une application continue par morceaux F , et on couple deux de ces neurones avec une constante de couplage électrique d . Le système évolue selon l'application suivante [3] :

$$f(x_1(n), x_2(n)) = \begin{cases} x_1(n+1) = F(x_1(n)) + d(x_2(n) - x_1(n)), \\ x_2(n+1) = F(x_2(n)) + d(x_1(n) - x_2(n)), \end{cases} \quad (2)$$

la fonction $F(x)$ étant l'approximation linéaire de la courbe de la Fig.2 :

$$F(x) = \begin{cases} \alpha x, & \text{if } x \leq a; \\ \alpha x + \alpha(b - a) & \text{if } x > a, \end{cases} \quad (3)$$

$$0 < \alpha < 1.$$

3 Etude préliminaire de l'application.

L'application f est tout d'abord caractérisée par un découpage de l'espace \mathbb{R}^2 en 4 parties par les deux lignes de discontinuité correspondant à la discontinuité de l'application F . Le point O est point fixe. Ensuite, d'après l'équation (2), l'application différentielle Df , matrice jacobienne de f est constante partout, sauf sur les singularités définies par les discontinuités de l'application f , et a pour valeurs propres :

$$\mu_1 = \alpha - 2d, \mu_2 = \alpha \quad (4)$$

. On utilise ensuite la base des vecteurs propres (y_1, y_2) , plutôt que les variables de départ (x_1, x_2) , $y_1 = x_2 - x_1$ et $y_2 = x_1 + x_2$. Afin d'observer un comportement chaotique du système, on se place alors dans un domaine des paramètres qui permet d'avoir :

- une direction stable et une direction instable pour chaque point de \mathbb{R}^2 , c-à-d $|\mu_1| > 1, |\mu_2| < 1$.
- une zone invariante Π , c-à-d $f(\Pi) \subset \Pi$

Cette région invariante Π sera délimitée par les variétés stables et instables du point fixe O , et des points périodiques Q_1 et Q_2 (cf. Fig. 3). Les lignes de singularité sont désignées par $\Gamma_{1,2}$. On notera que la région G_1 est la zone où aucun neurone n'est excité, la zone G_2^+ celle où le neurone x_1 est excité, la zone G_2^- celle où x_2 l'est, et la zone G_4 celle où les deux neurones sont excités ensemble; cependant cette région n'est pas incluse dans Π , les deux neurones ne peuvent donc pas être excités ensemble.

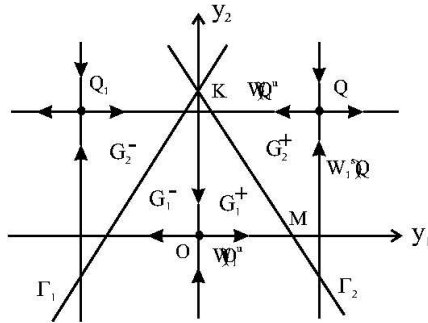


Fig.3. Schéma de l'espace des phases de f , avec les variétés instables du point fixe O et des points périodiques Q , ainsi que les lignes de discontinuités $\Gamma_{1,2}$.

Le domaine des paramètres qui permet d'être dans cette configuration est indiqué sur la Fig.4 où les frontières qui délimitent notre ensemble D_{inv} sont constituées des trois lignes définies par :

$$N_{-1} = \left\{ \alpha, d : d = \frac{1+\alpha}{2}, 0 < \alpha < \frac{a}{b} \right\}$$

$$N_b = \left\{ \alpha, d : \alpha = \frac{a}{b}, \frac{a+b}{2b} < d < d_h \right\}$$

$$N_h = \left\{ \alpha, d : d = d_h, 0 < \alpha < \frac{a}{b} \right\}.$$

avec $d_h \equiv \frac{1+2\alpha + \sqrt{1 + \frac{2\alpha(b-a)}{a}}}{4}$.

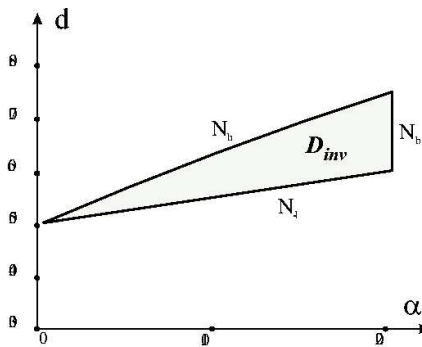


Fig.4. Région des paramètres $D_{inv}(\alpha, d)$.

Une fois dans ce domaine de paramètres, on peut regarder l'évolution d'une trajectoire possible au sein de l'espace invariant (Fig 5) et calculer numériquement la dimension fractale de l'attracteur de cette trajectoire.

En projetant ensuite une trajectoire sur les coordonnées de départ (x_1, x_2) , et en considérant qu'un neurone x_i envoie une impulsion si $x_i > a$, on obtient les graphiques représentant l'activité de chaque neurone, Fig. 6, avec z_i représentant l'activité du neurone x_i , c'est-à-dire

$$z_i(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_i(n) < a; \\ 1, & \text{if } x_i(n) > a. \end{cases}$$

On observe que les oscillations de chaque neurone sont en fait des trains d'impulsions anti-synchronisées avec celles de l'autre neurone. Pour un couplage d faible, on observe des périodes de calme d'autant plus

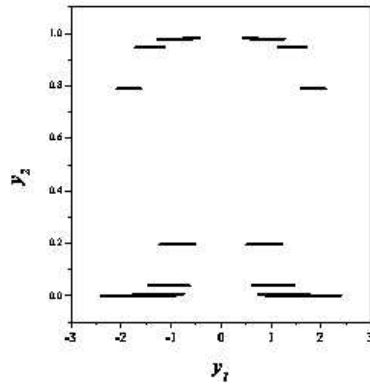


Fig.5. Attracteur chaotique A dans l'espace des phases (y_1, y_2) . Valeur des paramètres : $b = 4.95$, $\alpha = 0.2$ et $d = 0.74$.

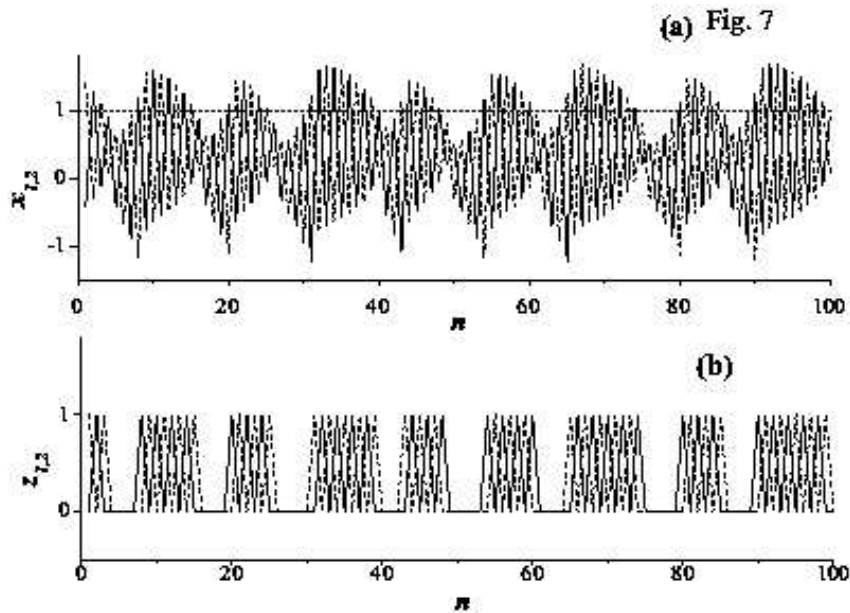


Fig.6. (a) Oscillations chaotique de l'application (2). $x_{1,2}(n)$ sont respectivement en lignes solides et achurées. (b) trains de pics pour les variables binaires $z_{1,2}(n)$. Valeur des paramètres : $b = 4.95$, $\alpha = 0.2$ et $d = 0.74$.

longues que d est élevé. Ainsi, l'application f décrit un comportement chaotique de type spike-burst, typique de nombreux systèmes neuronaux.

4 Distribution stationnaire de probabilité sur l'attracteur.

Afin de démontrer que ce qui est montré par les simulations correspond bien à la réalité du modèle et d'étendre ce modèle à plus de variables, un traitement statistique numérique et analytique est mis en œuvre.

En effet, le comportement global d'une dynamique chaotique, restreinte à un attracteur, peut être décrite par la probabilité de trouver la trajectoire dans un région donnée. Il est possible dans certains cas que le système atteigne une distribution stationnaire pour les temps longs. Pour traiter cela, on utilise en

général l'opérateur de Perron-Frobenius P qui décrit l'évolution des densités de probabilités. Il associe à un densité ρ_0 au temps t la densité correspondante au temps $t + 1$, ρ_1 ; $P : \rho_0 \rightarrow \rho_1 = P\rho_0$. L'opérateur est défini par :

$$\int_A P\rho_0(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int_{f^{-1}(A)} \rho_0(y_1, y_2)dy_1dy_2 \tag{5}$$

pour n'importe quelle région $A \subset \Pi$. La densité de probabilité stationnaire ρ est alors le point fixe de P . La mesure définie par cette densité ρ est appelée mesure de Sinai-Ruelle-Bowen (SRB)¹. Là, deux problèmes se posent :

- la densité stationnaire existe-t-elle réellement ?
- comment en avoir une évaluation ?

La première question vient du fait que l'on considère des applications dont le jacobien est inférieur à 1 : il est tout à fait possible que l'attracteur du système ne soit finalement que ses points fixes et périodiques. Il faut donc prouver que cette densité existe. Même un résultat de calcul numérique n'apporte rien, car l'attracteur numériquement peut très bien être dû aux approximations de calcul. Cependant, ce travail est mathématique, et donc nous l'aborderons dans un second temps.

Pour répondre à la deuxième question, il est en général très difficile d'obtenir une expression analytique exacte de la densité de probabilité, sauf pour des applications de Markov. On opte donc pour une approximation de l'opérateur de Perron-Frobenius par une matrice p_{ij} . Pour cela, on divise l'espace Π en $n \times m$ rectangles Δ_i . La matrice p_{ij} est alors la matrice qui donne la probabilité qu'un point de Δ_i vers Δ_j ². En trouvant le vecteur propre associé à 1, on trouve (v_i) , le vecteur de probabilité approximant la densité stationnaire ρ , Fig.7.

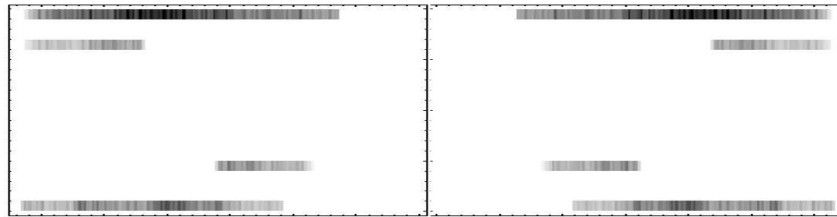


Fig.7. Distribution stationnaire approximante de l'application f . Valeur des paramètres : $b = 4.95$, $\alpha = 0.2$ et $d = 0.74$.

Pour démontrer l'existence de cette densité régulière, on utilise une version améliorée du théorème de Lasota-Yorke qui précise, qu'à une dimension, une application purement dilatante a toujours une densité régulière invariante. Cependant, à plusieurs dimensions, il est nécessaire de contrôler la façon dont les singularités évoluent, car elles sont la principale cause de disparition de la densité. En effet, cette densité est portée par l'attracteur qui, en général, est formé par l'union des images des variétés instables des points fixes et périodiques, en l'occurrence des segments horizontaux. Mais ces variétés instables sont généralement découpées par les préimages des lignes de singularités. Leur projection sur la direction contractante est un ensemble cantorien, phénomène typique décrit par l'application fer-à-cheval de Smale. Si ces préimages découpent de plus en plus ces variétés, la taille des morceaux non découpés restant va tendre vers zéro, de manière à ne plus laisser de place à une densité régulière. C'est ce qui se produit en effet si le nombre des préimages des singularités en un point augmente plus vite que le taux d'expansion. Ainsi, si les singularités découpent plus vite que le taux d'expansion, alors quand t tend vers l'infini, les variétés instables auront complètement disparues et la densité avec. On démontre que pour des applications affine par morceaux, seules un nombre fini d'applications peuvent poser problème, et que dépassé un certain seuil d'expansion, lié au nombre d'éléments de la partition engendré par les singularités, les singularités ne posent plus de

¹ voir référence [2] pour plus de précision.
² On peut montrer que p_{ij} converge bien vers P

problèmes. Il s'agit ensuite de montrer que l'opérateur P^n est borné, et le théorème de Kakutani-Yosida nous donne l'existence de la densité.

5 Synchronisation.

Dans la mesure où la partition Π en trois régions correspond à différents états d'excitations des deux neurones, on peut étudier facilement les probabilités de transition entre ces régions. Rappelons que x_1 est excité si et seulement si le système est dans la région G_2^1 , x_2 est excité si et seulement si le système est dans G_2^+ et l'état de repos du système coïncide avec la région G_1 . Dans le problème traité ici (deux neurones stables couplés), l'obtention de la densité permet de calculer les probabilités qu'un neurone envoie un pic, qu'il en envoie un juste après que l'autre l'ait fait, par exemple. On obtient ainsi le graphique 8, qui donne les probabilités de transition de l'état où x_1 est excité vers l'état où x_2 est excité et de l'état de repos vers un état excité en fonction du paramètre de couplage d .

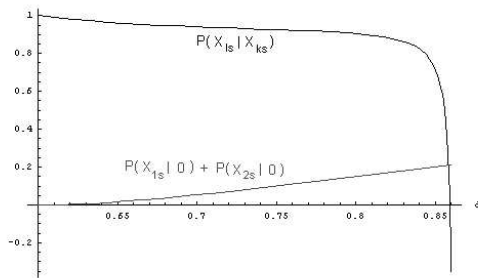


Fig.8. Probabilités conditionnelles d'excitation et de réexcitation en fonction de d .

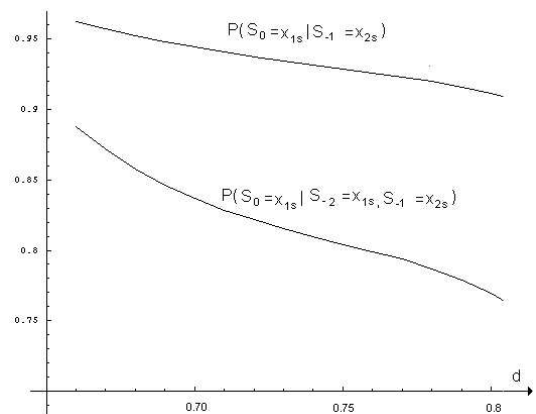


Fig.9. Effet de mémoire en fonction de d .

Ce graphique donne ainsi une idée de la fréquence et de la durée des trains de pics d'excitation. Cependant on peut démontrer que ces probabilités ne sont pas un processus markovien. En effet, l'étude probabiliste montre que le système acquiert une mémoire statistique et que cet effet de mémoire augmente avec la constante de couplage Fig. 9.

6 Conclusion

Nous avons étudié la dynamique de deux neurones stables couplés en introduisant une définition pour l'excitation. Ensuite, nous avons montré qu'un attracteur chaotique apparaissait, et que celui-ci possédait des caractéristiques fondamentales pour modéliser les neurones étudiés : pics, train de pics et anti-synchronisation.

Références

1. A. SCOTT, *Neuroscience, a mathematical primer*, Springer, 2002.
2. B. R. HUNT ET AL., EDITORS, *The theory of chaotic attractors*, Springer, (2004).
3. M. COURBAGE, V.B. KAZANTSEV, V.I. NEKORKIN, M. SENNERET, Emergence of chaotic attractor and anti-synchronization for two coupled monostable neurons, *Chaos*, **14**,(4) 1148 (2004).

Étude numérique et expérimentale d'ondes non linéaires en écoulements cisailés annulaires tournants

Éric Serre¹, Emmanuel Plaut² & Yannick Lebranchu²

¹ LMSNMGP, UP — UM — UAM3 — CNRS, 38 rue Frédéric Joliot-Curie, 13451 Marseille cedex 20

² LEMTA, INPL — UHP — CNRS, 2 avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex

Emmanuel.Plaut@ensem.inpl-nancy.fr

Résumé. L'objectif principal, à terme, est d'établir l'existence ou non d'effets de couplage global dans les modèles de Ginzburg-Landau susceptibles de décrire l'évolution spatio-temporelle de l'enveloppe de ces ondes.

Abstract. We study numerically and experimentally nonlinear waves produced by shearing with a rotating lid a possibly rotating channel of fluid. We aim at testing the validity of local and nonlocal Ginzburg-Landau models describing the spatio-temporal evolution of the envelope of these waves.

1 Introduction

La compétition entre un mode d'écoulement simple invariant par translations spatio-temporelles et des ondes non linéaires est une thématique récurrente en hydrodynamique, qui a connu des développements récents. Dans le cas de l'écoulement de Couette plan par exemple, la transition vers les ondes non linéaires est très fortement sous-critique, et n'est pas liée à l'existence d'une instabilité de l'écoulement de base [1]. Même dans des cas où la transition vers les ondes est liée à une instabilité, et dans une géométrie quasi unidimensionnelle, les contraintes sur le champ de pression moyen liées à une topologie annulaire du domaine d'écoulement peuvent entraîner l'invalidité de l'approche classique de Ginzburg-Landau (GL) [2]. En effet, en écoulements incompressibles, alors que des modes de vitesse de nombre d'onde $k > 0$ dans la direction azimutale sont typiquement associés à un champ de pression variant azimutalement et à un débit nul, un mode de nombre d'onde 0 doit au contraire être associé à un champ de pression indépendant de l'azimut, tout en correspondant - éventuellement - à un débit non nul. Ainsi, lorsque des ondes faiblement non linéaires engendrent un mode 0 de débit non nul, la limite des nombre d'ondes tendant vers 0 est singulière, et la distinction qu'il faut faire entre mode 0 et modes de petit nombre d'onde conduit à une équation de GL non locale,

$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1 + ic_0)\epsilon A + \xi^2(1 + ic_1)\partial_x^2 A - \gamma(1 + ic)|A|^2 A - \delta(1 + id)\langle |A|^2 \rangle_x A. \quad (1)$$

Dans cette équation x représente l'abscisse curviligne le long du périmètre moyen de l'anneau, $A(x, t)$ l'enveloppe des ondes et $\langle \cdot \rangle_x$ la valeur moyenne sur un tour. Il faut noter que, pour une onde pure, lorsque $A = A_0(t) \exp(iqx)$ avec q le nombre d'onde réduit, comme $|A|$ ne dépend pas de x les termes non linéaires local et non local de (1) s'ajoutent pour redonner l'équation de GL classique

$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = (1 + ic_0)\epsilon A + \xi^2(1 + ic_1)\partial_x^2 A - g_3(1 + ic_3)|A|^2 A \quad (2)$$

avec $g_3 = \gamma + \delta$, $c_3 = (\gamma c + \delta d)/g_3$. L'une des finalités des études présentées ici est justement la mise en évidence d'éventuels effets non locaux du type (1).

Dans ce but une expérience, dont le schéma de principe est montré Fig. 1, est mise au point au LEMTA. Un plateau fixe supporte un premier plateau tournant éventuellement à la vitesse angulaire Ω_b , dans lequel un canal de section carrée a été creusé. Un autre plateau disposé au dessus de celui-ci, tournant à la vitesse $\Omega_h > \Omega_b$, vient cisailer le fluide contenu dans le canal. Le rayon intérieur (extérieur) du canal est 180 mm (198 mm), ce qui impose un rayon moyen $r_m = 189$ mm et un inter-rayon $h = 18$ mm. Le

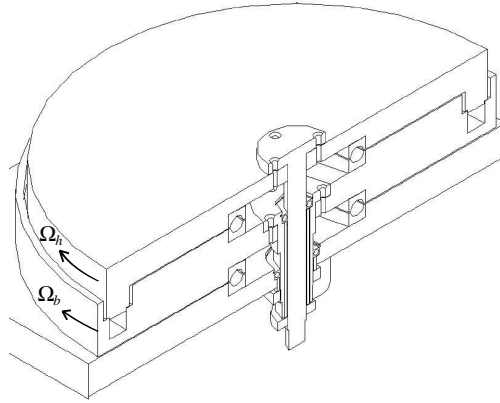


Fig.1. Schéma de l'expérience du LEMTA. Les plateaux tournants sont en plexiglass, de façon à permettre un accès optique au canal pour la caractérisation des écoulements.

rapport inter-rayon sur rayon moyen est ainsi 0.095, indiquant des effets de courbure plutôt faibles, et laissant donc espérer que l'approche quasi unidimensionnelle (1), (2) puisse être valable.

Lorsque $\Omega_b = 0$, ce système équivaut à celui utilisé par l'équipe de F. Charru à Toulouse pour étudier des instabilités interfaciales [3] et plus récemment la dynamique d'écoulements d'huile et de matière granulaire [4]. Alors que cette équipe s'est concentrée sur des études diphasiques ou monophasiques à faible nombre de Reynolds haut $R_h = \Omega_h r_m h / \nu$ (ν étant la viscosité du fluide), $R_h \leq 400$, notamment dans le but de produire un écoulement de base proche de l'écoulement de Couette plan, nous nous concentrons sur des études en monophasique à $R_h \geq 400$. D'autre part, l'introduction d'un deuxième paramètre de contrôle, le nombre de Reynolds bas $R_b = \Omega_b r_m h / \nu$, est enrichissante, puisque des études en contrarotation pure (lorsque $R_b = -R_h$) ou au contraire en corotation rapide (R_b légèrement inférieur à R_h) deviennent possibles. Ainsi le paramètre de contrôle principal du système est le nombre de Reynolds différentiel $\Delta R = R_h - R_b$, tandis qu'un paramètre de contrôle secondaire est le nombre de Reynolds moyen $R_m = \frac{1}{2}(R_b + R_h)$.

2 Étude numérique

Elle a été réalisée au moyen du code pseudo-spectral présenté dans [5,6]. La géométrie est identique à celle de l'expérience : on travaille en coordonnées cylindriques (r , θ , z) en prenant en compte tous les effets de courbure. Le référentiel utilisé est le référentiel du laboratoire. Pour régulariser les singularités de vitesse tangentielle aux points de jonction entre les bords et le couvercle, on a imposé comme dans [6] un profil de vitesse exponentiel sur les bords, dans une couche limite numérique dont la taille est de l'ordre de $0.06h$. Le nombre de modes utilisés dans les directions non homogènes varie entre 64 et 90 en r , 48 et 64 en z . Dans la direction azimutale homogène, le nombre de modes de Fourier varie entre 96 et 150.

Les écoulements de base axisymétriques sont tridimensionnels, à cause de la force centrifuge liée à la rotation du couvercle, qui induit un rouleau transverse dans une section du canal (Fig. 2a). Par advection, la vitesse azimutale est diminuée (augmentée) par rapport à ce qu'elle serait en l'absence de ce rouleau dans la partie interne supérieure (externe inférieure) du canal (Fig. 2b). En conséquence le profil d'écoulement au milieu du canal est non monotone (Fig. 2c). La même tendance était déjà visible sur la Fig. 5 de [3]; ainsi, même en l'absence de rotation du fond et des bords, lorsque $R_h \geq 400$ l'écoulement de base est déjà très différent de l'écoulement de Couette plan.

Lorsque l'on introduit une corotation rapide, l'écoulement transverse tend à se localiser dans des couches limites, d'où l'apparition d'un cœur en rotation quasi solide (Fig. 3). Cet effet peut être vu comme une conséquence de la force de Coriolis, et de la contrainte de Taylor-Proudman, qui tend à interdire des variations de vitesse suivant la coordonnée axiale z dans le cœur du canal.

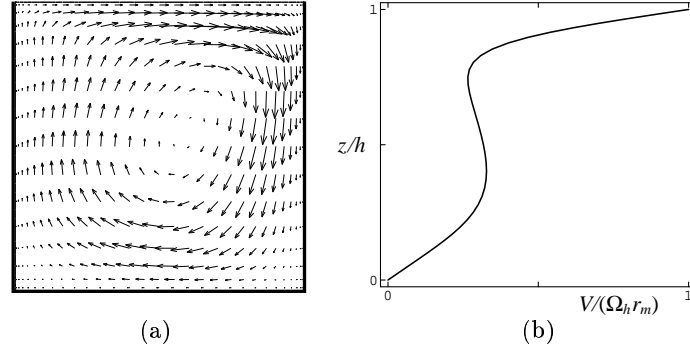


Fig.2. Écoulement de base axisymétrique calculé pour $R_b = 0$, $R_h = 750$. (a) Champ de vitesse transverse. En traits épais le fond et les bords; bord extérieur à droite. La vitesse radiale maximale est $0.07\Omega_h r_m$. (b) Niveaux de vitesse azimutale. (c) Profil axial de vitesse azimutale au milieu du canal ($r = r_m$).

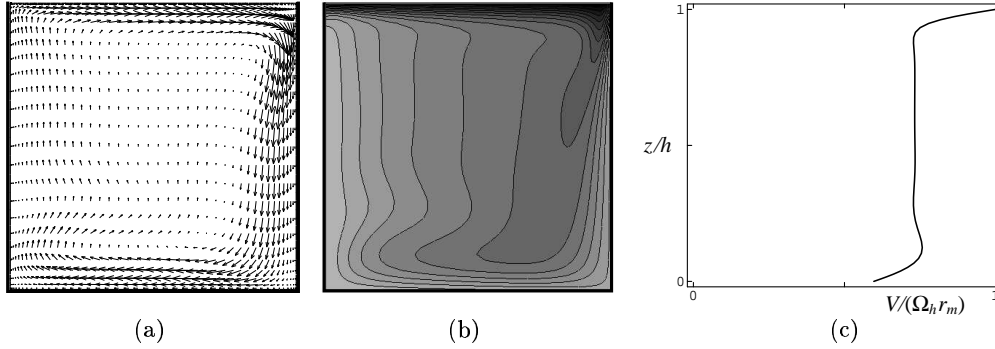


Fig.3. Comme Fig. 2 mais en corotation rapide $R_b = 2991$, $R_h = 5009$ i.e. $R_m = 4000$, $\Delta R = 2018$. En (a) la vitesse radiale maximale est $0.06\Omega_h r_m$.

Pour analyser la stabilité de ces écoulements axisymétriques de façon efficace avec notre code de simulation numérique directe, nous avons utilisé la méthode d'analyse modale de [7]. On introduit de petites perturbations de tous les modes de Fourier en $\exp(im\theta)$ en sus du mode 0 de base. Après un transitoire rapide, ces perturbations relaxent en général vers les modes linéaires les plus dangereux du système. En suivant l'évolution temporelle des intensités de Fourier de la solution, on s'aperçoit effectivement qu'elles se mettent alors à évoluer en $\exp[\sigma_l(m) t]$. Des ajustements linéaires opérés sur les logarithmes des intensités de Fourier donnent alors accès aux taux de croissance ou de décroissance $\sigma_l(m)$. D'autre part une étude des signaux de Fourier oscillants donne accès, par une mesure des périodes temporelles associées, aux pulsations correspondantes $\omega_l(m)$. L'avantage est qu'à l'aide d'une seule simulation on accède aux valeurs de tous les $\sigma_l(m)$ et $\omega_l(m)$, pour les nombres de Reynolds que l'on a imposés.

Un ensemble de valeurs de $\sigma_l(m)$ obtenu avec cette méthode est présenté Fig. 4a. Pour ces calculs en corotation rapide, avec $R_m = 4000$, une instabilité structurante apparaît dès que $\Delta R \geq 1970$, ce qui justifie l'usage de modèles du type GL (1) et (2). Plus précisément ces deux modèles prédisent, d'après la règle de calcul du nombre d'onde cartésien $k = m/r_m$ (cf. $\theta = x/r_m$), si $k_c = m_c/r_m$ est le nombre d'onde cartésien critique, $q = k - k_c$ le nombre d'onde cartésien réduit, ΔR_c le seuil de l'instabilité, $\epsilon = \Delta R/\Delta R_c - 1$ l'écart au seuil réduit, τ le temps caractéristique, ξ la longueur de cohérence,

$$\sigma_l = \frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{\tau} = \frac{1}{\tau \Delta R_c} \Delta R - \frac{1}{\tau} - \frac{\xi^2}{\tau} \left(\frac{m}{r_m} - k_c \right)^2. \quad (3)$$

Par ajustement des données de la Fig. 4a à cette loi, en choisissant 38 modes actifs, les modes 19 à 24 pour $\Delta R = 1970$, 18 à 25 pour $\Delta R = 2000$, 2018, 2052 et 2080, on obtient un bon modèle des σ_l - cf. les

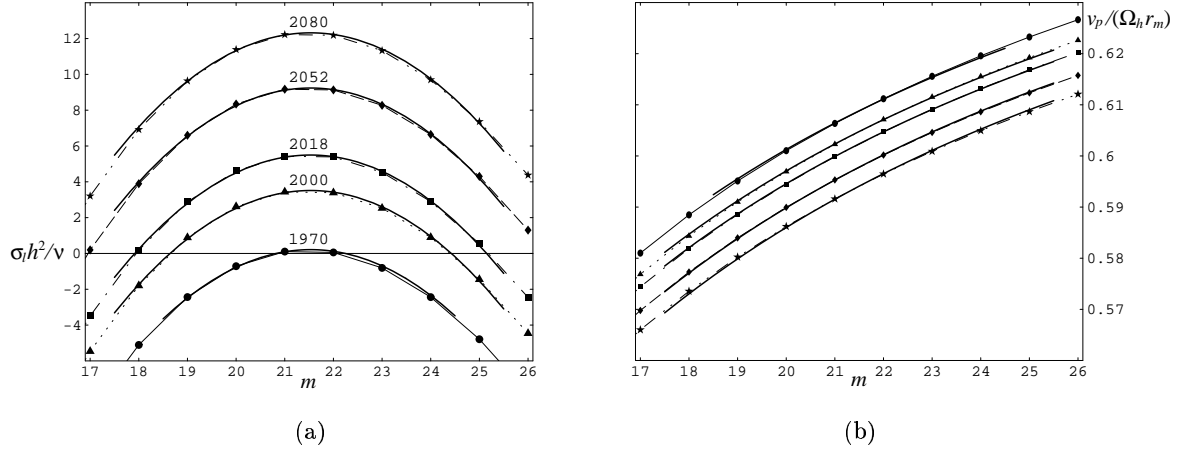


Fig.4. Résultats de l'analyse modale de stabilité d'écoulements de base en corotation rapide, c'est-à-dire $R_m = 4000$. (a) Taux de (dé)croissance σ_l adimensionnés par multiplication par le temps visqueux h^2/ν . Les valeurs de ΔR sont indiquées au dessus de chaque courbe. (b) Vitesses de phase réduites $\omega_l/(k\Omega_h r_m)$ des mêmes modes.

courbes en traits épais Fig. 4a; l'erreur relative moyenne est de seulement 6.9% - avec

$$k_c = 2.05/h \text{ (i.e. } \lambda_c = 2\pi/k_c = 3.06h), \quad m_c = 21.5, \quad \Delta R_c = 1968, \quad \tau = 0.00462h^2/\nu, \quad \xi = 0.462h. \quad (4)$$

Cette instabilité structurante est oscillante puisque chaque mode en $\exp(im\theta)$ pulse en $\exp[-i\omega_l(m)t]$; plutôt que de montrer les pulsations ω_l la Fig. 4b montre les vitesses de phase $v_p = \omega_l/k$ divisées par la vitesse du couvercle au centre du canal $\Omega_h r_m$. Ces résultats peuvent aussi être décrits par les modèles de GL (1), (2), qui donnent pour un mode linéaire d'instabilité, si ω_c est la pulsation critique, c_0 le coefficient de décalage fréquentiel par variation du Reynolds différentiel, v_g la vitesse de groupe des ondes, c_1 le coefficient de décalage fréquentiel par variation du nombre d'onde,

$$\omega_l = \omega_c - \frac{c_0}{\tau}\epsilon + v_g q + \frac{c_1 \xi^2}{\tau} q^2 = \omega_c - \frac{c_0}{\tau} \left(\frac{\Delta R}{\Delta R_c} - 1 \right) + v_g \left(\frac{m}{r_m} - k_c \right) + \frac{c_1 \xi^2}{\tau} \left(\frac{m}{r_m} - k_c \right)^2. \quad (5)$$

Par ajustement à cette loi on obtient

$$\omega_c = 6227\nu/h^2, \quad c_0 = 6.90, \quad v_g = 3536\nu/h, \quad c_1 = -0.268 \quad (6)$$

et les courbes en traits épais de la Fig. 4b, qui confirment la validité de l'approche de GL à ce stade : l'erreur maximale sur les pulsations est de 0.09% en valeur relative. Physiquement les valeurs réduites des vitesses de phase montrent que les ondes sont progressives et se propagent à environ 60% de la vitesse du couvercle, ce qui est raisonnable au vu des Fig. 3b,c. On peut aussi noter que la vitesse de groupe des ondes est du même ordre de grandeur, soit près du seuil 71% de la vitesse du couvercle.

Cette analyse modale a été répétée pour différentes valeurs du Reynolds moyen, et une première synthèse des résultats obtenus est montrée sur la Fig. 5. La Fig. 5a montre clairement l'influence stabilisante des forces de Coriolis liées à une corotation rapide; en conséquence l'instabilité en corotation rapide requiert de plus forts gradients i.e. des valeurs plus élevées de m (Fig. 5b), tendance classique dans des systèmes de ce type. Quant aux vitesses de phase des ondes (Fig. 5c), elles sont de l'ordre de grandeur de la vitesse azimutale moyennée sur une section.

En ne gardant typiquement que les modes en $\exp(\pm iMm\theta)$ avec $M = 0, 1, 2, 3$ dans le code de simulation directe, nous avons calculé des ondes pures non linéaires saturées. L'amplitude du mode fondamental obéit à la prédiction des modèles de GL (1) et (2),

$$|A_n(m)| = \sqrt{\frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{g_3}} = \sqrt{\frac{\Delta R / \Delta R_c - 1 - \xi^2 (m/r_m - k_c)^2}{g_3}}, \quad (7)$$

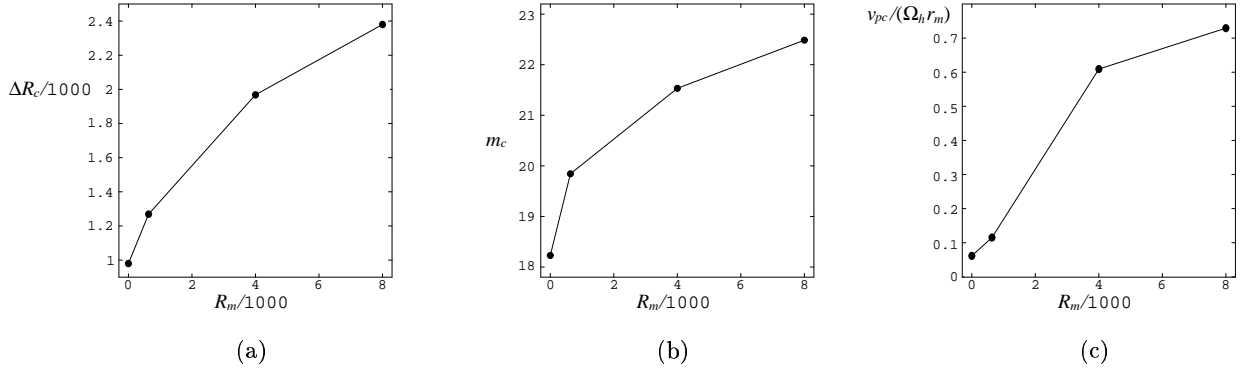


Fig.5. Paramètres critiques (Reynolds différentiel, nombre d'onde, vitesse de phase) caractérisant la première instabilité des écoulements de base axisymétriques, en fonction de R_m , lorsque ΔR est progressivement augmenté.

avec un coefficient de saturation $g_3 > 0$, indiquant une bifurcation sur-critique. Par exemple pour $R_m = 4000$ la loi (7) est vérifiée dans le domaine de la Fig. 4, jusqu'à $\Delta R = 2080$ i.e. $\epsilon = 0.057$, pour $m = 19$ et 21, avec des erreurs de l'ordre de 5%.

Une mesure des pulsations ω_n des ondes non linéaires révèle qu'elles sont très proches des pulsations linéaires ω_l . Par exemple pour $R_m = 4000$, $m = 21$, dans le domaine de la Fig. 4, la variation maximale de pulsation est obtenue à $\Delta R = 2080$ et vaut $\omega_n(21)/\omega_l(21) - 1 = 0.09\%$. Cette variation est significative par rapport à notre précision de mesure des pulsations, inférieure à 0.001%, mais par contre elle est du même ordre de grandeur que les variations entre les pulsations linéaires ω_l effectivement mesurées et les pulsations linéaires ω_l prédites par le modèle de GL (5). À cause de cela, un test de loi de GL que l'on peut déduire de (1) et (2),

$$\omega_n(m) - \omega_l(m) = c_3 \frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{\tau} = c_3 \frac{\Delta R / \Delta R_c - 1 - \xi^2 (m/r_m - k_c)^2}{\tau} \quad (8)$$

s'avère extrêmement délicat voire impossible, du moins pour $R_m = 4000$. Cet effet semble assez général car il se produit aussi à $R_m = 635$.

3 Étude expérimentale

Des expériences ont été entreprises avec le montage présenté Fig. 1. Des moteurs électriques entraînent les plateaux. Leur vitesse de rotation est mesurée par un système optique enregistrant le passage de stries tracées sur l'arbre de chaque moteur. On a ainsi une grande précision de mesure sur les nombres de Reynolds haut et bas, et on a vérifié une bonne stabilité de ceux-ci, avec des variations de $R_{b,h}$ inférieures à 0.5% ; ces variations prennent en compte de légères variations de la température, mesurée par un thermocouple, donc de la viscosité de l'eau.

On a commencé par des manipulations avec le plateau inférieur fixe, c'est-à-dire $R_b = 0$. Des mesures de vitesse azimutale ont été réalisées par anémométrie laser-doppler, en ensemençant l'écoulement avec de petites particules. Des séries temporelles ont ainsi été obtenues, qui présentent un bruit haute fréquence caractéristique de cette métrologie. Cependant le spectre de Fourier de ces séries présente de façon robuste des pics de basse fréquence. Pour $R_h \leq 1200$, ces pics, montrés par des disques sur la Fig. 6, correspondent clairement à la fréquence de rotation du plateau supérieur et à la fréquence double (segments sur la Fig. 6). Cet effet est sans doute dû à un léger défaut du montage. Ces pics restent cependant d'une intensité assez faible quelque soit R_h . Un point intéressant est l'apparition, pour $R_h \simeq 1200$, d'un nouveau pic plus intense à une fréquence non multiple de la fréquence de rotation. Les positions de ce pic sont montrées par des étoiles sur la Fig. 6 ; ces fréquences varient apparemment linéairement avec R_h . Elles indiquent un nouveau phénomène sans doute lié à l'instabilité mise en évidence numériquement. En effet pour $R_b = 0$

on a obtenu numériquement une instabilité pour $R_h \geq 1269$ et $m_c = 19.9$; les pulsations de l'onde non linéaire de nombre d'onde fondamental $m = 20$ sont montrées par des losanges sur la Fig. 6, le point à plus bas R_h correspondant au seuil d'apparition de cette onde. On constate un accord semi-quantitatif entre ces résultats théoriques et nos premiers résultats expérimentaux.

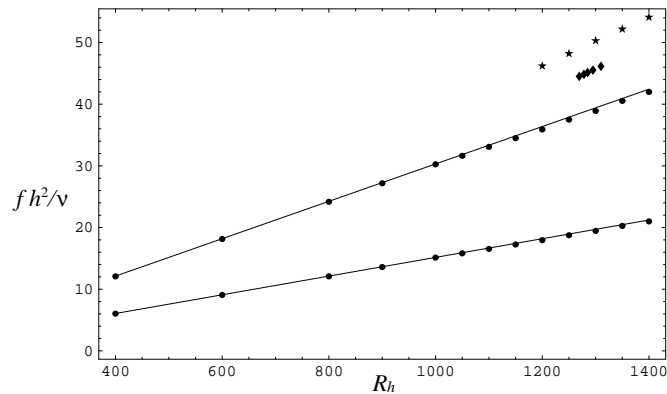


Fig.6. En fonction du nombre de Reynolds haut, à fond fixe, fréquences caractéristiques adimensionnées de séries de vitesse azimutale obtenues expérimentalement (disques et étoiles) et numériquement (losanges).

4 Conclusion

Le fait que les pulsations des ondes linéaires et non linéaires soient très proches, qui empêche toute mesure précise du (petit) coefficient c_3 de décalage fréquentiel par variation de l'amplitude dans (1) ou (2), est sans doute lié à ce que les ondes n'introduisent pratiquement aucune correction de débit. Ceci suggère de se focaliser maintenant sur des études en contrarotation pure, puisqu'alors le débit de l'écoulement axisymétrique, quasi nul en l'absence d'ondes, sera très vraisemblablement modifié par les ondes.

É.S. remercie l'IDRIS pour le temps de calcul alloué dans le cadre du projet 05242 *Écoulements tournants avec parois*. E.P. et Y.L. remercient Jean-Yves Morel et Alain Delconte pour leur aide à la conception de l'expérience, et Jean-Pierre Brancher pour son financement.

Références

1. F. WALEFFE, Three-dimensional coherent states in plane shear-flows. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 4140-4143 (1998).
2. Voir par exemple E. PLAUT, Nonlinear dynamics of traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : effects of the boundary conditions and of the topology. *Phys. Rev. E*, **67**, 046303, (2003).
3. P. BARTHELET, F. CHARRU & J. FABRE, Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow. *J. Fluid Mech.*, **303**, 23-53 (1995).
4. F. CHARRU, H. MOUILLERON & O. EIFF, Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, **519**, 55-80 (2004).
5. E. SERRE, E. CRESPO-DEL-ARCO & P. BONTOUX, Annular and spiral patterns in flows between rotating and stationary discs. *J. Fluid Mech.*, **434**, 65-100 (2001).
6. E. SERRE, P. BONTOUX & B. E. LAUNDER, Direct numerical simulation of transitional turbulent flow in a closed rotor-stator cavity. *Flow, Turb. Combust.*, **69**, 35-50 (2002).
7. J. D. SCHEEL, M. R. PAUL, M. C. CROSS & P. F. FISCHER, Traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : Analysis of modes and mean flow, *Phys. Rev. E*, **68**, 066216 (2003).

Chaos Classique avec un objet quantique

Quentin Thommen¹, Jean-Claude Garreau², & Véronique Zehnlé²

¹ O.N.T., Université Libre de Bruxelles

² Laboratoire Phlam, université de Lille1

qthommen@ulb.ac.be, jean-claude.garreau@univ-lille1.fr, veronique.zehnlé@univ-lille1.fr

Résumé. La dynamique quantique d'un gaz quantique dégénéré, chargé dans un réseau incliné, est étudiée. Nous montrons qu'elle présente des similarités forte avec le chaos classique.

Abstract. We study the quantum dynamics of an ultracold quantum degenerate gas in a tilted lattice and show that it displays features very close to classical chaos.

1 Atomes refroidis et condensation de Bose-Einstein

1.1 Atomes refroidis par lasers et potentiels lumineux

Le centre de masse d'un atome subit un potentiel mécanique proportionnel à l'intensité locale du champ électrique. L'utilisation de champs lasers permet ainsi une synthèse souple et variée de potentiels mécaniques. Si l'atome est suffisamment refroidi pour que sa longueur d'onde de De Broglie soit de l'ordre de la longueur caractéristique de variation du potentiel, sa dynamique doit être décrite dans le cadre de la mécanique quantique. L'utilisation d'atomes refroidis par lasers permet d'étudier expérimentalement (grâce entre autre aux techniques de mesure de vitesse atomique par spectroscopie) une grande variété de dynamiques quantiques. La dynamique du centre de masse atomique est décrite par une fonction d'onde, notée Ψ , dont le module au carré $|\Psi|^2$ exprime la densité de probabilité de présence et dont l'évolution est déterminée par l'équation linéaire de Schrödinger. Dans les expériences utilisant des atomes refroidis, la dissipation est maîtrisée et considérée comme nulle sur le temps de l'expérience (de l'ordre de la milli-seconde).

1.2 Réseau incliné et Base de Wannier-Stark

Nous nous intéressons à la dynamique unidimensionnel dans un réseau incliné, formé d'un potentiel périodique et d'un potentiel linéaire. Un tel potentiel est facilement réalisable à l'aide de champs lasers.

La dynamique d'un gaz parfait d'atomes refroidis dans un réseau incliné est très simple à décrire en employant la base des états propres du réseau incliné que nous décrivons ici brièvement. Le réseau incliné est composé d'une série de puits de potentiel périodiquement espacés. Pour les puits profonds, les états propres sont localisés dans les cuvettes de potentiel et sont appelés *états de Wannier Stark*. On note $\varphi_n(x)$ la fonction d'onde de l'état centré autour du puits numéro n et E_n l'énergie de l'état. Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont ortho-normées entre elles.

Le réseau incliné est invariant par une translation conjointe espace-énergie correspondant à une translation d'un pas du réseau et à une translation d'énergie égale à F . Cette symétrie se retrouve dans les états propres : $E_{n+1}^l = E_n^l + F$ et $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x - d)$ où d est le pas du réseau. Ainsi, de proche en proche, les états localisés $\varphi_n(x)$ se répartissent sur une échelle linéaire d'énergie, de pas F . Ces deux propriétés de symétrie font tout l'intérêt de ce système.

Si l'on restreint la description de la dynamique quantique dans un réseau incliné aux seuls états localisés, la dynamique est alors celle d'un système quantique d'états d'énergie équidistants (comme ceux de l'oscillateur harmonique) ayant tous une fonction d'onde identique à une translation près (comme

dans le cas d'un réseau profond). Le réseau incliné combine ainsi les avantages de ces deux potentiels "standarts". Ce système simple permet de mettre en évidence des phénomènes dynamiques remarquables dûs aux cohérences quantiques comme les "oscillations de Bloch" [1].

1.3 Condensat de Bose-Einstein (CBE)

La condensation de Bose Einstein est l'accumulation macroscopique de particules bosoniques – de spin entier – dans l'état fondamental d'un puits de potentiel. Cet effet d'origine quantique a été mis en évidence avec un gaz d'atomes refroidis. Comme le gaz atomique est dilué, la dynamique du gaz condensé (ou condensat) est correctement décrite à très basse température par une approche de type "champ moyen". Cette approche prends en compte les collisions entre bosons et décrit le gaz condensé par une fonction d'onde unique [2].

Nous nous intéressons à la dynamique d'un CBE placé dans un réseau incliné unidimensionnel. Expérimentalement, il est possible de se rapprocher de ce cas théorique en "confinant" condensat dans deux directions spatiales. L'équation d'évolution unidimensionnelle de la fonction d'onde du CBE dans le cadre de la théorie de champ moyen est :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{p^2}{2m} + V_0 \cos(kx) + Fx \right) \Psi(z, t) + g |\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t). \quad (1)$$

Les termes linéaires en ψ correspondent à l'équation de Schrödinger ; le terme non-linéaire décrit les collisions binaires comme un potentiel, répulsif ou attractif proportionnel à la densité de présence $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Le paramètre g caractérise l'importance des collisions entre particules traitées par la théorie de champ moyen, il traduit la non-linéarité du système. Le domaine d'étude est au carrefour de la mécanique quantique et de la physique non-linéaire.

2 Dynamique d'un CBE dans un réseau incliné

2.1 Modélisation à l'aide des états de Wannier-Stark

La dynamique d'un CBE est étudiée dans le cadre de la théorie de champ moyen en décomposant la fonction d'onde du condensat dans la base des états de Wannier Stark φ_n

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \varphi_n(x).$$

Les coefficients $c_n(t)$ sont les amplitudes instantanées de chaque état. L'évolution de la dynamique quantique est décrite par un système dynamique portant sur les amplitudes c_n .

$$i \frac{dc_n}{dt} = E_n c_n + \sum_{k,l,m} X_{0,k}^{l,m} c_{n+l} c_{n+k}^* c_{n+m}. \quad (2)$$

Les termes de couplage non-linéaires dépendent d'une intégrale de recouvrement entre quatre états propres

$$X_{n,p}^{o,q} \equiv g \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_o(x) \varphi_p(x) \varphi_q(x) dx. \quad (3)$$

L'intégrale $X_{n,p}^{o,q}$ traduit l'amplitude de probabilité que deux atomes initialement dans les états φ_o et φ_q transitent vers les états φ_p et φ_n sous l'effet d'une collision binaire. D'après les propriétés de symétrie du réseau incliné, les intégrales de recouvrement (3) sont invariantes par permutation et/ou par translation globale des indices.

Les fonctions d'onde des états de Wannier Stark étant fortement localisées dans le réseau incliné, il est évident que les intégrales de recouvrement (3) impliquant des fonctions d'onde localisées dans des puits éloignés seront faibles comparées à celles impliquant quatre fonctions d'onde localisées dans le même puits

$X_{0,0}^{0,0}$. Les collisions binaires entre particules dans le même état de Wannier Stark sont donc dominantes. En ne prenant en compte que les collisions dominantes dans le système dynamique (2), les équations se découpent et ont pour solutions $c_n(t) = c_n(0) \exp -i\omega_n t$ où

$$\omega_n \equiv E_n + X_{0,0}^{0,0} |c_n(0)|^2. \quad (4)$$

La population de chaque état est constante au cours du temps. L'effet du terme non-linéaire dominant $X_{0,0}^{0,0}$ est un déplacement du niveau d'énergie, proportionnel à la population de l'état. Cet effet nouveau est similaire à l'effet Kerr optique qui modifie l'indice de réfraction du milieu proportionnellement à l'intensité lumineuse.

Pendant, la restriction de la description de la dynamique aux termes dominants $X_{0,0}^{0,0}$ n'est pas correcte. En effet, le déplacement de niveaux permet l'apparition de dégénérescences accidentelles entre niveaux voisins. Dans ces cas les termes non-linéaires suivant vont introduire un couplage important qu'il faut prendre en compte. La dynamique est par contre bien décrite par le système dynamique (2) en ne prenant en compte que les collisions entre particules d'un même puits $X_{0,0}^{0,0}$ et les collisions transférant une particule dans un puits voisin $X_{0,0}^{1,0}$.

2.2 Formulation hamiltonienne et théorème Kolmogorov Arnold Moser

Il est intéressant d'introduire un changement de variable faisant apparaître explicitement les populations des états puisque celles-ci sont constantes lorsque les transferts d'atomes par collisions entre puits voisins sont négligeables. Nous posons donc $c_n(t) \equiv \sqrt{I_n(t)} e^{i\theta_n(t)}$, les variables I_n et θ_n représentant alors la population et la phase de l'état $\varphi_n(x)$. L'ensemble des populations I_n et des phases θ_n forme un *espace des phases classique*, c'est à dire un espace dans lequel le système est représenté à tout instant par un point unique. L'évolution dynamique du CBE décrit une trajectoire dans cet espace. Le système d'équations différentielles décrivant la dynamique dans cet espace des phases se met sous une forme canonique

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{dH(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})}{d\theta_n}; \quad \frac{d\theta_n}{dt} = -\frac{dH(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})}{dI_n}$$

où l'on a introduit un hamiltonien

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = \underbrace{\sum_n (E_n I_n + X_{0,0}^{0,0} I_n^2)}_{H_0(\mathbf{I})} + X_{1,0}^{0,0} \underbrace{\sum_n \sqrt{I_n I_{n+1}} (I_n - I_{n+1}) \cos(\theta_n - \theta_{n+1})}_{H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})}. \quad (5)$$

Dans cette formulation les populations et les phases forment un ensemble canonique de variables conjuguées. Ainsi, l'introduction d'une base d'états adaptée, permet de représenter la **dynamique quantique** par un **système hamiltonien classique**. Il existe ainsi une analogie possible entre la dynamique quantique d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau incliné et la dynamique classique d'une chaîne d'oscillateurs non-linéaires couplés.

Le système dynamique décrit par $H_0(\mathbf{I})$ est intégrable et les solutions sont $I_n(t) = I_n(0)$ et $\theta_n(t) = \theta_n(0) - \omega_n I_n(0)$. Les populations I_n sont des intégrales premières du mouvement. Les fréquences déplacées (4) correspondent à $\omega_n = \frac{\partial H_0(\mathbf{I})}{\partial I_n}$.

Le paramètre $X_{0,0}^{1,0}$ traduit le caractère perturbatif du second terme du hamiltonien (5), il dépend des propriétés du condensat et des paramètres du réseau incliné (expérimentalement modifiable). Lorsque $|X_{0,0}^{1,0}| \ll X_{0,0}^{0,0}$ le système est proche d'un système intégrable, il est qualifié de *quasi-intégrable*.

Selon le *théorème Kolmogorov Arnold Moser* (KAM), si le système est "suffisamment proche" du système intégrable, la grande majorité des trajectoires sont stables, régulières et identifiables aux trajectoires faiblement déformées du système intégrable [3]. La condition d'existence de ces trajectoires dépend d'un critère de non dégénérescence entre les fréquences (4). Les trajectoires sont alors *passantes i.e.* la différence de phase entre deux amplitudes d'états de Wannier-Stark est non-bornée. Lorsque les fréquences déplacées (4) sont non-dégénérées, les termes de perturbations ont une faible influence.

Pour les trajectoires dites *résonnantes* correspondant à des fréquences déplacées (4) presque linéairement dépendantes. Des phénomènes d'accrochage de phases entre états voisins apparaissent au sein d'îlots de résonance aisément identifiables sur une section de Poincaré. Les populations et les phases des états couplés oscillent de manière synchrone. Lorsque ces îlots correspondent à une dégénérescence entre deux fréquences déplacées, un modèle simple à deux états donne une description analytique fidèle de la dynamique. Au voisinage des îlots de résonances, des dynamiques quasi-périodiques ou même chaotiques apparaissent. Nous pouvons ainsi mettre en évidence du **chaos** au sens **classique** dans la **dynamique** d'un objet **quantique** [4].

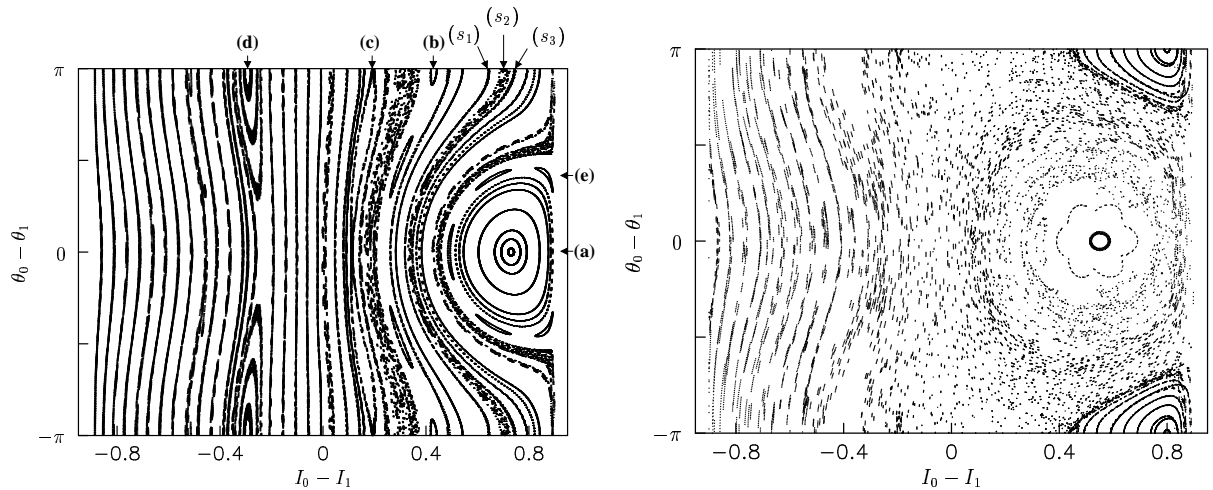


Fig.1. Section de Poincaré : La figure représente les intersections des trajectoires de l'espace des phase avec le plan défini par $I_{-1} = 0, 1$, $\theta_0 - \theta_{-1} = 0$ et $I_{|n|>1} = 0$.

Deux exemples de section de Poincaré sont présentés sur la Figure 1. Sur la section de gauche, la plupart des points d'intersections se répartissent sur des courbes régulières, identifiables aux trajectoires passant et résonantes. Le plus grand îlot de résonance – repéré par l'étiquette (a) – correspond à la dégénérescence entre les fréquences déplacées $\omega_1 - \omega_0 = 0$ soit pour $I_0 - I_1 = \frac{F}{X_0}$. Les autres îlots de résonance (b), (c) et (d), plus étroits que (a), correspondent à des combinaisons linéaires plus complexes entre les fréquences déplacées, respectivement $(\omega_0 - \omega_{-1}) + 3(\omega_0 - \omega_1) = 0$, $\omega_{-1} - \omega_0 + \omega_1 = 0$ et $(\omega_0 - \omega_{-1}) + (\omega_0 - \omega_1) = 0$. Les nuées de points irrégulièrement répartis (s_2 par exemple) entourées de trajectoires régulières (s_1 et s_3) ne sont pas le fait d'une imprécision numérique, ils traduisent une dynamique quasi-périodique.

Lorsque la pente F du réseau incliné diminue, l'îlot de résonance principale rentre plus dans le plan de la section et les nuées de points s'enroulent autour de la résonance. Parallèlement, l'influence des termes de perturbation augmente, couplant de manière plus forte les îlots de résonance secondaires, le nombre et la taille des nuées de points croissent jusqu'à se rejoindre et former une vaste "mer" de points d'intersection comme le représente la figure de droite.

L'évolution temporelle de $I_0(t)$ ainsi que le spectre de Fourier de l'amplitude $c_0(t)$ correspondant à une trajectoire de la "mer" de points sont représentés sur la Figure 2. L'évolution aléatoire de la population $I_0(t)$ et le spectre de Fourier continue de l'amplitude $c_0(t)$ démontre le caractère chaotique des trajectoires issues de la mer de points. Il est le fait d'une "hésitation" du système entre deux trajectoires possibles : passante, contournant la résonance et résonante, entourant la résonance. Les grandes oscillations de population correspondent à l'enroulement autour de la résonance et les petites, au contournement de la résonance. Ces trajectoires chaotiques apparaissent à l'interface entre îlots de résonance et trajectoires passantes. La dynamique du CBE présente une oscillation chaotique de population entre les états couplés.

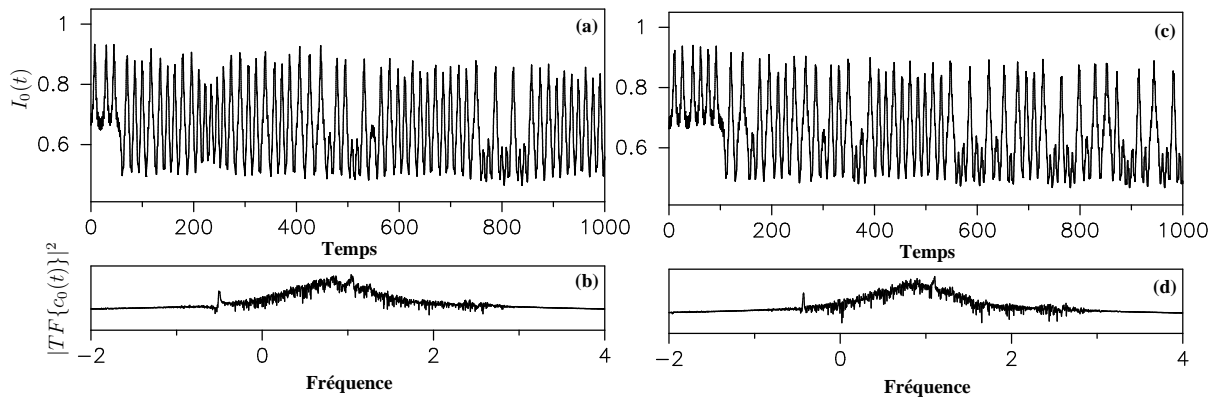


Fig.2. Évolution chaotique de l'intensité : Les figures (a) et (c) représentent l'évolution temporelle de $I_0(t)$ calculée respectivement par une intégration numérique du modèle discret (5) et de l'équation de Gross Pitaevskii (1). Les figures (b) et (d) représentent les spectres de puissance de l'amplitude $c_0(t)$. L'évolution chaotique de l'intensité se traduit par un spectre de fréquence continu.

2.3 Conclusion

En utilisant une décomposition de la fonction d'onde sur les états de Wannier Stark, nous avons montré l'analogie formelle entre la dynamique quantique du condensat dans un réseau incliné et la dynamique d'une chaîne d'oscillateurs non-linéaires classiques couplés. Ce rapprochement, qui est le point clef de notre description, nous a permis d'étudier la dynamique d'un CBE en utilisant les outils standards de la dynamique hamiltonienne classique. Dans le cadre de cette démarche originale, nous avons pu mettre en évidence des phénomènes purement non-linéaires de la dynamique quantique tels que l'accrochage de phase entre états voisins où l'évolution chaotique au sens classique des populations des états. Ces dynamiques ont alors pu être en partie interprétées à l'aide de la représentation simple des fréquences déplacées.

L'observation de dynamique chaotique classique avec un condensat de Bose Einstein n'est sûrement pas particulière au réseau incliné, l'image des fréquences déplacées doit permettre d'identifier de tels comportements dynamiques dans bien d'autres configurations de potentiel. Il n'est pas difficile d'imaginer par exemple des dynamiques chaotiques dues aux couplages entre les états du potentiel harmonique transverse de confinement.

Il est intéressant de remarquer en conclusion que la mise en évidence d'évolutions chaotiques des amplitudes des états quantiques du condensat est un phénomène nouveau, preuve de la passerelle lancée entre mécanique quantique et physique non-linéaire par l'étude des gaz atomiques quantiques.

Références

1. F. BLOCH, Über die Quantenmechanik der electronen in Kristallgittern, *Z. Phys.* , **52**, 555 (1928).
2. F. DALFOVO AND S. GIORGINI AND L. P. PITAEVSKII AND S. STRINGARI, Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases, *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 463 (1999).
3. V. I. ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, *Éditions de Moscou*, (1974).
4. Q. THOMMEN, J.C. GARREAU, AND V. ZEHLÉ, Classical Chaos with Bose-Einstein Condensates in Tilted Optical Lattices, *Phys. Rev. Lett.* , **91**, 210405 (2003).

Etude du flambage dynamique d'un élastique

R. Vermorel, N. Vandenberghe, & E. Villermaux

IRPHE UMR 6594, université de Provence, Marseille, France.
romain.vermorel@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Nous étudions le flambage dynamique d'un élastique tendu par l'une de ses extrémités et brusquement relâché. Lorsque l'on relâche un élastique préalablement étiré par l'une de ses extrémités, l'autre étant fixée, un front de détente, séparant un domaine libre et un domaine tendu, se propage vers l'extrémité encastrée. Le front de détente est alors réfléchi et se propage en sens inverse comme un front de compression, déclenchant l'instabilité de flambage dynamique. A l'aide d'un modèle d'élasticité linéaire et en interprétant la réflexion du front de détente comme un phénomène d'impact, nous parvenons à lier la longueur d'onde instable aux paramètres du problème et ce, en accord avec les résultats expérimentaux.

Abstract. The dynamic buckling instability of an initially stretched and then suddenly released rubber band is investigated. The phenomenon can be described as being divided in two different phases. The first one can be referred to as the releasing phase : when an initially stretched rubber band is released at one end, a front, separating the free and the stretched domains of the elastic material, propagates toward the clamped end. The second phase lies in the rebound of the front at the clamped end, resulting in a compression front propagating backward and triggering the dynamic buckling instability. Using a linear elasticity model and interpreting the rebound of the stress free front as an impact phenomenon, we can relate the buckled wavelength to the relevant parameters in fair agreement with the experimental results.

1 Introduction

Après impact sur une de ses extrémités, une barre rigide subit une compression suivant son axe qui la conduit à une instabilité de flambage qui, si les déformations sont suffisamment grandes, entraîne la fragmentation [?]. De manière générale, il est impératif d'avoir une idée très précise des excitations préalablement exercées sur le matériau afin de comprendre comment un bloc se brise en éléments dispersés et, d'autre part, de déterminer jusqu'à quel point les distributions de tailles de fragments sont sensibles aux détails de la sollicitation initiale. L'étude du flambage dynamique est donc primordiale dans l'objectif de comprendre les phénomènes menant à la fragmentation de la barre.

L'élastique se prête bien à cette étude car il s'agit d'un matériau facilement déformable, même avec de faibles contraintes. Il permet donc, grâce à la cinématographie rapide, une observation détaillée des phénomènes fondamentaux menant au flambage dynamique et apparaissant pendant celui-ci.

L'étude théorique et expérimentale vise à décrire le mouvement d'un élastique initialement tendu et soudainement relâché, la réflexion du front de détente à l'une des ses extrémités provoquant le flambage dynamique.

Nous établissons la dépendance de la première longueur d'onde instable aux paramètres du problème et montrons dans quelle limite l'approche linéaire du problème reste valable.

2 Dispositif Expérimental

Le principe de l'expérience est simple, il est montré Fig. 2 : nous fixons solidement l'extrémité d'un élastique sur une table de manipulation à l'aide d'un taquet. Nous tirons à la main l'autre extrémité de l'élastique jusqu'à atteindre l'élongation désirée, repérée par une tige horizontale de hauteur réglable.

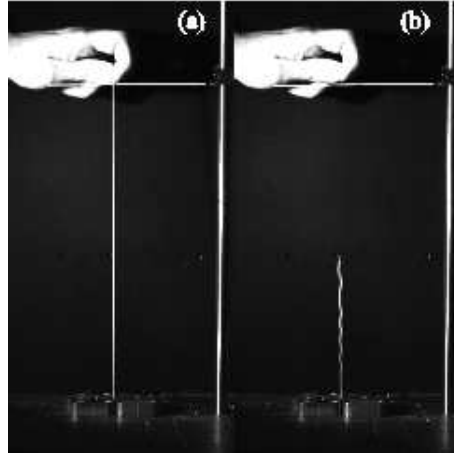


Fig.1. Photos présentant le principe de l'expérience : l'élastique est solidement fixé à la table de manipulation par un taquet, on étire l'élastique à la main jusqu'à l'élongation désirée, repérée par une tige de hauteur réglable (a). On lâche l'extrémité de l'élastique, la cinématographie rapide permet l'observation de l'instabilité de flambage se déclenchant moins d'un centième de seconde après le lâché (b).

Nous lâchons l'élastique et enregistrons un film pour visualiser le phénomène. Nous utilisons une caméra rapide Phantom V5 afin d'observer au mieux les détails de la dynamique s'opérant à des échelles de temps de l'ordre de $10^{-3} s$. Les mesures sont alors directement effectuées à partir des images.

Les élastiques sont découpés aux dimensions souhaitées dans des feuilles de latex. Les dimensions caractéristiques des élastiques utilisés sont les suivantes : longueur au repos $l_0 = 12 \text{ cm}$, largeur $b = 4 \text{ mm}$ et une gamme d'épaisseurs comprises entre $h = 0.254 \text{ mm}$ et $h = 1.27 \text{ mm}$. La valeur caractéristique du module d'Young des élastiques utilisés est $E = 1.5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ et leur masse volumique mesurée est $\rho = 990 \text{ kg m}^{-3}$.

3 Phénoménologie

L'acquisition de films à haute résolution temporelle a permis de visualiser les différentes étapes du flambage dynamique de l'élastique.

La première étape est la propagation du front de détente intervenant après le lâché de l'élastique tendu, visible sur la figure 3(a). Ce front se propage à la vitesse du son $c = (E/\rho)^{1/2}$ dans le matériau [2] et sépare l'élastique en deux domaines, un domaine totalement relâché derrière le front et un domaine encore étiré en avant du front. Sur son passage, le front de détente entraîne la partie relâchée avec une vitesse des points matériels que nous appelons V . La valeur caractéristique de la vitesse du front dans l'élastique est 40 m s^{-1} , la vitesse des points matériels derrière le front est une fraction de la vitesse du front et nous montrerons qu'elle dépend de l'élongation initiale.

Lorsque le front parvient à l'extrémité fixée, l'élastique est totalement relâché et se déplace à la vitesse V en direction de la fixation. Tout se passe alors comme si nous avions lancé un élastique au repos contre la table de manipulation à la vitesse V . Le front de compression déclenchant le flambage dynamique (Fig. 3(b)) est donc dû à l'impact de l'élastique relâché contre la fixation.

4 Modèle Théorique

4.1 Equations du flambage dynamique

Nous assimilons l'élastique à une barre de longueur au repos l_0 , de largeur b et d'épaisseur h avec $h < b \ll l_0$. Nous considérons la section bh constante le long de la barre et négligeons les variations de

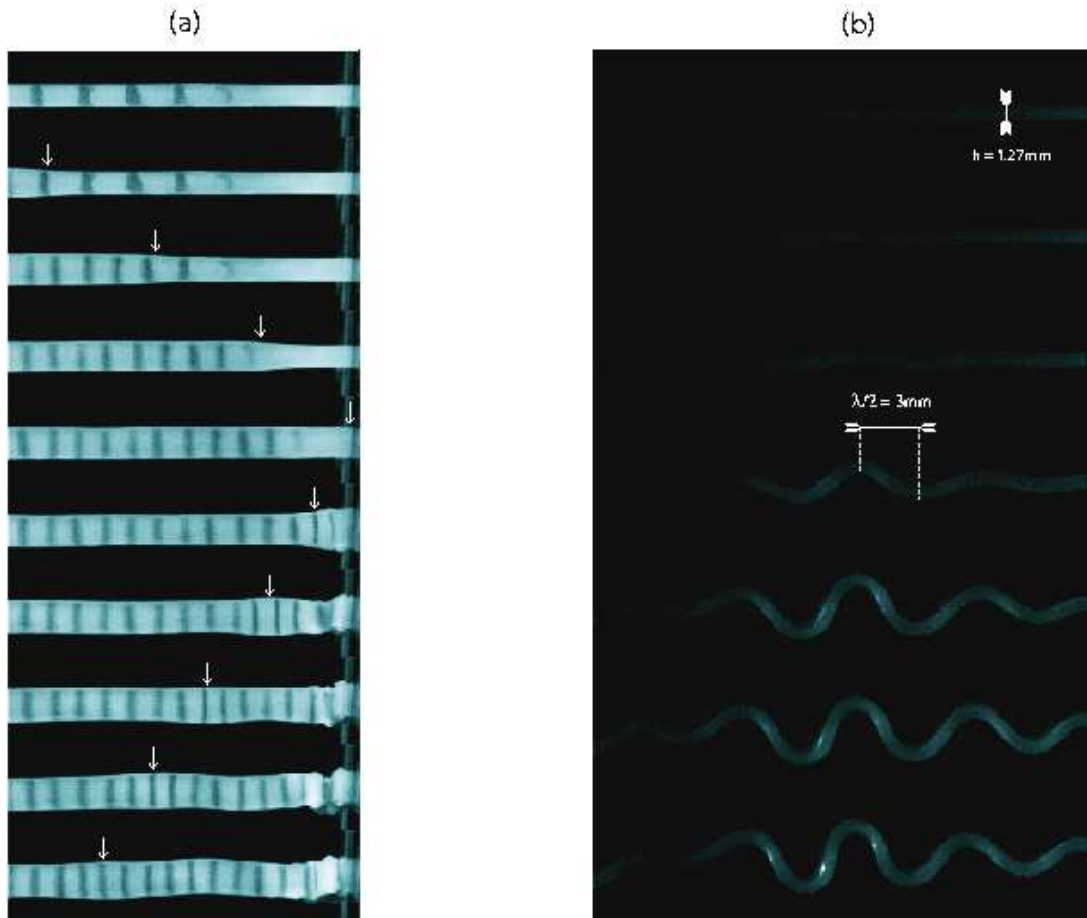


Fig.2. (a) Propagation du front de détente et réflexion du front à la fixation provoquant le flambage dynamique. La flèche blanche suit l'évolution du front. La longueur d'élastique dans le champ est d'environ 5 cm, la largeur de celui-ci est de 4 mm. L'élastique est filmé de côté à la vitesse de 20 000 images par seconde, deux photos consécutives sont ici séparées par $250 \mu s$. (b) Flambage dynamique d'un élastique lâché par ses deux extrémités simultanément. Cette expérience a été effectuée dans le but de montrer que les conditions aux limites introduites par l'extrémité fixée n'avaient pas d'influence sur les résultats. L'élastique est filmé sous sa tranche avec une vitesse d'acquisition de 32 000 images par seconde, deux photos consécutives sont ici séparées de $160 \mu s$.

section durant le mouvement. Etant donné la section rectangulaire, nous étudions une flexion dans un plan orthogonal à la direction transverse (largeur) de la barre.

L'équation de flexion pour une barre soumise à une force de compression T est alors :

$$\rho_0 b h \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

où ξ est le déplacement transverse (direction de l'épaisseur) de la barre, x la coordonnée longitudinale et $I = bh^3/12$ le moment d'inertie d'une section de la barre pour la flexion dans le plan considéré.

En recherchant des solutions en ondes planes $\xi \sim e^{ikx - i\omega t}$, nous obtenons la relation de dispersion du flambage dynamique :

$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho b h} \left\{ k^4 - \frac{T}{EI} k^2 \right\} \quad (2)$$

On observe alors qu'il existe une plage de nombres d'onde instables :

$$\omega^2 \leq 0, \text{ pour } 0 \leq k \leq k_c, \text{ où } k_c = \sqrt{\frac{T}{EI}} \quad (3)$$

Et on détermine la longueur d'onde la plus amplifiée linéairement :

$$\lambda_m = 2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{EI}{T}} \quad (4)$$

4.2 Etude cinématique de la détente d'un élastique

Lors des expériences, nous étirons un élastique jusqu'à une certaine longueur $l > l_0$, ce qui correspond à une élongation ϵ telle que :

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (5)$$

Nous relâchons alors subitement l'élastique, dans lequel se propage par conséquent un front de détente qui voyage à la vitesse du son dans le matériau $c = (E/\rho)^{1/2}$. Ce front marque une séparation dans le milieu : derrière le front, la partie de l'élastique désormais complètement relâchée entraînée à la vitesse V , devant le front, la partie de l'élastique toujours tendue avec la même élongation ϵ . Cette vitesse des points matériels n'est pas prédite par l'élasticité linéaire, cependant nous pouvons trouver son expression à l'aide d'un raisonnement géométrique.

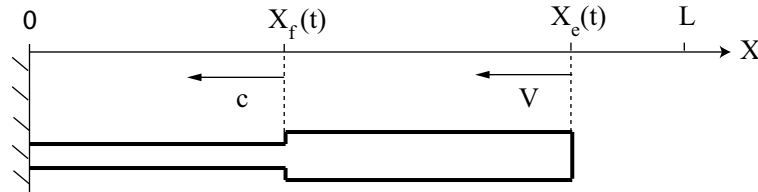


Fig.3. Etude cinématique de la détente d'un élastique. X_f repère la position du front se propageant à la vitesse c et X_e la position de l'extrémité libre se déplaçant à la vitesse V .

En utilisant les notations de la figure 4.2 et en considérant que la longueur $X_e - X_f$ est la longueur $l - X_f$ ramenée à élongation nulle, on obtient facilement que

$$X_e(t) = l - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}ct$$

Ainsi, cet argument géométrique simple nous permet d'obtenir l'expression de V :

$$V = c \left\{ \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \right\} \quad (6)$$

4.3 Modélisation de l'impact

Lorsque le front atteint l'extrémité fixée de l'élastique, nous considérons que le problème devient équivalent à celui de l'impact axial d'un élastique totalement relâché sur une surface infiniment rigide. Il suffit alors de résoudre le problème de Saint Venant [3] associé pour obtenir l'expression de la force de compression agissant dans la barre suite à l'impact :

$$T = Ebh\left(\frac{V}{c}\right) \exp\left(-\frac{ct + x - l_0}{ml_0}\right) \quad (7)$$

où m est le rapport de masse entre objet impactant et objet impacté. Ici, la table n'ayant pas de quantité de mouvement et n'étant pas déformable, la seule masse intervenant est celle de l'élastique, on a donc $m = 1$. De plus, dans nos conditions d'expérience, nous observons une zone proche de l'extrémité impactée donc $x \simeq l_0$, et les échelles de temps sont telles que $ct \ll l_0$. Ainsi, dans une bonne approximation, nous pouvons considérer que la force de compression agissant dans l'élastique a l'expression suivante :

$$T = Ebh\left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right) \quad (8)$$

4.4 Préviation du modèle

En remplaçant dans (4) l'expression de T obtenue en (8), nous trouvons l'expression théorique de la longueur d'onde la plus amplifiée :

$$\lambda_m = \frac{\pi h \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \quad (9)$$

On s'attend donc à ce que la longueur d'onde instable dépende de l'épaisseur h de l'élastique et de l'élongation initiale ϵ .

5 Résultats Expérimentaux

5.1 Mesure des vitesses

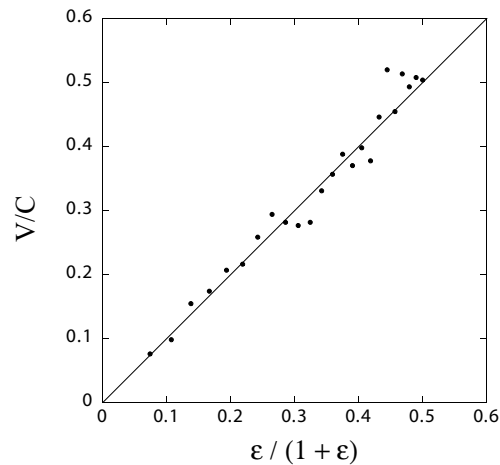


Fig.4. Rapport V/c en fonction de $\epsilon/(1+\epsilon)$. Les points représentent les données expérimentales, la ligne continue est la courbe théorique sans paramètre ajusté.

La figure 5.1 montre les résultats expérimentaux pour les mesures de vitesse. On observe que la prédiction théorique est très satisfaisante, la représentation discontinue du front est donc pertinente.

5.2 Mesure de la longueur d'onde instable

La figure 5(a) montre les mesures de longueur d'onde en fonction de l'épaisseur. La dépendance linéaire de la longueur d'onde en fonction de l'épaisseur semble donc être vérifiée.

La figure 5(b) montre les mesures de longueur d'onde en fonction de l'élongation. On observe que pour les faibles élongations (dans nos expériences pour $\epsilon < 0.6$) la prédiction théorique est réaliste. Les écarts

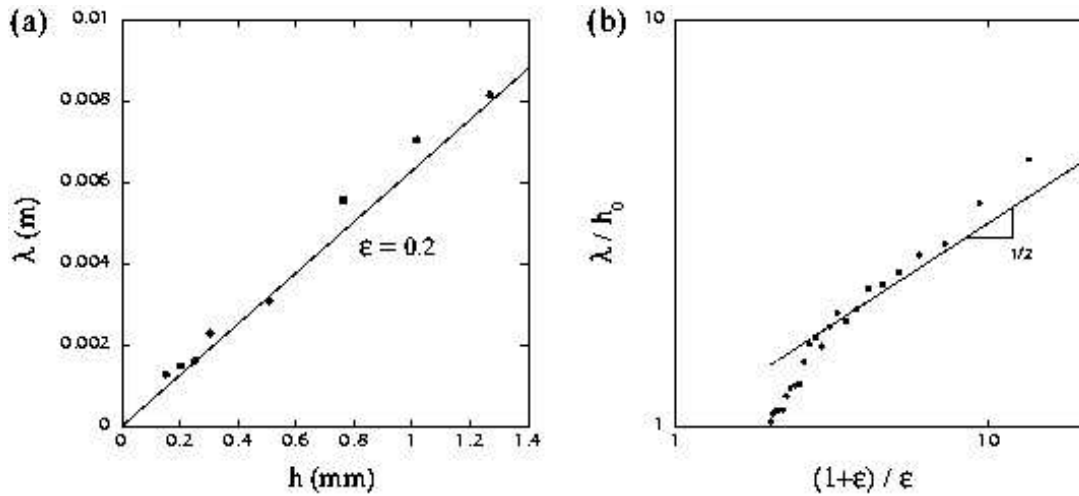


Fig.5. (a) Longueur d'onde en fonction de l'épaisseur pour une élongation $\epsilon = 0.2$. Les points représentent les données expérimentales, la ligne est la courbe théorique sans paramètre ajusté. (b) Longueur d'onde normalisée par $h_0 = \sqrt{2/3\pi}h$ en fonction de $(1+\epsilon)/\epsilon$ en représentation log-log. Les points représentent les données expérimentales et la ligne est la courbe théorique sans paramètre ajusté.

observés pour les très faibles ϵ peuvent s'expliquer par le fait que l'erreur commise sur l'élongation devient plus grande pour les faibles ϵ . Pour les fortes élongations, les longueurs d'onde mesurées sont plus faibles que celles prévues par le modèle. Nous pouvons expliquer cela par le fait que la longueur d'onde devient alors de l'ordre de l'épaisseur de l'élastique et de ce fait, le modèle de barre devient moins pertinent. De plus, aux fortes élongations, la vitesse V des points matériels est plus importante, ce qui a pour effet de perturber la dynamique du flambage : le déplacement longitudinal d'ensemble de l'élastique pendant le temps de croissance caractéristique de l'instabilité n'est alors plus négligeable devant la longueur d'onde. Ainsi l'élastique commence à se replier sur lui même dès l'apparition de la première longueur d'onde instable.

6 Conclusion

Les résultats obtenus et les nombreux films réalisés nous ont permis d'obtenir une description détaillée de la dynamique de l'élastique, ainsi qu'une idée précise des phénomènes menant à l'instabilité de flambage dynamique dans le cas général d'une barre soumise à un impact axial. Le modèle proposé semble robuste eu égard au fait que ses prédictions sont valables même pour des élongations relativement éloignées du domaine de l'élasticité linéaire ($\epsilon \simeq 0.6$). De plus, les limitations observées apparaissent pour des élongations plus fortes que celles appliquées dans le cas de la fragmentation d'objets plus rigides que les caoutchoucs. Enfin, le problème du flambage dynamique lorsque la longueur d'onde instable devient de l'ordre de l'épaisseur de la barre reste ouvert.

Références

1. J. R. GLADDEN, N. Z. HANDZY, A. BELMONTE & E. VILLERMAUX, Dynamic buckling and fragmentation in brittle rods, *Physical Review Letters*, **94**, 035503 (2005).
2. J. W. S RAYLEIGH, *Theory of Sound*, (1877).
3. SAINT-VENANT, *Journal de mathématiques* (Liouville), Sér. 2, **12**, (1867).

Dynamiques mécano-chimiques des gels actifs

S. Villain¹, S. Méstens¹ & P. Borckmans²

¹ Matière et Systèmes Complexes, Université Paris 7, 2 place Jussieu, CC 7020, 75251 Paris Cedex 05 France

² Service de Chimie-Physique, ULB, CP 231, Bd du Triomphe, 1050 Bruxelles, Belgique

svillain@ccr.jussieu.fr

Résumé. Nous proposons un modèle pour décrire l'influence d'une réaction chimique autocatalytique oscillante sur les variations de volume d'un hydrogel.

Abstract. We propose a model describing the influence of an autocatalytic oscillating chemical reaction on the volume variations of an hydrogel.

1 Introduction

Les hydrogels consistent en une matrice réticulée de polymère retenant une quantité variable de fluide pur ou d'un mélange qui détermine son volume. Il a été démontré que ces gels présentent une transition de phase de gonflement-dégonflement en réponse à une grande variété de stimuli physiques ou chimiques. Ce sont les derniers que nous considérons dans le cadre de cette étude. Pour ces raisons les gels ont trouvé des applications potentielles dans divers domaines [1].

La réponse à un tel stimulus consiste en un déplacement de l'état d'équilibre. Dans de tels systèmes sensibles conventionnels, une tâche répétitive, par exemple l'ouverture périodique d'une soupape, nécessite la programmation d'incitations programmées permettant des commutations successives entre deux états d'équilibre donnés. L'expérience a récemment montré que la mise en oeuvre de réactions chimiques autocatalytiques dont les concentrations oscillent périodiquement dans le temps [2] permettent d'asservir le gel pour réaliser ce type de tâches en fonctionnant loin de l'équilibre thermodynamique [3,4,5,6]. Inspirés par ces expériences nous avons construit un modèle cherchant à les décrire.

2 Théorie

Il existe de nombreux modèles de transport dans les gels [7,8,9,10,11,12]. Le système étudié possède plusieurs constituants : matrice polymérique, solvant, espèces réactives contenues dans le solvant. Une approche multidiffusionnelle, complétée par la contribution de sources dues aux réactions chimiques, semble être l'extension la plus naturelle des équations de réaction-diffusion utilisées pour décrire les phénomènes spatio-temporels dans des réacteurs où les gels sont inertes vis-à-vis des réactions chimiques [13]. On procède donc en généralisant "la théorie hydrodynamique des gels" à N composants [8,9]. Sous l'hypothèse d'isothermie, en considérant qu'aucune espèce n'est ionique, que les processus visqueux sont négligeables et en supposant que les fractions volumiques des espèces réactives sont petites devant celle du solvant et de la matrice de polymères, les équations d'évolution sont [14] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_k}{\partial t} = & D_k \Delta c_k + \frac{\Phi_p}{1 - \Phi_p} D_{perm} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{T}}{k_b T \nu_e} \right) \cdot \nabla c_k + D_{perm} \frac{c_k \Phi_p}{1 - \Phi_p} \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{T}}{k_b T \nu_e} \right) \\ & + D_{perm} \frac{c_k}{(1 - \Phi_p)^2} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{T}}{k_b T \nu_e} \right) \cdot \nabla \Phi_p + f_k \{c_i\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{v}(R, t) = D_{perm} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{T}}{k_b T \nu_e} \right) \quad (2)$$

avec c_k la concentration molaire de l'espèce chimique k dans le solvant à l'intérieur du gel, Φ_p la fraction volumique des polymères, v la vitesse d'un petit élément de volume de gel de position initiale R , D_k le coefficient de diffusion de l'espèce k , D_{perm} le coefficient de perméation de la matrice de polymère, \mathbf{T} le tenseur des contraintes osmotiques, v_1 le volume d'un monomère, k_b la constante de Boltzmann, T la température, $f_k \{c_i\}$ la vitesse de réaction de l'espèce k . La dépendance du coefficient de perméation D_{perm} en Φ_p a été négligée car nous ne traitons que des exemples où les variations de Φ_p sont faibles. L'équation (1) a été reformulée en terme des concentrations molaires c_k plutôt qu'en fonction des fractions volumiques Φ_k .

L'expression du tenseur des contraintes osmotiques se calcule à partir de l'énergie libre du système, elle est composée de deux termes. Le premier dit de mélange tient compte des effets enthalpiques et entropiques, décrits par la théorie de Flory-Huggins. Au vu de nos hypothèses sur les grandeurs relatives des fractions volumiques des composants, le tenseur des contraintes s'écrit [14] :

$$(T_{mix})_\nu^\lambda = \frac{kT}{v_1} (\chi \Phi_p^2 + \Phi_p + \ln(1 - \Phi_p)) \delta_\nu^\lambda \quad (3)$$

avec χ le paramètre de Flory, où nous avons donc négligé des termes du type $\chi_{ik} \Phi_i \Phi_k$, $\chi_{ip} \Phi_i \Phi_p$ dans l'énergie libre de mélange. Afin de traduire l'influence des réactions chimiques sur les propriétés du système nous avons fait l'hypothèse que $\chi = \chi(\{c_k\})$ (voir le paragraphe sur le paramètre de Flory dans [7]). On suppose donc que les variations des concentrations des réactifs par la chimie modifient les caractéristiques du solvant et influent ainsi sur l'interaction entre le solvant et la matrice qui est lui décrit par le paramètre de Flory [15].

Le second terme de l'énergie libre décrit la nature élastique de la matrice de polymère, un modèle de chaînes gaussiennes a été utilisée. La contribution de ce terme au tenseur des contraintes est

$$(T_{elas})_\nu^\lambda = \frac{\Phi_p}{\Phi_p^0} \nu_e kT (F_p^\lambda F_p^\nu - \delta_\nu^\lambda) \quad (4)$$

avec ν_e le nombre de chaînes partielles, c'est à dire le nombre de chaînes de polymères entre jonctions, par unité de volume de référence, et \mathbf{F} le tenseur des gradients de déformation de la matrice polymérique.

3 Couplage avec une réaction chimique oscillante

3.1 Généralités

Les expériences que nous voulons décrire, dans lesquelles une pièce de gel actif est mise en interaction avec une réaction chimique oscillante, viennent selon deux variantes. Dans la première [3,4] on utilise une réaction de type Landölt [2] qui se déroule à la fois dans le gel et dans la solution dans laquelle il baigne. Les variations de volume demeurent faibles car le temps caractéristique de l'oscillation chimique est beaucoup plus petit que celui du gel. Donc au cours d'une partie de la période d'oscillation la chimie contraint le gel à gonfler alors que dans l'autre partie elle le force à se dégonfler. La chimie "rappelle" donc le gel trop rapidement. Dans une variante de cette réaction qui présente une période plus longue, et en utilisant un gel plus adéquat, on obtient des taux de gonflement plus important [5]. Dans le second type d'expérience [6] le gel baigne dans l'ensemble des réactifs de la réaction de Belousov-Zhabotinsky [2] excepté le catalyseur d'oxydo-réduction qui a été greffé sur la matrice polymérique. L'oscillation chimique ne peut plus alors que se produire qu'au sein du gel. Il s'ensuit également une oscillation de gonflement-dégonflement qui est en général associée à la propagation d'une onde chimio-mécanique. Les deux expériences diffèrent donc essentiellement par les contraintes aux bords du gel. Notons que selon [16] les effets ioniques sont faibles dans ces expériences.

3.2 La cinétique chimique : le modèle de Poincaré

Lorsqu'un système chimique possède une cinétique qui lui permet d'osciller dans un réacteur ouvert bien agité, la théorie et les simulations numériques montrent que les concentrations des réactifs présentent

dans un gel inerte des ondes stationnaires ou progressives parfois complexes. En effet ce sont les solutions d'un système réaction-diffusion avec conditions aux bords. Peu d'expériences ont été réalisées à ce jour avec des gels inertes [18].

Afin de bien contrôler notre système pour analyser les deux types d'expériences décrites ci-dessus, nous avons, dans une première approche, utilisé un cinétique modèle, le système $\lambda - \omega$, qui n'est rien d'autre que l'oscillateur de Poincaré. Dans ce cas l'oscillation locale est un *cercle* limite dans l'espace des phases parcouru à vitesse constante, résultant d'une bifurcation de Hopf supercritique. Les termes de source de ce modèle sont donnés par :

$$f_X(X, Y) = \Gamma X - \omega Y - \alpha X(X^2 + Y^2) + \beta Y(X^2 + Y^2) \quad (5)$$

$$f_Y(X, Y) = \Gamma Y + \omega X - \alpha Y(X^2 + Y^2) + \beta X(X^2 + Y^2) \quad (6)$$

où X et Y représentent des écarts par rapport à des concentrations de référence. Pour caractériser l'influence des réactions nous supposons que le paramètre de Flory est seulement une fonction de la concentration X . Nous avons choisi la même dépendance fonctionnelle que dans [17]. Nous prenons aussi les coefficients de diffusion des espèces X et Y égaux ainsi que des valeurs de paramètres adéquats [21].

3.3 Concentration extérieure variable

Comme le milieu extérieur au gel est considéré de volume plus grand que celui de ce dernier et bien agité (à ce sujet voir la remarque dans [9]) les concentrations y évoluent, en régime, sur le cycle limite. La concentration à la frontière du gel, que nous prenons de forme sphérique suit celle imposée par le bain. Nous avons utilisé des valeurs des paramètres telles que dans le gel la concentration oscille de manière uniforme. Fig. 1 et Fig. 2 montrent la variation périodique du rayon de la sphère, la concentration de X au centre de la sphère, ainsi que l'évolution du profil spatial de la fraction volumique du polymère au cours d'une période d'oscillation. Nous avons, pour des raisons de clarté, présenté les résultats pour le gonflement et le dégonflement sur des graphiques séparés. On constate que même pour ce cas simple l'évolution de Φ_p est complexe, et est très inhomogène près du bord.

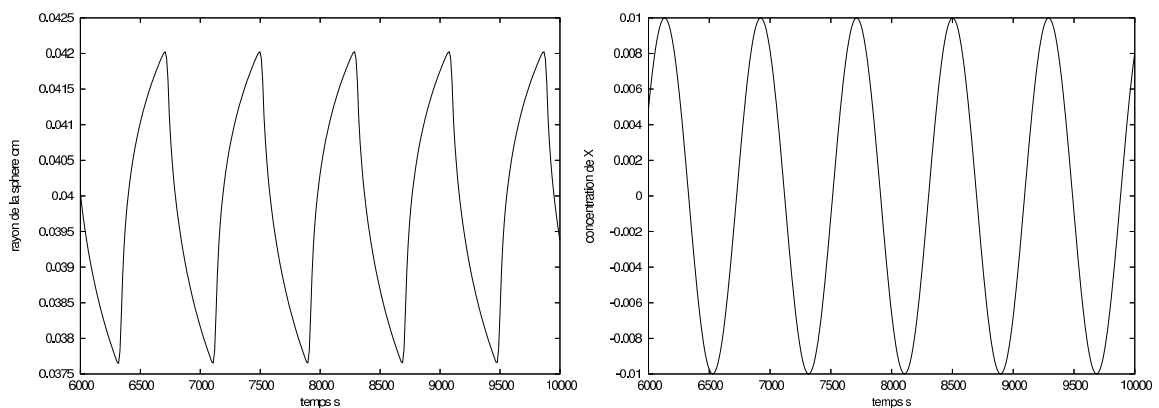


Fig.1. à gauche : évolution temporelle du rayon de la sphère de gel. A droite : évolution temporelle de la concentration de X au centre de la sphère.

3.4 Concentration extérieure stationnaire

Dans ce cas les concentrations au bord du gel sont maintenues constantes aux valeurs imposées par l'alimentation du système. Les paramètres sont choisis pour que les profils de concentration des espèces

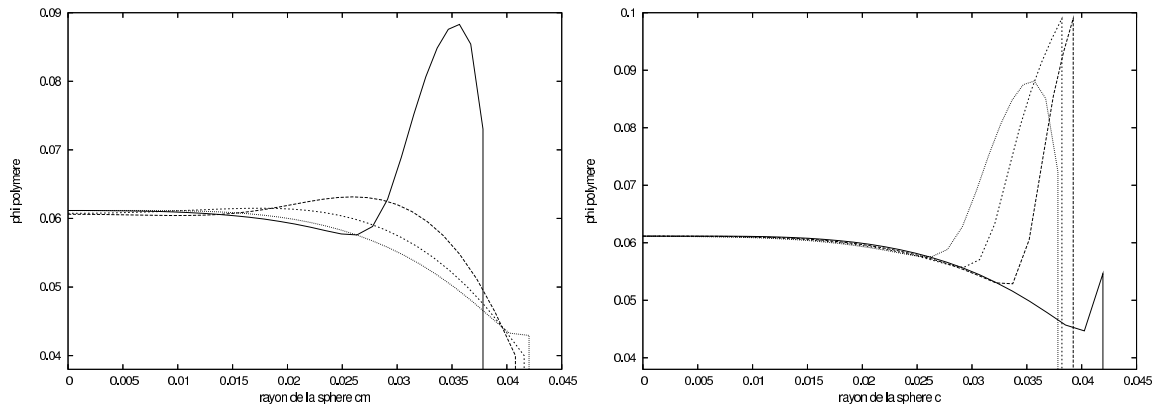


Fig.2. Evolution temporelle de Φ_p durant le gonflement (à gauche) et le dégonflement (à droite).

réactives soient des ondes stationnaires. Fig. 3 et Fig. 4 présentent les résultats comme dans le premier cas.

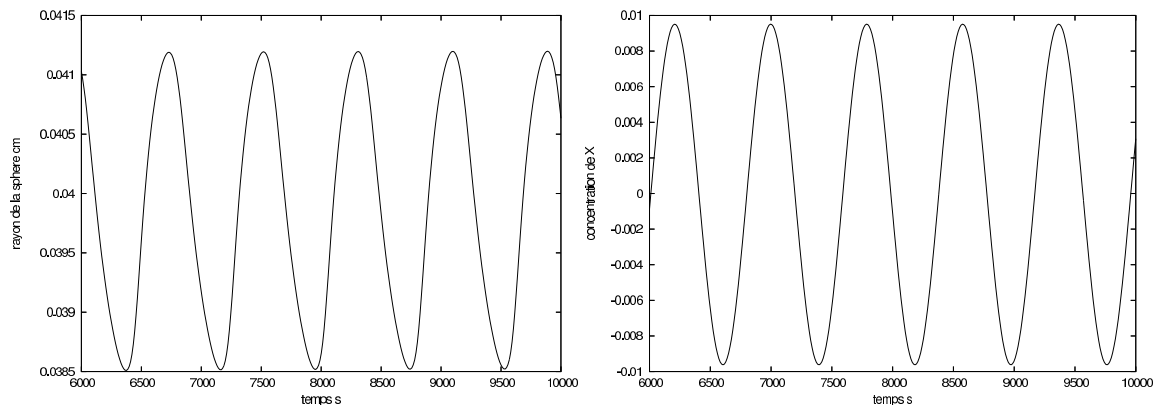


Fig.3. à gauche : évolution temporelle du rayon de la sphère de gel. A droite : évolution temporelle de la concentration de X au centre de la sphère.

4 Conclusion

Nous avons montré que ce modèle permet de retrouver les oscillations de gonflement-dégonflement sous l'effet d'une réaction chimique oscillante observées dans plusieurs expériences. Le couplage dote bien le gel de certaines propriétés d'autonomie qui peuvent être contrôlées par les concentrations d'alimentation du bain.

Des résultats préliminaires montrent que les ondes mécano-chimiques sont observées lorsque la cinétique chimique possède deux temps caractéristiques, comme c'est le cas dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky.

Dans les deux cas considérés les résultats montrent que le gel est asservi à la chimie, principalement à cause de la différence entre les temps caractéristiques.

Nous avons aussi montré que l'application de notre modèle permet de retrouver des résultats obtenus grâce à une autre méthode (Maxwell-Stefan) lorsque le volume d'une pièce de gel se met à osciller parce

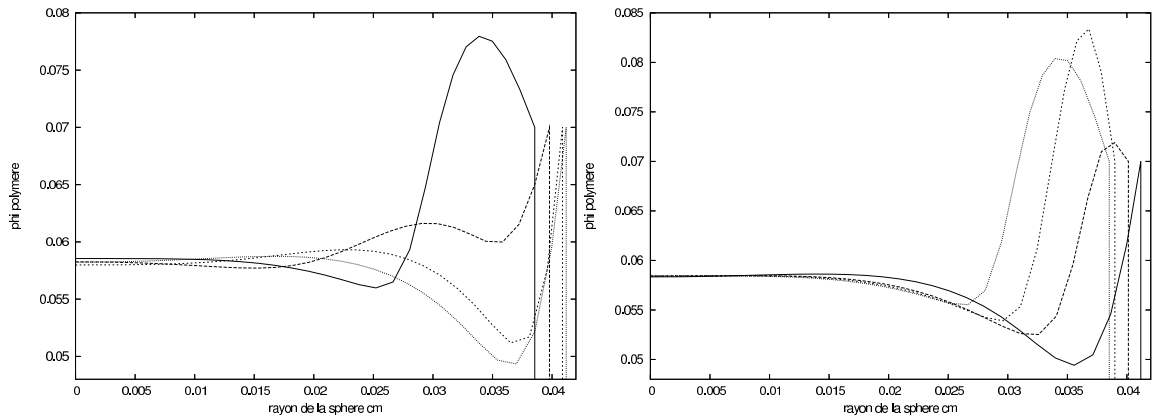


Fig.4. Evolution temporelle de Φ_p durant le gonflement (à gauche) et le dégonflement (à droite).

qu'il est plongé dans une solution réactive qui présente le phénomène de bistabilité spatiale [13,19], réaction qui dans un gel inerte ne présente pas d'oscillations. Nous sommes ici en présence d'une propriété émergente (l'oscillation) qui n'existe dans aucun des deux sous-systèmes mis en compétition. Des expériences sont actuellement en cours pour tenter de mettre en évidence cette propriété [20].

Remerciements : P.B. remercie le F.N.R.S. (Belgique) pour son soutien.

Références

1. K. DUSEK, *Responsive Gels : Volume Transitions, Adv. Polymer Sci.*, **109 & 110**, Springer, Berlin (1993).
2. I.R. EPSTEIN, J.A. POJMAN, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics*, Oxford University Press, Oxford (1998).
3. R. YOSHIDA et al., *Macromol. Rapid. Commun.*, **16**, 305 (1995).
4. R. YOSHIDA, T. YAMAGUSHI, H. ICHIJO, *Material Science and Eng.*, **4**, 107 (1996).
5. C. CROOK et al., *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **4**, 1367 (2002).
6. R. YOSHIDA, E. KOKUFUTA, T. YAMAGUSHI, *Chaos*, **9**, 260 (1999); K. MIYAKAWA et al. *Phys. Rev. E* **62**, 793 (2000).
7. S. WU, *Macromol. Theory Simul.* **13**, 13 (2004).
8. K. SEKIMOTO, *J. Phys. II (Fr)*, **1**, 19 (1991); *ibid* **2**, 1755 (1992).
9. K. YOSHIMURA, K. SEKIMOTO, *J. Chem. Phys.*, **101**, 4407 (1994).
10. T. TOMARI, M. DOI, *Macromolecules*, **28**, 8334 (1995).
11. M. BISCHOPS et al., *Ind. Eng. Chem. Res.*, **37**, 3312 (1998).
12. E. C. ACHILLEOS, K. N. CHRISTODOULOU, I. G. KEVREKIDIS, *Comput. Theor. Polym. Sci.*, **1**, 63 (2001).
13. P. BORCKMANS et al., *Int. J. Bif. and Chaos*, **12**, 2307 (2002).
14. S. VILLAIN, S. MÉTENS, P. BORCKMANS, *J. Mech. Beh. Mater.* en préparation.
15. P. BORCKMANS et al., *Nonlinear Dynamics Polymer Systems*, J.A. Pojman, Q. Tran-Cong-Miyata, ACS Symposium Series **869**, 58 (2004).
16. S. SASAKI, S. KOGA, R. YOSHIDA, T. YAMAGUCHI, *Langmuir*, **19**, 5595 (2003).
17. J. BOISSONADE, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 188302 (2003); *Chaos*, **15**, 023703 (2005).
18. K. YOSHIKAWA, R. AIHARA, K. AGLADZE, *J. Phys. Chem., A* **102**, 7649 (1998).
19. K. BENYAICH, ERNEUX T., MÉTENS S., VILLAIN S., BORCKMANS P., *Chaos* en préparation.
20. V. LABROT, P. DE KEPPER, J. BOISSONADE, I. SZALAI, F. GAUFFRE, *J. Phys. Chem., B* **109**, 21476 (2005).
21. $\alpha = 3000$, $\beta = 0$, $\Gamma = 0.3$, $\omega = 0.1/4\pi$.

Des circuits et des gènes

A. Wagemakers¹, J. M. Buldú¹, J. García-Ojalvo² & M. A.F. Sanjuán¹

¹ Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos

Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza, Universidad Rey Juan Carlos, Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid, Espagne.

² Departament de Física i Enginyeria Nuclear, Universitat Politècnica de Catalunya, Colom 11, 08222 Terrassa, Espagne.

alexandre.wagemakers@urjc.es

Résumé. Nous proposons deux modèles de circuit électronique destiné à simuler la dynamique de réseaux de régulation génétique. Plus particulièrement nous présentons deux circuits reproduisant le comportement de deux réseaux génétiques artificiels dénommés le « repressilator » et le « toggle-switch ». Il s'agit d'un réseau oscillant et d'un interrupteur bistable respectivement. Nous proposons un couplage de plusieurs repressilators afin d'observer l'oscillation cohérente de la population. Grâce au parallèle établi entre les réseaux génétiques et ces circuits électroniques nous montrons que ceux-ci sont utiles pour l'étude de la dynamique et pour la création de nouveaux réseaux génétiques.

Abstract. We propose two models of electronic circuits intended to simulate the dynamics of genetic regulation networks. In particular, we present two circuits reproducing the behavior of two artificial genetic networks called the “repressilator” and the “toggle-switch”. One of them is an oscillating genetic network and the other one is a bistable switch. We propose a coupling of several repressilators in order to observe the coherent oscillation of the population. Based on the analogy established between the genetic networks and these electronic circuits, we show that those are useful for the study of its dynamics and the creation of new genetic networks.

1 Introduction

Les progrès de la biologie moléculaire et de la génétique ont ouvert de nouveaux horizons et ont soulevé de nombreuses questions sur le fonctionnement des réseaux de régulation génétiques. Après le séquençement entier du génome humain démarre une nouvelle étape avec la compréhension de l'information collecté par les biologistes. Ainsi en 2000 deux équipes de chercheurs [1,3,4] présentèrent deux réseaux génétiques conçus artificiellement à partir de briques de bases, le « repressilator » et le « toggle-switch », et les ont implémenté dans la bactérie *E. coli*. Cette nouvelle discipline, la biologie synthétique, propose d'étudier les réseaux de régulation génétique en construisant des fonctions basiques comme, entre autres, des oscillateurs (le « repressilator ») ou des commutateurs (le « toggle switch »). Mais les exemples de possibles fonctions logiques sont nombreux et peuvent être étudiées théoriquement à l'aide de modèles informatiques [5,6].

Nous présentons ici une nouvelle approche basé sur des circuits électroniques analogiques pour la simulation de tels réseaux de régulation génétique. A l'aide de composants discrets nous simulons la dynamique des deux réseaux précédemment cités et nous étendons la méthode à un ensemble de repressilators couplés de façons globale suivant un modèle proposé par García-Ojalvo *et al.* [2]. Un circuit électronique hybride analogue-digital a été proposé pour la simulation de l'évolution et la sélection de réseaux de régulation négative similaire au répressilator [5]. Néanmoins le modèle décrit ne reproduit pas fidèlement la dynamique mais représente les états du système en forme binaire. Notre approche consiste à reproduire a l'aide de composants MOSFET et de composants analogiques l'évolution des équations différentielles modélisant les réseaux génétiques. Nous avons trouvé des similarités étonnante entre la dynamique des circuits implémentés et la dynamique des systèmes biochimique [8,9]. Le premier circuit proposé est l'équivalent d'un oscillateur génétique composé de trois gènes inter-connecté de façon circulaire lequel présente un variation périodique du niveau des trois protéines. Nous accouplons un ensemble

de ces circuits entre de manière globale et nous étudions les comportements en fonction de la force de l'accouplement. Le deuxième circuit proposé est l'équivalent d'un interrupteur bistable composé de deux gènes. L'état du commutateur est changé par une impulsion brève. La dynamique dans ce cas est décrite très simplement à partir de l'espace des phases et de deux équations différentielles.

2 Le repressilator

Le repressilator [1] est une chaîne de trois gènes represseurs dans lequel chaque represseur empêche l'expression du gène suivant et produisant de cette manière des oscillations autonomes. Dans la Fig. 1 nous représentons de forme schématique les interactions génétiques, les flèches représentent les promoteurs et les rectangles verts les gènes. Chaque represseur produit une protéine s'associant au promoteur suivant et stoppe la production de la protéine correspondante. Ceci mène à une oscillation de l'expression des protéines avec un déphasage de $2\pi/3$. Le repressilator original présente une période d'oscillation inférieure au cycle cellulaire des bactéries. Les oscillations de chaque bactérie deviennent vite indépendantes et décorréliées, le bruit des processus génétiques et le cycle cellulaire désynchronise rapidement les oscillations. Un mécanisme de communication intercellulaire a été proposé et testé numériquement [2] afin de synchroniser les oscillations de chaque bactérie.

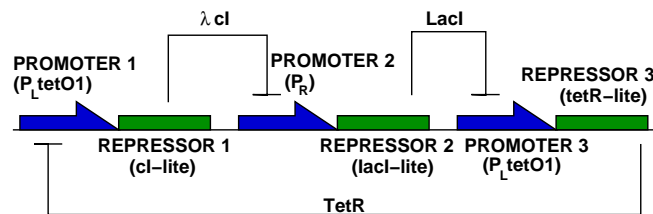


Fig.1. Schéma de l'oscillateur génétique, les flèches représentent les promoteurs des gènes (en vert).

3 Le repressilator électronique

Nous proposons un circuit électronique reproduisant la dynamique du repressilator au moyen de composants discrets (MOSFETS, résistances et condensateurs). La simplicité de l'implémentation permet d'envisager une intégration à grande échelle en vue de simulation de réseaux plus grandes et plus complexes. Le schéma du circuit est présenté dans la Fig. 2.

La cellule de base est entourée en rouge, elle consiste en un transistor MOSFET canal-N couplé à un circuit RC. Le circuit RC est connecté à l'alimentation V_{cc} . La grille du MOSFET joue un rôle similaire à la zone du promoteur d'un opéron. Les tensions représentent les niveaux des protéines associées à chaque gène. Le fonctionnement du circuit suit la logique du repressilator. Supposons que le condensateur C_2 se charge à travers la résistance R_2 , lorsque la tension V_2 atteint la tension de seuil V_{th} du transistor $T3$ celui-ci commence à conduire et son impédance de sortie est très basse. En conséquence la tension de sortie V_3 chute, dans ce cas la tension V_2 réprime « l'expression » de V_3 . Lorsque V_3 chute et descend sous la tension de seuil V_{th} le transistor T_1 se bloque et la tension V_1 augmente, ce qui à son tour bloque la tension V_2 et le processus se répète de forme circulaire. Les interactions sont similaires au réseau biochimique du repressilator. Les oscillations des trois tensions sont présentées dans la Fig. 2, l'alternance des trois tensions V_1, V_2 et V_3 s'observe très bien. Nous avons un déphasage de $2\pi/3$ entre chaque tension. Quand le transistor T_1 est actif le second est bloqué et le troisième est actif. Ce type d'oscillateur est connu en électronique sous le nom d'oscillateur en anneau (« ring oscillator ») et est présent dans de nombreux dispositifs électroniques. Les équations différentielles modélisant le circuit peuvent s'écrire de

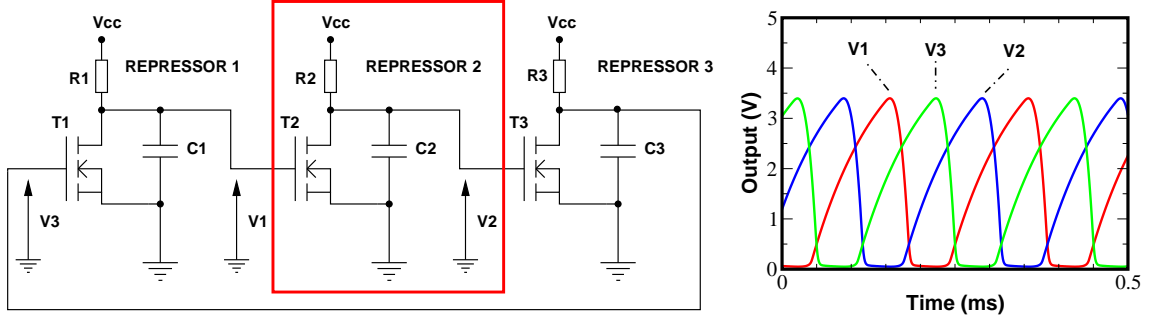


Fig.2. Schéma du circuit électronique simulant la dynamique du repressilator. Les paramètres du circuit sont $C_i = 1\mu\text{F}$, $R_i = 1k\Omega$, $V_{cc} = 3.5\text{V}$ et 2N7000 MOSFET. A droite nous représentons l'évolution temporelle des tensions du circuit.

la forme suivante :

$$R_1 C_1 \frac{dV_1}{dt} = -V_1 + V_{cc} f(V_3) \quad (1)$$

$$R_2 C_2 \frac{dV_2}{dt} = -V_2 + V_{cc} f(V_1) \quad (2)$$

$$R_3 C_3 \frac{dV_3}{dt} = -V_3 + V_{cc} f(V_2). \quad (3)$$

La fonction f est une fonction non-linéaire représentant la fonction de transfert du transistor. Cette fonction sigmoïdale peut s'exprimer :

$$f(x) = \frac{\alpha}{1 + \beta x^n}, \quad (4)$$

avec α , β et n des constantes dépendantes du modèle de MOSFET choisi.

4 La synchronisation des repressilators

Une fois que nous avons simulé expérimentalement un seul repressilator nous nous intéressons maintenant au problème de la synchronisation d'un ensemble d'oscillateurs. Les expériences réalisées en laboratoire ont montré que les oscillations cohérentes sont perdues rapidement, chaque repressilator est déphasé et oscille à une fréquence différente. Un mécanisme de communication inter-cellulaire appelé le quorum-sensing a été proposé afin d'obtenir une synchronisation globale du système [2]. Une molécule est échangé à travers le milieu par les bactéries, c'est l'auto-inducteur. La quantité de molécule commune émise est inversement proportionnelle à une des protéines du repressilator. A son tour cette molécule agit sur le réseau en réprimant un des gènes du repressilator. Ce principe permet un couplage global du système. Dans notre modèle électronique un tel couplage est très simple à réaliser, il s'agit simplement de choisir une des tensions du repressilator et de l'unir aux autres oscillateurs à un point commun via une résistance. Le principe de la synchronisation est décrit dans le panneau droit de la Fig. 3. La contribution de tous les repressilators est sommé et réinjecté dans le circuit. Le panneau gauche de la Fig. 3 résume les résultats obtenus avec 16 repressilators. Les paramètres internes de chaque repressilator ont été légèrement modifié afin d'avoir une distribution des fréquences variant de 10% autour de la moyenne. Le couplage est réalisé à l'aide de la résistance R_c comme indiqué dans le schéma de la Fig. 3. La synchronie du système est mesuré à l'aide d'une mesure de la cohérence R :

$$R = \frac{\langle \overline{V_{1,i}^2} \rangle - \langle \overline{V_{1,i}} \rangle^2}{\langle V_{1,i}^2 \rangle - \langle V_{1,i} \rangle^2}, \quad (5)$$

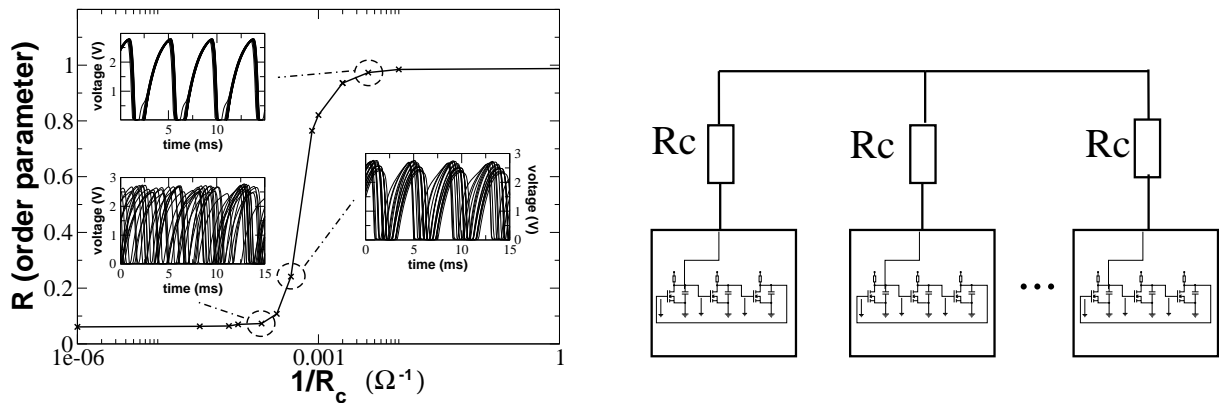


Fig.3. A gauche, paramètre d'ordre R représentant la synchronisation du système de $n = 16$ repressilators en fonction de la résistance de couplage R_c . Le système est complètement synchronisé lorsque $R \sim 1$. Sur le même graphique nous avons représenté les séries temporelles correspondantes à trois valeurs de la résistance R_c . A droite nous présentons un schéma du couplage des circuit.

où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne temporelle et $\overline{\cdot}$ représente la moyenne sur la population de repressilators et $V_{1,i}$ correspond à la première tension du repressilator i . Quand ce paramètre s'approche de 1 la population est synchronisé. Dans la Fig. 3 la synchronisation s'améliore lorsque le paramètre de couplage $1/R_c$ est augmenté (la synchronisation augmente lorsque la résistance diminue). La transition vers la synchronisation se fait brusquement, nous obtenons une transition de phase typique des oscillateurs couplés.

5 Le commutateur génétique

En suivant la même démarche que pour le repressilator, nous obtenons un système bistable similaire au « toggle switch » développé par Gardner *et al.* [3]. C'est un réseau de deux gènes mutuellement represser, le schéma du réseau est décrit dans la Fig. 4. Lorsque l'un des deux represser domine l'autre est réduit au silence.

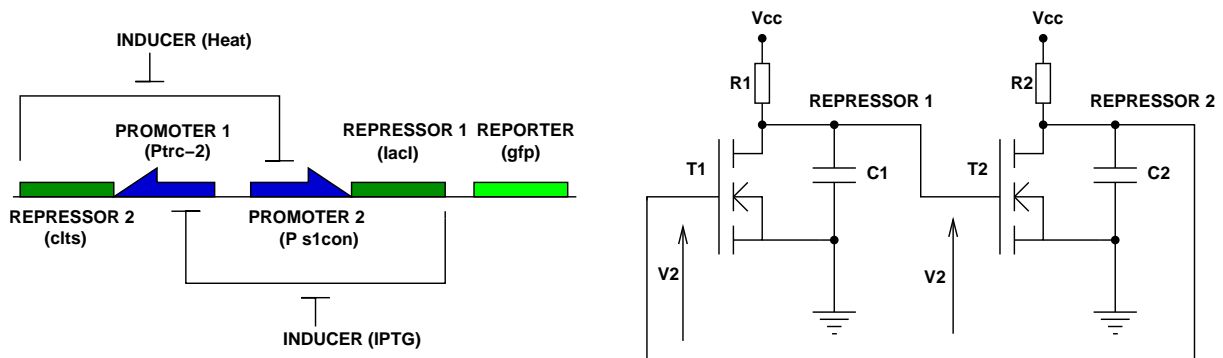


Fig.4. Dans la figure a, nous représentons le schéma logique du toggle-switch publié par Gardner *et al.*. La figure b représente le schéma électronique du toggle-switch conçu avec deux transistors.

L'implémentation électronique est très similaire à la précédente, il s'agit de deux transistors couplés de manière à ce qu'un transistor réprime l'autre. Nous présentons dans la Fig. 4 le réseau génétique accompagné du circuit électronique implémentant ce modèle. L'état du réseau biochimique peut être basculé

en appliquant un changement de température ou un produit chimique agissant sur une des protéines. Pour changer l'état du circuit électronique il suffit de donner une brève impulsion à un des transistor (par exemple en le connectant à la masse) pour que l'autre transistor prenne l'avantage. Les équations différentielles correspondant au circuit de la Fig. 4 sont :

$$R_1 C_1 \frac{dV_1}{dt} = -V_1 + V_{cc} f(V_2) \quad (6)$$

$$R_2 C_2 \frac{dV_2}{dt} = -V_2 + V_{cc} f(V_1) \quad (7)$$

où f est la même fonction que dans l'équation 4. La représentation de l'espace des phases du système se trouve dans la Fig. 5. Il se compose de trois points fixes, deux stables et un instable. Nous traçons aussi la séparatrice démarquant la limite des deux bassins d'attraction. La dynamique lors d'une commutation est identique à une décharge de condensateur, c'est un système du premier ordre.

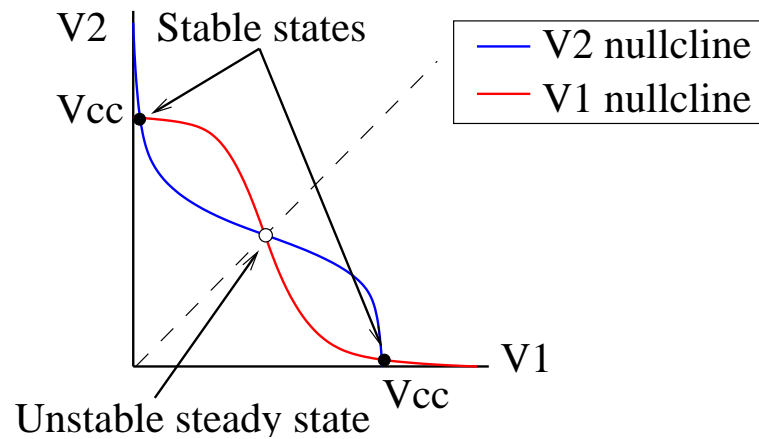


Fig.5. Espace des phases de l'équation (6) et (7), nous observons deux états stable et un état instable, la première diagonale représente la séparatrice des deux bassins d'attraction.

6 Conclusions

Nonobstant leur simplicité, les circuits reproduisent les comportements dynamiques des réseaux de régulation génétiques présentés. La simplicité de ces circuits et leur performance en temps de calcul permet d'envisager des réseaux de plus grande échelle. De plus les circuits électroniques contiennent un bruit intrinsèque et des tolérance sur les composants qui les rapprochent du système biologique originel. L'introduction de delay dans les boucles de retour permettent une simulation plus proche des interactions génétiques dans la cellule.

Remerciements

Nous remercions le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, projet BFM2003-03081(AW et MAFS) et BFM2003-07850(JMB et JGO), et de la Generalitat de Catalunya.

Références

1. M.B. ELOWITZ ET S. LEIBLER, A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators, *Nature*, **403**, 335-338 (2000).

2. J. GARCÍA-OJALVO, M.B. ELOWITZ ET S. STROGATZ, Modeling a synthetic multicellular clock : Repressors coupled by quorum sensing, *Proc. Nac. Acad. Sci. USA*, **101**, 10955-10960 (2004).
3. T.S. GARDNER, C.R. CANTOR ET J.J. COLLINS, Construction of a genetic toggle switch in Escherichia coli, *Nature*, **403**, 339-342 (2000).
4. J. HASTY, D. McMILLEN, ET J.J. COLLINS, Engineered gene circuits, *Nature*, **420**, 224 (2002).
5. J. MASON, P.S. LINSAY, J.J. COLLINS ET L. GLASS, Evolving complex dynamics in electronic models of genetic networks, *Chaos*, **14**, 707-715 (2004).
6. P. FRANÇOIS, (2005), *Réseaux génétiques : conception, modélisation et dynamique*, thèse de doctorat de l'université Paris VII. (2005).
7. P. FRANÇOIS ET V. HAKIM, Design of genetic network with specified functions by evolution *in silico*, *Proc. Nac. Acad. Sci. USA*, **101**, 580-585 (2004).
8. A. WAGEMAKERS , J. M. BULDÚ, J. GARCÍA-OJALVO ET M. A. F. SANJUÁN, Synchronization of electronic genetic networks, *Chaos*, 16(01xxxx), (2006)
9. J. M. BULDÚ, A. WAGEMAKERS, M. A. F. SANJUÁN ET J. GARCÍA-OJALVO, Electronic design of synthetic genetic networks, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 16(xxx) (2006).

Index

- Abcha Nizar, 1, 55
Achour Linda, 213
Adda-Bedia Mokhtar, 7, 37
Aguirre Luis A., 69
Aihara Kazuyuki, 129
Akhmediev Nail, 123
Allain Catherine, 75
Amon Axelle, 13
Antoniazzi Andrea, 19
Athias Pierre, 141
- Bachelard Romain, 19
Barbot Jean-Pierre, 179
Belmonte Andrew, 167
Berhanu Michaël, 25
Berry Hugues, 31
Bilbault Jean-Marie, 141
Billet Cyril, 81
Binczak Stéphane, 141
Borckmans Pierre, 243
Boué Laurent, 37
Boudaoud Arezki, 37
Buldú Javier Martín, 249
- Chandre Cristel, 19
Chevriaux Dominique, 43
Chiffaudel Arnaud, 25
Combarous Michel, 63
Coulibaly Salya, 161
Coulouvrat François, 49
Courbage Maurice, 219
Crumeyrolle Olivier, 1, 55
Cugliandolo Leticia F., 147
Cuvelier Antoine, 213
- Dauchot Olivier, 117
Daviaud François, 25
De Leon J, 179
De Oliveira Dair J., 69
Debussche Arnaud, 111
Degroote Eugène, 61
Delache Alexandre, 63
Delqué Michaël, 87
Delville Jean-Pierre, 135
Doumenc Frédéric, 75
Doveil Fabrice, 185
- Duchamp Jean-Marc, 105
Dudley John M., 81
- Fanelli Duccio, 19
Fanjoux Gil, 87
Fauve Stéphane, 25
Ferrari Philippe, 105
Ferrière Richard, 81
Finot Christophe, 81, 93, 99
Foulon Michel-François, 105
Fournier Danièle, 157
- Ganghoffer Jean-François, 203
García-Ojalvo Jordi, 249
Garreau Jean-Claude, 231
Gautier Eric, 111
Gomes Murilo, 69
Gouillart Emmanuelle, 117
Gracia Pérez Daniel, 31
Grelu Philippe, 123
Guerrier Béatrice, 75
- Haussy Bernard, 203
- Ibarz Borja, 129
Iorio Carlo, 75
Issenmann Bruno, 135
- Jacquir Sabir, 141
- Katzav Eytan, 7, 147
- Labrosse Gérard, 63
Lacourt Pierre, 157
Lacourt Pierre-Ambroise, 81
Laguerre Raphaël, 151
Larger Laurent, 157
Latrache Noureddine, 1, 55
Laurent Gabriel, 141
Le Berre Martine, 161
Lebon Luc, 167
Lebranchu Yannick, 225
Lefranc Marc, 13
Leoncini Xavier, 19
Lepiller Valérie, 173
Letellier Christophe, 69, 197, 213
Lhernault Maryam, 179
Limat Laurent, 167

- Lippens Didier, 105
- Métens Stéphane, 243
Macor Alessandro, 185
Maillotte Hervé, 87
Malasoma Jean-Marc, 191
Manneville Sébastien, 135
Maquet Jean, 197
Marchiano Régis, 49
Marquié Patrick, 209
Mefti Nacim, 203
Michaud Jérémy, 87
Millot Guy, 81, 99
Monchaux Romain, 25
Mordant Nicolas, 25
Morfu Savério, 209
Muir Jean-François, 213
Mutabazi Innocent, 1, 55, 173
- Odier Philippe, 25
Ouarzazi Najib, 63
Ouslimani Achour, 179
- Parmigiani Francesca, 93
Petropoulos Periklis, 93
Pinton Jean-François, 25
Plaut Emmanuel, 225
Poinsot Stéphane, 157
Prigent Arnaud, 173
- Rabarimanantsoa Herinaina, 213
Ravelet Florent, 25
- Ressayre Elisabeth, 161
Richardson David J., 93
Romain Volk, 25
- Sambandam Baskar, 49
Sanjuán Miguel A. F., 129
Sanjuán Miguel A.F., 249
Scheid Benoît, 75
Senneret Marc, 219
Serre Eric, 225
Soto-Crespo José, 123
Sylvestre Thibaut, 87
- Taki Abdelmajid, 161
Tanaka Gouhei, 129
Temam Olivier, 31
Thiffeault Jean-Luc, 117
Thomas Jean-Louis, 49
Thommen Quentin, 231
Tlidi Mustapha, 161
Toussaint Guillaume, 75
- Vandenberghe Nicolas, 237
Vermorel Romain, 237
Villain Sébastien, 243
Villiermaux Emmanuel, 237
Vittot Michel, 19
- Wagemakers Alexandre, 249
Wunenburger Régis, 135
- Zehnlé Véronique, 231